Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Affin transzformációk a síkban

Szakdolgozat

Készítette:

Órai Szilvia

Matematika BSc, Tanári szakirány

Témavezető:

Dr. Verhóczki László

Egyetemi docens, Geometria tanszék

Budapest

2015

Tartalomjegyzék

Előszó

Szakdolgozatomban a síkbeli affin transzformációkat fogom tárgyalni. A középiskolás diákok matematikai tanulmányaik során már megismerkednek a síkbeli egybevágósági és hasonlósági transzformációkkal, azok alapvető tulajdonságaival. Megtanulják, hogy a hasonlósági transzformáció egyenest egyenesbe képez és megtartja a szögek mértékét. Jogosan merülhet fel a kérdés, hogy léteznek-e olyan síkbeli transzformációk, amelyek egyenestartóak, de nem hasonlóságok. Az egyetemi tanulmányaim során érdekesnek találtam, amikor kiderült, hogy vannak ilyen geometriai transzformációk. Ráadásul viszonylag könnyen, két parallel vetítés szorzataként tudunk előállítani olyan bijektív leképezést a síkban, mely egyenest egyenesbe képez, de nem hasonlósági transzformáció. Dolgozatom első fejezetében felidézem az egybevágósági és hasonlósági transzformációk definícióit. Bevezetem az irányítástartó és irányításváltó síkbeli transzformációk fogalmát. Megmutatom, hogy két parallel vetítés egymás utáni végrehatásával olyan bijektív leképezést lehet kapni a síkon, amely egyenestartó, de nem hasonlóság. Ezt követően bevezetem a síkbeli affin transzformáció fogalmát. Kiderül, hogy egy affinitás mindig meghatároz (más szóval indukál) egy lineáris leképezést a síkbeli vektorok terén.

A második fejezetben analitikus eszközökkel vizsgálom az affin transzformációkat. Ennek megfelelően egy síkbeli derékszögű koordináta-rendszert fogok alkalmazni. Látni fogjuk, hogy egy affin transzformációt egy mátrixegyenlettel lehet leírni. A mátrixegyenlet alapján bebizonyítom, hogy amennyiben a síkban adva van két nem kollineáris ponthármas, akkor pontosan egy olyan affinitás van, amely az első ponthármast a másodikba képezi.

A harmadik fejezetben az affin transzformációk egy speciális típusát vizsgálom, a tengelyes affinitást. Megmutatom, hogy a tengelyes affinitást a tengely, továbbá egy síkbeli pont és annak képe már egyértelműen meghatározzák. Megvizsgálom, miként lehet eldönteni az affinitás mátrixegyenlete alapján, hogy az vajon tengelyes affinitás-e. Bebizonyítom, hogy egy affinitás előáll egy tengelyes affnitás és egy síkbeli hasonlósági transzformáció kompozíciójaként.

A negyedik fejezet az affinitás invariáns derékszögét tárgyalja. Két egymásra merőleges egyenesről akkor mondjuk, hogy invariáns derékszögét adják az affin transzformációnak, ha a képeik is derékszögben metszik egymást. Kiderül, hogy amennyiben az affinitás nem hasonlóság, akkor pontosan egy olyan iránypár van, amely az affinitáshoz invariáns derékszöget ad. Tárgyalom, hogy amennyiben adva van az affinitás indukált lineáris leképezésének mátrixa, akkor az alapján miként lehet meghatározni az invariáns derékszöget megadó vektorokat. Definiálni fogok olyan fogalmat is, mint az affinitás adott irányhoz tartozó nyújtási arányszáma. Amennyiben az affinitás nem hasonlóság, akkor van olyan irány, ahol a nyújtási arányszám maximális, illetve minimális. Megmutatom, hogy éppen az invariáns derékszög két irányához tartoznak a maximális és a minimális nyújtási arányszámok. Végül igazolni fogom, hogy a kör affin képe egy ellipszis.

Munkám során a szakdolgozati konzultációk mellett az Irodalomjegyzékben felsorolt tankönyvekre támaszkodtam.

1. fejezet

Síkbeli geometriai transzformációk

1.1. Jelölések, alapfogalmak

Vizsgálatainkat az euklideszi geometriában végezzük. Dolgozatomban a következő jelöléseket fogom alkalmazni. A tér pontjait latin nagybetűkkel (például A, B, C), az egyeneseket latin kisbetűkkel, a síkokat görög betűkkel jelölöm. Az A, B pontok távolságát a $d(A, B)$ vagy AB jelöli. Az A kezdőponttal és B végponttal meghatározott irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ jelöli majd. Az $\overrightarrow{AB}$ egyúttal az általa reprezentált szabad vektort is jelöli.

A tér szabad vektorai az összeadásra és a valós számmal való szorzásra nézve egy V vektorteret alkotnak. Ennek elemeit félkövér kis betűkkel (például $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) fogjuk jelölni. A szokásoknak megfelelően az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok skaláris szorzatát $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, vektoriális szorzatát pedig $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ jelöli.

Felidézünk most néhány olyan fogalmat, melyet a későbbiekben alkalmazunk. Értelmezzük a kollineáris ponthármas osztóviszonyát.

1.1.1. Definíció. *Legyenek adva az A, B, C egymástól különböző kollineáris pontok. A tartalmazó egyenesnek vegyük egy irányítását. Az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ irányított szakaszok előjeles hossza legyen AC és CB. A ponthármas osztóviszonyán az $(ABC) = \frac{AC}{CB}$ előjeles hányadost értjük.*

Megjegyzés: Világos, hogy az osztóviszonnyal fennáll az $\overrightarrow{AC} = (ABC) \cdot \overrightarrow{CB}$ összefüggés az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorokra. Az (ABC) osztóviszony pozitív akkor és csak akkor, ha a C pont rajta van az AB szakaszon.

1.1.2. Definíció. *Tekintsünk egy σ síkot, abban egy félegyenest és egy olyan félsíkot, amelynek határegyenese tartalmazza a félegyenest. A félegyenesből és a félsíkból álló alakzatpárt egy síkbeli zászlónak nevezzük.*

Megjegyzés: Egy σ síkban vegyük a nem egy egyenesre eső A, B, C pontokat. Ezen ponthármasnak egyértelműen megfelel egy síkbeli zászló az alábbiak szerint. A zászló félegyenese legyen az A kezdőpontú és B -n átmenő félegyenes, a félsíkja pedig az a félsík, melyet az A, B pontokon átmenő egyenes határol és amely tartalmazza C pontot. Ezt a zászlót az A, B, C ponthármashoz tartozó zászlónak mondjuk.

1.2. Egybevágósági és hasonlósági transzformációk

A síkbeli transzformációk közül először az egybevágóság fogalmát adjuk meg. Tekintsünk a térben egy σ síkot.

1.2.1. Definíció. *Egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ bijektív leképezés egybevágóság a σ síkban, ha tetszőleges $A,\ B \in \sigma$ pontokra fennáll $d(A,B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$.*

Világos, hogy két egybevágósági transzformáció egymásutánja is egybevágóság. A szokásoknak megfelelően a φ_1 és φ_2 egybevágóságok szorzatát (más szóval kompozícióját) $\varphi_2 \circ \varphi_1$ jelöli. A síkbeli egybevágóságok ezzel a szorzással egy csoportot alkotnak, melyet jelöljön $Iso(\sigma)$.

Megjegyzés: Ha σ -ban veszünk két síkbeli zászlót, akkor egyértelműen létezik olyan egybevágóság, amely az első zászlót a másodikba viszi. Ismeretes, hogy egy síkbeli egybevágóság vagy egy eltolás, vagy egy pont körüli elforgatás, vagy egy tengelyes tüktözés, vagy pedig egy csúsztatva tükrözés.

Idézzük fel most a hasonlósági transzformáció fogalmát is.

1.2.2. Definíció. *Egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ bijektív leképezés hasonlóság, ha van olyan $\lambda > 0$ szám, hogy a tetszőleges $A,\ B \in \sigma$ pontokra teljesül $d(\varphi(A), \varphi(B)) = \lambda \cdot d(A,B)$. A λ számot mondjuk a hasonlóság arányának.*

A definícióból adódik, hogy ha φ_1 és φ_2 hasonlóságok, akkor a szorzatuk $\varphi_2 \circ \varphi_1$ is hasonlóság. A síkbeli hasonlóságok erre a szorzásra csoportot alkotnak, melyet jelöljön $Sim(\sigma)$. Továbbá, ha egy hasonlósági transzformációnak az aránya 1, akkor az a hasonlóság egy egybevágóság. A hasonlóság egyenestartó, megőrzi az egyenesek párhuzamossággát és a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát is. Mivel a hasonlósági transzformációk csoportja magában tartalmazza az egybevágósági transzformációk csoportját, így az alábbi módon írhatjuk le ezt a kapcsolatot: $Iso(\sigma) \subset Sim(\sigma)$. A hasonlóságok között kitüntetett szerepet játszanak a középpontos hasonlóságok.

1.2.3. Definíció. *Vegyünk a σ síkban egy O pontot, továbbá egy nullától különböző λ valós számot. Az O centrumú és λ előjeles arányú középpontos hasonlóság az a $\kappa : \sigma \to \sigma$ leképezés, amely az O ponthoz önmagát rendeli, és egy P $(P \neq O)$ pont $P' = \kappa(P)$ képe az $O,\ P$ pontokon átmenő egyenes azon pontja, amelyre igazak az alábbiak:*

A P' pontnak az O -tól mért távolsága $|\lambda| \cdot OP$, vagyis fennáll $d(O,P') = |\lambda| \cdot d(O,P)$. $\lambda > 0$ esetén P' azon az O kezdőpontú félegyenesen van, amelyik átmegy P-n, $\lambda < 0$ esetén pedig a másik félegyenesen.

Megjegyzés: Ismeretes, hogy egy hasonlósági transzformáció mindig előáll egy egybevágóság és egy középpontos hasonlóság szorzataként. Emiatt a hasonlóság egy egyenestartó és szögtartó transzformáció. Könnyű belátni azt is, hogy a hasonlóság megőrzi a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát.

Megjegyzés: Ha egy hasonlósági transzformáció nem egybevágóság, akkor az vagy forgatva nyújtás, vagy tükrözve nyújtás.

Megjegyzés: Felvetődik a kérdés, hogy van-e olyan síkbeli bijektív leképezés, amely egyenestartó, de nem hasonlóság? A következőkben majd látni fogjuk, hogy erre a válasz igenlő. Ugyanis, parallel vetítések segítségével konstruálni lehet olyan síkbeli transzformációkat, amelyek egyenestartóak, megőrzik az osztóviszonyt, de nem hasonlóságok.

1.3. Irányítástartó és irányításváltó transzformációk

A σ síkbeli szabad vektorok egy 2 -dimenziós alteret alkotnak a térbeli vektorok V terében. Legyen V_σ a síkbeli vektorok altere.

