EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Feladatok a Pell-egyenletek témaköréből

írta
Majoros-Geréby Ádám

Szakdolgozat
Matematika BSc tanári szakirányon

Konzulens: Fried Katalin

Matematikatanítási és Módszertani Központ

2015. június 1.

0.1. Bevezetés

A matematikában gyakran előfordul, hogy a kérdés könnyen megfogalmazható, de nehezen megválaszolható. Tapasztalatom szerint, ha az ember ilyenkor elindul a választ megkeresni, sok olyan helyre juthat el, ahova nem is sejtette, hogy képes. Előfordulhat az is, hogy dolgok, melyekről azt hitte, hogy régen ismer, teljesen új megvilágításba kerülnek. Nekem a diofantikus egyenletek ezt a felfedező utazást jelentik.

Először a háromszögszám-négyzetszám probléma kapcsán találkoztam a Pell-egyenletekkel. Megtetszett a feladat szövegének egyszerűsége. Ahogy elkezdtem a megoldásokat megkeresni, újabb és újabb feladatokhoz jutottam el, érdekes kapcsolatokat fedezhettem fel. A szakdolgozatomat is e logika mentén állítottam össze, azzal a minimális különbséggel, hogy előbb kerül sor az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ egyenlet megoldására, utána következik a feladatok ismertetése. Azért emeltem előre, mert véleményem szerint a feladatok közötti kapcsolat megértését elősegíti az egyenlet összes megoldásának ismerete.

A feladatok során először a $\sqrt{2}$ lánctörtekkel és Newton-módszerrel történő közelítésének kapcsolatát vizsgáltam. Ezután megoldottam a háromszögszám-négyzetszám problémát, majd foglalkoztam Arkhimédész *a Napisten marhái* feladatával. A harmadik fejezetben a háromszögszám-négyeztszám probléma megoldásainak 5 tulajdonságát vizsgáltam.

Mindehhez szeretném megköszönni a témavezetőm, Fried Katalin segítségét, aki mindig sietett válaszolni, végig támogatott és önálló munkára inspirált. Köszönöm barátaim tengernyi türelmét és megértését, szüleim gondoskodását és két nővérem, Sziszi és Móni, kontinenseken, óceánokon, időzónákon átívelő támogatását!

Tartalomjegyzék

1. fejezet

A Pell-egyenlet

1.1. A diofantikus egyenletekről röviden

Diofantikus egyenleteknek nevezzük azokat az egész (vagy racionális) együtthatós algebrai egyenleteket, melyeknek a megoldásait is az egészek körében keressük. [4] Nevüket Diophantoszról, a 3. században élt görög matematikusról kapták, aki Aritmetika című könyvében foglalkozott részletesen vizsgálatukkal. Néhány példa diofantikus egyenletekre[3]: $(a, b, c, n, x, y, z \in \mathbb{Z})$

- $ax+by = c$, lineáris diofantikus egyenlet. Megoldása csak akkor létezik, ha $(a, b) \mid c$.
- $x^2 + y^2 = z^2$, megoldásai a Pitagoraszi számhármasok.
- $x^n + y^n = z^n$, ahol $n > 2$ egyenlet, melynek megoldhatatlanságával a Fermat-sejtés, illetve a későbbi Wiles-tétel foglalkozik.
- $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, az Erdős-Straus-sejtés.
- $x^2 - n \cdot y^2 = \pm c$, a Pell-egyenlet, ahol n nem négyzetszám.

Egy ilyen egyenlet vizsgálatakor a legfontosabb felmerülő kérdések, hogy az egyenlet megoldható-e, ha igen hány megoldása van, létezik-e alapmegoldás, melyből generálható a többi.

Érdekesség, hogy a difonatikus egyenletek a populáris kultúrában is megjelennek, a Simpson család főszereplője az évek során például 2 esetben is „ellenpéldát” ad a Wiles-tételre:[1] $1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$, valamint[2]

[1] Epizód: Treehouse Terror 6
[2] Epizód: The Wizard of Evergreen Terrace, 10. évad, 2. rész

$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$, természetesen mindkettő csak a zsebszámológépek hibahatárán belül igaz.

1.2. A Pell-egyenletek

Pell egyenletnek nevezünk minden $x^2 - n \cdot y^2 = \pm c$ alakú diofantikus egyenletet, ahol n nem négyzetszám. Nevüket John Pell (1611–1685) angol matematikusról kapták, aki az $x^2 - n \cdot y^2 = 1$ speciális eset tulajdonságainak leírásáról publikált számos cikket. Fontos megemlíteni Lord W. Brouncker, 2. Viscount Brouncker (1620–1684) nevét is, aki az egyesült királyságbeli Royal Society első elnöke és Pell közeli munkatársa volt, önállóan is több tanulmánnyal a lánctörtekről és a Pell-egyenletekről.

1.2.1. Az $x^2 - 2 \cdot y^2 = \pm 1$ egyenlet megoldása

Vizsgáljuk az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ egyenlet megoldásait a pozitív egész számok körében! Rövid fejszámolás után látható, hogy az $(x, y) = (1, 0)$ és az $(1, 1)$ eleget tesz a feltételnek, hiszen $1 - 0 = 1$ és $1 - 2 = -1$. A további megoldáspárok keresése érdekében végezzünk algebrai átalakítást az egyenleten!

$$x^2 - 2y^2 = \left(x + y\sqrt{2}\right) \cdot \left(x - y\sqrt{2}\right) = \pm 1 \tag{1.1}$$

Kihasználva, hogy $(\pm 1)^k = \pm 1$ kapjuk:

$$\left(x + y\sqrt{2}\right)^k \cdot \left(x - y\sqrt{2}\right)^k = \pm 1 \tag{1.2}$$

Behelyettesítve $(x, y) = (1, 0)$-t a $k = 0$, valamint $(x, y) = (1, 1)$-t a $k = 1$ esetben:

$$1^0 \cdot 1^0 = 1$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$$

míg $k = 2$ esetén:

$$\left(1 + 1 \cdot \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(1 - 1 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 1 \tag{1.3}$$

Az újabb számpárt ellenőrizve láthatjuk, hogy újabb megoldást kaptunk: $9 - 8 = 1$. Ezzel az eljárással újabb és újabb megoldások kaphatóak meg. Kérdés, hogy minden megoldást megkapunk-e ezzel a módszerrel.

