A számfogalom kialakulása - Komplex számok

BSc szakdolgozat

Készítette:
Kusz Emese Tünde
Matematika Bsc szak
Tanári szakirány

Témavezető:
Fialowski Alice
egyetemi docens
Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest
2015

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Máig emlékszem, amikor középiskolásként tudomást szereztem a komplex számok létezéséről. Lenyűgözött a gondolat, hogy vannak számok a valósakon túl is és ezzel együtt hirtelen rengeteg kérdés vetődött fel bennem. Milyenek ezek a számok? Mire használhatók? Miért alakultak ki? Vannak még számhalmazok a komplex számokon túl is? S néhány évvel később, íme, szakdolgozattá értek e kérdésekre a válaszok.

Szakdolgozatom írása során érdekes volt végigkövetni egy új számhalmaz születésének történetét és látni, hogy mára a matematika szinte minden ágában használjuk a komplex számokat. Bár a komplex számok témaköre egyáltalán nem szerepel a középiskolai kerettantervben, mégis úgy vélem, érdeklődő diákoknak ez remek kitekintés lehet az egyetemi szintű matematika irányába.

Szakdolgozatomat a komplex számok kialakulásának rövid történeti bemutatásával kezdem, majd a második fejezetben bevezetem a komplex számokat, és összefoglalom legfontosabb tulajdonságaikat. A harmadik és egyben leghosszabb fejezet a komplex számok néhány szép alkalmazásával foglalkozik, a matematika több területéről szemezgetve, a teljesség igénye nélkül.

A harmadik fejezet első alfejezetében a valós és komplex együtthatós egyenletek valós és komplex gyökeivel foglalkozunk, a második alfejezetben pedig a komplex függvénytan alapjaival ismerkedünk meg. E két témát összeköti az algebra alaptétele, mivel mindkét alfejezetben bemutatásra kerül a tétel egy-egy bizonyítása. A harmadik alfejezet azt a kérdést feszegeti, hogy a valósakról a komplex számok halmazára történő kiterjesztés mintájára, vajon meddig bővíthető tovább a számfogalom. Végül az utolsó alfejezetben a komplex számok geometriai alkalmazásaiba nyerünk némi betekintést, szó esik többek között a kettősviszonyról és a Ptolemaiosz-tétel komplex számokat felhasználó bizonyításáról is.

Rengeteg további felhasználása van még a komplex számoknak, amelyek a hely szűke miatt kimaradni kényszerültek a dolgozatomból. Mivel egyáltalán nem írtam számelméleti alkalmazásokról, ezért legalább említés szintjén, álljon itt erre is néhány példa. A Gauss-egészek olyan komplex számok, amelyeknek valós és képzetes részük is egész szám. Ezek a számok gyűrűt alkotnak és velük az egészekhez hasonló számelmélet építhető fel. Előfordul továbbá, hogy egész számokon értelmezett számelméleti problémák esetében a bizonyítások során komplex számokat használnak fel. Erre egyszerűbb példa a kétnégyzetszám-tétel, amely szerint ha n természetes szám, akkor az $x^2 + y^2 = n$ diofantoszi egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha n prímhatvány-felbontásában minden $4k - 1$ alakú prím páros kitevővel szerepel. Bonyolultabb példa a nagy Fermat-tétel, amely rendkívül hosszú ideig volt csupán sejtés, mivel az első írásban is megörökített bizonyítás csak 1994-ben született meg Andrew Wilesnek köszönhetően. A nagy Fermat-tétel azt mondja ki, hogyha $n > 2$ pozitív egész, akkor az $a^n + b^n = c^n$ diofantoszi egyenletnek nem létezik nemnulla egész megoldása.

Fizikában is lépten-nyomon használják a komplex számokat, például a kvantummechanika alapegyenletei komplex értékű fizikai objektumok, de sokszor dolgoznak komplex számokkal az elektromérnöki gyakorlatban, erre példa a komplex impedanciák, továbbá a hálózat-analízisben is nagy szerephez jutnak ezek a számok.

Szakdolgozatomban az első fejezethez az 1-5. , a második fejezetben az 5-9. és a 11. forrásokat használtam fel. A harmadik fejezet első szakaszában az 5.,7. és 10., a második szakaszban a 11-14., a harmadik szakaszban a 15-16., míg az utolsó szakaszban az 5. forrásból dolgoztam.

A bizonyításokhoz felhasznált források: a 2.2.1. tételhez a 8. forrás, a 3.1.2. állításhoz a 7., a 3.1.1. tételhez a 10., a 3.1.3. és 3.1.4. tételekhez az 5., a 3.2.2. tételhez a 12., a 3.4.1. és a 3.4.5. tételekhez az 5. forrást használtam fel. A 3.2.1. tétel kimondása a 11. forrásból való. A képek saját készítésűek.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Fialowski Alicenak, aki a szakdolgozatom megírása során végig nagy türelemmel, idejét nem sajnálva segített választ találni a felmerülő összes kérdésemre és látott el hasznos tanácsokkal.

Köszönöm továbbá a családomnak és barátaimnak, hogy egyetemi éveim alatt végig mellettem álltak és támogattak.

1. fejezet

Történeti áttekintés

A komplex számok megjelenése, hasonlóan a korábban ismert számfogalmak kiterjesztéséhez, arra vezethető vissza, hogy az inverz műveletek rendszerint szükségessé tették a számkör kibővítését. Például a kivonás művelete miatt kellett a természetes számok halmazát a negatív számokkal kiegészíteni, az osztás művelete miatt az egész számokat racionális számokkal volt szükséges bővíteni, míg a gyökvonás miatt kellett a számfogalmat az egész számokból a valós számokig kiterjeszteni.

A komplex számok kialakulása is a gyökvonás műveletéhez köthető, mivel a négyzetgyökjel alatt ha negatív szám áll, akkor azt az addig ismert számhalmazokon nem tudjuk értelmezni. Ilyen probléma a gyakorlatban akkor vetődött fel először, amikor a reneszánsz kor itáliai matematikusai a magasabb fokú egyenletek megoldásának általános módszerét igyekeztek megtalálni, ugyanis ehhez bizonyos esetekben szükséges lett volna négyzetgyököt vonni negatív számokból.

A komplex számok kialakulásának története jól dokumentált, ám ellentmondásoktól nem mentes. Szakdolgozatom terjedelmének korlátai miatt, a komplex számfogalom fejlődésének csupán a legfőbb lépései közül emelnék ki néhányat, a különös tekintettel a kezdeti időszak eseményeire.

1.1. A kezdetek

A reneszánsz Itáliában, a XVI. század elején, a bolognai matematikusok az általános harmadfokú egyenletek megoldásának általános módszerét keresték.

Scipione del **Ferro** professzor érte el a legelső sikereket az általánosság bizonyos szintű megszorítása mellett, ugyanis mai megfogalmazásban olyan speciális harmadfokú egyenleteket volt képes megoldani, amelyeknek másodfokú tagja hiányzott, és a főegyütthatójuk egy volt. Az általa vizsgált speciális egyenleteket három típusba lehetett osztani: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, illetve $x^3 + q = px$, ahol p és q pozitív számok.

Del Ferro biztosan megtalálta az $x^3 + px = q$ alakú egyenletek pozitív gyökeit előállító formulát, és feltételezhetjük, hogy a másik két típusú egyenletet is képes volt megoldani. Módszerét azonban titokban tartotta, csak nem sokkal halála előtt árulta el azt néhány ismerősének, köztük tanítványának, Fiorenak. Ennek oka az lehetett, hogy a kor matematikusai úgy keresték a kenyerüket, hogy matematikai párbajokra hívták ki egymást, ahol a győztes mindent vitt: pénzjutalmat, hírnevet és ha szerencsés volt, egy gazdag patrónus is felfigyelhetett rá.

Fiore tehát a kor szokásainak megfelelően később párbajra hívott egy Niccolò Fontana nevű **Tartaglia** néven ismert matematikust, aki azt állította, hogy képes megoldani az $x^3 + px^2 = q$ alakú harmadfokú egyenleteket. Mivel Fiore úgy gondolta, hogy Fontata csak blöfföl, ezért úgy hitte, hogy könnyű ellenfél lesz számára.

Tartaglia sejtette, hogy Fiore ismeri Ferro formuláját és ehhez kapcsolódó feladatokat szándékozik neki feladni, ezért igyekezett ő maga is felfedezni a szükséges formulát, amely nem sokkal párbaj előtt sikerült is neki. Ezzel a felfedezéssel, és hogy tényleg képes volt megoldani az $x^3+px^2 = q$ típusú egyenleteket is, Tartaglia legyőzte Fioret. Azonban Tartaglia sem publikálta eredményét.

Gerolamo **Cardano**, amikor értesült arról, hogy Tartaglia ismeri a hiányos harmadfokú egyenletek megoldásának a módszerét, erősen igyekezett meggyőzni őt arról, hogy árulja el neki a titkát. Tartaglia kezdetben nemet mondott, végül azonban engedett Cardanonak. Elárulta a formulát, amelyet Cardano a számítások során felhasználhat, de ezt is csak azzal a feltétellel, hogy meg kellett esküdnie Cardanonak, hogy a módszert titokban fogja tartani. A formula levezetéséről Tartaglia továbbra is hallgatott.

Cardano „Ars Magna...” című könyve

Cardano egészen addig meg is tartotta az ígértét, amíg saját szemével nem látta del Ferro megmaradt papírjaiban, hogy ő korábban fedezte fel a módszert. Ekkor úgy érezte, hogy nem köti őt többé a titoktartás. Cardano újra felfedezte Tartagila megoldásának levezetését, és ezt 1545-ben az „Ars Magna..." című könyvében publikálta is. Ez a Cardano és Tartaglia között heves vitát robbantott ki, annak ellenére, hogy Cardano a könyvében megnevezte Tartagilat és del Ferrot is.

Cardano képlete a következő:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Azonban a könyvében maga Cardano fejti ki, hogy képlete nem működik, ha a $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{p}{3}\right)^3$ feltétel nem teljesül. mivel ekkor számításai során a négyzetgyökjel alá negatív számok kerülnek, amiket az akkori kor matematikai eszközeivel nem volt lehetősége helyesen értelmezni.