Tekintsünk egy olyan $\mathbf{k}$ egységvektort, amely merőleges a σ síkra. Ez alapján a V_σ vektortér bázisait két osztályba lehet sorolni. Mint ismeretes, két síkbeli vektor egy bázist képez a V_σ vektortérben, ha nem párhuzamosak egymással. Ha $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ egy bázis V_σ -ban, akkor az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{k}$ vektorhármas egy bázis a térbeli vektorok V terében, amely vagy egy jobbrendszert, vagy pedig egy balrendszert ad.

Világos, hogy az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{k}$ vektorhármas akkor képez jobbrendszert, ha az $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ vektoriális szorzat, amely merőleges σ -ra, párhuzamos a $\mathbf{k}$ egységvektorral. Ha $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ és $\mathbf{k}$ ellentétes irányúak, akkor az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{k}$ vektorhármas balrendszert ad.

1.3.1. Definíció. *Legyen adott egy $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ bázis a V_σ vektortérben. Erről azt mondjuk, hogy a V_σ -beli bázisok első osztályához tartozik, ha a $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{k}$ vektorhármas egy jobbrendszert képez. Amennyiben a vektorhármas egy balrendszert ad, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ vektorpár a V_σ -beli bázisok második osztályához tartozik.*

1.3.2. Állítás. *Legyenek $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ és $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ bázisok a V_σ vektortérben. Fejezzük ki a második bázis vektorait az első elemeinek lineáris kombinációjaként a $\mathbf{v}_1 = c_{11}\,\mathbf{u}_1 + c_{21}\,\mathbf{u}_2,\quad \mathbf{v}_2 = c_{12}\,\mathbf{u}_1 + c_{22}\,\mathbf{u}_2$ alakban. Vegyük az együtthatókból képzett $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ mátrixot. A két bázis egyazon osztályhoz tartozik akkor és csak akkor, ha a $\mathbf{C}$ mátrix determinánsára fennáll a det $\mathbf{C} > 0$ egyenlőtlenség.*

Bizonyítás: Mivel a $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2$ vektorok lineárisan függetlenek, a 2×2 -es $\mathbf{C}$ mátrix rangja 2. Emiatt a $\mathbf{C}$ mátrix determinánsa nem lehet 0. Ismeretes, hogy ha két vektor egymással párhuzamos, akkor vektoriális szorzatuk a $\mathbf{0}$ nullvektor. Kihasználva azt is, hogy a vektoriális szorzás antikommutatív, az alábbi összefüggést kapjuk:

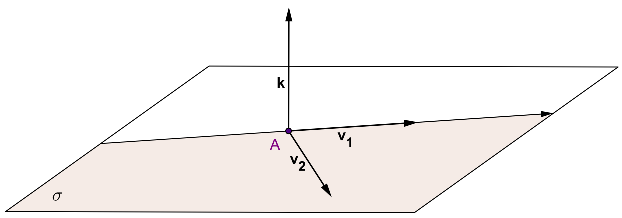
$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (c_{11}\,\mathbf{u}_1 + c_{21}\,\mathbf{u}_2) \times (c_{12}\,\mathbf{u}_1 + c_{22}\,\mathbf{u}_2) =$$

$$c_{11}\,c_{22}\,(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) + c_{21}\,c_{12}\,(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1) = (c_{11}\,c_{22} - c_{21}\,c_{12})\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = det\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$$

Eszerint a $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ vektorok megegyező irányúak pontosan akkor, ha fennáll $det\ \mathbf{C} > 0$. ∎

Az alábbiakban a síkbeli zászlókat is két csoportba soroljuk. Vegyünk a σ síkban egy síkbeli zászlót. A zászló félegyenesének kezdőpontja legyen A és menjen át a B $(B \neq A)$ ponton. Legyen C a zászló félsíkjának egy olyan pontja, amely nincs rajta a félsík határegyenesén. Tekintsük a $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{AC}$ vektorokat.

1.3.3. Definíció. *Az $A,\ B,\ C$ nem kollineáris ponthármas által meghatározott zászló a síkbeli zászlók első osztályához tartozik, ha a $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{k}$ vektorhármas egy jobbrendszert képez. Amennyiben a vektorhármas egy balrendszert ad, akkor azt mondjuk, hogy a síkbeli zászló a második osztályhoz tartozik.*



1.1. ábra. Sík irányítása

Megjegyzés: A σ sík irányításán azt értjük, hogy egy a síkra merőleges $\mathbf{k}$ egységvektor megadásával két osztályba soroljuk a V_σ vektortér bázisait, illetve a síkbeli zászlókat.

A fentiek alapján már értelmezni tudjuk az irányítástartó és az irányításváltó hasonlóságokat (és egybevágóságokat).

1.3.4. Definíció. *Egy síkbeli hasonlóságot irányítástartónak mondunk, ha a síkbeli zászlók két osztályát önmagukba képezi. Ha a hasonlóság a síkbeli zászlók két osztályát felcseréli, akkor irányításváltónak mondjuk.*

Megjegyzés: Az eltolás és az elforgatás irányítástartó egybevágóságok. A tengelyes tükrözés és a csúsztatva tükrözés irányításváltó egybevágósági transzformációk. A középpontos hasonlóságok irányítástartóak.

1.4. Egy sík parallel vetítése egy másik síkra

Vegyünk a térben két egymást metsző síkot, melyeket jelöljön σ és ϱ. Vegyünk továbbá egy v egyenest, amely egyik síkkal sem párhuzamos. Vetítsük rá a ϱ síkot a σ síkra a v egyenes irányában. Eszerint egy $P \in \varrho$ pont képét úgy nyerjük, hogy vesszük a P -n átmenő v -vel párhuzamos egyenes és σ metszéspontját. Ha a vetítés iránya merőleges a síkra, abban az esetben merőleges vetítésnek hívjuk.
Könnyen be lehet látni, hogy a parallel vetítés rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal.

1. A parallel vetítés egy olyan bijektív leképezés a két sík között, amely egyenest egyenesbe képez.

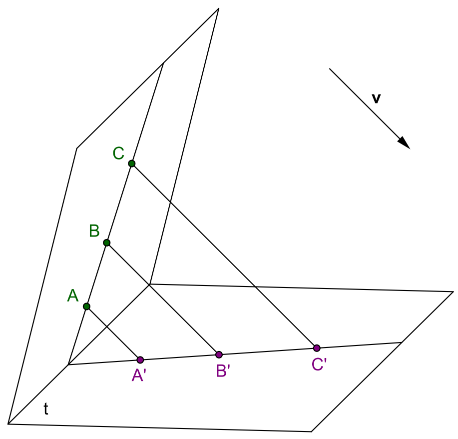
2. Párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez.

3. Parallelogrammát parallelogrammába képez.

4. Megőrzi a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát.

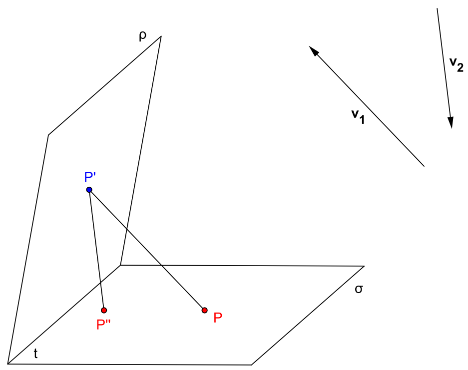
5. Fixen hagyja a $\sigma \cap \varrho = t$ egyenes pontjait.

A negyedik tulajdonság a párhuzamos szelők tételének következménye.



1.2. ábra. A parallel vetítés megőrzi az osztóviszonyt

Vegyük most két parallel vetítés egymás utáni végrehajtását oly módon, hogy előbb a σ síkot vetítjük rá a ϱ síkra egy v_1 egyenessel magadott irányban, majd pedig a ϱ síkot egy másik v_2 irányban rávetítjük a σ síkra. Legyenek $\varphi_1 : \sigma \to \varrho$ és $\varphi_2 : \varrho \to \sigma$ a parallel vetítésnek megfelelő leképezések. Ezek $\varphi_2 \circ \varphi_1 : \sigma \to \sigma$ szorzata egy egyenestartó bijektív leképezés a σ síkon. Vegyük észre, hogy $\varphi_2 \circ \varphi_1$ fixen hagyja a $t = \sigma \cap \varrho$ egyenes pontjait.



1.3. ábra. Két parallel vetítés szorzata

A két vetítés egymásutánjával nyert bijektív leképezés rendelkezik a parallel vetítés minden tulajdonságával, azaz egyenestartó, megtartja az osztóviszonyt. Ha ez a σ -beli leképezés hasonlóság, akkor egyúttal egy a t egyenest pontonként fixen hagyó egybevágóságot ad, ami csakis a t tengelyre történő tükrözés lehet. Tehát ha nem speciálisan választjuk a vetítési irányokat, azaz a két vetítés szorzata nem ad tengelyes tükrözést, akkor nem hasonlóságot kapunk. Ez egy jó példa arra, hogy létezik olyan bijektív leképezés a síkon, mely egyenestartó, megőrzi az osztóviszonyt, de nem hasonlóság. Ezeket a leképezéseket tengelyes affinitásoknak nevezzük majd.

1.5. Az affin transzformációk

Az előzőek során a parallel vetítések segítségével beláttuk, hogy vannak olyan bijektív leképezések a síkban, amelyek egyenestartóak, megőrzik a kollineáris ponthármas osztóviszonyát, de nem hasonlóságok. Ily módon definiálhatunk egy újabb síkbeli transzformációt, az affinitást.

1.5.1. Definíció. *A σ síkbeli affin transzformáción egy olyan $\varphi : \sigma \to \sigma$ bijektív leképezést értünk, amely egyenest egyenesbe képez és megőrzi a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát.*

Megjegyzés: Az affin transzformáció definíciójából már következik, hogy két σ síkbeli affin transzformáció egymásutánja, azaz kompozíciója, is affin transzformáció. A $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformáció inverze a $\varphi^{-1} : \sigma \to \sigma$ leképezés szintén egy affinitás. A σ síkbeli affin transzformációk a kompozícióra, mint szorzásra, nézve egy csoportot alkotnak.

Az alábbiakban megadjuk az affin transzformáció alapvető tulajdonságait.

1.5.2. Állítás. *Legyen adva egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformáció. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.*

1. *A φ affinitás párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez.*
2. *A φ affinitás parallelogrammát parallelogrammába képez.*
3. *Ha az $A,\ B,\ C,\ D \in \sigma$ pontokra fennáll $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, akkor a képpontokra teljesül $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.*

Bizonyítás:

1. A φ affinitás párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez.
   Legynek a σ -beli a és b egyenesek párhuzamosak. Ez esetben nincs közös pontjuk. Mivel a φ leképezés bijektív, az $\varphi(a) = a'$ és $\varphi(b) = b'$ képegyeneseknek sem lehet közös pontja. Ez pedig azt jelenti, hogy az $a',\ b'$ egyenesek párhuzamosak.

