Rényi Alfréd doktori disszertációja

Matematika Bsc

Szakdolgozat

Írta: Obermayer Réka

Matematika Bsc, tanári szakirány

Témavezető: Pálfy Péter Pál egyetemi tanár

Algebra és számelmélet tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2015

Tartalomjegyzék

Bevezetés 4

I. fejezet: Rényi Alfréd élete 6

I.1. Rényi Alfréd felmenői 6

I.2. Gyermekkora és az egyetem előtti évek 7

I.3. Bejutás az egyetemre és a II. világháború borzalmai 9

I.4. A háború utáni újrakezdés, a Leningrádban eltöltött idő 9

I.5. A matematikai közélet fontos személyisége 10

I.6. A család 13

II. fejezet: Rényi Alfréd doktori disszertációja 14

II.1. A téma 14

II.2. A disszertáció első fejezete 15

II.3. A disszertáció második fejezete 17

II.4. Cauchy-Fourier sorok 21

Irodalomjegyzék 26

Képjegyzék 26

Bevezetés

Szakdolgozatom témájául először számelméletet választottam, mert első egyetemi félévemben fontos szerepet játszott matematikai tudásom fejlődésében, és mint első tantárgyaim egyike meghatározó élményt jelentett számomra. Rényi Alfréd számelmélete pedig azért fogott meg, mert történelem minorom által kötődöm a XX. századhoz, melynek Rényi kiemelkedő személyisége és matematikusa volt. Rényi Alfréd életének és munkásságának kutatása alatt azonban a szakdolgozatom témája elterelődött a komplex függvénytan irányába, amelyben Rényi doktori disszertációjának van szerepe, mely ebben a témában íródott. A matematika Bsc alatt nem volt lehetőségem komplex függvénytannal foglalkozó kurzus hallgatására, ezért ez a terület ismeretlen volt számomra.

Dolgozatom első fejezetében Rényi Alfréd életével foglalkozom. Rényi Alfrédot szeretném bemutatni mint matematikust, a század matematikai közéletének kiemelkedő alakját; mint sokoldalú tudóst, aki az életének fő területe mellett szívesen foglalkozott többek között zenével és irodalommal; és mint embert, aki közvetlen személyiségével és hihetetlen optimizmusával kitörölhetetlen nyomot hagyott kortársai szívében.

A második fejezet tárgya Rényi doktori disszertációja, melyet Szegeden védett meg 1945 júniusában. Ez a tanulmány a fiatal Rényi első komoly írásai közé tartozik, ezért fontos mérföldkövet jelentett életében. A disszertáció további érdekessége, hogy nem lehet tudni, mi a valódi címe. Az értekezés címoldalán „Egy Stieltjes féle integrálról” felirat szerepel, míg Rényi munkáinak jegyzékében ugyanez a dolgozat "Cauchy-Fourier sorok szummálhatóságáról" néven van feltüntetve.

Szakdolgozatom az eredeti terv szerint Rényi Alfréd számelméleti munkásságával foglalkozott volna, de a doktori disszertáció, mely a komplex függvénytan témakörében íródott, eltérített eredeti elképzelésemtől. Témám Rényi kandidátusi értekezése lett volna, melyet 1947 júniusában nyújtott be. Ez a disszertáció egy olyan időszak gyümölcse, melyet teljes egészében a matematikának szentelhetett a szerző. A munka tárgykörét a Goldbach-sejtés képezi. A Goldbach-sejtés azt mondja ki, hogy

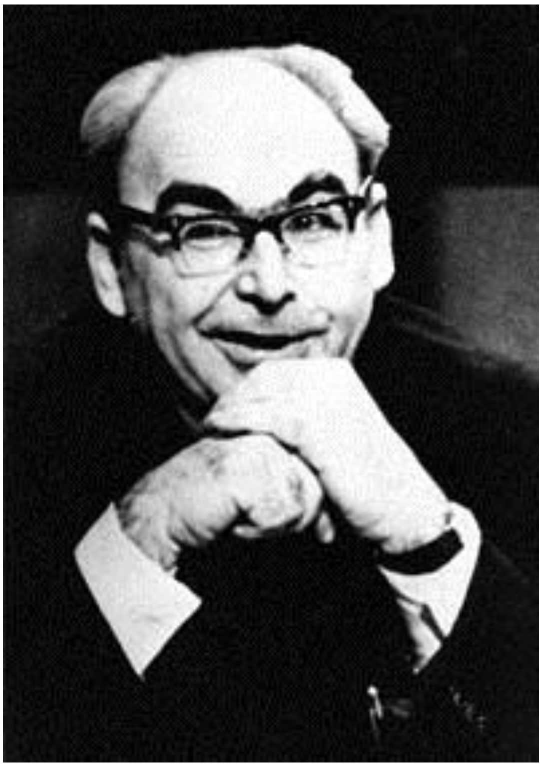
1. Minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.
2. Minden 5-nél nagyobb páratlan szám előáll három prímszám összegeként.

A sejtés első állítását szokás erős Goldbach-sejtésként, a másodikat pedig gyenge Goldbach-sejtésként emlegetni. A problémát Christian Goldbach, porosz matematikus vetette fel 1742-

ben egy Leonhard Eulernak írt levelében. Euler rámutatott arra, hogy az első állításból következik a második, ennek köszönhető az erős ill. gyenge elnevezések használata. Rényi a kérdést az ún. „nagy szita" módszerrel közelítette meg, s ezzel bizonyított egy gyengébb állítást: Létezik olyan K korlát, melyre teljesül az, hogy minden páros szám felírható egy prímszám és egy olyan szám szorzataként, amely előáll legfeljebb K prím szorzataként. Az erős Goldbach-sejtés mind a mai napig megoldatlan, a gyenge Goldbach-sejtésre a közelmúltban születtek eredmények.

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Pálfy Péter Pál tanár úrnak a konzultációk során nyújtott segítségét és hogy biztosította a szakdolgozatomhoz szükséges Rényi-munkákhoz való hozzáférésemet.

I. fejezet: Rényi Alfréd élete



1. számú kép: Rényi Alfréd

(1921. március 20.-1970. február 1.)

„Ha rossz kedvem van, matematizálok, hogy jó kedvem legyen. Ha jó kedvem van, matematizálok, hogy megmaradjon a jó kedvem.”

/Rényi Alfréd/

I.1. Rényi Alfréd felmenői

Rényi Alfréd családi hátterének és életének összefoglalásához dr. Czeizel Endre Matematikusok, gének, rejtélyek c. könyvét és Rényi Zsuzsanna Dialógusok egy matematikusról c. művét vettem alapul.

Rényi apai nagyapja még Rosenthal Alfréd (1838-1898) néven látta meg a napvilágot. A Rosenthal nevet csak 1909-ben váltotta fel a Rényi vezetéknév, mikor a család zsidó hitéről áttért a római katolikus vallásra.