Erre az esetre két példát is mutatott:

$$x^3 = 20x + 25 \qquad \text{illetve} \qquad x^3 = 30x + 36.$$

Láthatjuk, hogy ezekre az egyenletekre a fenti feltétel nem teljesül, tehát a gyökjel alá negatív szám kerül, amelyből Cardano úgy vélte, hogy az egyenlet megoldhatatlan, azaz mai megfogalmazásban nem lesz valós gyöke, ami nyilvánvalóan nem igaz, mivel az első esetben az 5, míg a második esetben a 6 biztosan megoldása lesz az egyenletnek.

Cardano imént említett 'Ars Magna..." könyvében nemcsak az algebrai műveletek szabályait és az első-, másod- és harmadfokú egyenletek megoldásait tárgyalja, hanem az algebrai egyenletek általános elméletének elemeit is. Így Cardano az $x = x_1 + h$ helyettesítés segítségével megadta az $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ teljes harmadfokú egyenlet olyan alakra való visszavezetésének módszerét, amelyben az ismeretlen négyzete nem szerepel, és ezt a módszert általánosította a negyedfokú egyenletekre is. A könyvben ezenkívül több tétel is szerepel a gyökök és együtthatók kölcsönös kapcsolatáról, a pozitív és negatív gyökökről és ezek összegéről. Cardano tanítványa, Lodovico **Ferrari** a harmadfokú rezolvensre való visszavezetés útján fedezte fel a negyedfokú egyenletek megoldásának módszerét, amit szintén tartalmaz Cardano imént említett könyve.

1.2. A komplex számok elfogadásának folyamata

Rafael **Bombelli** 1572-ben megjelent „Algebra” című művében kidolgozta a komplex számokkal végzett műveletek szabályait, amelyek közül az egyik alapvető fontosságú mai megfogalmazásban:

$$(\pm i) \cdot (\pm i) = -1 \text{ és } (\pm i) \cdot (\mp i) = 1 \;.$$

E könyvet sokan olvasták, még Euler is hivatkozik rá egy művében. Bombelli könyve nagyban hozzájárult a komplex számok egyre szélesebb körű elismeréséhez, azonban a komplex számok teljes elfogadásáig még évszázadoknak kellett eltelnie, mivel ez csak a XIX. században valósult meg.

Annak ellenére, hogy a komplex számok alapvető fogalmai még sokáig nem teljesen voltak tisztázottak, mégis a felhalmozódott egyre több ismeretanyag a tudósokat arra késztette, hogy a matematika minél több ágában kezdjék el használni ezen számokat. Erre nagyszerű példa, hogy Gottfried Wilhelm **Leibniz** és Johann **Bernoulli** a komplex számokat már felhasználták munkáikban, hogy az integrálásban a lehető legáltalánosabb eredményeket érhessék el, azonban sokáig vitatott kérdés volt kettejük között a negatív és komplex mennyiségek logaritmusai természetének kérdése is.

Feltétlenül meg kell említenünk Leonhard **Euler** kiváló svájci matematikus nevét, a komplex számok területén is nagy hatású felfedezéseket tett.

Euler jutott el először a következő összefüggésekhez:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n, \qquad \ln z = \lim_{n\to\infty} n\left(z^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos nz \pm i \sin nz$$

Valamint felfedezte a trigonometrikus és exponenciális függvények közötti kapcsolatot kifejező formulákat:

$$\cos v = \tfrac{e^{iv}+e^{-iv}}{2} \qquad \sin v = \tfrac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i}$$

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v$$

Euler a komplex változós függvényekkel való deriváláskor és integráláskor az $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ összefüggést feltéve, e függvényekkel úgy számolt, mint valós változós függvénypárokkal.

A komplex számok geometriai reprezentációja

Caspar **Wessel** norvég földmérő, a síkon megadott egyenes szakasz hosszára és irányára keresett analitikus kifejezést. Ehhez a komplex számok $z = x + \sqrt{-1}y = r \cdot (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ alakú kifejezését használta. A koordináta-tengelyeken felvette a $+1$, a -1, a $\varepsilon = \sqrt{-1}$ és a $-\varepsilon$ egységnyi szakaszokat. A számokat a koordináta-rendszer kezdőpontjából induló vektorokkal ábrázolta, ezekre műveleteket definiált, segítségükkel műveletek egész sorát oldotta meg. Ezen felül megmagyarázta a komplex számok lényegét és viszonyát a valós számokhoz, amelyek egy egyenesen ábrázolhatók. Egészen a forgás analitikus kifejezésének megadásáig sikerült eljutnia. Azonban Wessel művét dán nyelven publikálta, emiatt az hosszú ideig észrevétlen maradt.

Szélesebb körben először Jean-Robert **Argand** 1806-ban megjelent munkája vált lassan ismertté, emiatt viseli ez a geometriai reprezentáció az Argand-diagram nevet. Argand módszerének elve megegyezett Wesselével. A képzetes számokat a valós tengelyre merőlegesen felvett szakaszokkal ábrázolta. Argand a $\sqrt{-1}$-et úgy értelmezte, mint egy óramutató irányával ellentétes $90°$-os forgatást.

Carl Friedrich **Gauss** tejesen elfogadta a gondolatot, hogy a komplex számokat a kétdimenziós tér elemeiként ábrázolja. 1831-en publikálta munkáját, amelyben megalapozza a komplex számok elméletét, és ismerteti a geometriai interpretációjukat. Itt találkozunk először a komplex számok mai elnevezésével is. Gauss egy másik fontos eredménye, hogy ő adta meg az algebra alaptételének első precíz bizonyítását.

A komplex számok néhány későbbi felhasználása

Paolo **Ruffini** és Niels Henrik **Abel** bebizonyították a négynél magasabb fokú általános algebrai egyenletek gyökképletekkel való megoldhatatlanságát. Munkájukban Euler és Lagrange ötleteit is felhasználják, akik az egyenletek megoldóképlete és a gyökök permutációi közötti kapcsolatot felfedezték és vizsgálták. Évariste **Galois** tisztázta a polinomok gyökképlettel való megoldhatóságának kérdéskörét azzal, hogy megalkotta a Galois-elméletet.

Augustin Louis **Cauchy** bebizonyította a komplex számok függvénytan legfontosabb tételeit. Georg Friedrich Bernhard **Riemann** a komplex függvénytan és a matematika többi ága, például a topológia közt mély kapcsolatokat tárt fel.

2. fejezet

Komplex számok tulajdonságai

2.1. Bevezetés és szemléltetés

Rendezett valós számpárok

2.1.1. Definíció (Komplex szám). *Tekintsük a $z = (x, y)$ rendezett valós számpárokat. Definiáljuk ezek halmazán az összeadás és a szorzás műveleteket:*

- *az összeadás: $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ és*
- *a szorzás: $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.*

Ekkor a $z = (x, y)$ rendezett valós számpárok a komplex számok, az imént definiált algebrai struktúra pedig a komplex számok teste, amit jelöljünk $\mathbb{C}$-vel.

A rendezett valós számpár első tagját valós résznek nevezzük és $Re(z)$-vel jelöljük, a második tag neve képzetes rész, jelölése $Im(z)$. A $Re(z) = x$ és $Im(z) = 0$ számokat tisztán valós, míg a $Re(z) = 0$ és $Im(z) = y$ számokat tisztán képzetes számoknak nevezzük. Két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik is megegyeznek.

Az összeadás és a szorzás műveletek asszociatívak, kommutatívak, összeköti őket a disztributivitás, továbbá:

- Az összeadás nulleleme a $(0, 0)$ szám, és minden $z = (x, y)$ komplex számhoz létezik olyan $-z = (-x, -y)$ ellentett, hogy $z + (-z) = (-z) + z = (0, 0)$.
- A szorzás egységeleme az $(1, 0)$ szám, és minden (nem nulla) $z = (x, y)$ komplex számhoz létezik olyan $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ inverz elem, hogy

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = (1, 0).$$

Vagyis a komplex számok halmazára teljesülnek a testaxiómák, ezért:

2.1.1. Tétel. *A komplex számok halmaza test.*

A komplex számok algebrai struktúrája a valós számtest feletti kétdimenziós vektortér, amelyen értelmeztük a fentebb bemutatott szorzást is. A komplex számok vektorterének két báziseleme van: az $1 = (1, 0)$ és az $i = (0, 1)$.

Algebrai alak

Számításaink során legtöbbször nem a rendezett valós számpár felírást használjuk, ehelyett egy természetesebb felírással, a $z = x + yi$ alakban szoktuk jelölni a komplex számokat, amit algebrai alaknak nevezünk. Felmerül a kérdés, hogy ez a felírás vajon ekvivalens-e a rendezett számpár alakkal.

Vezessünk be egy olyan f függvényt, amely $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}$-ra képez és teljesülnek rá a komplex számokon értelmezett összeadás és szorzás műveletei:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}, f(x) = (x, 0) .$$

Ez az f függvény bármely valós számhoz annak komplex alakját rendeli hozzá, mivel beláthatjuk, hogy az itt értelmezett műveletek megegyeznek a valós számokon értelmezett összeadás és szorzás műveletekkel. Hogy fel tudjuk írni az $x + yi$ alakot, még szükségünk van az $i = (0, 1)$ számra. Ekkor az összefüggés:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi,$$

amivel beláttuk, hogy a rendezett valós számpár felírás ekvivalens az algebrai alakkal.

Geometriai ábrázolás

A komplex számok ábrázolásának egyszerű, mégis szemléletes módja, ha a rendezett valós számpárok és a sík pontjai között bijekciót képezünk. Így a $z = (x, y)$ komplex szám képe az x abszcisszájú és y ordinátájú pontba mutató helyvektor lesz egy síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben. A komplex számok halmazát az egész sík reprezentálja. Valós tengelynek nevezzük az x tengelyt, képzetes tengelynek pedig az y tengelyt, mivel előbbin találhatók a valós, míg utóbbin a tisztán képzetes számok. Bármely két komplex szám esetében (jelölje őket $z_1 = x_1 + y_1 i$ és $z_2 = x_2 + y_2 i$) jól szemléltethető az összeadás és a kivonás, mivel:

- $z_1+z_2 = (x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i) = (x_1+x_2)+(x_2+y_2)i$, vagyis az összeadás művelete megegyezik a vektorok összeadásával, tehát használhatjuk a paralelogramma-módszert és
- $z_1-z_2 = (x_1+y_1 i)-(x_2+y_2 i) = (x_1-x_2)+(x_2-y_2)i$, vagyis a kivonás művelete megegyezik a vektorok kivonásával, és a számítás eredménye a z_2-ből z_1-be mutató vektor lesz.