2. Az osztóviszony megőrzése következtében az affin transzformáció szakaszt szakaszba képez. A parallelogramma egy olyan négyszög, amelynek a szemközti oldalegyenesei egymással párhuzamosak. Mivel az affinitás megőrzi az egyenesek párhuzamosságát, a parallelogramma affin képe parallelogramma.

3. Tegyük fel, hogy az $A,\ B,\ C,\ D \in \sigma$ pontokra fennáll $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Ha az $A,\ B,\ C,\ D$ pontok nem egy egynesen vannak, akkor az $A,\ B,\ D,\ C$ pontok ebben a sorrendben egy parallelogramma csúcsai. Mivel az előbb bizonyított tulajdonság szerint az $A',\ B',\ D',\ C'$ szintén egy parallelogramma csúcsai, így teljesül $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

■

A továbbiakban jelölje V_σ a σ síkbeli vektorok alterét. A fenti állítás harmadik pontja alapján értelmezni lehet egy új fogalmat.

1.5.3. Definíció. *Legyen adva egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affinitás. A φ affinitáshoz tartozó indukált leképezésnek mondjuk azt a $\widehat{\varphi} : V_\sigma \to V_\sigma$ függvényt, ahol tetszőleges $A,\ B \in \sigma$ pontpárra fennáll $\widehat{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$.*

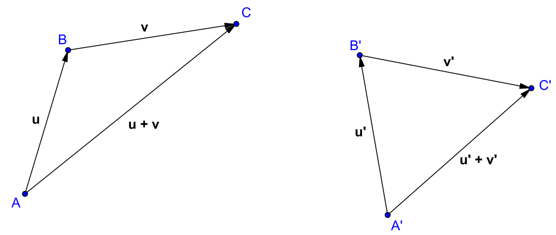
Megjegyzés: Az előző állítás alapján világos, hogy egy $\mathbf{u} \in V_\sigma$ vektornak a $\widehat{\varphi}$ indukált leképezés szerinti képe nem függ az $\mathbf{u}$-t reprezentáló irányított szakasz megválasztásától.

A következő részben igazoljuk, hogy a φ affinitáshoz rendelt $\widehat{\varphi}$ indukált leképezés lineáris.

1.5.4. Állítás. *Legyen adott egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformáció. A φ -hez tartozó $\widehat{\varphi} : V_\sigma \to V_\sigma$ indukált leképezés leképezés lineáris, azaz tetszőleges $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in V_\sigma$ vektorokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számra teljesül:*

1. $\widehat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \widehat{\varphi}(\mathbf{u}) + \widehat{\varphi}(\mathbf{v})$
2. $\widehat{\varphi}(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \lambda \cdot \widehat{\varphi}(\mathbf{u})$.

Bizonyítás:



1.4. ábra. Két vektor összegének képe

1. Legyenek adva az $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in V_\sigma$ vektorok. Vegyünk egy síkbeli A pontot. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $B,\ C$ pontok, melyekel fennáll $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$. Világos, hogy ezekkel teljesül az

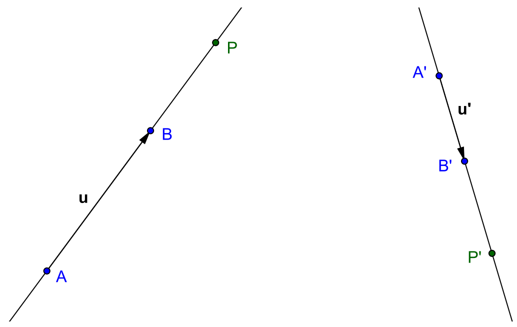
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

egyenlőség. Vegyük az A, B, C pontok $\widehat{\varphi}(A) = A',\ \widehat{\varphi}(B) = B',\ \widehat{\varphi}(C) = C'$ képeit. A képpontokra ugyancsak fennáll

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}.$$

Ezek alapján azt kapjuk, hogy teljesül

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \widehat{\varphi}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \widehat{\varphi}(\mathbf{u}) + \widehat{\varphi}(\mathbf{v})\ .$$



1.5. ábra. Vektor számszorosának képe

2. Vegyünk egy $\overrightarrow{AB}$ irányított szakaszt a σ -beli $A,\ B$ pontokkal, amely az $\mathbf{u}$ vektort képviseli, azaz $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. Adott λ ($\lambda \neq 0$) számhoz egyértelműen tartozik egy olyan P pont az $A,\ B$ pontok egyenesén, amellyel fennáll $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$.

   Ekkor $\overrightarrow{AP}$ vektor felírható az alábbi alakban is

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}).$$

   Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$(1-\lambda) \cdot \overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PB}\ .$$

   Eszerint igazak az

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \overrightarrow{PB}, \quad (ABP) = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

   összefüggések. Mivel a φ affinitás megőrzi az osztóviszonyt, a képpontok $(A'B'P')$ osztóviszonyára is fennáll

$$(A'B'P') = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

   Ennek következtében teljesül

$$(1-\lambda) \cdot \overrightarrow{A'P'} = \lambda \cdot \overrightarrow{P'B'}$$

   Ennek alapján pedig fennáll

$$\overrightarrow{A'P'} = \lambda \cdot (\overrightarrow{A'P'} + \overrightarrow{P'B'}) = \lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}.$$

   Ezt az összefüggést felhasználva azt kapjuk, hogy teljesül

$$\widehat{\varphi}(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \widehat{\varphi}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{A'P'} = \lambda \cdot \overrightarrow{A'B'} = \lambda \cdot \widehat{\varphi}(\mathbf{u}).$$

■

Mivel a φ affinitás egy bijektív leképezés, ezért a $\widehat{\varphi}$ indukált leképezés különböző vektorokat különböző vektorokba képez, vagyis injektív. Látható az is, hogy a $\widehat{\varphi}$ leképezés szürjektív is. Emiatt az előző állításból már következik az alábbi kijelentés.

1.5.5. Állítás. *A $\widehat{\varphi} : V_\sigma \to V_\sigma$ indukált leképezés egy lineáris izomorfizmus.*

Megjegyzés: Természetesen vehetjük az egybevágóságokhoz és a hasonlóságokhoz tartozó indukált lineáris leképezéseket. Legyen az $\varepsilon : \sigma \to \sigma$ leképezés a síkbeli eltolás egy $\mathbf{u}$ vektorral. Ekkor az $\widehat{\varepsilon}$ indukált leképzés megegyezik az identikus leképezéssel. Legyen most a $\kappa : \sigma \to \sigma$ transzformáció egy középpontos hasonlóság a λ előjeles aránnyal. Ekkor $\widehat{\kappa}$ leképésre az igaz, hogy $\widehat{\kappa}(\mathbf{u}) = \lambda \cdot \mathbf{u}$ minden $\mathbf{u}$ vektorra.

Világos, egy affin transzformáció egy σ síkbeli zászlót egy másik zászlóba képez. Ez alapján az affin transzformációk esetében is beszélhetünk irányítástartásról, illetve irányításváltásról.

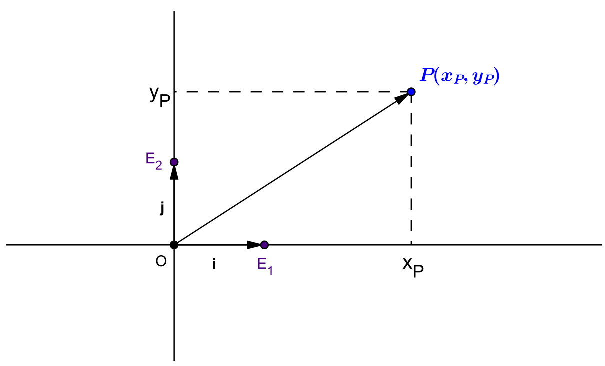
1.5.6. Definíció. *Legyen adva egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformáció. A φ -t irányítástartónak mondjuk, ha a síkbeli zászlók két osztályát önmagába képezi. Ha a φ affinitás a síkbeli zászlók két osztályát felcseréli, akkor irányításváltónak nevezzük.*

2. fejezet

Affin transzformációk analitikus tárgyalása

2.1. A síkbeli derékszögű koordináta-rendszer

Legyen adott egy σ sík. Vegyünk egy $\mathbf{k}$ egységvektort, amely merőleges σ -ra. Tekintsünk σ -ban egy O pontot, továbbá két olyan egymásra merőleges $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ egységvektort, amelyekkel az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorhármas egy jobbrendszert képez.



2.1. ábra. A síkbeli Descartes-féle koordinátarendszer

Vegyük az O kezdőponttal és az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ egységvektorokkal meghatározott koordináta-rendszert a σ síkban. Egy σ -beli P pontnak az O -ra vonatkozó helyvektora $\overrightarrow{OP}$. Ez egyértelműen áll elő az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorok lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{OP} = x_P \cdot \mathbf{i} + y_P \cdot \mathbf{j}$ kifejezéssel. A lineáris kombinációban szereplő x_P, y_P együtthatókat mondjuk a P pont koordinátáinak. Szokás a P pont koordinátáit a $P(x_P,\ y_P)$ alakban feltüntetni.

A fentiek alapján minden σ -beli pontnak megfelel egy valós számpár. Tehát a koordináta-rendszer által egy bijektív megfeleltetést kapunk a sík és a valós számpárok $\mathbb{R}^2$ halmaza között.

Legyenek $E_1,\ E_2$ azon σ -beli pontok, melyekkel fennáll $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{i}$ és $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{j}$.

2.2. Az affinitás analitikus leírása

Legyen adott egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformáció. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy egy síkbeli P pont koordinátáiból miként lehet kifejezni a $P' = \varphi(P)$ képpont koordinátáit.

A $\varphi : \sigma \to \sigma$ affinitás indukál egy $\widehat{\varphi} : V_\sigma \to V_\sigma$ lineáris leképezést. Vegyük a $\widehat{\varphi}(\mathbf{i}) = \overrightarrow{O'E_1'}$, $\quad \widehat{\varphi}(\mathbf{j}) = \overrightarrow{O'E_2'}$ vektorokat. Fejezzük ki ezeket az $\mathbf{i},\ \mathbf{j}$ ortonormált bázisból a

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{i}) = a_{11} \cdot \mathbf{i} + a_{21} \cdot \mathbf{j} \qquad \widehat{\varphi}(\mathbf{j}) = a_{12} \cdot \mathbf{i} + a_{22} \cdot \mathbf{j}$$

alakban. Ekkor a lineáris kombinációs kifejezések együtthatóiból kapunk egy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrixot. Ezt mondjuk a $\widehat{\varphi}$ indukált leképezés $\mathbf{i},\ \mathbf{j}$ bázisra vonatkozó mátrixának.