1.2.1. Tétel. (A Pell-egyenlet megoldásai) *$\forall k \in \mathbb{N}$ esetén az*

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^k = x_k + y_k\sqrt{2} \tag{1.4}$$

felírásból kapható $(x_k, y_k) \in \mathbb{N}^2$ számpárokra teljesül, hogy:

1. *megoldásai az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ egyenletnek*
2. *$x^2 - 2y^2 = \pm 1$ összes megoldása felírható ebben az alakban*
3. *Ha $k > 2$, akkor $y_k > 0$; továbbá $x_k^2 - 2y_k^2 = (-1)^k$*

Bizonyítás. $k = 0$ esetén az $x_1 = 0$, $y_0 = 0$, úgynevezett triviális megoldáspárt kapjuk. $k = 1$ esetén pedig az $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ megoldáspárhoz jutunk, mely valóban eleget tesz az egyenletnek. Mindkét pár (1.4) alakban felírható.

Tegyük fel, hogy (u_0, v_0), ahol $v_0 > 1$ megoldása (1.1)-nek. A végtelen leszállás módszerével azt fogjuk belátni, hogy ekkor $(u_0, v_0) \in \mathbb{N}^2$-re

$$u_0 + v_0\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)\left(u_1 + v_1\sqrt{2}\right) \tag{1.5}$$

teljesül úgy, hogy $u_1 = 2v_0 - u_0$, valamint $v_1 = u_0 - v_0$. Ekkor

$$u_1^2 - 2v_1^2 = 4v_0^2 - 4v_0u_0 + u_0^2 - 2u_0^2 + 4u_0v_0 - 2v_0^2 = -\left(u_0^2 - 2v_0^2\right),$$

tehát (u_1, v_1) is megoldása (1.1)-nek. Továbbá miután $v_0 > 1$, ezért:

$$2v_0^2 > 3 \Rightarrow u_0^2 = 2v_0^2 \pm 1 > 1 \Rightarrow u_0 > v_0,$$

amiből pedig $v_1 = u_0 - v_0 > 0$ következik. Ez felhasználható u_1 becslésére:

$$u_1 - v_1 = 3v_0 > v_0 > 0$$

Látható, hogy $u_1 > v_1 > 0$, mert $u_1 = 2v_0 - u_0$, és miután $2v_0 < 2u_0$, ezért $u_1 < u_0$.

Ha most $u_1 > 3$, akkor szükségszerűen $v_1 > 1$ és a végtelen leszállást követve újra elvégezhetjük a (1.5)-ben szereplő átalakítást. Ebből most azt kapjuk, hogy $u_2 = 2v_1 - u_1$, valamint $v_2 = u_1 - v_1$. Az előző gondolatmenethez hasonlóan, most az $u_1 > 3$-ból levezethető, hogy $v_1 > 1$, tehát az is teljesül, hogy $u_1 > u_2 > v_2 > 0$.

Ezzel az (u_k) sorozatról megállapítható, hogy szigorúan monton csökkeni fog, de mindig pozitív marad. Lesz tehát egy legkisebb értéke, mely után nem tudjuk ezt az eljárást tovább folytatni. Ha $u_k > 1$ akkor a (1.5) átalakítás mindig elvégezhető, de a becslések nem lesznek igazak, ha $v_k = 1$. Ellenben, ha $v_k = 1$, akkor $u_k = 1$, amivel látható, hogy újfent megoldást kaptunk.

Ha az u_k sorozat eléri 3-at, abból következik, hogy $v_{k+1} = 1$, tehát a fentebb leírt becslések újfent nem alkalmazhatóak. Vegyük viszont észre, hogy ha $u_k = 3$, akkor $v_k = 2$, ami megoldás, és v_{k+1} értékének meghatározásához a

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

átalakítást végeztük el, mely megfelel a tétel állításainak.

Az állítások közül 1-et, 2-t és a 3. első felét már beláttuk, már csak az szorul tisztázásra, hogy $x_k^2 - 2y_k^2 = (-1)^k$. Mivel az

$$u_1^2 - 2v_1^2 = -\left(u_0^2 - 2v_0^2\right)$$

egyenlőség $k > 1$ esetén is igaz marad, így ezzel a tétel minden állítását beláttuk. □

1.2.2. Megjegyzés. A bizonyítás során nem tértünk ki külön rá, de látható, hogy $\left(1 + \sqrt{2}\right)^k$ páros hatványai a $+1$, a páratlan hatványai -1 eredményre adnak megoldást.

1.2.3. Megjegyzés. $\left(1 + \sqrt{2}\right)^k = u_k + v_k\sqrt{2}$ összefüggés egy rekurziót is meghatároz a megoldáspárokra:

$$u_{k+1} = u_k + 2v_k \tag{1.6}$$

$$v_{k+1} = u_k + v_k \tag{1.7}$$

Ez ellenőrizhető, ha elvégezzük a szorzást:

$$\left(u_k + v_k\sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) = (u_k + 2v_k) + (u_k + v_k)\sqrt{2}.$$

A tétel állításának bizonyításából következik, hogy ezzekkel az összefüggésekkel az összes megoldás megkapható.

2. fejezet

Feladatok

2.1. A $\sqrt{2}$ közelítése

2.1.1. Definíció. (Lánctört) Egy $b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \dots}}}$ alakú törtet lánctörtnek nevezünk. Az egyszerűbb írásmód érdekében ezt a $[b_0; b_1, b_2, b_3, \dots]$ felírással jelöljük.

Látható, hogy a definíció nem korlátozza, hogy ez az eljárás véges vagy végtelen. Természetesen, ha $\alpha \in \mathbb{Q}$, akkor egy véges, ha $\beta \notin \mathbb{Q}$ akkor végtelen lánctört alakban való felírást kapunk, hisz különben létezne olyan $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, hogy $\beta = \frac{p}{q}$, ami ellentmondás.

Ha egy $\beta = [b_0; b_1, b_2, b_3, \dots]$ végtelen lánctörtből csak az első néhány tag felhasználásával készítünk racionális számot, akkor azt a β szám lánctört-alakjának kezdőszeletének nevezzük.

Vizsgáljuk meg, hogyan kapható meg egy racionális szám lánctört alakja!