A sokoldalú nagyapa foglalkozott bányászattal, állattenyésztéssel és sétabotok gyártásával is élete során. Rosenthal Alfréd Hirschler Ilonát (1848-1926) vette feleségül, aki a magyar orvoslás történetében fontos szerepet játszó Hirschler családból származott. Házasságukból négy gyermek született. Harmadik gyermekük volt Artúr (1884-1951), kinek személyében Rényi Alfréd édesapját tisztelhetjük. Rényi Artúr gépészmérnöki és közgazdászi végzettséggel bírt és kivételes nyelvérzékkel rendelkezett. A Ganz Rt. főfelügyelői posztját töltötte be, de ezen kívül még törvényszéki hiteles tolmácsként is működött.

Rényi Alfréd édesanyja szintén kikeresztelkedett zsidó családból származott, a XX. század jelentős filozófusának és esztétájának, Alexander Bernátnak (1850-1927) és Broessler Reginának (1856-1922) ötödik gyermekeként jött világra. Alexander Borbála (1892-1946) fotóművészként vált híressé.

Alexander Borbála és Rényi Artúr 1920. május 5-én keltek egybe. Házasságukból egyetlen gyermek született: Alfréd.

I.2. Gyermekkora és az egyetem előtti évek

Rényi Alfréd 1921. március 20-án született Budapesten. Már korán megmutatkozott érdeklődő természete. A kis „Buba", ahogy barátai szólították, elemi iskolai tanulmányait magántanulóként végezte. Ekkoriban még szent meggyőződése volt, hogy történészként ő fogja megtalálni Atlantiszt, az eltűnt földrészt. Rájött, hogy ehhez nem lesz elég szimplán történelmi és geológiai tudásra támaszkodnia, hanem a csillagászattal is behatóan kell foglalkoznia. A csillagászat megértéséhez pedig fizikára van szüksége, melynek jelenségei leginkább matematikával írhatóak le. Így kötelezte el magát a matematika mellett.

Gimnáziumi tanulmányainak színhelye a Mintagimnázium, a mai Trefort Ágoston Gyakorlóiskola volt. Rényi itt töltött évei alatt mindig kitűnő eredménnyel zárta a tanévet. Ekkorra figyelmének középpontjában már valóban a matematika állt. Tehetségének kibontakoztatásában segítségére volt Péter Rózsa, gimnáziumi matematikatanára. Rényi Alfréd 1939 őszén részt vett a nagyhírű Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társaság tanulmányi versenyén és matematikából dicséretet kapott. A gimnáziumban görög nyelvet tanult, tanára Bárczi Géza volt. Édesapjához hasonlóan Rényi Alfréd is kiváló nyelvérzékkel rendelkezett. Görög nyelvből tanulmányi versenyt nyert.

Az érettségit 1939-ben tette le. Rényi mint osztályának legjobb tanulója végezte el a középiskolát és kitűnő érettségi vizsgával büszkélkedhetett. Mindezek dacára nem nyert felvételt az egyetemre. A történtek hátterében a numerus clausus, az 1920. évi XXV. törvénycikk áll, mely szabályozta a „magyarországi nemzetiségek és népfajok" részvételét a felsőoktatásban. A törvény alapján egyik nemzetiség és népfaj sem kaphatott a magyarországi társadalomban való részesedésénél több helyet az egyetemi oktatásban. A korszakban a zsidóság 6%-ot képviselt országunkban.

Barátai Rényi Alfrédot, „Bubát", mint szellemes, érdeklődő, mindenben ügyes, minden mókában és csínytevésben benne levő gyermekként írták le. Kiemelkedő iskolai teljesítményei mellett néhány intőt is kapott különböző diákcsínyei miatt. Stiklijei közül egyet szeretnék megemlíteni: „Buba" gimnazistaként egymásra pakolta az osztályteremben található asztalokat és székeket, s építménye legtetejéről egy szék éppen egy tanerő feje felé vette irányát.

Gyermekkori barátaival a kapcsolatot, igaz kisebb-nagyobb megszakításokkal tarkítva, élete végéig tartotta. Baráti köre nagyon sokszínű volt. Találhatunk benne olyan személyeket, akik felnőtt életükben irodalmárként, zenészként, újságíróként, történészként vagy más területek értékes szakembereiként szerepeltek a közéletben. A társaság tagjai között volt némi korkülönbség, ennek dacára könnyen megértették egymást. Ennek a színes kör tagjai közé tartozott Kende Péter, szociológus és politikai esszéista; Kende Éva, orvos (a Kende-testvérek „megörökölt" barátok, ugyanis Rényi Artúr és Kende Zsigmond, Péter és Éva édesapja egy baráti körhöz tartoztak); Devecseri Gábor, költő, író és klasszikafilológus; Devecseri Péter, Gábor fiatalon elhunyt öccse; Huszár Klára, operarendező és dalszövegíró, Devecseri Gábor felesége; Gimes Miklós, újságíró, aki az 1956-ot követő megtorlás egyik áldozatává vált; Karinthy Ferenc, „Cini", író; Karinthy Gábor, költő; Kertész Tamás; Szilágyi János György, művészettörténész; Vajna János, Pulitzer-díjas újságíró; valamint Bogárdi Mihály, gyermekgyógyász. A rengeteg felsorolt név ellenére ez a lista még mindig nem mutat teljes képet. A csoportban megkülönböztettek ún. kül- és beltagokat. A kültagok csak ritkábban csatlakoztak az összejövetelekhez; ebbe a külső körbe tartozott többek között Örkény István is.

I.3. Bejutás az egyetemre és a II. világháború borzalmai

Rényi Alfréd sikertelen felvételije után a Ganz Hajógyárban kezdett dolgozni. Hat hónapig volt a hajógyár szolgálatában, kenyerét fizikai munkával kereste.

Abban, hogy mégis az egyetemen kötött ki, fontos szerepet vállalt édesanyja, Alexander Borbála. Alexander Borbála felkereste az egyetem akkori rektorát, Kornis Gyulát, akik a Felsőház tagjaként nagy befolyású embernek számított. Alexander Borka édesapját 1920-ban kirúgták az egyetemről, melynek jóvátételeként kérte fia felvételét. Mindemellett Rényi Alfréd tehetsége nem maradt ismeretlen az egyetemi professzorok körében sem.

Így történt, hogy 1940 őszén Rényi megkezdhette matematikai és fizikai tanulmányait a Pázmány Péter Tudományegyetemen. Olyan neves matematikusoktól tanulhatott, mint Riesz Frigyes és Fejér Lipót. Hallgatói évei alatt ismerkedett meg Schulhof Katalinnal (1924. október 29.-1969. augusztus 31.), akinek esze, kedvessége és szépsége magával ragadta.