Fontos itt megjegyezni, hogy mivel a $\widehat{\varphi} : V_\sigma \to V_\sigma$ leképezés egy lineáris izomorfizmus, az $\mathbf{A}$ mátrix rangja 2. Ez persze azt jelenti, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, azaz a determinánsára fennáll $det\ \mathbf{A} \neq 0$.

Tekintsük az O kezdőpont $O' = \varphi(O)$ képét és annak helyvektorát írjuk fel az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{OO'} = b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j}$ alakban. Eszerint a (b_1, b_2) számpár adja az O' koordinátáit.

Vegyünk egy tetszőleges $P(x, y)$ pontot σ -ban. Ennek helyvektora $\overrightarrow{OP} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$. Ha (x', y') a P' képpont koordinátái, akkor fennáll $\overrightarrow{OP'} = x' \cdot \mathbf{i} + y' \cdot \mathbf{j}$.

Mivel $\widehat{\varphi}$ egy lineáris leképezés, igaz az alábbi egyenlőség

$$\overrightarrow{O'P'} = \widehat{\varphi}(\overrightarrow{OP}) = x \cdot \widehat{\varphi}(\mathbf{i}) + y \cdot \widehat{\varphi}(\mathbf{j}).$$

A fenti összefüggések alapján pedig teljesül

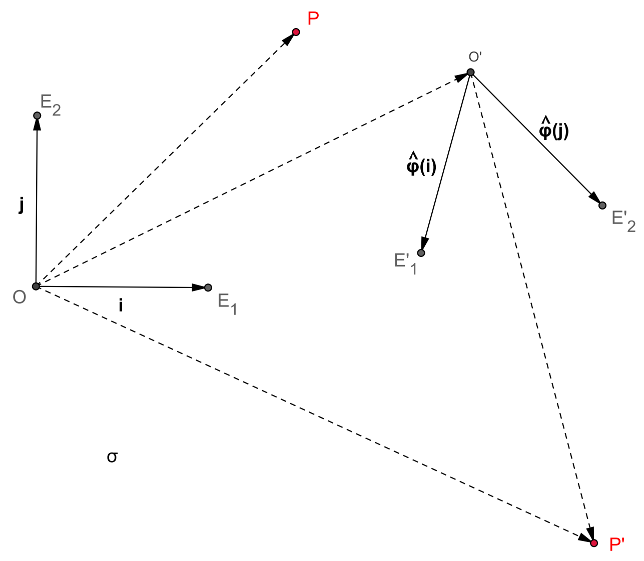
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = (b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j}) + x \cdot \widehat{\varphi}(\mathbf{i}) + y \cdot \widehat{\varphi}(\mathbf{j}).$$

Ha felhasználjuk a $\widehat{\varphi}(\mathbf{i})$ és $\widehat{\varphi}(\mathbf{j})$ lineáris kombinációs kifejezéseit, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} &= (b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j}) + x \cdot (a_{11} \cdot \mathbf{i} + a_{21} \cdot \mathbf{j}) + y \cdot (a_{12} \cdot \mathbf{i} + a_{22} \cdot \mathbf{j}) \\ &= (a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + b_1) \cdot \mathbf{i} + (a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + b_2) \cdot \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Mivel a P' pont $\overrightarrow{OP'}$ helyvektora egyértelműen áll elő az $\mathbf{i},\ \mathbf{j}$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként, így a képpont koordinátáira fennállnak az

$$\begin{aligned} x' &= a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + b_1, \\ y' &= a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + b_2 \end{aligned}$$



2.2. ábra. Affin transzformáció analitikus leírása

egyenlőségek. Eszerint a P' képpont kordinátáit lineáris kifejezésekkel lehet megkapni a P koordinátáiból. Könnyű belátni, hogy a fenti két egyenletet fel lehet írni egyetlen mátrixegyenlettel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{AME}$$

Vegyük észre, hogy ebben az indukált leképezésnek megfelelő $\mathbf{A}$ mátrix és az O kezdőpont O' képének (b_1, b_2) koordinátáiból képzett oszlopmátrix szerepel. Ezt nevezzük az affinitást leíró mátrixegyenletnek. Kimondhatjuk tehát a következő állítást.

2.2.1. Állítás. *A $\varphi : \sigma \to \sigma$ affinitásnál tetszőleges $P(x, y)$ pont P' képének (x', y') koordinátáival teljesül az (AME) egyenlet.*

Nem nehéz belátni, hogy a fenti (AME) egyenlet egyenértékű az alábbi mátrixegyenlettel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ezt szokás mondani az affinitást leíró homogenizált mátrixegyenletnek. Látható, hogy az ebben szereplő speciális 3×3 -as $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsára fennáll $det\ \mathbf{M} = det\ \mathbf{A}$.

A következőkben belátjuk, hogy az (AME) mátrixegyenlet mindig egy síkbeli affinitást határoz meg.

2.2.2. Állítás. *Legyen adott egy olyan* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *mátrix, amelynek determinánsa mem 0, továbbá legyen adva két valós szám* b_1 *és* b_2*. Tekintsük azt a* $\varphi : \sigma \to \sigma$ *leképezést a síkon, amely egy síkbeli* $P(x, y)$ *ponthoz azt a* $P' = \varphi(P)$ *pontot rendeli, amelynek* (x', y') *koordinátáit az*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

egyenlet adja meg. Ekkor a φ *leképezés egy affin transzformáció.*

Bizonyítás: Vegyünk a síkon egy $Q(x_Q, y_Q)$ pontot. A φ leképezés akkor képezi a $P(x, y)$ pontot Q -ba, ha a P koordinátáival teljesülnek az

$$\begin{aligned} x_Q &= a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + b_1, \\ y_Q &= a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + b_2 \end{aligned}$$

egyenlőségek. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix rangja 2, az $x,\ y$ ismeretlenekre felírt

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y &= x_Q - b_1, \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y &= y_Q - b_2 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszernek egyértelműen létezik megoldása a nevezetes Cramer-szabály szerint. Ebből pedig már következik, hogy a φ leképezés bijektív.

Az alábbiak során belátjuk, hogy a φ leképezés egyenest egyenesbe képez. Vegyünk egy g egyenest a síkban. Ezt egyértelműen meghatározza egy $Q(q_1, q_2)$ pontja és egy a g -vel párhuzamos $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ irányvektor. Egy $P(x, y)$ pont akkor van rajta a g egyenesen, ha van olyan t valós szám, amellyel fennáll $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + t\,\mathbf{v}$. Az ebből nyert $x = q_1 + tv_1,\ y = q_2 + tv_2$ $(t \in \mathbb{R})$ egyenletek adják a g egyenes paraméteres egyenletrendszerét. Tekintsük a $Q' = \varphi(Q)$ pontot, melynek a leíró egyenletből nyert koordinátái legyenek (q_1', q_2'). Tegyük fel, hogy P rajta van g -n. Ha a koordinátáira vonatkozó kifejezéseket beírjuk a φ egyenletébe, akkor azt kapjuk, hogy a P' pont (x', y') koordinátáira fennáll

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Vegyük most azt a $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j}$ vektort, amelynek koordinátáira fennáll $w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2$ és $w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2$. A feniek szerint a P' képpont koordinátára fennáll $x = q_1' + t\ w_1,\ y = q_2' + t\ w_2$. Eszerint a P' képpont rajta van a Q' ponton átmenő $\mathbf{w}$ irányvektorú h egyenesen. Látható az is, hogy a h egyenes bármely pontja egy g -re eső pontnak a φ szerinti képe. Ezzel pedig azt kaptuk, hogy fennáll $\varphi(g) = h$.

Végül közvetlen számolással igazolható az is, hogy a φ leképezés megőrzi a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát. ∎

Megjegyzés: Világos, hogy a 2.2.2. Állításban szereplő $\mathbf{A}$ mátrix éppen a leírt affinitáshoz tartozó indukált leképezés mátrixa a V_σ -beli $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisra nézve.

Korábban két osztályba soroltuk a σ síkbeli zászlókat, illetve a V_σ -beli bázisokat. Vegyünk egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformációt, továbbá a $\widehat{\varphi}$ indukált leképezés $\mathbf{A}$ mátrixát. Világos, hogy φ pontosan akkor cseréli fel a zászlók két osztályát, ha $\widehat{\varphi}$ felcseréli a két bázisosztályt. Az $\mathbf{A}$ mátrix elemei éppen a $\widehat{\varphi}(\mathbf{i})$, $\widehat{\varphi}(\mathbf{j})$ vektorok koordinátái az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorokra nézve. Az 1.3.2. Állítás szerint a fenti két bázis egyazon osztályhoz tartozik akkor és csak akkor, ha az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa pozitív. Ezek alapján kimondhatjuk a következő állítást.

2.2.3. Állítás. *A $\varphi : \sigma \to \sigma$ affinitás irányítástartó, ha fennáll det $\mathbf{A} > 0$. Ha pedig det $\mathbf{A} < 0$ teljesül, akkor a φ irányításváltó.*

2.3. Az affin transzformáció meghatározása nem kollineáris ponthármasokkal

Az alábbiak során majd igazoljuk, hogy ha a síkon adva van két nem kollineáris ponthármas, akkor egyértelműen létezik olyan affinitás, amely az első három pontot a második három pontba viszi. Ennek bizonyításához szükségünk lesz az alábbi állításra.

2.3.1. Állítás. *Vegyünk a σ síkban három nem kollineáris pontot, melyek legyenek P_1, P_2, P_3. Az r -edik P_r $(r = 1, 2, 3)$ pont koordinátái legyenek (x_r, y_r). A pontok koordinátáiból vegyük a következő 3×3 -as $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot. Ekkor a $\mathbf{P}$ determinánsával és a $P_1P_2P_3\Delta$ háromszög $T(P_1P_2P_3\Delta)$ területével fennáll $|det\, \mathbf{P}| = 2 \cdot T(P_1P_2P_3\Delta)$.*

Bizonyítás: Ismeretes, hogy a determináns értéke nem változik, ha a mátrix egyik oszlopát kivonjuk a mátrix egy másik oszlopából. Ha $\mathbf{P}$ első oszlopát kivonjuk a másik kettőből, az alábbi mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fejtsük ki ezen mátrix determinánsát a harmadik sor szerint. Ezek alapján azt kapjuk, hogy igaz

$$det\, \mathbf{P} = det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\,.$$

Írjuk fel a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és $\overrightarrow{P_1P_3}$ vektorokat:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} &= (x_2 - x_1) \cdot \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \cdot \mathbf{j}, \\ \overrightarrow{P_1P_3} &= (x_3 - x_1) \cdot \mathbf{i} + (y_3 - y_1) \cdot \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Vegyük a két vektor vektoriális szorzatát. Mivel a vektorok benne vannak a σ síkban, vektoriális szorzatuk merőleges σ -ra, vagyis párhuzamos a $\mathbf{k}$ egységvektorral. Konkrétan azt kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = ((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))\ \mathbf{k}.$$

A fentiek alapján látható, hogy fennáll

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = det\,\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}\ .$$

Ismeretes, hogy két vektor vektoriális szorzatának hossza megegyezik az általuk kifeszített parallelogramma területével. A $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ élvektorokkal meghatározott parallelogramma területe pedig a $P_1P_2P_3\Delta$ háromszög területének kétszerese. A fenti egyenlőség szerint tehát igaz

$$2 \cdot T(P_1P_2P_3\Delta) = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \right\| = |det\mathbf{P}|\ .$$

■

Megjegyzés: A 2.3.1. Állításból következik, hogy amennyiben a P_1, P_2, P_3 pontok nem kollineárisak, akkor a koordinátáikból képzett $\mathbf{P}$ mátrix determinánsa nem lehet 0. Ez pedig azt jelenti, hogy a 3×3 -as $\mathbf{P}$ mátrix invertálható.