Trigonometrikus alak

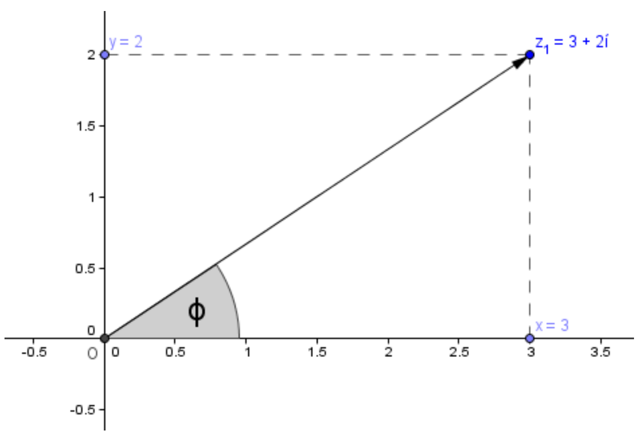
A geometriai ábrázolásból kiindulva eljuthatunk a komplex számok egy másik, igazán hasznos szemléltetéshez, a trigonometrikus alakhoz.

Emlékezzünk, hogy bármely nem nulla helyvektort egyértelműen meghatároz az origótól való távolsága, azaz a vektor hossza és a x-tengely pozitív felétől mért, irányított szöge, azaz az irányszöge.

A $z = x + yi$ komplex szám esetében a helyvektor hossza nem más, mint a komplex norma, amit a következőképpen definiálunk: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. A komplex szám irányszöge ϕ, amit a komplex szám argumentumának nevezünk, és jelölése: $\arg z$.

Az x koordináta értéke az $x = |z|\cos\phi$, az y értéke pedig $y = |z|\sin\phi$ képlettel számolható, emiatt a ϕ értéke 2π-nként periodikus.

2.1.2. Tétel (Trigonometrikus alak). *Bármely nem nulla $z = x + yi$ komplex szám egyértelműen megadható a $z = r\cdot(\cos\phi + i\sin\phi)$ alakban, ahol $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ és $\phi \in [0, 2\pi]$.*



Polárkoordinátás alak

2.1.3. Tétel. *Bármely nem nulla z komplex szám egyértelműen felírható a következő alakban: $z = r \cdot e^{i\theta} = r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$, ahol $r := |z|$ és $\theta \in [0, 2\pi)$.*

2.1.1. Megjegyzés. *Néha célszerű megengednünk, hogy az irányszög értéke tetszőleges valós szám lehessen, ekkor $z = r \cdot e^{i\theta} = s \cdot e^{i\psi}$ pontosan akkor, ha $r = s$ és $\psi = \theta + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbb{Z}$.*

A trigonometrikus és a polárkoordinátás alak között az összefüggést az Euler-képlet teremti meg. Az Euler-képlet egy olyan formula, amely rávilágít egy roppant érdekes összefüggésre: a komplex kitevős hatvány és a trigonometrikus függvények között létezik kapcsolat.

2.1.1. Állítás (Euler-képlet).

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

2.1.2. Állítás (Euler-képlet koszinuszra és szinuszra).

$$\cos z = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \textit{ és } \sin z = \tfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Az Euler-képlet által megfogalmazott $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ összefüggés jól szemléltethető Taylor-sorok felhasználásával.

Írjuk fel az exponenciális függvény, a koszinusz függvény és a szinusz függvények 0 körüli Taylor-sorait:

$$\begin{gathered}
e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!} = 1 + i\tfrac{x}{1!} - \tfrac{x^2}{2!} - i\tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \dots \\
\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \dots \\
\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \dots
\end{gathered}$$

A fenti Taylor-sorokba helyettesítsünk x helyére ix-et, és használjuk a következő összefüggéseket:

$$i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,\ i^{4k+1} = 1, \text{ ahol } k \geq 0 \text{ és } k \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor megmutathatjuk, hogy $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, mivel:

$$\begin{gathered}
e^{ix} = 1 + i\tfrac{x}{1!} - \tfrac{x^2}{2!} - i\tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \dots = \\
\left(1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \dots\right) + \left(i\tfrac{x}{1!} - i\tfrac{x^3}{3!} + i\tfrac{x^5}{5!} - \dots\right) = \\
1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \dots + i\left(x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \dots\right) = \cos x + i\sin x.
\end{gathered}$$

Speciálisan, ha az Euler-képletben $x = \pi$, akkor megkapjuk a híres Euler-összefüggést:

2.1.1. Következmény (Euler-összefüggés).

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Végezzük el a behelyettesítést:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos\pi + i\sin\pi \\ e^{i\pi} &= (-1) + i\cdot 0 \\ e^{i\pi} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

2×2-es mátrix alak

A $z = x + yi$ komplex számok reprezentálhatók 2×2-es mátrixokként is, a következő hozzárendeléssel:

$$x + yi \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \text{ ahol } x \text{ és } y \text{ valós számok.}$$

A komplex számok teste felírható olyan 2×2-es mátrixok halmazaként, ahol

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \text{ ahol } x \text{ és } y \text{ valós számok,} \right\}$$

és az összeadás és a szorzás műveletek megegyeznek a mátrixösszeadással és mátrixszorzással.

2.2. Tulajdonságok

Nem rendezhetőség

2.2.1. Tétel ($\mathbb{C}$ nem rendezhető). *A komplex számok halmaza nem rendezhető.*

2.2.1. Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik a komplex számok halmazán egy $<$ reláció, amelyre teljesül:

1. ha $z \neq 0$ akkor $0 < z$ vagy $0 < -z$, de nem egyszerre mindkettő és
2. ha $0 < z_1$ és $0 < z_2$, akkor $0 < z_1 z_2$ és $0 < z_1 + z_2$.

Mivel $i \neq 0$, ezért az 1. feltételből következik, hogy $0 < i$ vagy $0 < -i$.

Ha feltesszük, hogy $0 < i$, akkor a 2. feltétel miatt $0 < i \cdot i = -1$. Ha pedig feltesszük a másik esetet, azaz ha $0 < -i$, akkor szintén a 2. feltétel miatt $0 < (-i) \cdot (-i) = -1$. Tehát mindkét esetben arra jutottunk, hogy $0 < -1$.

Ugyanakkor, mivel az imént azt kaptuk, hogy $0 < -1$ biztosan teljesül, ezért a 2. feltétel miatt $0 < (-1)(-1) = 1$ is igaz kell legyen. Azonban ha $0 < -1$ és $0 < 1$ is egyszerre teljesülne, az azt jelentené, hogy az 1. állításban foglaltak egyszerre lennének igazak, ami ellentmondás, így beláttuk a tételt. □

Háromszög-egyenlőtlenség

2.2.2. Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség). *Bármely z_1, z_2 komplex szám esetén $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ teljesül. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $z_1\overline{z}_2 \geq 0$.*

Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség

2.2.1. Definíció (Skaláris szorzat). *Az euklideszi térben lévő skaláris szorzat a valós vektortérben a $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ miatt a következőképpen adódik:*
$\langle z_1, z_2 \rangle = Re(z_1, \overline{z}_2) = x_1x_2 + y_1y_2$, ha $z_1 = x_1 + y_1$ és $z_2 = x_2 + y_2$

2.2.3. Tétel (Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség). *Bármely $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén az $|\langle z_1, z_2 \rangle| \leq |z_1|\,|z_2|$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha z_1 és z_2 lineárisan függetlenek.*

Komplex konjugált

2.2.2. Definíció (Komplex konjugált). *A $z = x + yi$ komplex szám konjugáltjának nevezzük a $\bar{z} = x - yi$ komplex számot.*

Tehát bármely komplex szám konjugáltját a képzetes rész előjelének a megváltoztatásával képezzük. Éppen ezért: $\overline{z} = z \Leftrightarrow$ ha z valós szám és $\overline{z} = -z \Leftrightarrow$ ha z tisztán képzetes. A geometriai reprezentációban a konjugálás az eredeti vektort a valós tengelyre tükrözi.

A komplex konjugáltakra a következő tulajdonságok teljesülnek:

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
- $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$

- $z \cdot \overline{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2$
- Komplex számok összegeinek, különbségeinek, szorzatának és hányadosának konjugáltja megegyezik a számok konjugáltjainak összegeivel, különbségeivel, szorzatával és hányadosával.

2.2.4. Tétel. *A $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ értelmezett $z \to \overline{z}$ leképezés a komplex számok halmazának egy automorfizmusa, ahol $\overline{1} = 1$ és $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ és $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ bármely $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - ra$. Az $\overline{z} = z$ reláció a fixpontok halmazát adja: $\{x \in \mathbb{C} : \overline{z} = z\}$, ami a nem más, mint a valós számok halmaza.*

Norma

2.2.3. Definíció (Norma). *A $z = x + yi$ komplex szám normájának nevezzük az $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nemnegatív valós számot.*

Tehát bármely komplex szám normája a valós és a képzetes rész négyzetösszegének négyzetgyökeként áll elő. A geometriai reprezentációban a norma a vektor hossza.

A normákra a következő tulajdonságok teljesülnek:

- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = (0, 0)$

Hatványozás

A hatványozás a De Moivre-képlet segítségével végezhető el.

2.2.5. Tétel (De Moivre-képlet). *Minden $z \in \mathbb{C}$ és minden $n \in \mathbb{Z}$ esetében teljesül a következő:*

$$z^n = (r \cdot (\cos\phi + i \sin\phi))^n = r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi).$$

Gyökvonás

A gyökvonás a De Moivre-képlet módosításával végezhető el. Ha minden n helyére $\frac{1}{n}$-et helyettesítünk be, akkor az $\frac{1}{n}$-edik gyökvonás képletét kapjuk:

2.2.6. Tétel (De Moivre-képlet gyökvonásra). *Minden $z \in \mathbb{C}$ és minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül a következő:*

$$z^{\frac{1}{n}} = (r \cdot (\cos\phi + i\sin\phi))^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot (\cos\tfrac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\phi+2k\pi}{n}),$$

ahol a $k = 0, \ldots, n-1$ egész számok.