2.1.2. Példa. Határozzuk meg a $\frac{17}{10}$ lánctört alakját!

Ahhoz, hogy a számláló 1 maradhasson a lánctörtben, alkalmazzuk az alábbi ötletet: osszuk el a 17-et 10-zel maradékosan, és adjuk hozzá a maradék reciprokának a reciprokát!

$$\frac{17}{10} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{10}{7}}$$

Használjuk ugyanezt a gondolatmenetet a továbbiakban is, ezzel meg is találva a keresett alakot:

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{1}{\frac{10}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

Azaz $\frac{17}{16} = [1; 1, 2, 3]$.

2.1.1. Feladat: Határozzuk meg a $\sqrt{2}$ lánctört alakját!

Itt nem alkalmazhatjuk a maradékos osztást, de kihasználhatjuk, hogy $1 < \sqrt{2} < 2$!

$$\begin{aligned}\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \\ = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}}\end{aligned} \tag{2.1}$$

A rekurziót felismerve kapjuk, hogy $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \ldots]$.

Ez egy elég jó közelítést ad nekünk $\sqrt{2}$-re, vizsgáljuk meg az első néhány kezdőszeletet:

$[1; 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$[1; 2, 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$

$[1; 2, 2, 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1{,}41666\ldots$

$[1; 2, 2, 2, 2] = \frac{41}{29} = 1{,}4137931\ldots$

$[1; 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{99}{70} = 1{,}414285714\ldots$

$[1; 2, 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{239}{169} = 1{,}414201183\ldots$

$[1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{577}{408} = 1{,}414215686\ldots$

2.1.3. Megjegyzés. Ha a $\sqrt{2}$ k-adik lánctörtjét $\frac{u_k}{v_k}$-val jelöljük, akkor a számláló és a nevező is egy rekurzív sorozatot alkot, melyekre teljesül, hogy:

$$u_{k+1} = 2v_k + u_k \tag{2.2}$$

$$v_{k+1} = v_k + u_k \tag{2.3}$$

Ugyanis:

$$\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{u_k}{v_k}} = \frac{1+\frac{u_k}{v_k}+1}{1+\frac{u_k}{v_k}} \cdot \frac{v_k}{v_k} = \frac{2v_k+u_k}{v_k+u_k}$$

A törtek ezen előállítása megegyezik az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ gyökeiből képzett hányadosok (1.2.3)-ban látható előállítási módjával!

2.1.2. Feladat: $\sqrt{2}$ közelítése a Newton-módszerrel

A Newton-féle közelítő módszer részletes tárgyalása a dolgozatnak nem célja, de mint eszközt most felhasználjuk $\sqrt{2}$ közelítéséhez. Ugyanis az $f(x) = x^2 - 2$ polinom gyökei a $\pm\sqrt{2}$ számok. A módszer szemléletesen azon alapszik, hogy a gyököt közelítő x_k sorozat $k+1$-dik tagja az a pont, ahol az $(x_k, f(x_k))$-ba húzott érintő az x tengelyt metszi, azaz $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Miután most $f(x) = x^2 - 2$, ezért

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2-2}{2x_k} = \frac{x_k^2+2}{2x_k} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k} \tag{2.4}$$

A $\sqrt{2}$ közelítéséhez már csak egy megfelelő x_0 értékre van szükségünk, aminek jelen esetben 2 teljesen megfelel. Így kapjuk azt, hogy:

$x_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{x_0} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
$x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{x_1} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$=1,416666...
$x_3 = \frac{x_2}{2} + \frac{1}{x_2} = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{577}{408} = 1{,}414215686\ldots$
$x_4 = \frac{x_3}{2} + \frac{1}{x_3} = \frac{577}{816} + \frac{408}{577} = \frac{665857}{470832} = 1{,}414213562\ldots$

2.1.3. A két megoldás összevetése

Ha megnézzük az előző két feladat megoldása során kapott $\sqrt{2}$-t közelítő törteket, érdekes hasonlóságot vehetünk észre. A $\frac{3}{2}$, a $\frac{17}{12}$ és az $\frac{577}{408}$ mindkét esetben szerepel. Sőt, ha a lánctört alakban hozzávesszük a közelítésekhez $[1] = 1$-et is, akkor látható, hogy a lánctörtek 1., 2., 4., és 8. tagjai adják a Newton-módszer közelítő törtjeit! Ahhoz, hogy e kapcsolatot jobban feltárhassuk, foglalkozzunk először a lánctörtekkel és a Pell-egyenletekkel. Lord Brouncker gondolatmenetének egy magyarnyelvű feldolgozása [9]-ben megtalálható, ezt követjük most mi is.

2.1.4. Tétel. (A lánctörtek és a Pell-egyenletek) *Ha (x_k, y_k) az $x^2 - ny^2 = 1$ megoldásai, akkor az $\frac{x_k}{y_k}$ tört a $\sqrt{n}$-t közelítő $[b_0; b_1, b_2, b_3, \ldots, b_i,] = \frac{p_i}{q_i}$ kezdőszelet valamilyen i-re.*

Bizonyítás. Első lépésként becsüljük meg $\left|\sqrt{n} - \frac{x_k}{y_k}\right|$ értékét!

Tudjuk, hogy $x_k^2 - ny_k^2 = 1$. Ez átírható az $(x_k - y_k\sqrt{n}) \cdot (x_k + y_k\sqrt{n}) = 1$ alakba, ahonnan kapjuk, hogy

$$x_k > y_k\sqrt{n},$$

különben a szorzat negatív számot adna. Most ha leosztunk $y_k\,(x_k + y_k\sqrt{n})$-nel, akkor az $\frac{x_k}{y_k} - \sqrt{n} = \frac{1}{y_k\left(x_k + y_k\sqrt{n}\right)}$ egyenlőséghez jutunk, amelyben felhasználva a fentebbi becslést x_k értékére, azt kapjuk, hogy:

$$0 < \frac{x_k}{y_k} - \sqrt{n} = \frac{1}{y_k\,(x_k + y_k\sqrt{n})} < \frac{\sqrt{n}}{y_k\,(y_k\sqrt{n} + y_k\sqrt{n})} = \frac{1}{2y_k^2}$$

Megvan egy felső korlátunk $\left|\sqrt{n} - \frac{x_k}{y_k}\right|$ értékére, a továbbhaladáshoz használjuk Lord Brouncker ötletét!