Egyetemi tanulmányait 1944 májusában fejezte be, de a német megszállással együtt járó zsidóellenes intézkedések miatt disszertációjának megvédésére csak később került sor. 1944-ben hívták be munkaszolgálatra. Kezdetben csapatát nem vezényelték a határokon túlra. Amikor nyugatra irányították őket, akkor szökött meg és tért vissza Budapestre. A budapesti időszakot hamis papírokkal vészelte át, de közben szeretteinek, barátainak és ismerőseinek pokolból való kimentésén dolgozott. Mindezt csodálatra méltó bátorsággal és nyugalommal tette meg. Unokatestvérével, Rényi Péterrel hatalmas hőstettet hajtottak végre, ami egyáltalán nem volt veszélytelen. Rényi Alfréd honvéd egyenruhában, Rényi Péter pedig katonatisztnek öltözve mentette ki a budapesti gettóból Alfréd szüleit.

A körülmények dacára Rényi képes volt folytatni a tanulást is. 1945. június 6-án megvédte doktori disszertációját Riesz Frigyes vezetése mellett Szegeden, ahol addigra már beindult az oktatás.

I.4. A háború utáni újrakezdés, a Leningrádban eltöltött idő

A világháborút vesztesként befejező ország lassan tért magához. Mindenütt romok és törmelékek jelezték az elmúlt időszak nyomát. Mondhatni nem volt olyan ember, aki ne vesztett volna el valaki nagyon fontosat szerettei közül. Az újrakezdés nehéz volt. A társadalom nem nagyon tudott felejteni.

Rényi Alfrédot hatalmas optimizmusa segíthette át ezeken az akadályokon. A II. világháború lezárulta után rövid ideig statisztikusként állt foglalkozásban. Statisztikusi pályafutása nem volt hosszú életű, ennek dacára több munkahelyen is dolgozott.

1946-ban vette feleségül Schulhof Katalint, aki házasságuk után Rényi Katóként hordta a nevét.

Rényi 1946 októberében kandidátusi aspiráns-ösztöndíjasként jutott ki a Szovjetunióba. Az ösztöndíj eredetileg három év leningrádi tartózkodást jelentett volna, amely magában foglalta a nyelv megtanulásához szükséges és a matematika tanulmányokra szánt időt. Rényi Alfrédnak egy év sem kellett minderre, ugyanis 1947 júniusában benyújtotta kandidátusi disszertációját. Az orosz földön eltöltött idő tehát lényeges elem volt fejlődésében. Turán Pál így nyilatkozott erről a témáról: *„Hatalmas akaraterővel kitörölte emlékezetéből a háborús éveket és a munkaszolgálatot, hogy végre a munkának szentelhesse fiatalsága forrongó energiáját és kivételes felfogó- és koncentrálóképességét. Ekkor tudott életében először csak a matematikára koncentrálni, és hihetetlen volt, hogy mennyit fejlődött ez alatt a pár hónap alatt."*

Leningrádban olyan neves matematikusokkal került kapcsolatba, mint Jurij Vlagyimirics Linnik és Ivan Matvejevics Vinogradov. A két vezető számelméleti kutató munkásságát még kezdetleges orosz tudásával is megértette. A Linniktől tanult, majd továbbfejlesztett „nagy szita" módszert alkalmazta kandidátusi disszertációjában. Az értekezés csodálatot váltott ki matematikai körökben és mindmáig egyik legnagyobb eredményeként emlegetik.

A számelméleti fejlődésen túl ekkor történt meg Rényi átpártolása a matematikán belül a valószínűség-számítás területére. Leningrádban ismerkedett meg Andrej Nyikolajevics Kolmogorov tanaival.

I.5. A matematikai közélet fontos személyisége

Hazatérte után egyetemi docensként tevékenykedett, majd 1949-ben Debrecenben kapott megbízásos professzori állást, amely tisztet rövid ideig, 1950 szeptemberéig töltötte be. Ekkor ugyanis a budapesti Alkalmazott Matematikai Intézet igazgatója lett.

Kinevezései közepette, 1948-ban született meg egyetlen gyermeke, Rényi Zsuzsanna. Ugyanebben az évben találkozott először Erdős Pál (1913-1996) matematikussal. Ezt követően a két tudós levelezésben állt egymással, hiszen Erdős 1949-ben elhagyta az országot. Rendszeres közös munkájuk azonban csak az 1954-es évet követően indult meg, mikor a véletlen gráfokról írtak cikksorozatot. Ekkor a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson találkoztak újra személyesen, majd 1955-től Erdős rendszeresen hazajárt és vagy Bubáék Benczúr utcai lakásában vagy az intézetben gondolkodtak közösen. Hosszú távú és sikeres együttműködésüket mutatja, hogy 32 közös közleményük látott napvilágot.

1952-ben kapott professzori állást az Eötvös Loránd Tudományegyetem Valószínűségszámítás és Statisztika Intézetében.

1949-ben és 1954-ben is Kossuth díjjal tüntették ki, továbbá életének előrehaladtával egyre több nemzetközi elismerést is magáénak tudhatott. Mindezek azonban nem változtatták meg személyiségét. Továbbra is ugyanolyan könnyedséggel és kedvességgel beszélgetett egy portással és egy kitüntetésekkel elhalmozott tudóssal is. Mindenkire volt egy kis ideje. Híres volt késéseiről, de ezek nem szétszórtságból adódtak, hanem abból, hogy bárkivel elkezdett szinte beszélgetni, aki csak útjába került.

Az időről nagyon könnyedén feledkezett meg egyébként is. Ha valamibe belemélyedt, akkor nem vett tudomást a percek siető egymásutánjáról, hanem csak az őt aktuálisan foglalkoztató problémára koncentrált. Munkabírása legendás volt. A matematizálást bárhol és bármikor tudta csinálni: ragyogó ötletei támadtak autóvezetés, evezés, séta vagy akár zongorázás közben is. Elmélkedéseinek fontos kísérője volt a kávé. Rényitől származik az a mondás, miszerint *„a matematikus olyan gépezet, mely kávéból tételeket állít elő”*. Közvetlensége megnyilvánult szakmai téren is, hiszen rengeteg emberrel együtt dolgozott a matematika számos területén.

Tanítványai szeretettel emlegették Rényit. A professzor, aki mindig belevette hallgatóit a problémák megoldásába és meghallgatta ötleteiket, nagy hatással volt rájuk. Rényi Alfréd általában egy kis késéssel érkezett meg óráira, majd nagy lendülettel vágott bele a magyarázatba. A visszaemlékezések alapján nagyon spontán tette ezt meg, mintha a bizonyítások azon az órán születtek volna meg a hallgatóság együttműködésével. Ha nem a táblánál kellett írnia, az asztalnál foglalt helyet és a keze ügyébe kerülő krétákat tördelte. Előfordult, hogy egy-egy anekdotával is elszórakoztatta diákjait, elmesélte, hogy éppen milyen témában és azon belül is mi foglalkoztatja ezzel bevonva saját munkáiba is a fiatal egyetemistákat.