Ekkor azonban $\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$, ami annyiban változtat a képleten, hogy immár nemcsak egy, hanem n darab megoldásunk lesz, azaz n-edik gyökvonás esetén n darab különböző gyököt kapunk.

2.2.7. Tétel. *Bármely z komplex számnak létezik n-edik gyöke bármely $1 \leq n < \infty$ esetében.*

Hatványozás komplex kitevővel

Láttuk korábban az Euler-képlet esetében, hogy az e^{ix} kifejezés értelmes, ezért érdemes volna tisztázni, hogy mit is jelent a komplex kitevős hatványozás.

2.2.1. Állítás. *Tetszőleges b valós számra $\lim\limits_{h\to 0}(1+bh)^{\frac{1}{h}} = e^b$.*

A 2.2.1. állítás segítségével vezetjük be a komplex kitevős hatványozást. Az $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ kifejezés bármely $x \in \mathbb{C}$ esetében értelmes, ha $n \to \infty$, ezért ha a 2.2.1. állítás képletébe a b valós szám helyére az x komplex számot és az $\frac{1}{h}$ helyére az n-t írjuk, a komplex kitevős hatványozást az $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ komplex számok sorozatának határértékeként definiálhatjuk a következőképp:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Mivel a fenti határérték bármely komplex szám behelyettesítése esetén létezik, ezért az $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ azonosság fennáll bármely $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$-re.

Komplex egységgyökök

2.2.4. Definíció (Komplex egységgyök). *Az ε komplex számot n-edik komplex egységgyöknek nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$, egy rögzített $n \in \mathbb{Z}^+$ számra.*

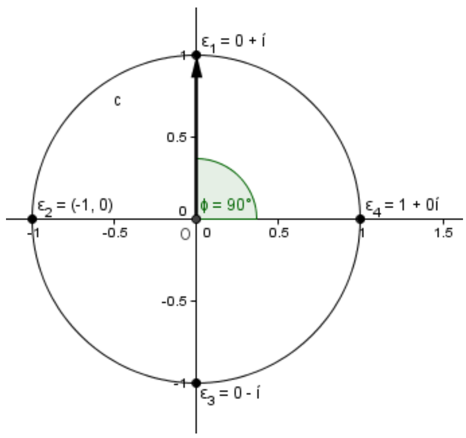
2.2.1. Következmény. *Az 1 mindig egységgyök lesz, bárhogyan is választjuk meg n-t.*

Emlékezzünk vissza az n-edik gyökvonást kiszámító képletre (lásd 2.2.6. tétel). Ha ebben z értékét 1-nek választjuk, akkor már meg is kapjuk az n-edik egységgyökök kiszámítására használható képletet, amely a következő:

2.2.2. Állítás (n-edik egységgyök kiszámítása). *Minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetében az n-edik egységgyökök az $1^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}$ komplex számok, amelyeknél $k = 0, \dots, n-1$ egész számok.*

Mint ahogyan a gyökvonásnál láthattuk, hogy bármely komplex számnak pontosan n darab gyöke van, hasonlóan az n-edik egységgyökből is pontosan n darab van.

A fenti képletből könnyen megkaphatók a komplex egységgyökök geometriai ábrázolásai is: olyan helyvektorok ezek, amelyek hossza 1 és irányszögük $\frac{2k\pi}{n}$, ahol $k = 0, \dots, n-1$. Továbbá a helyvektorok végpontjai az egységkörön helyezkednek el egy n oldalú szabályos sokszög csúcspontjaiként, és az egyik pont mindig az $(1, 0)$ koordinátájú pont lesz.



Rend

2.2.5. Definíció. *Egy z komplex szám különböző egész kitevős hatványainak számát a z rendjének nevezzük és $o(z)$-vel jelöljük. Ez vagy pozitív egész vagy a ∞ szimbólum.*

Kicsit másképp megfogalmazva: ha egy z komplex számhoz létezik olyan n pozitív egész, hogy $z^n = 1$, akkor $o(z)$ ezen n-ek közül a legkisebb. Ha nincs ilyen n, akkor $o(z) = \infty$.

2.2.8. Tétel. *A z komplex számnak vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző, vagy a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek. Továbbá $z^k = z^l \Leftrightarrow o(z) \mid k - l$, speciálisan $z^k = 1 \Leftrightarrow o(z) \mid k$.*

2.2.3. Állítás. *Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje akkor és csak akkor véges, ha abszolút értéke 1, szöge pedig 2π racionális többszöröse. Ha ez a racionális* *többszörös egyszerűsíthetetlen tört alakjában felírva p/q, ahol $q > 0$, akkor a z rendje q.*

Primitív egységgyök

2.2.6. Definíció (Primitív egységgyök). *Az n-edik primitív egységgyök olyan n-edik komplex egységgyök, amelyre $\varepsilon^n = 1$ teljesül, de nincs olyan $1 \leq k \leq n-1$, hogy $\varepsilon^k = 1$ teljesülne.*

2.2.9. Tétel. *A primitív n-edik egységgyökök pontosan az*

$$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$$

alakú számok, ahol k és n relatív prímek és $0 \leq k < n$. Egy komplex szám akkor és csak akkor n-edik primitív egységgyök, ha a hatványai pontosan az összes n-edik egységgyökök.

2.2.7. Definíció (Euler-függvény). *Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény megadja a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek számát.*

2.2.10. Tétel. *Az n-edik primitív egységgyökök száma $\varphi(n)$, ahol φ az Euler-függvény.*

3. fejezet

Komplex számok alkalmazásai

3.1. Az algebra alaptétele

3.1.1. Valós együtthatós polinomok és komplex gyökeik

$\mathbb{R}[x]$ a valós együtthatós kommutatív, egységelemes polinomgyűrű.

3.1.1. Definíció (Gyök). *A $b \in \mathbb{C}$ gyöke az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak, ha $f(b) = 0$.*

3.1.1. Állítás. *A $b \in \mathbb{C}$ akkor és csak akkor gyöke az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak, ha alkalmas $q \in \mathbb{R}[x]$ polinomra $f(x) = (x - b) \cdot q(x)$.*

3.1.2. Definíció (k-szoros gyök). *A $b \in \mathbb{C}$ elemet a $0 \neq f(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom k-szoros gyökének nevezzük ($k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$), ha $(x - b)^k \mid f(x)$, de $(x - b)^{k+1} \nmid f(x)$ az $\mathbb{R}[x]$ gyűrűben. Ekkor a b gyök multiplicitása k.*

3.1.2. Állítás. *Legyen z komplex gyöke a valós együtthatós f polinomnak. Ekkor z konjugáltja is gyöke f-nek.*

3.1.1. Bizonyítás.

Legyen $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, amelyről tudjuk, hogy z gyöke, tehát:

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0.$$

Vegyük mindkét oldal konjugáltját. Emlékezzünk a konjugálás tulajdonságainál tanultakra: komplex számok összegeinek, különbségeinek, szorzatának és hányadosának konjugáltja megegyezik a számok konjugáltjainak összegével, különbségével, szorzatával és hányadosával. Emiatt az egyenlet bal oldala:

$$\overline{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \ldots + \overline{a_n z^n},$$

jobb oldala pedig $\overline{0}$.

Valós szám konjugáltja önmaga, ezért $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$ $(j = 0, \ldots, n)$, mivel f valós együtthatós polinom. Így az egyenlet bal oldala tovább alakítva:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \ldots + \overline{a_n z^n} = a_0 + a_1 \overline{z} + \ldots + a_n \overline{z}^n = f(\overline{z}),$$

jobb oldala pedig 0. Vagyis az egyenlet, amelyet az átalakítások után kaptunk: $f(\overline{z}) = 0$, ami azt jelenti, hogy $\overline{z}$ tényleg gyöke f-nek. □

3.1.2. Az algebra alaptétele

3.1.1. Tétel (Az algebra alaptétele). *A komplex számok halmazán minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van gyöke, azaz bármely* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *polinomhoz, ahol* $a_n \neq 0$ *és* $n > 0$*,* $\exists c \in \mathbb{C}$*, melyre* $p(c) = 0$.

3.1.3. Állítás (Az algebra alaptételével ekvivalens). *A komplex számok teste algebrailag zárt.*

3.1.1. Megjegyzés. $\mathbb{C}[x]$*-ben az irreducibilis elemek pontosan az elsőfokú polinomok.*

Bizonyítás

Az algebra alaptételének sokféle bizonyítása létezik. Ezek közül mutatnék be most egyet, amelynél két lemma segítségével juthatunk el a tételünk bizonyításához:

3.1.1. Lemma. *Legyen* $f(x)$ *egy nem konstans polinom és* $x_0 \in \mathbb{C}$*, amelyre* $f(x_0) \neq 0$*. Ekkor* $|f(x_0)|$ *nem a minimum értéke az* $|f(x)|$ *függvénynek.*

3.1.2. Bizonyítás.

Először is jegyezzük meg, hogy az $x^k - c$ polinomnak bármely c komplex szám esetén mindig van komplex gyöke. Egy nemnegatív valós r számnak van egy valós k-adik gyöke, mivel ha az x^k függvényben az x helyére 0-t helyettesítünk, akkor $f(0) = 0$ értéket vesz fel, továbbá nagy x-ek behelyettesítésekor $f(x)$ értéke is nagy lesz. Mivel x^k folytonos függvény, ezért $f(x)$ a Bolzano-tétel miatt minden nemnegatív valós értéket felvesz.

Írjuk a c komplex számot polárkoordinátás alakban: $c = re^{i\theta}$, ahol $r = |c|$ és $\theta = \arg c$. Legyen s az r egy valós k-adik gyöke. Ekkor a c k-adik gyöke, amelyet kerestünk, $\alpha = se^{\frac{i\theta}{k}}$.

Nézzük ismét a lemma állítását. Az $f(x)$ nem konstans polinom, és legyen $x_0 \in \mathbb{C}$, melyre $f(x_0) \neq 0$. Számításaink könnyebben kezelhetővé válnak, ha normáljuk f-et. Először az x változó helyébe írjuk a $x + x_0$ kifejezést, azaz a megvizsgálandó értéket eltoljuk $x_0 = 0$-ba. Ezután szorozzuk meg $f(x)$-et $f^{-1}(0)$-val, hogy $f(0) = 1$ legyen. Azt szeretnénk belátni, hogy $|f(x)|$ minimumának értéke nem 1.