Indirekt tegyük fel, hogy $\frac{x_k}{y_k} \neq \frac{p_i}{q_i}$ semmilyen i-re. Könnyen látható, hogy a (q_j) sorozat szigorúan monoton növekszik, ezért pontosan egy oylan m index létezik, melyre $q_m \leq y_k < q_{m+1}$. Célunk, hogy ezzel a feltétellel jussunk ellentmondásra. Látható, hogy

$$\left|q_m\sqrt{n} - p_m\right| \leq \left|y_k\sqrt{n} - x_k\right|.$$

y_k pozitív, úgyhogy kiemelhetjük az abszolút értékből, így a bizonyítás elején szereplő becslésből következik:

$$\left|q_m\sqrt{n} - p_m\right| < y_k \cdot \left|\sqrt{n} - \frac{x_k}{y_k}\right| < \frac{1}{2y_k}.$$

Miután q_m is pozitív, ezért ha most osztunk vele, akkor a feltétel az alábbi formát veszi fel:

$$\left|\sqrt{n} - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{1}{2q_m y_k}.$$

Az indirekt feltevés szerint $\frac{x_k}{y_k} \neq \frac{p_m}{q_m}$, amiből következik, hogy $\left|\frac{x_k q_m - y_k p_m}{y_k q_m}\right| > 0$, tehát $|x_k q_m - y_k p_m| \geq 1$. Ezt és a háromszög-egyenlőtlenséget kihasználva:

$$\frac{1}{y_k q_m} \leq \left|\frac{p_m}{q_m} - \frac{x_k}{y_k}\right| \leq \left|\frac{p_m}{q_m} - \sqrt{n}\right| + \left|\sqrt{n} - \frac{x_k}{y_k}\right| < \frac{1}{2y_k q_m} + \frac{1}{2y_k^2}.$$

Az egyenlőtlenség bal és jobb oldala az

$$\frac{1}{q_m} < \frac{1}{2q_m} + \frac{1}{2_{y_k}}$$

alakra egyszerűsíthető, amiből némi algebrai átrendezés után adódik, hogy $2q_k < q_m$, ami ellentmond az indirekt feltevésünknek, így kapjuk, hogy $\frac{x_k}{y_k} = \frac{p_i}{q_i}$ megfelelő i-re. □

Most, hogy a lánctört és a Pell-egyenlet kapcsolatát beláttuk, térjünk vissza a Newton-módszernél észrevett hasonlósághoz! Lord Brouncker bizonyításának gondolata kihasználta, hogy az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$-ből csak a pozitív esetet vizsgálta. Ez sejteti, hogy miért csak az 1., 2., 4., 8., ... esetben egyeztek a közelítő lánctörtek.

Az 1.2.1-ben beláttuk, hogy az $x^2 - 2y^2 = 1$ egyenlet megoldásai generálhatóak $\left(1+\sqrt{2}\right)$ páros hatványaiként. Képezzünk (x_P, y_P) párokat az alábbi módon:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k} = \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^k\right)^2 = \left(u_k + v_k\sqrt{2}\right)^2 = x_P + y_P\sqrt{2}$$

ebből az összefüggésből azt kapjuk, hogy:

$$x_{P+1} = x_P^2 + 2y_P^2 \tag{2.5}$$

$$y_{P+1} = 2x_P y_P \tag{2.6}$$

$x_0 = 3$, $y_0 = 2$ kezdőértékekkel. Ennek a két sorozatnak az azonos idexű elemeinek a hányadosai már a Newton-módszereből származóakkal megegyező törteket szolgáltatnak. Ugyanis, ha bővítjük a hányadost:

$$\frac{x_{P+1}}{y_{P+1}} = \frac{x_P^2 + 2y_P^2}{2x_P y_P} \cdot \frac{\frac{1}{y_P^2}}{\frac{1}{y_P^2}} = \frac{\left(\frac{x_P}{y_P}\right)^2 + 2}{2 \cdot \frac{x_P}{y_P}}$$

Most alkalmazzuk az $x_N = \frac{x_P}{y_P}$ helyettesítést! (ahol N Newtonra utal)

$$\frac{x_{P+1}}{y_{P+1}} =: x_{N+1} = \frac{x_N^2 + 2}{2x_N} \tag{2.7}$$

Amiből rögtön látszik, hogy az $x_0 = 2$, tehát a módszer szerinti *megfelelő* kezdőérték választásával ugyanahhoz a közelítéshez jutunk. Vegyük észre, hogy az (x_P, y_P) számok választásánál az a sejtésünk is igazolódott, hogy az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ egyenlet megoldásaiból csak minden 2^k tagra van szükség a Newton-módszer alkalmazása során.

2.2. A háromszögszám-négyzetszám probléma

2.2.1. Definíció. Háromszögszámoknak az $H_n = \frac{n(n+1)}{2}$ sorozat tagjait nevezzük, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2.2.2. Definíció. Négyzetszámnak a $N_k = k^2$ sorozat tagjait nevezzük, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Mindkét elnevezés abból ered, hogy a síkon ennyi darab pont a megfelelő szabályos sokszögbe rendezhető.

2.2.1. Feladat: Melyek azok az $M \in \mathbb{Z}$ számok, amelyekre $H_n = M = N_k$?

A megfelelő M számok megtalálásához írjuk fel:

$$k^2 = \frac{n\,(n+1)}{2} \tag{2.8}$$

Most mindkét oldalt 8-cal szorozva és némi algebrai átalakítás után kapjuk, hogy:

$$8 \cdot k^2 = 4 \cdot n\,(n+1) = 4n^2 + 4n = (2n+1)^2 - 1$$

Célszerű az $x := 2n + 1$ és $y := 2k$ helyettesítést alkalmazni, ugyanis ezzel és némi átrendezéssel az

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{2.9}$$

diofantikus egyenlethez jutunk. Ennek részletes tárgyalása és megoldása az 1.2.1 részben található. A nevzett fejezetben egy általánosabb, az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ egyenlet oldottuk meg, itt viszont azon (u, v) megoldáspárokra lesz szükségünk, melyekre $u^2 - 2v^2 = 1$. Az 1.2.1 Tétel szerint ehhez $\left(1 + \sqrt{2}\right)$ páros hatványait kell vizsgálnunk. Az első számpár ebből $(u_0, v_0) = (1, 0)$, a második pedig $(u_1, v_1) = (3, 2)$. Ez a két számpár a feladat szempontjából a két úgynevezett triviális megoldást állítja elő. Ugyanis visszahelyettesítve őket $u = 2n+1$ és $v = 2k$ egyenletekbe, a 0 és 1 oldalhosszúságú háromszögeket és négyzeteket kapjuk. A további megoldáspárok hatványozással való előállítása az 1.2.3 Megjegyzéshez hasonlóan egy rekurzív kiszámolási módszert ad az újabb megoldások előállításához. Miután

$$\left(u_k + v_k\sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = \left(u_k + v_k\sqrt{2}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right) =$$
$$= (3u_k + 4v_k) + (2u_k + 3v_k)\sqrt{2}$$

ezért:

$$u_{k+1} = 3u_k + 4v_k \tag{2.10}$$

$$v_{k+1} = 2u_k + 3v_k \tag{2.11}$$

Ebből pedig H_n-re és N_k-ra is egy rekurziót kapunk, ha a (2.9) előtti helyettesítéseket visszafejtjük.