2.3.2. Tétel. *Legyenek adva a σ síkban a nem kollineáris P_1, P_2, P_3 és Q_1, Q_2, Q_3 ponthármasok. Ekkor eggyértelműen létezik egy olyan $\varphi : \sigma \to \sigma$ affinitás, amelyre fennáll $\varphi(P_r) = Q_r$ $(r = 1, 2, 3)$.*

Bizonyítás: A σ síkban rögzítve van egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta-rendszer. Vegyük az adott pontok koordinátáit: $P_r(x_r, y_r)$, $Q_r(\widehat{x}_r, \widehat{y}_r)$ $\quad (r = 1, 2, 3)$. Tekintsük a koordinátákból képzett

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 & \widehat{x}_2 & \widehat{x}_3 \\ \widehat{y}_1 & \widehat{y}_2 & \widehat{y}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixokat. Korábban már beláttuk, hogy egy tetszőleges φ affinitásnak egyértelműen megfelel egy $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, amelynek determinánsa nem 0. Az $\mathbf{M}$ mátrixszal leírt φ affin transzformáció a P_r $(r = 1, 2, 3)$ pontot akkor viszi a Q_r pontba, ha fennáll az

$$\begin{pmatrix} \widehat{x}_r \\ \widehat{y}_r \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{pmatrix}$$

egyenlőség. Ez alapján már látható, hogy $\varphi(P_1) = Q_1$, $\varphi(P_2) = Q_2$ és $\varphi(P_3) = Q_3$ pontosan akkor teljesül egyszerre, ha a $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{M}$ mátrixokkal fennáll

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}\ .$$

Azt a kérdést kell tehát megválaszolni, hogy a pontok koordinátái által már megadott $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ mellett, hány $\mathbf{M}$ mátrix oldja meg ezt a mátrixegyenletet. Tudjuk, hogy mivel a ponthármasok nem kollineárisak, a $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ mátrixok determinánsa nem 0. Emiatt a $\mathbf{P}$ mátrix invertálható. Vegyük most a $\mathbf{P}$ mátrix $\mathbf{P}^{-1}$ inverzét és ezzel jobbról szorozzuk meg a fenti egyenletet. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{M}\ .$$

Tehát egyedül az $\mathbf{M}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}^{-1}$ mátrix az, amely megoldja a fenti egyenletet. Az így kapott $\mathbf{M}$ mátrixszal leírt affinitás a $P_1,\ P_2,\ P_3$ ponthármast a $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ ponthármasba viszi, és rajta kívül már nincs olyan affin transzformáció, amely rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. ■

2.3.1. Példa

Vegyünk most egy példát a ponthármasok által meghatározott affin transzformáció $\mathbf{M}$ mátrixának meghatározására.

A σ síkban tekintsük a $P_1(3,-3),\ P_2(4,1),\ P_3(4,-5)$ és $Q_1(1,2),\ Q_2(-2,4)\ Q_3(6,2)$ pontokat. Számítsuk ki annak a $\varphi:\sigma\to\sigma$ affinitásnak az $\mathbf{M}$ mátrixát, amely az első ponthármast a másodikba viszi. A pontok koordinátáiból hozzuk létre a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ négyzetes mátrixokat:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}3&4&4\\-3&1&-5\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1&-2&6\\2&4&2\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Az előző bizonyítás szerint a φ affinitást az az $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\0&0&1\end{pmatrix}$ mátrix írja le, amellyel fennáll a

$$\begin{pmatrix}1&-2&6\\2&4&2\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4&4\\-3&1&-5\\1&1&1\end{pmatrix}$$

egyenlőség. A $\mathbf{Q}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}$ egyenletet megoldó $\mathbf{M}$ mátrixra tehát fennáll $\mathbf{M}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}^{-1}$.

Belátható, hogy a $\mathbf{P}$ determinánsára fennáll $det\,\mathbf{P}=-6$. Ezt is felhasználva meghatározhatjuk a $\mathbf{P}^{-1}$ mátrixot. Azt kapjuk, hogy teljesül

$$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}3&4&4\\-3&1&-5\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&4\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

Ezek alapján azt kapjuk, hogy az $\mathbf{M}$ mátrixra igaz

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&-2&6\\2&4&2\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&4\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&-\frac{4}{3}&-10\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{M}$ mátrix alapján a $\widehat{\varphi}$ indukált lineáris leképezésnek az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ mátrix felel meg. Az O pont $O' = \varphi(O)$ képének a koordinátái pedig $(-10, 1)$.

3. fejezet

Tengelyes affinitások

3.1. A tengelyes affinitások szintetikus vizsgálata

Ebben az alfejezetben speciális affin transzformációkkal, a tengelyes affinitásokkal foglalkozunk.

3.1.1. Definíció. *A $\varphi : \sigma \to \sigma$ affinitást tengelyesnek mondjuk, ha van olyan t egyenes, amelynek φ az összes pontját fixen hagyja. Ez esetben a t egyenest a φ affin transzformáció tengelyének nevezzük.*

A következő kijelentés igazolható a 2.3.2. Tétel alapján is. Az alábbiakban mi egy szintetikus bizonyítást adunk meg.

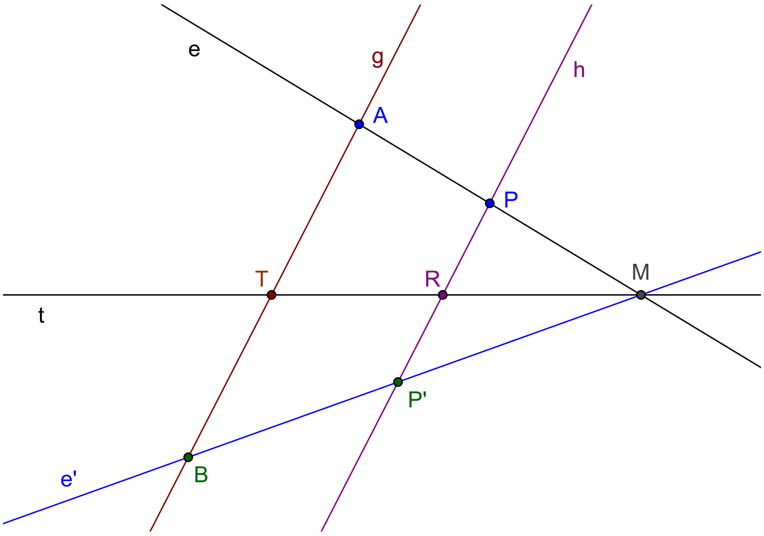
3.1.2. Állítás. *Legyen adva a σ síkban egy t egyenes és olyan $A,\ B\quad (A \neq B)$ pontok, melyek nincsenek rajta t -n. Ekkor eggyértelműen létezik egy olyan $\varphi : \sigma \to \sigma$ tengelyes affinitás, amelynek t a tengelye és amelyre fennáll $\varphi(A) = B$.*

Bizonyítás: Először a transzformáció létezését igazoljuk. Vegyünk egy ρ síkot, amely a t egyenesben metszi σ síkot, azaz $\sigma \cap \rho = t$. Legyen C a ρ -nak egy olyan pontja, amely nincs a t egyenesen ($C \notin t$). Tekintsük most a $v_1 = \langle A, C\rangle$ és $v_2 = \langle C, B\rangle$ egyeneseket. A $v_1,\ v_2$ vetítési irányokkal vegyük a $\mu_1 : \sigma \to \rho$ és $\mu_2 : \rho \to \sigma$ parallel vetítéseket. Mint ismeretes, a két vetítés $\varphi = \mu_2 \circ \mu_1 : \sigma \to \sigma$ szorzata egy affin transzformáció ad a σ síkban. Világos, hogy φ a $t = \sigma \cap \rho$ metszésvonal összes pontját fixen hagyja, tehát t tengelye φ -nek. Az első μ_1 vetítés az A -t a C pontba viszi, a második μ_2 vetítés C -t a B pontba képezi. Emiatt pedig igaz $\varphi(A) = B$.

Egyértelműség: Igazoljuk, hogy amennyiben adott a φ tengelyes affinitás t tengelye és egy A ($A \notin t$) pont $B = \varphi(A)$ képe, akkor ezek ismeretében egy tetszőleges σ -beli P pont $\varphi(P)$ képe már meghatározható.

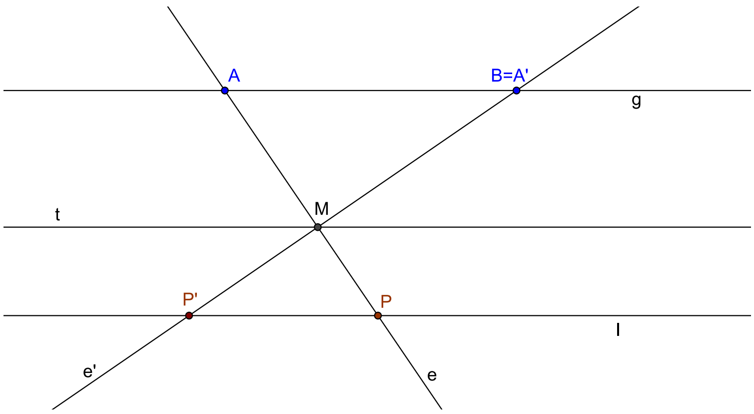
Tekintsük az $A,\ B = A'$ pontokon áthaladó $g = \langle A, B\rangle$ egyenest, és tegyük fel, hogy g nem párhuzamos a t tengellyel. Jelölje T a $t,\ g$ egyenesek metszéspontját. Mivel az affinitás egyenest egyenesbe képez, a $g = \langle T, A\rangle$ egyenes képe a $\langle T', A'\rangle$ egyenes lesz, tehát önmaga.