Jelölje k az x legkisebb nemnulla kitevőjét, amely előfordul az f-ben:

$$f(x) = 1 + ax^k + (k\text{-nál nagyobb kitevővel rendelkező tagok})$$

Jelölje α a $-a^{-1}$ k-adik gyökét. Még egy utolsó módosítást hajtsunk végre a változón: helyettesítsük x-et αx-szel. Ekkor f a következőképp néz ki:

$$f(x) = 1 - x^k + (\text{magasabb fokú tagok}) = 1 - x^k + x^{k+1}g(x),$$

ahol $g(x)$ is egy polinom.

Kis pozitív x-ekre a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva:
$|f(x)| \leq \left|1 - x^k\right| + \left|x^{k+1}g(x)\right| = 1 - x^k + x^{k+1}\,|g(x)| = 1 - x^k(1 - x\,|g(x)|)$.

Mivel $x \cdot |g(x)|$ kis x-ekre kicsi marad, ezért a $x^k(1 - x\,|g(x)|)$ pozitív, ha x kellően kicsi valós szám. Ilyen x-ekre ezért $|f(x)| < |f(0)|$, vagyis az $|f(0)|$ nem minimum, tehát igazoltuk a lemmát. $\square$

3.1.2. Lemma. *Legyen $f(x)$ komplex együtthatós polinom. Ekkor $|f(x)|$ felveszi a minimum értékét valamely $x_0 \in \mathbb{C}$ pontban.*

3.1.3. Bizonyítás.

Feltehetjük, hogy f nem konstans polinom. Bármely $f(x)$ polinom esetében, ha $|x| \to \infty$, akkor $|f(x)| \to \infty$ és ha $x \to \infty$, akkor $f(x) \to \infty$, vagyis nagy x-eket behelyettesítve az $f(x)$ polinom értéke is nagy lesz.

Következő lépésként keressük meg az $|f(x)|$ legnagyobb alsó korlátját, amit jelöljön m. Mivel bármely polinom értéke nagy x esetén nagy lesz, ezért ha $f(x)$ legnagyobb alsó korlátját szeretnénk megtalálni, nem kell az egész síkot vizsgálnunk, elég csupán egy kellően nagy körlapon keresgélnünk, legyen ez az $|x| \leq r$.

Mivel ez a körlap kompakt és $|f(x)|$ folytonos függvény, ezért f biztosan felveszi a minimumértékét a körlapon. $\square$

Mivel $|f(x)|$ minimumértéke 0, így a második lemmából az algebra alaptétele következik, mert x_0 gyöke a polinomnak. $\square$

3.1.3. Az algebra alaptételének alkalmazásai

3.1.2. Tétel (Faktorizációs lemma). *Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke egy n-ed fokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak, akkor csak egyetlen olyan $(n-1)$-ed fokú $g \in \mathbb{C}[x]$ polinom létezik, melyre $f(x) = (x-c) \cdot g(x)$.*

3.1.1. Következmény. *Az $f \in \mathbb{C}[x]$ n-ed fokú polinomnak legfeljebb n gyöke van.*

3.1.3. Tétel (Komplex együtthatós polinomok faktorizációja). *Minden $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom, amelynek foka $n \geq 1$, a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen felírható a következőképp:*

$$f(x) = a(x-c_1)^{n_1} \cdot (x-c_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x-c_r)^{n_r},$$

ahol $a \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$, $r \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \ldots c_r \in \mathbb{C}$ különböző számok és $n_1, n_2, \ldots n_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, melyekre $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

3.1.4. Bizonyítás.

A bizonyításhoz a polinomok foka szerinti teljes indukciót használunk.

Ha $f(x)$ elsőfokú a polinom, akkor az algebra alaptétele miatt tudjuk, hogy biztosan létezik egy c_1 komplex gyöke, és a 3.1.2. lemma miatt $f(x)$ felírható $f(x) = (x-c_1)g(x)$ alakban, ahol $g(x)$ nem azonosan nulla konstans polinom. Ugyanis ha az volna, akkor $f(x)$ is csak az azonosan nulla konstans polinom lehetne, ami viszont ellentmondás, mivel kikötöttük, hogy $f(x)$ elsőfokú. Ez azt jelenti, hogy $g(x) = a$ nem nulla konstans, tehát $f(x) = (x-c_1)g(x) = (x-c_1)a = a(x-c_1)$, vagyis elsőfokú polinomokra az indukciós feltevésünk teljesül.

Tegyük fel, hogy $n > 1$. Ekkor az algebra alaptétele miatt tudjuk, hogy létezik $c_1 \in \mathbb{C}$, amelyre $f(c_1) = 0$, vagyis c_1 gyöke f-nek. A 3.1.2. lemma miatt $f(x)$ felírható $f(x) = (x-c_1)g(x)$ alakban, ahol $g(x)$ komplex együtthatós $(n-1)$-ed fokú polinom. Az indukciós feltevésünk szerint létezik $g(x)$-nek sorrendtől eltekintve egyértelmű faktorizációja:

$$g(x) = a(x - c_1)^{n_1 - 1} \cdot (x - c_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - c_r)^{n_r},$$

ahol $n_1 \geq 1, \ldots, n_r \geq 1, n_1 - 1 + n_2 + \ldots + n_r = n - 1, c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$ egymástól különbözők és $a \in \mathbb{C}\backslash 0$. Mivel a $g(x)$ polinomra is teljesül a 3.1.2. lemma, ezzel beláttuk az állítást. □

Egyszerűbben megfogalmazva a fenti tétel: Minden n-ed fokú komplex együtthatós polinomnak pontosan n darab gyöke van és minden különböző gyököt a multiplicitással kell számolnunk.

3.1.4. Tétel (Valós együtthatós polinomok faktorizációja). *Minden $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom, amelynek foka $n \geq 1$, a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen felírható a következőképp:*

$$f(x) = a(x - c_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - c_s)^{m_s} \cdot q_1(x)^{n_1} \cdot \ldots \cdot q_t(x)^{n_t}, \textit{ ahol:}$$

- $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ $s, t \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$ *egymástól különbözők és* $m_1, \ldots m_s, n_1, \ldots n_t \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, *melyekre* $m_1 + \ldots + m_s + 2m_1 + \ldots + 2m_s = n$ *és*
- $q_j(x) = x^2 - b_j x - a_j$, *ahol a* ${b_j}^2 + 4a_j < 0$ *minden* $j = 1, \ldots, t$ *esetén, és* $q_1, \ldots, q_t$ *egymástól különbözők.*

3.1.5. Bizonyítás.

Tekintsük f-et komplex polinomnak és faktorizáljuk a 3.1.3. tétel szerint. Jelölje $c_1, \ldots, c_s$ a valós gyököket.

Emlékezzünk a 3.1.2 állításra: tudjuk, hogy a valós együtthatós polinomok komplex gyökei komplex párjukkal együtt megoldásai a polinomnak. Ezért vegyük f további, nem tisztán valós gyökeit a konjugált párjaikkal együtt és készítsünk belőlük valós másodfokú polinomokat:

$$q(x) = (x - c)(x + \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} \in \mathbb{R}[x].$$

A $q(x)$ valós együtthatós polinom lesz, mivel ha visszaemlékszünk a konjugáltak tulajdonságainál tanultakra: egy szám és konjugáltjának összege és szorzata is mindig valós szám lesz. Legyen $b := c + \overline{c}$ és $a := -c\overline{c}$, ekkor $q(x) = x^2 - bx - a$.

Kérdésünk az, hogy az iménti valós együtthatós polinomnak mikor lesz valós gyöke. Emlékezzünk a másodfokú egyenlet megoldóképleténél tanult diszkriminánsra.

Behelyettesítve $q(x)$ együtthatóit a diszkrimináns képletébe, a következő kifejezéshez jutunk: $b^2 - (4 \cdot 1 \cdot (-a) = b^2 + 4a$. Tehát megkaptuk, hogy $b^2 + 4a < 0$, különben a $q(x)$ polinomnak nem lenne valós gyöke. Innen pedig a tétel állítása egyértelműen következik. $\square$

3.1.5. Tétel (Polinomgyűrű egyértelmű faktorizációja). *Legyen K egy test. A $K[x]$ polinomgyűrűn a faktorizáció egyértelmű, azon minden $f \in K[x] \setminus \{0\}$ polinom a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen felírható a következő alakban:*

$$f = ap_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r} \, ,$$

ahol $r \in \mathbb{N}$, $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a \in K \setminus \{0\}$ és $p_1, p_2, \ldots, p_r \in K[x]$ olyan irreducibilis polinomok, melyeknek a főegyütthatója 1.

3.1.6. Tétel ($\mathbb{C}$ egyértelműsége). *Legyen K egy kommutatív bővítése $\mathbb{R}$-nek a nullával való osztástól eltekintve és az 1 egységelemmel úgy, hogy K minden eleme algebrai $\mathbb{R}$ felett, vagyis minden K-beli elem gyöke egy valós nemnulla polinomnak. Ekkor K izomorf vagy $\mathbb{R}$-rel vagy $\mathbb{C}$-vel.*

3.2. Komplex függvénytan

3.2.1. Komplex függvénytani bevezetés

A komplex számok legfontosabb analízisbeli felhasználása a komplex függvénytan, amelynek során komplex értékű, komplex változós függvényeket vizsgálunk.

A komplex függvényeket kétféleképpen is szemléltethetjük. Egyik lehetőség, hogy két kétváltozós függvény segítségével fejezzük ki a komplex függvényeket, mivel bármely $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt felírhatjuk az

$$f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ alakban,}$$

ahol u és v valós értékű függvények. A másik módszer geometriai megközelítést alkalmaz: képzeljük el a komplex függvényeket úgy, hogy síkról síkra képeznek.

A komplex függvénytan definícióinak és tételeinek nagy része formálisan hasonló a valós függvénytannál tanultakkal. Mivel a komplex számok normája mindig valós szám, ezért a komplex függvények minden olyan tulajdonsága, amely kizárólag a távolság fogalmából kifejezhető, formálisan megegyezik a valós számokon tanultakkal, például a számsorozat határértékének definíciója vagy a konvergencia és határérték tételei.