2.2.3. Megjegyzés. Azon H_n és N_k számok, melyek egyaránt háromszög- és négyzetszámok is, rekurzívan előállíthatóak $x^2 - 2y^2 = 1$ (u_k, v_k) megoldáspárjaiból az alábbi módon:

$$N_k = \frac{2u_k + 3v_k}{2} \tag{2.12}$$

$$H_n = \frac{3u_k + 4v_k - 1}{2} \tag{2.13}$$

M_k értékére is meghatározható képlet, mely az (u_k, v_k) megoldásokból generálja a sorozatot. Ennek leírásához célszerű a (2.9) összefüggést egy kissé átrendezve felhasználni.

$$x^2 - 2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{2}$$

2.2.4. Megjegyzés. A háromszögszám-négyzetszámok M_k sorozata előállítható $x^2 - 2y^2 = 1$ (u_k, v_k) megoldásaiból:

$$M_k = \frac{v_k^2}{4} = \frac{(u_k+1)\cdot(u_k-1)}{8} \tag{2.14}$$

Az $(u_k, v_k) = (1, 0)$ értékekből kiindulva és a (2.10)–(2.14) összefüggéseket felhasználva tehát kapjuk a háromszögszám-négyzetszám probléma első néhány megoldását:

k	u_k	v_k	H_k	N_k	M_k
0	1	0	0	0	0
1	3	2	1	1	1
2	17	12	8	6	36
3	99	70	49	35	1225
4	577	408	288	204	41616
5	3363	2378	1681	1189	1413721
6	19601	13860	9800	6930	48024900
7	114243	80782	57121	40391	1631432881
...	...	...	...	...	...

2.3. A Napisten marhái

A következő problémát Arkhimédész egy Eratoszthenésznek írt levelében találták. A feladat szövegének elkészítéséhez az eredeti szöveg angol nyelvű fordításaiból [6] válogattam.

Ó, idegen, mondd meg Nékem, hányan voltak Napisten marhái Thrínakié szigetén, a csodás Szicíliában! Négy szín szerint négy gulyába rendeződve, az egyik tejfehér, a másik fényes fekete, a harmadik sárga az utolsó pedig tarka. Mindegyik gulya bővelkedett bikákban, számuk e törvény szerint rendeződött: a fehér bikák annyian voltak, mint a fekete bikák fele meg egyharamada összeterelve a sárga bikákkal. A fekete bikák száma épp megegyezik a tarkák negyedének és ötödének számával, ha őket is a sárgákhoz tereljük. Továbbá ha a sárga bikákhoz most a fehérek hatodát és hetedét tereled, pont annyit bikát kapsz, ahányan a tarka bikák vannak. A tehenek aránya az alábbi volt: A fehér tehenek száma pontosan harmada és negyede a teljes fekete gulyának, míg a fekete tehenek száma egyezett a tarka marhák negyedével és ötödével, mikor a tehenek és bikák együtt mehettek legelni. Figyelj, a tarka tehenek számukban megegyeznek az ötödével és hatodával a sárga gulyának. Végül, a sárga tehenekről mondható, hogy annyian legelésznek mint a fehér gulya hatoda és hetede. [...]

Ha mindezt jól megjegyezted, ügyelj még e két megkötésre: mikor Héliosz letekintett marháira, látta, hogy ha összeereszti fekete és fehér bikáit, azok olyan alakzatba rendeződnek melynek hossza épp annyi mint szélessége. És mikor sárga és tarka bikáit ereszti össze, azok olyan formában állnak, hogy áll elől egy, mögötte kettő, és a sok sor végül egy nagy härömszöget formáz Thrínakié lejtőin. És ha így legeltek a bikák egy se hiányzott és egy se maradt ki! Ezeket eszedben tartva, idegen, mondd meg, hány bikája és tehene volt a négy gulyában, egyenként, Napistennek?

A feladatot két részletben célszerű megoldani. Először tekintsünk el attól, hogy milyen alakzatot formálnak a bikák összeterelve. Ha most az ismeretleneket rendre a *világos, fekete, sárga, tarka, tehén, bika* szavak kezdőbetűivel jelöljük, akkor a feladat első részéből az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$V_b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) F_b + S_b \tag{2.15}$$

$$F_b = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) T_b + S_b \tag{2.16}$$

$$T_b = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) V_b + S_b \tag{2.17}$$

$$V_t = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (F_t + F_b) \tag{2.18}$$

$$F_t = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(T_t + T_b) \tag{2.19}$$

$$T_t = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(S_t + S_b) \tag{2.20}$$

$$S_t = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(V_t + V_b) \tag{2.21}$$

Észrevehető, hogy a sárgától különböző bikák száma könnyen meghatározható, például

$$V_b = \frac{5}{6}\left(\frac{9}{20}\left(\frac{13}{42}V_b + S_b\right) + S_b\right) + S_b = \frac{13}{112}V_b + \frac{53}{24}S_b.$$

F_b és T_b hasonlóan megkapható S_b többszöröseként, így jutunk el oda, hogy:

$$V_b = \tfrac{742}{297}S_b,\ F_b = \tfrac{178}{99}S_b \text{ és } T_b = \tfrac{1580}{891}S_b.$$

Miután a marhák számának egésznek kell lennie *(lásd Odüsszeia...)*, így S_b-nek oszthatónak kell lennie 297-tel, 99-cel és 891-gyel. Miután $99 = 3^2 \cdot 11$, $297 = 3^3 \cdot 11$ valamint $891 = 3^4 \cdot 11$, ezért a legkisebb közös többszörösük 891.