Vegyünk egy olyan P pontot σ -ban, amely nincs rajta a $t,\ g$ egyeneseken. Tegyük fel, hogy az $e = \langle A, P\rangle$ egyenes az M pontban metszi t -t. Mivel M fixen marad, a φ affinitás e -t az $e' = \langle A', M\rangle$



3.1. ábra. Egy P pont képének kijelölése tengelyes affinitásnál

egyenesbe képezi. Tekintsük a P -n átmenő g -vel párhuzamos h egyenest, amely a t tengelyt az R pontban metszi. Mivel a φ affinitás megőrzi a párhuzamosságot és g -t önmagába képezi, így fennáll $\varphi(h) = h$. A P pontot tekintsük most úgy, mint a $e,\ h$ egyenesek metszéspontját. Ez alapján a φ affinitás P -t az $e',\ h'$ képegyenesek metszéspontjába képezi, vagyis fennáll $\varphi(P) = e' \cap h$. Vegyük most azt a speciális esetet, amikor a $g = \langle A, B\rangle$ egyenes párhuzamos a t tengellyel.



3.2. ábra. Egy P pont képének kijelölése nyírásnál

Mivel a φ affinitás megőrzi a párhuzamosságot és a t egyenest fixen hagyja, g képe a B-n átmenő t -vel párhuzamos egyenes lesz, vagyis önmaga. Az előzőek alapján vegyük előbb a tengelyt az M pontban metsző $e = \langle A, P\rangle$ egyenesnek az $e' = \langle B, M\rangle$ képét. Ezen rajta van a P' képpont. Tekintsük most a P -n átmenő és t -vel párhuzamos l egyenest. Mivel az osztóviszony megőrzése miatt fennáll $(AMP) = (BMP')$, azt kapjuk, hogy P' éppen az e', l egyenesek metszéspontja.

A fentiek során beláttuk, hogy a P' képpont már megszerkeszthető a t tengely és az A, $B = A'$ pontpár ismeretében. ∎

3.1.3. Definíció. *Legyen adott egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ tengelyes affinitás. Vegyünk egy a t tengelyre nem illeszkedő A pontot és annak $A' = \varphi(A)$ képét. A $g = \langle A, A' \rangle$ egyenessel meghatározott irányt mondjuk az affinitás irányának.*

Megjegyzés: Legyen $\varphi : \sigma \to \sigma$ egy olyan tengelyes affinitás, ahol az irány nem párhuzamos a tengellyel. Vegyünk egy az affinitás t tengelyére nem eső A pontot és annak az $A' = \varphi(A)$ képét. Tekintsük a $g = \langle A, A' \rangle$, t egyenesek T metszéspontját. Ekkor a $\overrightarrow{TA}$ és $\overrightarrow{TA'}$ vektorok párhuzamosak egymással. Emiatt van egy olyan λ szám, amellyel fennáll $\overrightarrow{TA'} = \lambda \cdot \overrightarrow{TA}$. Nem nehéz igazolni, hogy ez a λ szám nem függ az A pont megválasztásától. Ezt a λ számot mondjuk a tengelyes affinitás előjeles arányának.

3.1.4. Definíció. *A síkbeli tengelyes affinitást nyírásnak nevezzük, ha annak iránya párhuzamos a tengellyel.*

3.1.5. Állítás. *Egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformáció felírható egy tengelyes affinitás és egy síkbeli hasonlósági transzformáció kompozícójaként.*

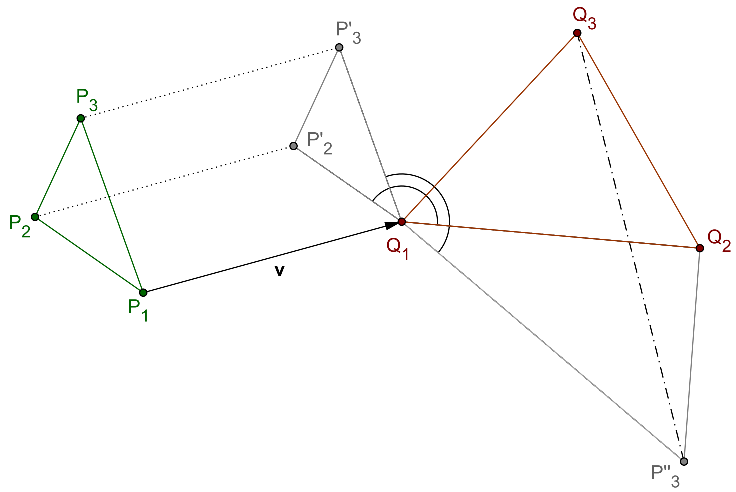
Bizonyítás: Vegyünk a síkon három nem kollineáris pontot, ezek legyenek P_1, P_2 és P_3. A φ affinitás képezze ezeket a Q_1, Q_2, Q_3 pontokba. Eszerint fennáll $\varphi(P_i) = Q_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Korábban már beláttuk, hogy csak egyetlen olyan affin transzformáció van, amely a P_1, P_2, P_3 ponthármast a Q_1, Q_2, Q_3 ponthármasba viszi.

Az alábbiak során belátjuk, hogy egy eltolás, egy forgatva nyújtás és egy tengelyes affinitás egymás utáni végrehajtásával kaphatunk egy olyan transzformációt, amely az első ponthármast a másodikba viszi.

1. Először vegyük a σ síkban az ε eltolást a $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1Q_1}$ vektorral. Ezzel nyilván fennáll $\varepsilon(P_1) = Q_1$.
2. Ezt követően vegyük azt az η forgatva nyújtást, amelynek centruma a Q_1 pont, és amely az $\varepsilon(P_2)$ pontot Q_2 -be képezi. Ez az η forgatva nyújtás egy Q_1 centrumú elforgatás és egy Q_1 középpontú nyújtás szorzata. Célszerű még megjegyezni azt is, hogy az η hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{Q_1Q_2}{P_1P_2}$.
3. Tekintsük az $\eta(\varepsilon(P_3))$ pontot. Végül vegyük azt a $\tau : \sigma \to \sigma$ tengelyes affinitást, amelynek tengelye a $t = \langle Q_1, Q_2 \rangle$ egyenes és az $\eta \circ \varepsilon(P_3)$ pontot a Q_3 pontba viszi.

Tekintsük az ε eltolás, az η forgatva nyújtás és a τ tengelyes affinitás szorzatából nyert a $\tau \circ \eta \circ \varepsilon$ affin transzformációt. Mivel ez a P_1, P_2, P_3 ponthármast a Q_1, Q_2, Q_3 ponthármasba képezi, így fennáll $\tau \circ \eta \circ \varepsilon = \varphi$.

Világos, hogy az eltolás és a forgatva nyújtás szorzata egy hasonlósági transzformációt ad. Amennyiben ezt eljelöljük χ -vel, azaz $\chi = \eta \circ \varepsilon$, akkor teljesül $\varphi = \tau \circ \chi$. ∎



3.3. ábra. Affinitás előállítása transzformációk szorzataként

3.2. A tengelyes affinitások analitikus jellemzése

Világos, hogy vannak olyan affin transzformációk, amelyek egyetlen síkbeli pontot sem hagynak fixen. Ilyenek például az eltolások és a csúsztatva tükrözések, amelyek egyúttal egybevágósági transzformációk is.

Először arra a kérdésre adunk választ, hogy egy affinitásnak mikor van pontosan egy fixpontja. Vegyünk egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affinitást, melyet analitikusan az

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{AME}$$

mátrixegyenlet ír le. Mint ismeretes, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ adja az indukált lineáris leképezés mátrixát az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorokra nézve.

3.2.1. Állítás. *A φ affinitásnak egyértelműen létezik fixpontja akkor és csak akkor, ha fennáll*

$$det \begin{pmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Bizonyítás: Vegyünk a síkon egy $P(x_P, y_P)$ pontot. Az (AME) mátrixegyenlet akapján a φ affinitás fixen hagyja a P pontot pontosan akkor, ha igaz

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Ebből adódnak az

$$\begin{aligned} x_p &= a_{11}\cdot x_p + a_{12}\cdot y_p + b_1, \\ y_p &= a_{21}\cdot x_p + a_{22}\cdot y_p + b_2 \end{aligned}$$

egyenletek. Ezek átrendezésével az

$$\begin{aligned} (a_{11}-1)\cdot x_p + a_{12}\cdot y_p &= -b_1, \\ a_{21}\cdot x_p + (a_{22}-1)\cdot y_p &= -b_2 \end{aligned}$$

egyenletekhez jutunk. Eszerint ha vesszük az $x,\ y$ ismeretlenekre feírt

$$\begin{aligned} (a_{11}-1)\cdot x + a_{12}\cdot y &= -b_1, \\ a_{21}\cdot x + (a_{22}-1)\cdot y &= -b_2 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert, akkor a megoldó számpárokkal, mint koordinátákkal, meghatározott pontok lesznek a φ affinitás fixpontjai.

A Cramer-szabály szerint ennek a két ismeretlenre felírt és két egyenletből álló egyenletrendszernek egyértelműen létezik megoldása akkor és csak akkor, ha az ismeretlenek együtthatóiból képzett $\begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa nem 0. Ezzel az állításunk bizonyítást nyert. ■

Megjegyzés: Amennyiben $det \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-1 \end{pmatrix} = 0$ teljesül, akkor a fixpontokat meghatározó lineáris egyenletrendszernek vagy nincs megoldása, vagy pedig végtelen sok megoldása van. Ez utóbbi eset felel meg a tengelyes affinitásnak.

3.2.2. Állítás. *Az (AME) egyenlettel leírt φ affin transzformáció egy tengelyes affinitás akkor és csak akkor, ha a 2×3 -as*

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-1 & b_2 \end{pmatrix}$$

mátrix rangja 1, vagyis ha az $\mathbf{N}$ mátrix egyik sora a másiknak egy számszorosa.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy φ egy tengelyes affinitás. Vegyünk ennek t tengelyén két pontot, ezek legyenek T és Q, továbbá az $\mathbf{u} = \overrightarrow{TQ}$ vektort. Világos, hogy fennáll $\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, vagyis $\mathbf{u}$ egy sajátvektora a $\hat{\varphi}$ lineáris leképezésnek az 1 sajátértékkel. Írjuk ezt fel a vektort az $\mathbf{u} = u_1\cdot\mathbf{i} + u_2\cdot\mathbf{j}$ alakban. Mivel $\hat{\varphi}$ -t az $\mathbf{A}$ mátrix írja le, így a 2×2 -es $\mathbf{I}$ egységmátrixszal fennáll:

$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{I}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad (\mathbf{A}-\mathbf{I})\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből adódik, hogy az

$$\begin{gathered} (a_{11}-1)\cdot x + a_{12}\cdot y = 0, \\ a_{21}\cdot x + (a_{22}-1)\cdot y = 0 \end{gathered}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális megoldása. Emiatt az egyenletrendszer $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ mátrixára fennáll $det\ (\mathbf{A}-\mathbf{I})=0$. A determináns eltűnése miatt a mátrix rangja kisebb 2 -nél, tehát az $\begin{pmatrix} a_{11}-1 \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22}-1 \end{pmatrix}$ oszlopmátrixok lineárisan összefüggőek, vagyis az egyik a másiknak egy számszorosa. Vegyük a t tengely egy $T(x_T, y_T)$ pontját.