Vannak azonban különbségek a valós függvénytannál tanultaktól, álljon itt néhány fontosabb: a pont környezete egy körlap, mivel az intervallum kétdimenziós, az egyenlőtlenségeket tartalmazó kifejezéseket sem használhatjuk, mert a komplex számok nem rendezhetők és nem értelmezhető a közelítés iránya sem, mivel a bal- és jobboldali határérték helyett a határértéknek függetlennek kell lennie az iránytól.

3.2.1. Definíció (Pont környezete). *A $z_0 \in \mathbb{C}$ pont $r > 0$ sugarú környezete: $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$.*

3.2.2. Definíció (Differenciálhatóság, differenciálhányados). *Ha egy f komplex függvény értelmezve van a z_0 pont egy környezetében, azt mondjuk, hogy f differenciálható z_0-ban, ha a $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ hányadosnak a komplex számok halmazán létezik véges határértéke $z \to z_0$ esetén. Ha ez a határérték létezik, akkor ezt az f függvény z_0 pontbeli deriváltjának nevezzük és $f'(z)$-vel jelöljük:*

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,.$$

3.2.3. Definíció (Reguláris / holomorf függvény). *Ha az f komplex függvény egy $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy f holomorf U-n.*

3.2.4. Definíció (Analitikus függvény). *Azt mondjuk, hogy az f függvény analitikus az x_0 pontban, ha f akárhányszor differenciálható x_0-ban, és az x_0 ponthoz tartozó Taylor-sora előállítja f-et az x_0 pont egy környezetében.*

3.2.5. Definíció (Komplex görbe). *Egy γ folytonos függvényt, amely egy $[a, b]$ valós intervallumról $\mathbb{C}$-be képez, komplex görbének nevezzük, jelölése: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$.*

3.2.6. Definíció (Zárt görbe). *A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ görbe zárt, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, azaz a görbe kezdőpontja megegyezik a görbe végpontjával.*

3.2.7. Definíció (Egyszerű görbe). *A $\gamma : [a, b) \to \mathbb{C}$ görbe egyszerű, ha a görbe injektív, azaz bármely $c, d \in [a, b)$ esetén, ha $\gamma(c) = \gamma(d)$, akkor $c = d$.*

3.2.2. Rouché-tétel

3.2.1. Tétel (Rouché-tétel). *Legyenek f és g analitikusak egy egyszerű zárt görbén és annak belsejében (jelölje ezt a görbét C) és tegyük fel, hogy $|g(x)| < |f(x)|$ minden $x \in C$-re. Ekkor $f(x)$ és $|f(x) + g(x)|$ gyökeinek száma megegyezik a C-n belül.*

3.2.3. A Rouché-tétel egy alkalmazása

A Rouché-tétel az algebra alaptételének komplex függvénytani bizonyításában is felhasználható.

3.2.2. Tétel (Algebra alaptétele). *Legyen $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ komplex együtthatós, nem konstans polinom, amelynek foka n. Ekkor a p polinomnak multiplicitással számolva pontosan n darab gyöke van .*

3.2.1. Bizonyítás.

Legyen $f(z) = z^n$, amelynek nyilvánvalóan pontosan n darab gyöke van multiplicitással számolva. Ezután definiáljunk egy $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ polinomot, ahol legyenek az a_k együtthatók $(k = 0, \dots n-1)$ a p együtthatói, vagyis $g(z)$ olyan polinom lesz, amelyet úgy képeztünk, hogy a $p(z)$ polinom legnagyobb kitevős tagját elhagytuk. Végül válasszuk $R > 0$-t úgy, hogy $R > 1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|a_k z^k\right|$ legyen és $C_R := \{z \mid |z| = R\}$, vagyis C_R az origó középpontú, R sugarú körvonal.

Tehát bármely $z \in C_R$ pontra: $g(z) = \left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k| \left|z^k\right| = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k < \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k| R^{n-1} < RR^{n-1} = R^n = |z|^n = |f(z)|$.

Ekkor $|f(z)| > |g(z)|$ a C_R körvonalon. Emlékezzünk vissza, hogy f-nek n darab gyöke van, így a Rouché-tétel miatt $f(z) + g(z) = p(z)$ polinomnak is n darab gyöke lesz a C_R-en belül. Mivel R tetszőlegesen nagynak választható, így ebből következik, hogy $p(z)$ polinomnak pontosan n darab gyöke van. $\square$

3.3. Hiperkomplex számok

A számfogalom még a komplex számoknál tovább is kiterjeszthető. A valós számok komplex számokra bővítésének mintájára, képesek vagyunk kvaterniókat és Cayley-számokat is képezni, amelyek sok tulajdonságukban hasonlóak leszek a komplex számokhoz, azonban a bővítések közben fontos tulajdonságokat elveszítünk. Sőt még azt is beláthatjuk, hogy a további kiterjesztés teljességgel értelmetlen volna.

3.3.1. Kvaterniók

3.3.1. Definíció (Kvaterniók valósakból). *Tekintsük a* $q = (a, b, c, d)$ *rendezett valós számnégyeseket. Definiáljuk ezek halmazán az összeadás és a szorzás műveleteket:*

- *az összeadás:* $q_1 + q_2 = (a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) =$
$$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) \text{ és}$$
- *a szorzás:* $q_1 \cdot q_2 = (a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) =$
$$\begin{aligned} = (&a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, \\ &a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, \\ &a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, \\ &a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2) \,. \end{aligned}$$

Ekkor a $q = (a, b, c, d)$ *rendezett valós számnégyesek a kvaterniók, az imént definiált algebrai struktúra pedig a kvaterniók algebrája, amit jelöljünk* $\mathbb{H}$*-val.*

Hasonlóan a komplex számokhoz, a kvaterniók is rendelkeznek:

- algebrai alakkal: A kvaterniók algebrai alakja: $q = a + bi + cj + dk$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $1, i, j, k$ báziselemek.
- valós és képzetes résszel: A kvaterniók valós része $Re(q) = a$, képzetes része $Im(q) = bi + cj + dk$.
- konjugálttal: A $q = a + bi + cj + dk$ kvaternió konjugáltja az $\overline{q} = a - bi - cj - dk$, vagyis a konjugáltat itt is a képzetes rész előjelének megváltoztatásával kapjuk.
- normával: A kvaterniók normája az $\|q\| = q \cdot \overline{q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ nemnegatív valós szám.

A komplex számokhoz hasonlóan, a kvaterniók algebrai alakja és rendezett valós számnégyes alakja egyértelműen megfeleltethetőek egymásnak a következőképpen: $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 0, 1)$.

A komplex számokhoz képest újdonság, hogy mivel itt már négy báziselemünk van, ezek között összefüggéseket tudunk felírni:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \, .$$

A komplex számokhoz képest azonban különbség adódik, ha megvizsgáljuk a testaxiómákat. A kvaterniókra a szorzás kommutativitása nem teljesül, a többi testaxióma viszont fennáll. Az ilyen struktúrát, ahol a szorzás kommutativitásán kívül az összes testaxióma teljesül, ferdetestnek nevezzük, vagyis:

3.3.1. Állítás. *A kvaterniók ferdetestet alkotnak.*

A kvaterniókat azonban nemcsak a valós számokból bővíthetjük tovább, hanem a komplex számokból is, a következőképpen:

3.3.2. Definíció (Kvaterniók komplexekből). *Tekintsük a $q = (a, b)$ rendezett valós számpárokat. Definiáljuk ezek halmazán az összeadás és a szorzás műveleteket:*

- *az összeadás:* $q_1 + q_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- *a szorzás:* $q_1 \cdot q_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 b_1 - \overline{b}_2 a_2, a_2 \overline{b}_1 + b_2 a_1)\, .$

Ekkor a $q = (a, b)$ rendezett valós számpárok a kvaterniók, az imént definiált algebrai struktúra pedig a kvaterniók ferdeteste.

Láthatjuk, ha a kvaterniókat a komplex számokból származtatjuk, sokkal egyszerűbbé válik például a szorzás elvégzése.

A kvaterniók ferdeteste négy dimenziós a valósak felett és két dimenziós a komplex számok felett.

3.3.2. Cayley-számok

3.3.3. Definíció (Cayley-számok kvaterniókból). *Tekintsük a $q = (a, b)$ rendezett kvaternió számpárokat. Definiáljuk ezek halmazán az összeadás és a szorzás műveleteket:*

- *az összeadás:* $q_1 + q_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- *a szorzás:* $q_1 \cdot q_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 b_1 - \overline{b}_2 a_2, a_2 \overline{b}_1 + b_2 a_1)\, .$

Ekkor a $q = (a, b)$ rendezett kvaternió számpárok a Cayley-számok, az imént definiált algebrai struktúra pedig a Cayley-számok algebrája, amit jelöljünk $\mathbb{O}$-val.

Láthatjuk, hogy a kvaterniókból a Cayley-számokra bővítés nagyon hasonló a komplexekről a kvaterniókra történő bővítéshez: mindkét esetben számpárokon értelmezzük ugyanazt az összeadás és szorzás műveletet.

Természetesen a Cayley-számokat is kiterjeszthetnénk a valós és a komplex számokról is, amelyek precíz ismertetésétől jelen dolgozatban eltekintenék, felírásuk hosszadalmassága miatt. Csupán annyit jegyeznék meg, hogy a Cayley-számok struktúrája nyolc dimenziós a valósak felett, négy dimenziós a komplex számok felett és két dimenziós a kvaterniók felett.