Tehát $S_b = 891 \cdot n$, amiből $V_b = 2226 \cdot n$, $F_b = 1602 \cdot n$ és $T_b = 1580 \cdot n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

Ezeket az eredményeket felhasználva, elkezdhetjük meghatározni a gulyákban lévő tehenek számát. Például:

$$V_t = \frac{7}{12}\left(\frac{9}{20}\left(\frac{11}{30}\left(\frac{13}{42}(V_t + 2226n) + 891n\right) + 1580n\right) + 1602n\right).$$

Ebből, és hasonló behelyettesítésekből, a tehenekre az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$V_t = \tfrac{7206360}{4657}n,\ S_t = \tfrac{5439213}{4657}n,\ T_t = \tfrac{3515820}{4657}n \text{ és } F_t = \tfrac{4893246}{4657}n.$$

Miután továbbra is igaz a feltétel, hogy a marhák darabszáma egész szám kell hogy legyen, valamint a 4657 egy prímszám, ezért kapjuk az összefüggést, hogy $n = 4657 \cdot k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ezzel eljutottunk az első feladatrész állításaiból következő megoldásokhoz, mégpedig:

$$V_b = 10366482k$$

$$V_t = 7206360k$$
$$F_b = 7460514k$$
$$F_t = 4893246k$$
$$S_b = 4149387k$$
$$S_t = 5439213k$$
$$T_b = 7358060k$$
$$T_t = 3515820k$$

Ami összesen pedig $50389082k$, $k \in \mathbb{Z}$ darab marhát jelent Thrínakié lejtőin.

A feladat második részének megoldását csak nagy lépésekben, a fontos gondolati elemeket kiemelve tárgyaljuk, ugyanis a precíz, minden részletre kiterjedő megoldás túl hosszú a dolgozat kereteihez mérten. Egy teljes megoldás található az [1] cikkben.

Vizsgáljuk meg hát a marhák elhelyezkedésének alakzatára vonatkozó feltételeket! Az elsőből:

$$F_b + V_b = l^2 \tag{2.22}$$

$$S_b + T_b = \frac{m \cdot (m+1)}{2} \tag{2.23}$$

ahol l,$m \in \mathbb{Z}$. Miután mindkét esetben a bal oldal k többszöröse, ezért érdemes k-t kifejezni az egyenletekből. Vizsgáljuk először (2.22)-et.

$$l^2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot k$$

A számok könnyebb kezelése céljából alkalmazzuk az $a = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$ helyettesítést, amivel $l^2 = 2^2ak$-t kapjuk, ahonnan:

$$k = \frac{l^2}{2^2a} = \frac{l^2}{2^2a^2} \cdot a$$

Legyen $Y = \frac{l}{2a}$, így ugyanis $k = Y^2a$. Térjünk át (2.23)-ra.

$$\frac{m \cdot (m+1)}{2} = 11507447k = 7 \cdot 353 \cdot 4657 \cdot k$$

Hasonlóan az előzőhöz, itt most $b = 7 \cdot 353 \cdot 4657$ jelölést vezetjük be. Így kapjuk, hogy $\frac{m \cdot (m+1)}{2} = b \cdot k$. Szorozzunk kettővel és alakítsuk a bal oldalt teljes négyzetté:

$$(2m+1)^2 = 8bk + 1 = 8abY^2 + 1$$

Alkalmazva az $X = 2m+1$ helyettesítést eljutunk az alábbi Pell-egyenlethez:

$$X^2 - 410286423278424 \cdot Y^2 = 1 \tag{2.24}$$

A ma ismert nuemrikus módszerek, valamint a könnyen elérhető nagy számoló képességgel rendelkező számítógépek segítségével könnyen található néhány megoldás. A megoldás hossza és bonyolultsága többek között Calkinsban [2] is felvetette a kérdést, hogy Arkhimédész valóban ismerte-e a pontos választ és a megoldáshoz vezető utat a Napisten marhái problémára. Érdemes még megjegyezni, hogy 1931-ben a *The New York Times*-ban megjelent, hogy a problémát megoldották, de a pontos értéket csak közelíteni tudták. Az akkori szerkesztő, *Norman Merriman*, szerint a megoldás akkora, hogy *ezer embernek, ezer évig kellene számolnia.*[1] A legkisebb megoldás[2] ugyanis:

$$7{,}76027140648681826953023283321388666423232224\ldots \cdot 10^{206544}$$

Calkins megemlíti, hogy becslése szerint, ennyi marha térfogata nagyobb, mint a Napé.

[1] Normann Merriman, *The New York Times*, 54 old., 1931.01.18

[2] OEIS Foundation Inc. (2011), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://oeis.org/A096151

3. fejezet

A $H_{M,n}$ és $N_{M,k}$ sorozatok kapcsolata

$H_{M,n}$-en és $N_{M,k}$-n a 2.2.1 és 2.2.2-ben definiált sorozatokból képzett azon részsorozatokat értjük, melynek H_n és N_k tagjai eleget tesznek a háromszög-négyszög egyenlőségnek.
Az egyszerűség kedvéért ezeket a sorozatokat innentől (h_k), (n_k) jelöli.

$$n_k = 0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, \dots \tag{3.1}$$

$$h_k = 0, 1, 8, 49, 288, 1681, 9800, 57121, \dots \tag{3.2}$$

3.1. Észrevételek

Ezekről a sorozatokról az alábbi megállapításokat tehetjük:

1. Az (n_k) sorozat rekurzívan előállítható: $n_{k+1} = 6n_k - n_{k-1}$.
2. A (h_k) sorozat rekurzívan előállítható: $h_{k+1} = 6h_k - h_{k-1} + 2$.
3. Az (n_k) sorozat nem rekurzív előállítása: $n_k = \frac{(3+2\sqrt{2})^k-(3-2\sqrt{2})^k}{4\sqrt{2}}$.
4. A (h_k) sorozat nem rekurzív előállítása: $h_k = \frac{(3+2\sqrt{2})^k+(3-2\sqrt{2})^k-2}{4}$.
5. (n_k) páronként vett összegsorozata megegyezik (h_k) páronként vett különbségsorozatával, azaz $n_{k+1} + n_k = h_{k+1} - h_k$.