Nagy tisztelet vette körül diákjai részéről, szinte feszélyezte is az egyetemistákat, hogy egy ilyen zseniális ember felajánlja nekik a tegeződést. Nagyon sok tanítványa baráti köréhez tartozott és nem egyszer megfordult a Rényi család lakásán. Hallgatói közül kiemelem az „Optimális Halmaz" (röviden OH) névre keresztelt évfolyamot, amelynek évfolyamfelelőse Rényi Kató volt és ezáltal is szorosabb kapcsolatban álltak a házaspárral. Az OH 1964-ben végzett hallgatók csoportját jelölte, de voltak benne tiszteletbeli tagok is, akik közül az elsők Rényi Alfréd és Kató voltak. A csoport tagjai sokszor megfordultak a Benczúr utcai lakásban. Mint vizsgáztatót, Rényit szigorúnak, s egyben igazságosnak tartották a diákok.

Rényi a matematika népszerűsítését is feladatának tartotta. Többször szerepelt a televízióban, rádióműsorokban és ott kifejtett közérthető nyelven egy-egy kérdéskört. Ilyen jellegű közszereplései mellett, még az írás által is igyekezett a matematikát közelebb vinni ahhoz, akihez csak lehetett. Hatalmas sikert aratott a Dialógusok a matematikáról c. könyve, valamint a Levelek a valószínűségről c. írása is. Ezekből kitűnik, hogy valóban nem csak a matematikában mozgott otthonosan. Az irodalomhoz való kötődése és klasszikus műveltsége egészen magával ragadta még a matematikától távol álló olvasókat is.

A kommunista országból való kijutás kezdetben mindenkinek nehézkes volt. Először a tudósok Ausztriánál messzebb nem juthattak, csak a későbbiekben kapott szabad teret a külhoni konferenciákra való utazás. Rényit többször meghívták külföldi egyetemekre is, ahol a szakmai elismeréseken kívül nagyon sok barátra tett szert egyéniségének köszönhetően. Előfordult, hogy ilyen útjaira egy-egy tanítványát is magával vitte.

Rényi Alfrédot a magyar valószínűség-számítási iskola megalapítójaként tarjuk számon. Hatalmas terjedelmű műve volt a Valószínűség-számítás. Ez az alkotása még olyan embereket is a „tanítványává" tett, akik közvetlenül nem hallgatták az ő előadásait. Rényi volt az, aki a valószínűség-számítás és az információelmélet gyakorlati hasznát is bebizonyította pl. légtartályok racionális méreteit, az autópályák és a rádiótechnika gazdaságos hasznosítását és a kémiai reakciók és idegingerület-vezetését illetően. Feladatgyűjteményt állított össze Bognár Jánosné, Mogyoródi József, Prékopa András és Szász Domokos matematikusokkal együtt.

Rényi Alfrédot rengetegen szerették, de ennek dacára voltak ellenségei is. Ahol tudott, segített olyan embereken is, akiket a magasabb államérdek nem kívánt elemnek bélyegzett. Személyesen nem vett részt az '56-os forradalomban, de szemtanúja volt annak, ami akkor történt. A forradalom leverése után rengeteg ember kényszerült elhagyni a hazáját, s aki itt maradt annak is komoly dolgokkal kellett szembenéznie. Rényi, akit tudott, odavett az intézetbe és annak falai között oltalmat biztosított neki. Ezzel azonban a párthű kommunisták ellenszenvét váltotta ki. Az egyetemen belül is többször volt politikai vita terítéken, amelyeken Rényi az emberség oldalán foglalt helyet. Sokaknak szúrta a szemét szerepvállalása. Ez az ellenszenv olyan gesztusokban nyilvánult meg, mint el nem fogadott pályázatok, támogatások megvonása és hasonlók.

I.6. A család

Egyetlen gyermeke, Zsuzsanna 1948-ban született. A kislány kezdetben történész akart lenni hasonlóan édesapjához, de mivel örökölte Rényi Alfréd nyelvtehetségét végül ezt kamatoztatta későbbi életében.

Rényi Kató komplex függvénytant tanított az egyetemen. Férjével neki is volt közös munkája, a sors tragédiája, hogy az utolsó közös munkájuk már csak az asszony halála után került a nyilvánosság elé.

Rényi Kató 1969. augusztus 31-én halt meg. Ekkor diagnosztizálták Rényi Alfrédnál a tüdőrákot és Kató ennek következtében önnön kezével vetett véget életének. A szerető férj nem tudta kiheverni felesége halálát. A diagnosztizált kór és a tragédia már valóban soknak bizonyult az állandóan mosolygó embernek is. Rényi szenvedélyes dohányos volt, a cigarettától nem tudott megválni. Nem sokkal élte túl feleségét: 1970. február 1-én hunyt el.

Számokban kifejezve valóban nem élt sokat, de igazán kevés emberről mondhatjuk el, hogy ennyi életet tudott volna tölteni éveibe, mint Rényi Alfréd. Turán Pál is így nyilatkozott Rényi halálakor: *„Ezalatt azonban intenzitásban, gondolatokban, tudásmagábaszívásban és –leadásban, társadalmi aktivitásban valójában 100 évnél is többet élt.”* Ennek dacára mégis hatalmas űr keletkezett, mikor ez a nagyszerű ember eltávozott az élők sorából. Eltűnt egy zseni, egy tanár, egy barát, egy apa.

II. fejezet: Rényi Alfréd doktori disszertációja

II.1. A téma

Rényi Alfréd doktori disszertációja komplex függvénytan témakörben íródott. Címe – mint ahogyan az a bevezetőben is szerepel – két változatban is fennmaradt. A dolgozat kérdései az

$$F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\,du}{z-u}$$

integrál körül csoportosulnak, ahol $f(\mathrm{u})$ valós függvény és Lebesgue-integrálható a $(-1, +1)$ intervallumon, és ahol $z \in \mathbb{C}$.

A Lebesgue-integrálhatóság feltevésére azért van szükség, mert a szerző Henri Lebesgue, francia matematikus tételeit használja fel bizonyításaiban, továbbá hogy Lebesgue-féle értelemben több függvény integrálható, mint a Riemann-féle integrál esetében.

A Lebesgue-integrál fogalma a funkcionálanalízisben használatos és a Lebesgue-mértékelméleten alapul.

Definíció: Az $A \subset \mathbb{R}$ (ill. $\mathbb{C}$) halmazt Lebesgue szerint nullmértékűnek nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra van megszámlálhatóan sok nemelfajuló intervallum, amelyek lefedik A-t és hosszaik összege kisebb, mint ε.

A Lebesgue-nullmértékűséget összehasonlítva a Jordan-féle nullmértékűséggel az eltérés annyi, hogy míg a Jordan-mérhetőség fogalomkörében véges sok intervallumot használunk a halmaz lefedéséhez, addig a Lebesgue-mérhetőség esetében megszámlálhatóan sok intervallumról van szó.