Mivel T fixen marad, így a fixpontokat leíró egyenlet szerint fennáll

$$\begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet felírható az

$$x_T \cdot \begin{pmatrix} a_{11}-1 \\ a_{21} \end{pmatrix} + y_T \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}$$

alakban. Ebből pedig már következik, hogy a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ oszlopmátrix is egy számszorosa az $\begin{pmatrix} a_{11}-1 \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22}-1 \end{pmatrix}$ oszlopmátrixok egyikének. Ennek következtében az $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-1 & b_2 \end{pmatrix}$ mátrix rangja 1.

Tegyük fel, hogy az állításban szereplő feltétel teljesül. Vegyük a fixpontokat meghatározó

$$\begin{aligned} (a_{11}-1)\cdot x + a_{12}\cdot y &= -b_1, \\ a_{21}\cdot x + (a_{22}-1)\cdot y &= -b_2 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert. Mint ismeretes, ennek megoldó számpárjai felelnek meg a φ affinitás fixpontjainak. Mivel az $\mathbf{N}$ mátrix egyik sora a másiknak egy számszorosa, a fenti egyenletrendszerben az egyik egyenlet a másiknak egy számszorosa. Ha tehát a kettő közül veszünk egy olyan egyenletet, amelyben az x, y együtthatói nem egyszerre tűnnek el, akkor az azt megoldó számpárok a másik egyenletnek is megoldásai lesznek. A kiválasztott egyenlet pedig egy egyenest ír le, amelynek összes pontját fixen hagyja a φ affin transzformáció. Ezzel beláttuk, hogy φ egy tengelyes affinitás. ∎

Megjegyzés: A 3.2.2 Állítás bizonyítása során azt is beláttuk, hogy amennyiben az $\mathbf{N}$ mátrix rangja 1, akkor az affinitás tengelyét az $(a_{11}-1)\cdot x + a_{12}\cdot y + b_1 = 0$, $\quad a_{21}\cdot x + (a_{22}-1)\cdot y + b_2 = 0$ egyenletek egyike írja le. Speciális esetben előfordulhat, hogy az egyik egyenlet bal oldala eltűnik.

3.2.1. Példa

Vegyük azt a φ affinitást, amelyet az alábbi mátrixegyenletet ír le a síkbeli koordinátákra nézve:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Döntsük el, hogy φ egy tengelyes affinitás-e?

Az előző 3.2.2. Állítást alkalmazva vegyük az

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 8 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Látható, hogy az $\mathbf{N}$ mátrix második sora az elsőnek (-2) -szerese. Emiatt φ egy tengelyes affinitás, amelynél a t tengely egyenlete: $-4x + y - 6 = 0$.

Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit:

$$det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 8 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 \cdot \lambda - 5,$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 4 \cdot \lambda - 5 &= 0, \\ (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 5) &= 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -5. \end{aligned}$$

Most keressük meg az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeihez a sajátvektorokat:

$\lambda_1 = 1$ sajátérték esetén adódik:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda_1 \cdot \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Világos, hogy a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ sajátvektor párhuzamos a φ affinitás tengelyével.

$\lambda_2 = -5$ sajátérték esetén fennáll:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda_2 \cdot \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Látható, hogy a $\lambda_2 = -5$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2 \cdot \mathbf{j}$ sajátvektor adja meg a φ tengelyes affinitás irányát.

4. fejezet

Az affinitás invariáns derékszöge

4.1. Az invariáns derékszög értelmezése és létezése

Ismeretes, hogy a hasonlósági transzformációk szögtartóak. Azonban ha egy olyan affin transzformációt veszünk, amely nem hasonlóság, akkor az már nem őrzi meg a szögek mértékét. Felvetődik tehát a kérdés, hogy egy tetszőleges affinitásnál vajon lehet-e találni olyan egymásra merőleges egyeneseket, amelyeknek a képei is derékszöget zárnak be egymással.

4.1.1. Definíció. *Legyen adott egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformáció. Az egymásra merőleges a, b egyenesekről azt mondjuk, hogy invariáns derékszöget adnak a φ affinitáshoz, ha az $a' = \varphi(a)$ és $b' = \varphi(b)$ képegyenesek is merőlegesek egymásra.*

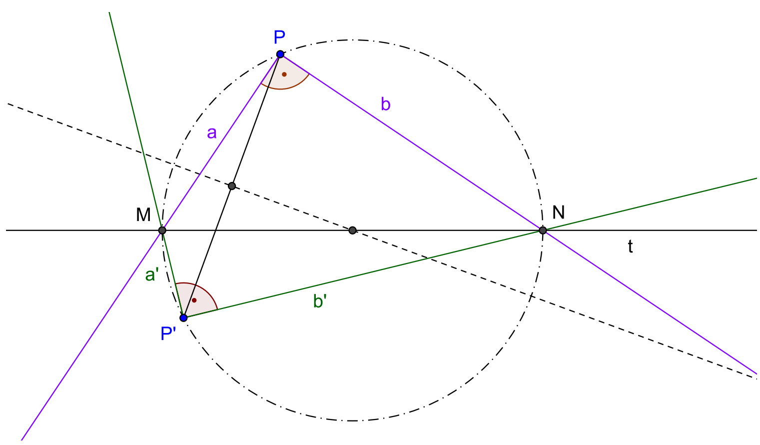
Elsőként azt igazoljuk, hogy a tengelyes affinitáshoz mindig lehet találni invariáns derékszöget.

4.1.2. Állítás. *Legyen adott egy olyan $\varphi : \sigma \to \sigma$ tengelyes affinitás, amelynek az iránya nem merőleges a t tengelyre. Vegyünk a síkban egy P pontot. Ekkor egyértelműen létezik két egymást a P -ben derékszögben metsző egyenes, amelyeknél a képegyenesek is merőlegesek egymásra.*

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy P nincs a t tengelyen. Vegyük a P pont $P' = \varphi(P)$ képét. Tekintsük a PP' szakasz f felezőmerőleges egyenesét. Ez messe el a t tengelyt a Q pontban. Vegyük a síkban azt a k kört, amelynek centruma a Q pont és átmegy a P, P' pontokon. A k körnek a t tengellyel vett metszépontjai legyenek M és N. Eszerint k éppen az MN szakasz köré írt Thalész-kör.

Vegyük most az $a = \langle P, M \rangle$ és $b = \langle P, N \rangle$ egyeneseket. Világos, hogy az a, b egyenesek merőlegesek egymásra. Az egyenesek képei az $a' = \langle P', M \rangle$, $b' = \langle P', N \rangle$ egyenesek lesznek. Mivel a P' is rajta van az MN szakasz köré írt Thalész-körön, így az a' és b' egyenesek is merőlegesek egymásra. Ezzel pedig beláttuk, hogy a, b merőleges egyenesek egy invariáns derékszögét adják a φ affinitásnak.

Vegyük észre, a k körön kívül nincs másik olyan kör, amely átmegy a P, P' pontokon és centruma a t -re esik. Ebből már következik, hogy ha az a, b egyenesektől különbözően veszünk két egyenest, melyek derékszögben metszik egymást a P pontban, akkor azok képeinek a hajlásszöge már nem lesz derékszög. Ezzel pedig befejeztük az állítás bizonyítását. ∎



4.1. ábra. Invariáns derékszög szerkesztése

Megjegyzés: Az előző 4.1.2. Állítás érvényben marad abban az esetben is, ha a φ tengelyes affinitás iránya merőleges a tengelyre. (Az egyértelműséghez, csak azt kell feltennünk, hogy φ nem egy tengelyes tükrözés.) Ekkor a P ponton átmenő t -vel párhuzamos a egyenes és az arra merőleges b egyenes fogják megadni az invariáns derékszöget.

4.1.3. Állítás. *Legyen adott egy olyan $\varphi : \sigma \to \sigma$ affinitás, amely nem hasonlóság. Vegyünk a síkban egy P pontot. Ekkor egyértelműen létezik két egymást a P -ben derékszögben metsző egyenes, amelyeknél a képegyenesek is merőlegesek egymásra.*

Bizonyítás: Korábban már igazoltuk, hogy a φ affinitás előáll egy χ hasonlóság és egy τ tengelyes affinitás szorzataként. Fontos megjegyezni, hogy χ megőrzi ez egyenesek hajlásszögét. Vegyük a $\tilde{P} = \chi(P)$ pontot. Tekintsük azokat a $\tilde{P}$ -n átmenő egymásra merőleges $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ egyeneseket, melyeket a τ tengelyes affinitás merőleges egyenesekbe képez. A korábbi 4.1.2. Állítás szerint egyértelműen létezik egy ilyen egyenespár. Amennyiben vesszük a χ inverzét, amely szintén egy hasonlóság, akkor az $a = \chi^{-1}(\tilde{a})$, $b = \chi^{-1}(\tilde{a})$ egyenesek adják a φ affinitáshoz tartozó invariáns derékszöget a P pontban. ∎

4.2. Az invariáns derékszög analitikus meghatározása

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy az affinitás által indukált leképezés mátrixából miként lehet meghatározni az invariáns derékszög irányait. Ehhez szükségünk lesz az alábbi fogalomra is.

4.2.1. Definíció. *A síkbeli vektorok V_σ terében legyenek adva az $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ vektorok. A skaláris szorzatokból kapott* $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$ *mátrixot az $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ vektorok Gram-mátrixának mondjuk.*

Megjegyzés: Világos, hogy az $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ vektorok merőlegesek egymásra pontosan akkor, ha a szimmetrikus $\mathbf{G}$ mátrix diagonális, azaz a $\mathbf{G}$ mellékátlójában szereplő elemek eltűnnek.

Két vektor Gram-mátrixát könnyen meg lehet határozni, ha ismerjük a vektorok koordinátáit egy ortonormált bázisra vonatkozóan. Fejezzük ki az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ vektorokat az $\mathbf{i},\ \mathbf{j}$ ortonormált bázisvektorokból:

$$\mathbf{u}_1 = c_{11}\cdot\mathbf{i} + c_{21}\cdot\mathbf{j},\quad \mathbf{u}_2 = c_{12}\cdot\mathbf{i} + c_{22}\cdot\mathbf{j}.$$

Az együtthatók adják az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ vektorok koordinátáit. Jelölje $\mathbf{C}$ a belőlük képzett mátrixot, továbbá $\mathbf{C}^T$ a $\mathbf{C}$ mátrix transzponáltját. Tekintsük a $\mathbf{C}^T$ és $\mathbf{C}$ mátrixok szorzatát:

$$\mathbf{C}^T\cdot\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk, hogy a $\mathbf{C}^T\cdot\mathbf{C}$ mátrix megegyezik a $\mathbf{G}$ Gram-mátrixszal.