Nézzük meg sorjában az észrevételeket. A 2.2.3 megjegyzés sejteti, hogy n_k és h_k előállítható rekurzívan, de nem ad egy könnyen kezelhető formulát rájuk. A rekurzió megsejtéséhez érdemes néhány taqgot az előzőek lineáris kombinációjaként előállítani:

$$\begin{cases} 35 = x \cdot 6 + y \cdot 1 \\ 204 = x \cdot 35 + y \cdot 6 \end{cases}$$

Most y-t az elsőből kifejezve

$$204 = x \cdot 35 + (35 - 6 \cdot x) \cdot 6,$$

amiből pedig azt kapjuk, hogy $x = 6$ és $y = -1$.

3.1.1. Tétel. *A (3.1)-ben definiált (n_k), $k = 0, 1, 2, \ldots$ sorozat eleget tesz az*

$$n_{k+1} = 6n_k - n_{k-1} \tag{3.3}$$

rekurziónak.

Bizonyítás. Az állítás belátásához egy rövid indukciós gondolatmenetet fogunk követni. $k = 4$-ig a rekurzió teljesül.

Vizsgáljuk tehát a sorozatot akkor, amikor $k > 4$. (2.12)-ből tudjuk, hogy

$$n_k = \frac{2u_k + 3v_k}{2},$$

ahol u_k és v_k a (2.9) Pell-egyenlet megoldásai. Tehát:

$$6n_k - n_{k-1} = 6 \cdot \frac{2u_k + 3v_k}{2} - \frac{2u_{k-1} + 3v_{k-1}}{2}.$$

(2.11)-ben leírtak szerint: $2u_{k-1} + 3v_{k-1} = v_k$, így összevonhatunk:

$$6n_k - n_{k-1} = \frac{12u_k + 17v_k}{2}.$$

A továbblépéshez csoportosítsuk az együtthatókat! $12 = 3 + 3 + 2 + 2 + 2$ és $17 = 4 + 4 + 3 + 3 + 3$. Ezt felhasználva:

$$6n_k - n_{k-1} = \frac{2 \cdot (3u_k + 4v_k) + 3 \cdot (2u_k + 3v_k)}{2} = \frac{2u_{k+1} + 3v_{k+1}}{2} = n_{k+1}.$$

Pontosan ezt kerestük, az állítást ezzel beláttuk. □

A 2. állításhoz eljutni valamelyest több műveletet igényel. A szokásos, 2 tagot leíró, próbálkozások rendre nem egész együtthatókat határoznak meg. Ez azt sejteti, hogy a rekurzióban egy konstans tag is szerepel:

$$\begin{cases} 49 = x \cdot 8 + y \cdot 1 + z \\ 288 = x \cdot 49 + y \cdot 8 + z \\ 1681 = x \cdot 288 + y \cdot 49 + z. \end{cases}$$

A középső egyenletből $z = 288 - x \cdot 49 - y \cdot 8$ kifejezhető, tehát két egyenlet marad:

$$\begin{cases} 239 = x \cdot 49 + y \cdot 7 \\ 1393 = x \cdot 239 + y \cdot 41. \end{cases}$$

ahonnan $x = 6$, $y = -1$ és $z = 2$. Ez az egyenletrendszer arra is rámutat, hogy (h_k) további rekurzív sorozatokkal is kapcsolatban áll.

3.1.2. Tétel. *A (3.2) szerinti (h_k), $k = 0, 1, 2, \ldots$ sorozat $k+1$-ik tagja megkapható:*

$$h_{k+1} = 6h_k - h_{k-1} + 2. \tag{3.4}$$

Bizonyítás. Az állítás bizonyításának gondolatmenete hasonló a 3.1.1-ben leírtakhoz. Fentebb ellenőriztük, hogy az állítás $k = 5$-ig teljesül, úgyhogy továbbléphetünk az induktív gondolattal a $k > 5$ esetre.

$$6h_k - h_{k-1} + 2 = 6 \cdot \frac{3u_k + 4v_k - 1}{2} - \frac{3u_{k-1} + 4v_{k-1} - 1}{2}.$$

A (2.10)-beli számítások szerint $3u_{k-1} + 4v_{k-1} = u_k$, tehát:

$$6h_k - h_{k-1} + 2 = \frac{17u_k + 24v_k - 1}{2}.$$

Az előző tétel ötletéhez hasonlóan, itt is alkalmazzuk, hogy $17 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2$, valamint $24 = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3$

$$6h_k - h_{k-1} + 2 = \frac{3 \cdot (3u_k + 4v_k) + 4 \cdot (2u_k + 3v_k) - 1}{2} = h_{k+1}$$

amivel igazoltuk az állítást $\square$

A további tulajdonságok vizsgálatához felhasználunk némi lineáris algebrai ismeretet. Amint ismeretes (Freud [8]), a Fibonacci-jellegű rekurzív sorozatok 2-dimenziós vektorteret alkotnak. 2-dimenziósak, ugyanis az első két tag szabadon megválasztható. Ezzel a megközelítéssel a probléma egy generátorrendszer keresési feladat az $a_n = \alpha \cdot a_{n-1} + \beta \cdot a_{n-2}$, $(\alpha, \beta, a_i \in \mathbb{R})$ alakú sorozatok vektorterében.

E gondolatmenet és Lovász [10] a Fibonacci sorozat generátorfüggvényének meghatározásához használt ötlete mentén elindulva vizsgáljuk meg a 3. pont állítását:

3.1.3. Tétel. *A (3.1)-ben definiált (n_k) sorozat tagjai megkaphatóak az alábbi képlettel:*

$$n_k = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^k - (3 - 2\sqrt{2})^k}{4\sqrt{2}}. \tag{3.5}$$

Bizonyítás. Közelítsük a sorozat elemeit egy $c \cdot q^k$ mértani sorozat elemeivel. Miután (n_k) eleget tesz egy rekurziónak, ezért olyan mértani sorozatot keresünk, melyre teljesül, hogy:

$$c \cdot q^k = 6c \cdot q^{k-1} - c \cdot q^{k-2}.$$

Most leosztva $c \cdot q^{k-2}$-vel, és némi átrendezés után a $q^2 - 6q + 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei:

$$q_1 = 3 + 2\sqrt{2}$$
$$q_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

Két sorozatot kaptunk tehát:

$$G^{(1)} = c\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k,$$

valamint

$$G^{(2)} = c\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^k.$$

Hamar látható, hogy nincsen oylan c érték, melyre az eredeti (n_k) sorozat tagjait kapnánk. A továbblépéshez Leonhard Euler 1778-as trükkjét fogjuk alkalmazni, aki rámutatott, hogy a különbségsorozatra is teljesül a rekurziós feltétel, és annak elemei már majdnem az eredeti sorozatot adják vissza. $G_1^{(1)} - G_1^{(2)} = 4\sqrt{2} \cdot c$ és $G_2^{(1)} - G_2^{(2)} = 24\sqrt{2} \cdot c$ amiből látható, hogy $c = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ választásával a keresett kifejezéshez jutunk. □

Térjünk át a 4. állítás bizonyítására.