A Lebesgue-féle mérték jelentőségét a következő tétel, az ún. Lebesgue-tétel mutatja:

Tétel: Az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ (ill. $\mathbb{C}$) akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha korlátos és szakadási pontjaink halmaza Lebesgue-nullmértékű.

Beszélhetünk Lebesgue-féle külső és belső mértékről:

Definíció: Fedjük le az $A \subset \mathbb{R}$ (ill. $\mathbb{C}$) halmazt minden lehetséges módon megszámlálhatóan sok intervallummal és a lefedő intervallumokat jelöljük I_n-nel. Ekkor A Lebesgue-féle külső mértékén a $\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$ összeg infinumát értjük és $\bar{\lambda}(A)$-val jelöljük.

A Lebesgue-féle belső mértékét jelöljük $\lambda(A)$-val és származtassuk a következőképpen: $\lambda(A)= |I| - \bar{\lambda}(I \setminus A)$, ahol I egy A-t lefedő tetszőleges intervallum.

Egy halmaz pontosan akkor lesz Lebesgue-mérhető, ha külső és belső mértéke megegyezik.

A disszertáció első két fejezetét Rényi az $F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\,du}{z-u}$ kifejezés körüli problémáknak szenteli. Az első fejezetben hét szükséges és elégséges feltételt ad és bizonyít, arra vonatkozóan, hogy mely analitikus függvények állíthatók elő a fenti alakban. Az első fejezetben foglalkozik még továbbá a függvény képzetes részének határértékével. A valós rész határértéke dolgozatának második fejezetében szerepel, mely kapcsán előkerül a Cauchy-főérték fogalomköre.

A dolgozat második részében, azaz a harmadik és negyedik fejezetekben trigonometrikus sorok szerepelnek, melyek a Cauchy-féle főérték szerepének köszönhetően, Cauchy-Fourier-soroknak nevezünk. A Cauchy-Fourier sorok tulajdonságairól szól az utolsó rész.

II.2. A disszertáció első fejezete

Az első fejezetben kimondott tétel valószínűleg az első kísérlet volt a tárgyalt függvényosztály jellemzésére. A tétel kimondása előtt azonban még szükséges néhány fogalom és állítás áttekintése:

Definíció: Legyen z_0 az $f(z)$ függvény értelmezési tartományának egy torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az $f(z)$ függvény z_0-ban differenciálható, ha

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

határérték létezik és véges.

Definíció: A függvényt z_0 pontban regulárisnak nevezzük, ha van z_0-nak olyan környezete, melyben $f(z)$ differenciálható.

Tétel: Ha f reguláris az a pont egy környezetében, akkor itt az f függvény $(z-a)$ hatványai szerint Taylor-sorba fejthető. A sor:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)$$

Definíció: Az f komplex függvény analitikus, ha egy z_0 pontjában akárhányszor differenciálható és z_0 körüli Taylor-sora megegyezik f-fel z_0 egy környezetében.

1.Tétel: Az $F(z)$ analitikus függvény akkor és csak akkor állítható elő az

$$F(z)=\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)\,du}{z-u}$$

alakban, ahol $f(\mathrm{u})$ a $(-1,+1)$-ben Lebesgue-integrálható és a $(-1,+1)$ minden zárt belső intervallumában korlátos valós függvény, ha teljesíti a következő feltételt:

Legyen $z=x+iy, F(z)=R(x,y)+i\,I(x,y)$

1. $F(z)$ a $(-1,+1)$ szakasz mentén felmetszett síkban analitikus függvény, amely a metszet pontjait kivéve minden véges pontban reguláris.
2. $F(z)$ a végtelenben is reguláris és ott a 0 értéket veszi fel.
3. $F(z)$ a valós tengely $x>1$ és $-1<x$ szakaszain valós értékeket vesz fel.
4. A $(-1,+1)$ intervallumban majdnem mindenütt létezik a $\lim\limits_{\substack{y\to 0,\\ y>0}} I(x,y)=I(x)$ határérték és $I(x)$ a (-1,+1) intervallumban Lebesgue-integrálható.
5. $\forall\alpha\in(0,1)$-hez $\exists K(\alpha)$, hogy $(-\alpha\le x\le\alpha, y$ tetszőleges) sávban $|I(x,y)|\le K(\alpha)$.
6. $\lim\limits_{y\to 0} y\int_{-\alpha}^{+\alpha}|R(x,y)|\,dx=0\ (\ 0<\alpha<1)$
7. $\lim\limits_{r\to 0}\oint_{Cr}\frac{F(z)}{\zeta-z}dz=0$, ahol ζ a komplex sík tetszőleges, a kritikus intervallumhoz nem tartozó pontja, és a Cr integrációs út a (+1) ill. a (-1) köré írt r sugarú kör.

Rényi fontosnak tartotta, hogy a tétel bizonyítása közben az $F(z)$ függvény képzetes részének tulajdonságait elkülönítse és kimondja. $F(z)$-t szétválasztva valós és képzetes részre:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)\,du}{(x+iy)-u}=\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)\,du}{(x-u)+iy}=\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)((x-u)-iy)\,du}{(x-u)^2+y^2}$$

$$R(x,y) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)(x-u)\,du}{(x-u)^2+y^2}\ , I(x,y) = -\int_{-1}^{+1} \frac{f(u)y\,du}{(x-u)^2+y^2}\ i$$

A valós rész határértéke a disszertáció második fejezetének tárgya, azzal majd a következő pontban foglalkozunk. A képzetes rész határértékéről a következő tételt mondta ki:

2.Tétel: Ha $F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\,du}{z-u}$ alakban állítható elő, és $z = x + iy\ ,\ F(z) = R(x,y) + i\ I(x,y),$ akkor a $(-1,+1)$ intervallum majdnem minden x pontjában $\lim_{y\to 0} I(x,y) = -\pi f(x)$ $(y < 0)$.

Mivel $I(x,-y) = -I(x,y),\ \lim_{y\to 0} I(x,y) = +\pi f(x)\ (y > 0).$

Rényi bizonyításában $I(x,y)+\ \pi f(x)$ 0-hoz tartását igazolja. A bizonyítás szerves része a $(-1,+1)$ intervallum feldarabolása hat kis intervallumra a $-1 < -\alpha < x-\varepsilon < x < x+\varepsilon < \alpha < +1$ osztópontokkal. A későbbiekben Rényi ugyanezekkel az osztópontokkal ad bizonyítást a valós rész határértékére is. Mindkét határértékre vonatkozó bizonyításban feltűnnek a Landau-féle szimbólumok az ún. „kis- és nagyordó", melyek két függvények egy tetszőleges $x = a$ helyre vonatkozó együttes viselkedését a következőképpen írhatjuk le: $f(x) = O\big(g(x)\big)$ jelentése: $\frac{f(x)}{g(x)}$ korlátos a valamely környezetében és $f(x) = o\big(g(x)\big)$ jelentése: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ahol $a = \pm\infty$ is megengedett, továbbá megköveteljük, hogy a függvények értelmezve legyenek a ezen környezetében, valamint itt folytonosak legyenek.