Ha a valós számokról bővítünk a Cayley-számokra, akkor nyolc báziselemünk lesz, melyek a következők:

$$
\begin{aligned}
e_0 &= (1,0,0,0,0,0,0,0), & e_1 &= (0,1,0,0,0,0,0,0),\\
e_2 &= (0,0,1,0,0,0,0,0), & e_3 &= (0,0,0,1,0,0,0,0),\\
e_4 &= (0,0,0,0,1,0,0,0), & e_5 &= (0,0,0,0,0,1,0,0),\\
e_6 &= (0,0,0,0,0,0,1,0), & e_7 &= (0,0,0,0,0,0,0,1).
\end{aligned}
$$

Hasonlóan a komplex számokhoz, a Cayley-számok is rendelkeznek:

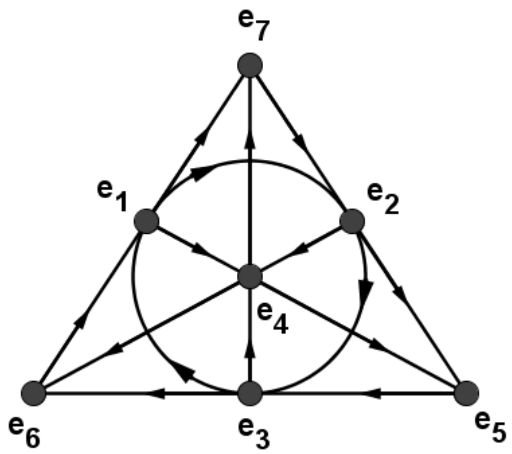
- algebrai alakkal: A kvaterniók algebrai alakja: $a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7 + a_8e_8$, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 \in \mathbb{R}$ és $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8$ báziselemek.

- valós és képzetes résszel: A Cayley-számok valós része $Re(a) = a_0$, képzetes része $Im(a) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7 + a_8e_8$.

- konjugálttal: A Cayley-számok konjugáltját, hasonlóan a korábban tanultakhoz, itt is a képzetes rész előjelének megváltoztatásával kapjuk, azaz az $a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7 + a_8e_8$ konjugáltja az $\overline{a} = a_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3 - a_4e_4 - a_5e_5 - a_6e_6 - a_7e_7 - a_8e_8$.

- normával: A Cayley-számok normája az $\|a\| = a \cdot \overline{a}$ nemnegatív valós szám.

A kvaterniókhoz hasonlóan itt is felírhatunk összefüggéseket a báziselemek között, amit Fano-síkkal lehet szemléltetni:



A komplex számokhoz és a kvaterniókoz képest is különbség adódik, ha megvizsgáljuk a testaxiómákat. Mivel a Cayley-számokat a kvaterniókról is kiterjeszthetjük, ezért világos, hogy ez a struktúra is legfeljebb csak ferdetest lehet. Azonban Cayley-számokra a szorzás asszociativitása sem teljesül, a többi ferdetestre fennálló testaxióma viszont igaz marad.

3.3.3. Bővíthető-e tovább?

Természetesen felmerül a kérdés, hogy mennyire bővíthető tovább a komplex számok teste úgy, hogy a főbb tulajdonságok megmaradjanak. Az alábbi tételek választ adnak a kérdésre.

3.3.1. Tétel (Frobenius tétele). *Ha A egy asszociatív, $\mathbb{R}$ feletti véges dimenziós ferdetest, akkor A izomorf $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, vagy $\mathbb{H}$ valamelyikével.*

Vagyis a tétel azt mondja ki, hogy a valós számokon, a komplex számokon és a kvaterniókon kívül nem létezik olyan kiterjesztés, amely ferdetest lenne.

A következő tételek kimondása előtt szükséges néhány fogalmat megmagyaráznom.

A *division algebra* olyan A algebra, amely nullosztómentes, azaz bármely $a, b, \in A$ elemre $ab = 0$ akkor és csak akkor, ha a vagy b legalább egyike 0. Ezzel ekvivalens megfogalmazás, hogy A division algebra, ha a bal és jobb oldali szorzás műveletére minden nemnulla elem invertálható. A division algebrák számunkra fontos tulajdonsága, hogy nem feltétlen asszociatívak.

A *normált division algebra* olyan A algebra, ami normált vektortér, kiegészítve a következő azonossággal: $\|ab\| = \|a\| \, \|b\|$, bármely $a, b \in A$ esetén.

3.3.2. Tétel. *Az összes normált division algebra $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, vagy $\mathbb{O}$ valamelyike.*

Vagyis a tétel azt mondja ki, hogy a valós számokon, a komplex számokon, a kvaterniókon és a Cayley-számokon kívül nem létezik olyan kiterjesztés, amelyben a norma fogalma az általunk ismertekkel megegyező maradna.

3.4. Geometriai alkalmazások

3.4.1. Kettősviszony

Az $a, b \in \mathbb{C}$ számok akkor és csak akkor fekszenek egy origón átmenő egyenesen, ha $a \cdot b \in \mathbb{R}$. Az egy egyenesen fekvő pontokat *kollineárisnak* nevezzük.

3.4.1. Állítás (Három szám kollineáris). *Az $a, b, c \in \mathbb{C}$ akkor és csak akkor kollineáris, ha $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$, ami pontosan akkor teljesül, ha $c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b} \in \mathbb{R}$.*

3.4.1. Definíció (Kettősviszony). *Ha $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, hogy $a \neq d$ és $b \neq c$, akkor a kettősviszonyt $CR(a, b, c, d)$-vel jelöljük és a következőképpen definiáljuk:*

$$CR(a, b, c, d) := \frac{a-b}{a-d} : \frac{c-b}{c-d} = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-d)} =$$

$$= \frac{(a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{b})}{|a-d|^2 \, |c-b|^2} \in \mathbb{C}\,.$$

3.4.1. Megjegyzés. *A kettősviszony függ a pontok sorrendjétől.*

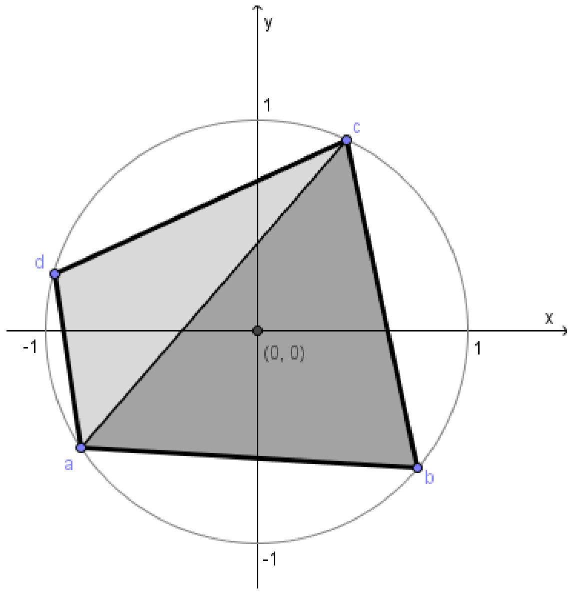
3.4.2. Megjegyzés. *A kettősviszony reciprokát úgy kapjuk, hogy vesszük a pontok egy ciklikus permutációját: $CR(a, b, c, d)^{-1} = CR(b, c, d, a)$.*

3.4.1. Lemma. *Bármely négy olyan a, b, c, d komplex számra, amelyre*
$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$ fennáll, teljesül a következő:
$(a-b)(c-d)\left(\overline{a}-\overline{d}\right)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) + i\left(|c|^2 - |d|^2\right) Im\left(c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b}\right) \in \mathbb{R}$.

3.4.1. Tétel (Kör és kettősviszony kapcsolata). *Négy olyan nem kollineáris a, b, c, d komplex szám, amelyre $a \neq d$ és $b \neq c$, akkor és csak akkor fekszenek egy körön, ha a kettősviszonyuk valós.*

3.4.1. Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy a, b, c nem kollineáris. Mivel ez a tulajdonság és a kettősviszony is eltoláskor változatlan marad, ezért számításaink megkönnyítése érdekében toljuk el az a, b, c csúcsok által meghatározott háromszöget oly módon, hogy a háromszög körülírt körének középpontja az origóba kerüljön.



Mivel a háromszög csúcsai az origó középpontú körülírt körön helyezkednek el, ezért tudjuk, hogy $|a| = |b| = |c|$ és $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$. Ez utóbbi miatt felhasználhatjuk a 3.4.1. lemmát, vagyis az a, b, c, d számokra teljesül, hogy:

$$(a-b)(c-d)\left(\overline{a}-\overline{d}\right)\left(\overline{c}-\overline{b}\right)+i\left(|c|^2-|d|^2\right)Im\left(c\overline{b}-c\overline{a}-a\overline{b}\right)\in\mathbb{R}.$$

Emlékezzünk vissza, hogy a tételünk egy akkor és csak akkor állítást fogalmaz meg, így mindkét irányt be kell látnunk.

- egyik irány: a négy pont egy körön fekszik $\Rightarrow$ kettősviszonyuk valós

Ha tudjuk, hogy a négy pont mindegyike egy körön fekszik, ez azt jelenti, hogy $|c| = |d|$, amiből következik, hogy az $i\left(|c|^2-|d|^2\right)Im\left(c\overline{b}-c\overline{a}-a\overline{b}\right)$ tag értéke 0 lesz, így már csak azt kell belátni, hogy

$$(a-b)(c-d)\left(\overline{a}-\overline{d}\right)\left(\overline{c}-\overline{b}\right)\in\mathbb{R}.$$

Ez viszont a 3.4.1. lemma miatt teljesül, mivel ha tudjuk, hogy $(a-b)(c-d)\left(\overline{a}-\overline{d}\right)\left(\overline{c}-\overline{b}\right)+i\left(|c|^2-|d|^2\right)Im\left(c\overline{b}-c\overline{a}-a\overline{b}\right)\in\mathbb{R}$ és $i\left(|c|^2-|d|^2\right)Im\left(c\overline{b}-c\overline{a}-a\overline{b}\right)=0$, akkor az

$$(a-b)(c-d)\left(\overline{a}-\overline{d}\right)\left(\overline{c}-\overline{b}\right)\in\mathbb{R}$$

kifejezésnek is mindig valósnak kell lennie.

- másik irány: kettősviszonyuk valós $\Rightarrow$ a négy pont egy körön fekszik

Ha tudjuk, hogy a kettősviszony valós, ez azt jelenti, hogy

$$CR(a,b,c,d)=\frac{(a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{c}-\overline{b})}{|a-d|^2|c-b|^2}\in\mathbb{R}\ .$$

Mivel a norma csak nemnegatív szám lehet, ezenkívül tudjuk, hogy $a \neq d$ és $b \neq c$, ezért a nevező csak pozitív valós szám lehet, amiből következik, hogy $(a-b)(c-d)\left(\overline{a}-\overline{d}\right)\left(\overline{c}-\overline{b}\right)$ is mindig valós lesz. Emlékezzünk, hogy $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$ fennáll, így a 3.4.1. lemma miatt tudjuk, hogy $(a-b)(c-d)\left(\overline{a}-\overline{d}\right)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) + i\left(|c|^2 - |d|^2\right) Im\left(c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b}\right) \in \mathbb{R}$ teljesül, emiatt az $i\left(|c|^2 - |d|^2\right) Im\left(c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b}\right)$ tagtól is meg kell követelnünk, hogy valós legyen.