3.1.4. Tétel. *A (3.2)-ben definiált (h_k) sorozat tagjainak nem rekurzív előállítása az alábbi módon kapható:*

$$h_k = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^k + (3 - 2\sqrt{2})^k - 2}{4}. \tag{3.6}$$

Bizonyítás. Mint már említettük, a Fibonacci-jellegű rekurziók 2-dimenziós vektorteret alkotnak, ezért a generátorfüggvény kereséséhez a 3.1.3-hez hasonló módón állhatunk hozzá. Az első komoly eltérést az adja, hogy a $c \cdot q^k$ mértani sorozattal való közelítés a

$$c \cdot q^k = 6c \cdot q^{k-1} - c \cdot q^{k-2} + 2$$

összefüggést adja. Ez a kifejezés, ellentétben az előzővel, egy inhomogén kifejezés. Érdemes tehát az eltoltjával számolni, hogy a generátorfüggvényt meghatározhassuk. Az eltoltoltból az előző tételhez hasonlóan a $q^2 - 6q + 1 = 0$ egyenlet megoldásával ismét a

$$q_1 = 3 + 2\sqrt{2}$$
$$q_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

megoldásokhoz jutunk. Legyen tehát újfent $G^{(1)} = c\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^k$ és $G^{(2)} = c\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^k$. Látható, hogy $G_1^{(1)} + G_1^{(2)} = c \cdot 6$, valamint $G_2^{(1)} + G_2^{(2)} = c \cdot 34$. Ez a generátorfüggvény viszont a 2-vel eltolt sorozathoz tartozik. Most, ha visszatoljuk, akkor $G_1^{(1)} + G_1^{(2)} - 2 = c \cdot 6 - 2$ és $G_2^{(1)} + G_2^{(2)} - 2 = c \cdot 34 - 2$, amiből látható, hogy ebben az esetben $c = \frac{1}{4}$. □

A generátorfüggvények meghatározása után következzen a két sorozat kapcsolatának vizsgálata.

3.1.5. Tétel. *$n_{k+1} + n_k = h_{k+1} - h_k$, minden $k = 0, 1, 2\ldots$-re.*

Bizonyítás. Használjuk fel a bizonyításhoz a 3.1.3-ben és 3.1.4-ben bizonyított tételeket a generátorfüggvényekről.

$n_{k+1} + n_k$-ra adja nekünk az alábbi összefüggést:

$$\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{k+1} - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{k+1}}{4\sqrt{2}} + \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{k} - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{k}}{4\sqrt{2}}$$

Érdemes a k-adik hatványon lévő tagokat kiemelni, így ugyanis a

$$\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{k}\left(4+2\sqrt{2}\right) - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{k}\left(4-2\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{2}}$$

öszefüggést kapjuk. Hasonlóan ehhez, a generátorfüggvénybe helyettesítve, a $h_{k+1} - h_k$ az alábbi különbséget adja:

$$\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{k+1} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{k+1} - 2}{4} - \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{k} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{k} - 2}{4},$$

elvégezve itt is az előzőhöz hasonló kiemeléseket, és kihasználva, hogy $-2 - (-2) = 0$:

$$\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{k}\left(2+2\sqrt{2}\right) + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{k}\left(2-2\sqrt{2}\right)}{4}$$

alakhoz jutunk. Az összeg második tagjából -1-et kiemelve, és a törtet $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$-vel bővítve:

$$\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{k}\left(4+2\sqrt{2}\right) - \left(3-2\sqrt{2}\right)^{k}\left(4-2\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{2}},$$

ami megegyezik $n_{k+1} + n_k$ felírásával, ezzel az állítást bizonyítottuk. □

Irodalomjegyzék

[1] Nelson, H. L.: A Solution to Archimedes' Cattle Problem, *Journal of Recreational Mathematics*, **13:3**, 162-176, (1980-81).

[2] Calkins, Keith G.: Archimedes' Problema Bovinum, *Andrews University*, (1975,1981,1995). (http://www2.andrews.edu/~calkins/profess/cattle.htm, letöltés ideje: 2015.05.27, 00:08)

[3] Weisstein, Eric W.: Diophantine Equation, *MathWorld–A Wolfram Web Resource*, (2014). (http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html, letöltés ideje: 2015.05.27, 14:27)

[4] Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet, *Nemzeti Tankönyvkiadó*, 280-286, 334-340, 365-376, (2006).

[5] Matthews, Keith R.: The Diophantine Equation $x^2 - Dy^2 - N$, $D > 0$, *Expositiones Mathematicae*, **18**, 323-331, (2000). (A cikk javított változata elérhető a http://www.numbertheory.org/pdfs/patz5.pdf oldalon. Letöltés ideje: 2015.05.27, 14:59)

[6] Rorres, Chris: The Cattle Problem Statement in English, *New York University - Department of Mathematics*, (1995). (http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Statement.html, letöltés ideje: 2015.05.27)

[7] Dickson, Leonard Eugene: History of The Theory of Numbers - Volume II - Diophantine Analysis, *AMS Chelsea Publishing*, 1-30, (1919,2000). (A teljes könyv letölthető a https://books.google.hu oldalról. Utolsó letöltés ideje: 2015.05.31, 13:11)

[8] Freud Róbert: Lineáris algebra, *ELTE Eötvös Kiadó*, 253-258, (1996,2009)

[9] Papp Franciska: A Pell-egyenlet és története, *ELTE szakdolgozat*, 17-21, (2011). (https://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_matelem/2011/papp_franciska.pdf, letöltés ideje: 2015.05.31, 14:52)

[10] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika, *TYPOTEX Kiadó*, 80-83, (2010).