Ezek a fogalmak fontos szerepet játszanak a bizonyításban, segítségükkel kijön, hogy $I(x,y) + \pi f(x)$ a 0-hoz tart.

II.3. A disszertáció második fejezete

Ebben a fejezetben a szerző egy kis figyelmet szentelt magának Cauchynak is. A Cauchy főérték jelentőségét sokáig nem ismerték el, majd nagyon sokáig feledésbe is merült. A Weierstrass nyomán kibontakozó vizsgálat, melynek célja a matematika szilárd alapokra helyezését tűzte ki céljául, kényes fogalomnak ítélte a Cauchy főértéket, ezért kiküszöbölését látták célszerűnek. Azóta a Cauchy főértéket már többszörösen „rehabilitálták”.

Definíció: Ha $g(t)$ az $(a, c-\varepsilon)$ és $(c+\varepsilon, b)$ intervallumokban integrálható, bármilyen pozitív szám is ε, és

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} g(t)\,dt + \int_{c+\varepsilon}^{b} g(t)\,dt\right) = S$$

létezik, akkor azt mondjuk, hogy létezik a $\int_a^b g(t)\,dt$ integrál Cauchy féle főértéke, és S-sel egyenlő.

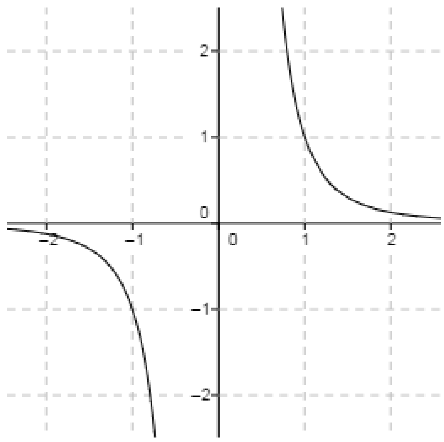
Szemléletesen ez azt jelenti, hogy ha a függvényünk integrálása egy pontban, ill. annak környezetében problémás, akkor ezt a problémás részt „kihasítjuk” abból az intervallumból, melyen integrálni szeretnénk. Ezáltal két részre bontjuk az intervallumot, kapunk két kisebbet, melyeken már könnyedén elvégezhető az integrálás, megszabadulunk ezáltal attól a problémától, amit a végtelenbe szaladó függvényértékek és az értelmezési tartományok határa okozhat nekünk. A két integrált összeadva, összegüknek határértékét véve pedig megkapjuk a definiált Cauchy féle főértéket.

Megkülönböztetünk reguláris és nem reguláris főértéket. A főérték reguláris, ha létezik a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} g(t)\,dt + \int_{c+\delta}^{b} g(t)\,dt\right) = S$$

határérték is, amennyiben $\varepsilon \to 0, \delta \to 0$ és $\frac{\varepsilon}{\delta} \to 1$.

Nem reguláris Cauchy főértékre példaként Rényi Alfréd az $\frac{1}{t^3}$ függvényt említi doktori disszertációjában, ezért ennek a függvénynek szenteltem egy kis figyelmet.



2. számú kép: $\frac{1}{t^3}$ függvény

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljunk a függvény esetében szimmetrikus intervallumot (ez által nem jutunk speciális esethez, csak a számolást teszi átláthatóbbá), tehát nézzük meg a Cauchy főértéket a (-a, a) intervallumon. Az $\frac{1}{t^3}$ függvény problémás pontja a 0 lesz, ezt a pontot és egy kis környezetét kell „kivágnunk” az intervallumunkból, hogy származtathassuk a Cauchy főértéket. Ekkor tehát a számításunk így néz ki:

$$S = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{1}{t^3}\,dt + \int_{\varepsilon}^{a}\frac{1}{t^3}\,dt\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{-a}^{-\varepsilon} + \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{\varepsilon}^{a}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2\varepsilon^2}\right) = 0$$

Mivel most már van eredményünk a vizsgált függvény Cauchy féle főértékére, szemügyre vehetjük, hogy vajon reguláris Cauchy főértékről beszélhetünk-e.

Tehát vezessünk be egy δ-t, úgy hogy $\delta \to 0$ és $\frac{\varepsilon}{\delta} \to 1$, de $\delta \neq \varepsilon$.

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to o}}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{1}{t^3}\,dt + \int_{\delta}^{a}\frac{1}{t^3}\,dt\right) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to o}}\left(\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{-a}^{-\varepsilon} + \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{\delta}^{a}\right)$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to o}}\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2\delta^2}\right) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to o}}\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\delta^2}\right)$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to o}}\left(\frac{1}{2\delta^2} - \frac{1}{2\varepsilon^2}\right) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to o}}\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2 - 1\right)\right)$$

A kapott határértékben $\frac{1}{2\varepsilon^2} \to \infty$, mivel $2\varepsilon^2 \to 0$ és $\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2 - 1 \to 0$. Innentől azt kell belátni, hogy $2\varepsilon^2$ gyorsabban tart a 0-hoz, mint az $\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2 - 1$ kifejezés.

Azt tudjuk, hogy $\frac{\varepsilon}{\delta} \to 1$. Legyen $\frac{\varepsilon}{\delta} = \sqrt{1+\varepsilon}$. Ekkor:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\left(\sqrt{1+\varepsilon}\right)^2 - 1\right)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon} = S' = \infty$$

$S \neq S'$, azaz az $\frac{1}{t^3}$ függvény Cauchy-féle főértéke valóban nem reguláris.

Rényi leírja, de nem bizonyítja, hogy amennyiben $g(t)(c-t)$ korlátos, akkor reguláris főértékkel van dolgunk ($\frac{1}{t^3}$ esetében tehát: $\frac{1}{t^3}(-t) = -\frac{1}{t^2}$, ami valóban nem korlátos). Megjegyzi, hogy elegendő ennél kevesebbet is feltennünk: elég, ha abból indulunk ki, hogy $g(t)(c-t)$ integrálható, és a c helyen az integráljának differenciálhányadosa.

A későbbiekben a Cauchy féle főértéket az integráljel elé írt P betűvel jelöljük. Dolgozatában Rényi ezt a jelölést alkalmazta Hardy nyomán.