Mivel a, b, c nem kollineáris, ezért a 3.4.1. állítás szerint $Im(c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b}) \neq 0$ valós szám lesz, amit azonban az $i\left(|c|^2 - |d|^2\right) Im\left(c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b}\right)$ kifejezésben még i-vel meg kell szorozni, így egy tisztán képzetes számot kapunk. Tudjuk továbbá, hogy $|c|^2 - |d|^2$ csak valós szám lehet, vagyis az $i\left(|c|^2 - |d|^2\right) Im\left(c\overline{b} - c\overline{a} - a\overline{b}\right)$ tisztán képzetes szám lesz, egyetlen esetet kivéve, ha $|c|^2 - |d|^2 = 0$. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $|c| = |d|$, ami azt jelenti, hogy d-nek is a körülírt körön kell elhelyezkednie, vagyis ekkor a, b, c, d mindegyike egy körön fekszenek. $\square$

3.4.2. Tétel (Húrnégyszög). *Egy négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha a négyszög csúcsainak kettősviszonya negatív.*

3.4.2. Ptolemaiosz-tétel

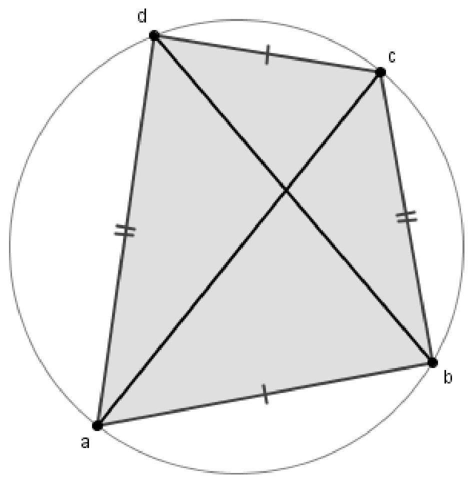
A középiskolai tananyag részét képezi a Ptolemaiosz-tétel és a megfordítása:

3.4.3. Tétel (Ptolemaiosz-tétel). *Bármely húrnégyszögben a szemközti oldalak szorzatainak összege megegyezik az átlók szorzatával.*

3.4.4. Tétel (Ptolemaiosz-tétel megfordítása). *Ha egy négyszögben a szemközti oldalak szorzatainak összege megegyezik az átlók szorzatával, akkor a négyszög húrnégyszög.*

Tanárszakos hallgatóként érdekesnek tartom megmutatni, hogy a Ptolemaiosz-tételt a geometriai bizonyításon kívül a komplex számok segítségével is beláthatjuk, méghozzá a következő módon:

3.4.5. Tétel (Ptolemaiosz-tétel). *Bármely húrnégyszögben a szemközti oldalak szorzatainak összege megegyezik az átlók szorzatával, azaz ha $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ egy húrnégyszög csúcsai, akkor $\overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{bc} \cdot \overline{ad} = \overline{ac} \cdot \overline{db}$.*



3.4.2. Bizonyítás.

Számításaink megkönnyítésére minden $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ csúcsú négyszöghöz definiáljunk egy

$$P(a,b,c,d) := |(a-b)(c-d)| + |(a-d)(c-b)| - |(a-c)(b-d)|$$

számot, amit nevezzünk el Ptolemaiosz-számnak. Ezt úgy kapjuk, hogy a szemközti oldalak szorzatai abszolút értékeinek összegéből kivonjuk az átlók szorzatának abszolút értékét.

A $CR(a,b,c,d) = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)}$ kifejezésből algebrai átalakításokkal megmutathatjuk, hogy:

$$P(a,b,c,d) = |(a-d)(b-c)|\left(|CR(a,b,c,d)| + 1 - |CR(a,b,c,d) - 1|\right).$$

Az ehhez szükséges algebrai átalakítások:

$P(a,b,c,d) = |(a-b)(c-d)| + |(a-d)(c-b)| - |(a-c)(b-d)| =$

Első lépésben bővítsünk a kifejezést az $\left|\frac{(a-d)(c-b)}{(a-d)(c-b)}\right|$-vel:

$= \left|\frac{(a-d)(c-b)}{(a-d)(c-b)}\right| |(a-b)(c-d)| + |(a-d)(c-b)| - |(a-c)(b-d)| =$

Most rendezzük az egész kifejezést egyetlen törtté:

$= \frac{|(a-d)(c-b)|\cdot(|(a-b)(c-d)|+|(a-d)(c-b)|-|(a-c)(b-d)|)}{|(a-d)(c-b)|} =$

Ezután végezzük el a számlálóban a szorzást $(a-d)(c-b)$-vel:

$= \frac{|(a-d)(c-b)(a-b)(c-d)|+|(a-d)(c-b)(a-d)(c-b)|-|(a-d)(c-b)(a-c)(b-d)|}{|(a-d)(c-b)|} =$

Ezt követően bontsuk a törtet három tagra:

$= \frac{|(a-d)(c-b)(a-b)(c-d)|}{|(a-d)(c-b)|} + \frac{|(a-d)(c-b)(a-d)(c-b)|}{|(a-d)(c-b)|} - \frac{|(a-d)(c-b)(a-c)(b-d)|}{|(a-d)(c-b)|} =$

Most pedig emeljük ki az $|(a-d)(c-b)|$ kifejezést, ekkor:

$$= |(a-d)(c-b)| \cdot \left(\tfrac{|(a-b)(c-d)|}{|(a-d)(c-b)|} + \tfrac{|(a-d)(c-b)|}{|(a-d)(c-b)|} - \tfrac{|(a-c)(b-d)|}{|(a-d)(c-b)|} \right) =$$

Vegyük észre, hogy $\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)} = CR(a,b,c,d)$
és $\frac{(a-d)(c-b)}{(a-d)(c-b)} = 1$, így az első két tag behelyettesíthető ezekkel, vagyis:

$$= |(a-d)(c-b)| \cdot \left(|CR(a,b,c,d)| + 1 - \tfrac{|(a-c)(b-d)|}{|(a-d)(c-b)|} \right) =$$

Mivel az $(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) - (a-d)(c-b)$ azonosság teljesül minden kommutatív gyűrűben, ezért az utolsó tagba behelyettesíthetünk:

$$= |(a-d)(c-b)| \cdot \left(|CR(a,b,c,d)| + 1 - \tfrac{|(a-b)(c-d)-(a-d)(c-b)|}{|(a-d)(c-b)|} \right) =$$

Ismét észrevehetjük, hogy $\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)} = CR(a,b,c,d)$
és $\frac{(a-d)(c-b)}{(a-d)(c-b)} = 1$, így helyettesítsünk ezekkel az értékekkel, ekkor:

$$= |(a-d)(c-b)| \left(|CR(a,b,c,d)| + 1 - |CR(a,b,c,d) - 1| \right).$$

Így végül megkaptuk, hogy:

$$P(a,b,c,d) = |(a-d)(b-c)| \left(|CR(a,b,c,d)| + 1 - |CR(a,b,c,d) - 1| \right).$$

Tudjuk, hogy $|(a-d)(b-c)|$ pozitív szám lesz, ezért elég csak a kifejezés $|CR(a,b,c,d)| + 1 - |CR(a,b,c,d) - 1|$ részét megvizsgálnunk.

Vegyük észre, hogy a $|CR(a,b,c,d)| + 1 - |CR(a,b,c,d) - 1| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha a $|CR(a,b,c,d)| + 1 = |CR(a,b,c,d) - 1|$ fennáll, ami a háromszög-egyenlőtlenség miatt akkor és csak akkor teljesül, ha $CR(a,b,c,d)$ valós és nem pozitív. Ez viszont a 3.4.2. tétel miatt akkor és csak akkor teljesül, ha kiinduló pontok által alkotott négyszög húrnégyszög, ezzel pedig beláttuk a tételt. $\square$

Irodalomjegyzék

1. PAUL J. NAHIN, An Imaginary Tale: The Story of i [the square root of minus one], Princeton University Press, 1998.

2. K. A. RIBNYIKOV, A matematika története, Tankönyvkiadó, 1974.

3. DIRK J. STRULIK, A matematika rövid története, Gondolat Kiadó, 1958.

4. JÁRAI ANTAL, Modern alkalmazott analízis, Typotex Kiadó, 2007.

5. R. REMMERT, H.-D. EBBINGHAUS, H. HERMES, F. HIRZEBRUCH, M. KOECHER, K. MAINZER, J. NEUKIRCH, A. PRESTEL, Numbers, Springer, New York, 1995.

6. K. MATTHEWS, Elementary Linear Algebra, Chapter 5., Complex Numbers, University of Queensland, 2005.

7. KISS EMIL, Bevezetés az Algebrába, Typotex Kiadó, 2007.

8. C.R.J. CLAPHAM, Introduction to Abstract Algebra, Routledge & Kegan Paul, 1969.

9. LACZKOVICH MIKLÓS - T. SÓS VERA, Analízis I. és II., Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005. és 2007.

10. MICHAEL ARTIN, Algebra, Prentice Hall, 1991.

11. RALPH PHILIP BOAS, Invitation to Complex Analysis, Random House, 1987.

12. ALEN ALEXANDERIAN, On continuous dependence of roots of polynomials on coefficients, Univ. Texas Austin, 2013, pp. 1-5.

13. HANKA LÁSZLÓ, ZALAY MIKLÓS, Komplex függvénytan Példatár, Műszaki Könyvkiadó, 2003.

14. ROBERT B. BURCKEL, An Introduction to Classical Complex Analysis Vol. 1, Academic Press, 1979.

15. J. P. WARD, Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications, Springer Science+Business Media,1997.

16. JOHN C. BAEZ, The octonions, Bulletin of the American Mathematical Society, 39 (2002.) 145-205.