A Cauchy főérték két fontos tulajdonságát emeli ki Rényi, melyeket lemmákban mond ki:

1.Lemma: Legyenek $t = t(u)$ és ennek inverze, $u = u(t)$ az (a, b) intervallumban monoton, folytonos és folytonosan differenciálható függvények, és $u'(c)$ különbözzék zérustól. Akkor ha $g(t)$ az (a, b) minden a c pontot nem tartalmazó részintervallumában integrálható, azonkívül létezik az integráljának a reguláris Cauchy féle főértéke a c helyen, akkor szabad az integrálban az $u = u(t)$ új változót bevezetni, tehát:

$$P\int_a^b g(t)\,dt = P\int_{u(a)}^{u(b)} g(t(u))t'(u)\,dt\ .$$

A második lemma kimondása előtt még szükségünk van néhány definícióra:

Definíció: Legyen f az (a, b) intervallumon értelmezett függvény és c$\in(a, b)$ szakadási pont. Ha c-ben a függvény határértéke $\pm\infty$, akkor szingularitásról beszélünk.

Definíció: Egy (a, b) intervallumon értelmezett f függvény teljesíti a Lipschitz-feltételt, ha létezik olyan $L > 0$, melyre teljesül, hogy $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$.

2.Lemma: Ha az (a, b) intervallumban létezik $g(t)$ Cauchy féle főértéke, és ha c a függvény szinguláris pontja, $g(t)(c - t)$ integrálható, azonkívül $h(t)$ olyan az (a, b) intervallumban integrálható függvény, amely a c helyen Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor létezik az $\int_a^b g(t)\,\mathrm{h}(t)\,dt$ integrál Cauchy főértéke is.

Az előbbi lemmák segítségével származtatható az $F(z)$ függvény valós részének határértékére vonatkozó tétel, ami a disszertációban szereplő 3.Tétel:

3.Tétel: Jelentse $R(x,y)$az $F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)}{x-u}du$ valós részét, akkor olyan x pontokban, ahol a $(-1, +1)$ intervallumban Lebesgue-integrálható és $(-1, +1)$ minden zárt intervallumában korlátos $f(x)$ függvény az integráljának differenciálhányadosa, a $\lim_{y\to 0} R(x, y) = R(x)$ határérték létezése ekvivalens az $\int_{-1}^{+1} \frac{f(u)}{x-u}du$ Cauchy-féle főérték létezésével. Ha ezek közül bármelyik is létezik, akkor a másik is létezik és egyenlők, tehát:

$$R(x) = \lim_{y\to 0} R(x,y) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)}{x-u}du$$

Ha $\int_{-1}^{+1} \frac{f(u)}{x-u}du$ létezik, akkor reguláris a főértéke, mert $\frac{f(u)}{x-u}\,(x - u)$ korlátos feltevéseink alapján (amennyiben x a $(-1, +1)$ intervallum belső pontja) az x pont környezetében. A bizonyításhoz szükséges $C(\varepsilon)$ definíciója:

$$C(\varepsilon) = \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{f(u)}{x-u} dt + \int_{x+\varepsilon}^{+1} \frac{f(u)}{x-u} dt$$

A bizonyítás hasonló elven megy végbe, mint a képzetes rész esetében. Rényi a $C(\varepsilon) - R(x,y)$ 0-hoz tartását igazolja. Itt is ugyanazok az osztópontok ($-1 < -\alpha < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < \alpha < +1$) játszanak szerepet, mint a képzetes rész esetében. Ezek az osztópontok $C(\varepsilon)$-t négy részre osztja, hiszen az x pont ebből kimarad, ezáltal az $(x-\varepsilon, x)$ az $(x, x+\varepsilon)$ intervallumok kimaradnak.

II.4. Cauchy-Fourier sorok

A disszertáció további részei a Cauchy-Fourier sorokkal foglalkozik. A tanulmánynak ez a része független az előbbiekben tárgyalt függvénytani fejezetektől, de problémáját az $F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\,du}{z-u}$ kifejezés vizsgálata vetette fel. A doktori disszertáció 3. fejezetében Rényi alkalmaz egy leképezést, mely a $(-1,+1)$ szakasz mentén felmetszett síkot az egységkör belsejébe viszi. Ennek köszönhetően vetődött fel a Cauchy-Fourier sorok problémaköre.

Rényi Alfréd doktori disszertációját követően nem merült mélyebbre a Cauchy-Fourier sorok témakörében, csupán egyetlen cikke jelent még meg a témában, amely az 1945-ben megvédett disszertáció összefoglalójának tekinthető. A cikk 1950-ben jelent meg Debrecenben, ahol akkoriban Rényi Alfréd professzorként tevékenykedett.

Ahhoz, hogy mélyebbre áshassunk a Cauchy-Fourier sorok világába, szükségünk van a Fourier-sor definíciójára és néhány tulajdonságára:

<u>Definíció:</u> Legyen az f függvény 2π szerint periódikus és integrálható valamely $[a, a+2\pi]$ intervallumon. Ekkor az f függvény Fourier-során az $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ trigonometrikus sort értjük, ahol az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x)\,dx$$

,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \; b_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

Az a_0, $a_k$és b_k együtthatókat az f függvény Fourier-együtthatóinak nevezzük.

Páros függvény Fourier-sora csak koszinusz tagokat, páratlan függvény Fourier-sora csak szinusz tagokat tartalmaz.

A Fourier-sorok a Cauchy-Fourier soroknál nagyobb ismeretségnek örvendenek. Szummálhatóságuk problémája sokáig kérdésekkel töltötte be a matematikai köröket. A kérdés megoldása egy magyar matematikusnak, Fejér Lipótnak köszönhető. Fejér egy egyszerű, ugyanakkor nagyszerű ötlettel állt elő. A Fourier-sor részösszegeinek összeadása nem hozott kiutat. Fejér a részösszegek átlagát véve ért el eredményeket.

A Fourier-sorokat nem csak hírességük miatt fontos ebben a témakörben megemlíteni. Rényi doktori disszertációjában szerepel egy lemma, mely a Cauchy-Fourier sorok és a Fourier-sorok kapcsolatára mutat rá. Ezért a Fejér Lipót név többször is feltűnik a doktori disszertáció soraiban.

A Cauchy-Fourier sor definíciója:

Definíció: Tekintsük a valós $g(t) = -g(-t)$ páratlan függvényt a $(-\pi, \pi)$ intervallumon, ahol g Lebesgue-integrálható $\forall \varepsilon > 0$-ra a (ε, π) intervallumon és létezik $\int_0^\pi tg(t)\,dt$ integrál, azonban azt nem tesszük fel, hogy $f(t)$ integrálható a $(0, \pi)$ intervallumon. A $\int_0^\pi tg(t)\,dt$ integrál létezése maga után vonja $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) \sin nt \, dt$ (n=1,2,…) létezését. Ekkor $\int_{-\pi}^{+\pi} g(t) \cos nt \, dt$ (n=1,2,…) érvényes, Cauchy féle főértéke 0, mivel $g(t)$ páratlan függvény. Ha az előbbi feltételek teljesülnek, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$ sorozatot az $g(t)$ függvény Cauchy-Fourier sorának nevezzük.

A definícióban szereplő $g(t)$ függvény úgy áll elő, mint az előző fejezetekben vizsgált $f(u)$ függvény (ahol $f(u)$ valós, $(-1, +1)$-ben Lebesgue-integrálható és $(-1, +1)$ minden zárt belső intervallumában korlátos) $u = \cos t$-vel kapott $f(\cos t)$ függvény.

Rényi doktori disszertációjában speciális esettel foglalkozik, de eredményei kiterjeszthetőek általános esetre is. A témakörben szereplő integrálok hagyományos értelemben veendőek.

A Cauchy-Fourier sorok együtthatóiról általános esetben fennáll, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$. Ennél többet általános esetben nem is lehet feltenni, hiszen megadható olyan Cauchy-Fourier sor is, melynél $\frac{b_n}{n}$ tetszőlegesen lassan tart a 0-hoz.

A Cauchy-Fourier sorok és a közönséges Fourier-sor kapcsolatáról szól a következő lemma:

Lemma: Egy Cauchy-Fourier sort tagonként formálisan integrálva közönséges Fourier-sort kapunk.

A lemma szerint tehát a Cauchy-Fourier sorok tehát származtathatók közönséges Fourier-sorok formális deriváltjaként.

Ez a lemma veti fel a kérdést, hogy Cauchy-Fourier sorok milyen kapcsolatban állnak az ún. Fourier-Stieltjes sorokkal.

Definíció: Legyenek $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények és tekintsük $[a, b]$ intervallum Φ felosztását: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ és legyenek $c_i \epsilon [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ tetszőleges közbülső pontok. Ekkor az $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$ összeget az f függvény g szerinti közelítő összegének nevezzük és $\sigma_\Phi(f, g; c_i)$-vel jelöljük.

Definíció: Legyenek $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények. Azt mondjuk, hogy az f függvény g szerinti $\int_a^b f\, dg$ Stieltjes-integrálja létezik és értéke az I szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy valahányszor $\Phi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ δ-nál finomabb felosztás és $c_i \epsilon [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ tetszőleges közbülső pontok, akkor

$$|\sigma_\Phi(f, g; c_i) - I| < \varepsilon$$

Ezek ismeretében pedig már definálhatjuk a Fourier-Stieltjes sorokat:

Definíció: Az $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ sor, ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} df(x)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} \cos kx\, df(x)\ , b_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} \sin kx\, df(x),$$

ahol $f(x)$ a $[a, a + 2\pi]$ intervallumon értelmezett függvény és ahol az integrálok Stieltjes-féle értelemben értendőek.

A kapcsolat a Fourier-Stieltjes és a Cauchy-Fourier sorok között a következő: minden olyan Cauchy-Fourier sor, melynek együtthatói nem korlátosak, nem Fourier-Stieltjes sor.

A doktori disszertáció negyedik fejezetében két tétel kerül kimondásra. Mindkettő kimondása előtt szükségünk van néhány definícióra:

Definíció: Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor Fejér- (vagy Cesaró-) szummábilis és szummája A, ha az $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ részletösszegre teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = A$$

Definíció: Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor Abel-szummábilis és az Abel-szummája A, ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergens (-1,+1)-ben és az összegfüggvénynek legyen határértéke +1-ben, s ez lesz A Abel-szumma.

2.a Tétel: Olyan pontokban, ahol $g(t)$ az integráljának differenciálhányadosa, tehát majdnem mindenütt, $g(t)$ Fourier-sora Abel-szummábilis a függvényértékhez.

Fejér neve még feltűnik Rényi doktori disszertációjában is: kimondásra kerül egy tétel, mely szerint a Cauchy-Fourier sorok ugyanúgy szummálhatóak, mint a közönséges Fourier-sorok.

Emiatt fontos áttekinteni a Fourier-sorok szummálhatóságát is:

Definíció: Fourier-sor n-edik részletösszege:

$$s_n(x,f) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Definíció: Fejér féle közepek:

$$\sigma(n,f) = \frac{s_0(x,f) + \cdots + s_{n-1}(x,f)}{n}$$

Ekkor

$$\sigma(n,f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{F}_n(t) \mathrm{f}_x(t)\, dt,$$

ahol

$$f_x(t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2},$$

és

$$\mathrm{F}_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2,$$

ami az ún. Fejér-féle magfüggvény.

A Fejér-féle magfüggvény tulajdonságai:

- $\mathrm{F}_n(t) \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{F}_n(t)$ 2π szerint periodikus páros függvény
- $\mathrm{F}_n(0) = n$
- tetszőlegesen kicsi $0 < \delta < \pi$ esetén $\mathrm{F}_n(t) \overset{n\to\infty}{\to} 0$ egyenletesen, $\mathrm{F}_n(t) \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$
- $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{F}_n(t)\, dt = 1$

2.b Tétel: A Cauchy-Fourier sorok ugyanazon feltételek mellett szummálhatók Fejér féle középekkel, mint a közönséges Fourier-sorok.

Rényi Alfréd doktori disszertációja két függelékkel zárul. Az első számúban az $F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\,du}{z-u}$ integrálnak és az ortogonális polinomok elméletének kapcsolatát tárgyalja Rényi, a második függelékben pedig egy aerodinamikai integrálegyenlettel hozza kapcsolatba.

Irodalomjegyzék

1. A. Rényi: On the summability at Cauchy-Fourier series. Publ. Math. Debrecen, **1** (1950), 162-164.
2. I. N. Bronstein, K. A. Szemengyajey, D. Musiol, H. Mühling: Matematikai kézikönyv. Bp., Typotex Kiadó, 2006.
3. Dr. Czeizel Endre: Matematikusok, gének, rejtélyek – A nagy matematikus géniuszok elemzése. Bp., Galenus Kiadó, 2011.
4. Gerőcs László, Vancsó Ödön: Matematika. Bp., Akadémiai Kiadó, 2010.
5. Hanka László, Zalay Miklós: Komplex Függvénytan Példatár. Bp., Műszaki Könyvkiadó, 2003.
6. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: Analízis II. Bp., Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007.
7. Rényi Alfréd: Egy Stieltjes-féle integrálról doktori disszertáció, Szeged, 1945.
8. Rényi Zsuzsanna: Dialógusok egy matematikusról – Rényi Alfréd emberi portréja barátai s egykori tanítványai visszaemlékezéseinek tükrében. Szeged, Polygon Kiadó, 2013.
9. http://www.cs.elte.hu/~henk/math/allamv/hanovi/08-fvsorok.pdf
10. http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Fourier-Stieltjes_series
11. http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2013tav-an4/jegyzet02-RSI.pdf

Képjegyzék

1. *számú kép: Rényi Alfréd* 6

   Forrás: http://www.typotex.hu/author/210/renyi_alfred

2. *számú kép:* $\frac{1}{t^3}$ *függvény*...18

   Forrás: http://www.crnl.hu/matt/javascript/javascriptes.html