Legyen adott egy $\varphi:\sigma\to\sigma$ affin transzformáció, melyet analitikusan az (AME) egyenlet ír le. Ekkor a φ által indukált $\widehat{\varphi}: V_\sigma\to V_\sigma$ lineáris leképezést az $\mathbf{A}$ mátrix írja le az $\mathbf{i},\ \mathbf{j}$ bázisvektorokra nézve.

A továbbiakban feltesszük, hogy φ nem egy hasonlóság, ami azt jelenti, hogy az $\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrixra fennáll $\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\neq\lambda^2\cdot\mathbf{I}$ tetszőleges $\lambda>0$ szám esetén. Tekintsük azt a $\mu: V_\sigma\to V_\sigma$ lineáris leképezést, melyet az $\mathbf{M}=\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}$ mátrix ír le az $\mathbf{i},\ \mathbf{j}$ bázisban. Tehát az $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ mátrix elemeivel fennáll

$$\mu(\mathbf{i}) = m_{11}\cdot\mathbf{i} + m_{21}\cdot\mathbf{j},\quad \mu(\mathbf{j}) = m_{12}\cdot\mathbf{i} + m_{22}\cdot\mathbf{j}.$$

Lineáris algebrából ismeretes, hogy mivel az $\mathbf{M}=\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, az $\mathbf{M}$ karakterisztikus polinomjának gyökei valósak. Ezek a gyökök adják a μ lineáris leképezés sajátértékeit, és ezekből nyerjük a μ sajátvektorait. Ismeretes az is, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek egymásra. Ezek alapján kimondhatjuk a következő tételt.

4.2.2. Tétel. *Legyenek az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ olyan egységvektorok, melyek a μ leképezés különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok. Ekkor a $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1)$ és $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$ vektorok is merőlegesek egymásra.*

Bizonyítás: Legyenek az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ vektorok a μ lineáris leképezés sajátvektorai a $\lambda_1,\ \lambda_2$ sajátvektorokkal. Vegyük ezeket, mint az $\mathbf{i},\ \mathbf{j}$ bázisvektorok lineáris kombinációit:

$$\mathbf{u}_1 = c_{11}\cdot\mathbf{i} + c_{21}\cdot\mathbf{j},\quad \mathbf{u}_2 = c_{12}\cdot\mathbf{i} + c_{22}\cdot\mathbf{j}.$$

Az együtthatókból nyerjük a $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ mátrixot. Tekintsük az $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ szorzatmátrixot. Vegyük észre, hogy ennek oszlopai éppen $\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$ és $\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$. Ezen oszlopmátrixok pedig a $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1)$, $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$ képvektorok koordinátáinak felelnek meg. Ennek következtében az $\mathbf{AC}$ mátrix adja a $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1),\ \hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$ képvektorok koordinátáiból képzett mátrixot. Emiatt az $(\mathbf{AC})^T\cdot(\mathbf{AC})$ mátrix lesz a $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1)$, $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$ képvektorok Gram-mátrixa. Azt kellene belátnunk, hogy ez a $\tilde{\mathbf{G}}=(\mathbf{AC})^T\cdot(\mathbf{AC})$ mátrix diagonális.

Vegyük észre, hogy fennáll a $\tilde{\mathbf{G}}=(\mathbf{AC})^T\cdot(\mathbf{AC})=\mathbf{C}^T(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A})\mathbf{C}=\mathbf{C}^T\mathbf{MC}$ összefüggés. Az $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ sajátvektorai a μ lineáris leképezésnek a $\lambda_1,\ \lambda_2$ sajátértékekkel, így fennáll $\mu(\mathbf{u}_1)=\lambda_1\,\mathbf{u}_1$ és

$\mu(\mathbf{u}_2) = \lambda_2\,\mathbf{u}_2$. Emiatt az $\mathbf{M}$ mátrixra vonatkozóan teljesülnek az $\mathbf{M}\cdot\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21}\end{pmatrix} = \lambda_1\cdot\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21}\end{pmatrix}$ és $\mathbf{M}\cdot\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22}\end{pmatrix} = \lambda_2\cdot\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22}\end{pmatrix}$ egyenlőségek. A két összefüggés alapján viszont igaz:

$$\mathbf{M}\cdot\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22}\end{pmatrix}.$$

Innen adódik, hogy fennáll

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}} &= \mathbf{C}^T\mathbf{M}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22}\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 & \lambda_2\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 \\ \lambda_1\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_1 & \lambda_2\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ezzel azt kaptuk, hogy a $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1)$, $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$ képvektorok $\tilde{\mathbf{G}}$ Gram-mátrixa diagonális, vagyis a $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1)$, $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$ vektorok is merőlegesek egymásra. ∎

4.2.1. Példa

Tekintsünk egy olyan $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformációt, ahol a $\hat{\varphi}$ indukált leképezést leíró $\mathbf{A}$ mátrix a következő:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 7 & 4\end{pmatrix}.$$

Keressük meg a φ affinitás invariáns derékszögét meghatározó irányokat. Azt könnyű kiszámolni, hogy az $\mathbf{A}$ determinánsára igaz $det\ \mathbf{A} = 10$. Az előző 4.2.2. Tétel alapján határozzuk meg az $\mathbf{M}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -8 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 7 & 4\end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 170 & -60 \\ -60 & 80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

szimmetrikus mátrixot kapjuk. Először keressük meg az $\mathbf{M}$ sajátértékeit:

$$\begin{aligned} det(\mathbf{M} - \lambda\cdot\mathbf{I}) &= 0, \\ det\begin{pmatrix} 17-\lambda & -6 \\ -6 & 8-\lambda\end{pmatrix} &= \lambda^2 - 25\cdot\lambda + 100, \\ (\lambda-5)(\lambda-20) &= 0.\end{aligned}$$

A fentiek alapján a μ leképezés sajátértékei $\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = 20$. Határozzunk most meg egy a λ_1 -hez tartozó sajátvektort:

$$\mathbf{M} - \lambda_1 \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy az $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ vektor sajátvektora μ -nek. Ily módon a λ_1 -hez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor: $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Hasonló módon a λ_2 -höz tartozó sajátvektorok is kiszámolhatóak:

$$\mathbf{M} - \lambda_2 \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ezek szerint a λ_2 sajátértékhez tartozó egységnyi sajátvektor: $\mathbf{u}_2 = (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$. A φ affinitáshoz tehát az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ vektorok adják meg az invariáns derékszög irányait.

Ellenőrzni is tudjuk a számolásunk korrektségét. Tekintsük az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ vektorok képeinek a koordinátáit:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hasonló módon adódik:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A két képvektor skaláris szorzata:

$$\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1) \cdot \hat{\varphi}(\mathbf{u}_2) = 0,$$

tehát a két képvektor valóban merőleges egymásra.

4.3. Adott irányhoz tartozó nyújtási arányszám egy affin transzformációnál

Mivel az affinitás nem tartja meg a szakaszok hosszát, így felírhatjuk az alábbi definíciót.

4.3.1. Definíció. *Adva van egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformáció. Tekintsük egy σ -beli e egyenest és azon egy AB szakaszt, továbbá az $A'B'$ képszakaszt. A $n_e = \frac{A'B'}{AB}$ számot mondjuk az affinitás e irányához tartozó nyújtási arányszámának.*

Megjegyzés: A n_e szám nem függ az e -re eső AB szakasz megválasztásától. Ha a g egyenes párhuzamos az e egyenessel akkor fennáll $n_e = n_g$.

Vegyünk egy az e -vel párhuzamos $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort és annak a $\hat{\varphi}(\mathbf{v})$ képét. Világos, hogy ekkor az e irányához tartozó nyújtási arányszámra fennáll $n_e = \dfrac{\|\hat{\varphi}(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|}$. Ammennyiben a $\mathbf{v}$ egy egységvektor, akkor teljesül $n_e = \|\hat{\varphi}(\mathbf{v})\|$.

A φ által indukált $\widehat{\varphi}$ lineáris leképezés mátrixa legyen $\mathbf{A}$. Tegyük fel, hogy a φ affinitásnál az invariáns derékszög egyeneseinek irányát az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ egységvektorok adják meg. Az $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ mátrix által leírt μ lineáris leképezésnél a megfelelő sajátértékek legyenek $\lambda_1,\ \lambda_2$. A 4.2.2. Tétel bizonyításában a $\tilde{\mathbf{G}}$ Gram-mátrixra kapott összefüggés alapján ekkor a $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1),\ \hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$ képvektorokal teljesül $\|\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1)\|^2 = \lambda_1$ és $\|\hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)\|^2 = \lambda_2$. Ebből pedig az következik, hogy az $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2$ vektorokkal meghatározott irányoknál a nyújtási arányszámok $n_1 = \sqrt{\lambda_1}$ és $n_2 = \sqrt{\lambda_2}$ lesznek.

4.3.2. Állítás. *A φ affinitáshoz tartozó nyújtási arányszámok az $n_1,\ n_2$ értékek közé esnek.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy fennáll $\lambda_1 < \lambda_2$. Vegyünk egy tetszőleges $\mathbf{v}$ egységvektort a V_σ vektortérben. Nyilván van olyan α szög, amellyel teljesül $\mathbf{v} = \cos\alpha\, \mathbf{u}_1 + \sin\alpha\, \mathbf{u}_2$. Ennek képére igaz $\hat{\varphi}(\mathbf{v}) = \cos\alpha\, \hat{\varphi}(\mathbf{u}_1) + \sin\alpha\, \hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$. Mivel a $\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1),\ \hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)$ vektorok merőlegesek egymásra, így azt kapjuk, hogy

$$\|\hat{\varphi}(\mathbf{v})\|^2 = \|\hat{\varphi}(\mathbf{u}_1)\|^2 \cdot \cos^2\alpha + \|\hat{\varphi}(\mathbf{u}_2)\|^2 \cdot \sin^2\alpha = \lambda_1 \cdot \cos^2\alpha + \lambda_2 \cdot \sin^2\alpha.$$

Ez alapján már belátható, hogy $\|\hat{\varphi}(\mathbf{v})\|^2$ értéke λ_1 és λ_2 között van. Innen pedig már következik, hogy fennáll $n_1 \leq \|\hat{\varphi}(\mathbf{v})\| \leq n_2$. ■

4.4. Kör affin képe ellipszis

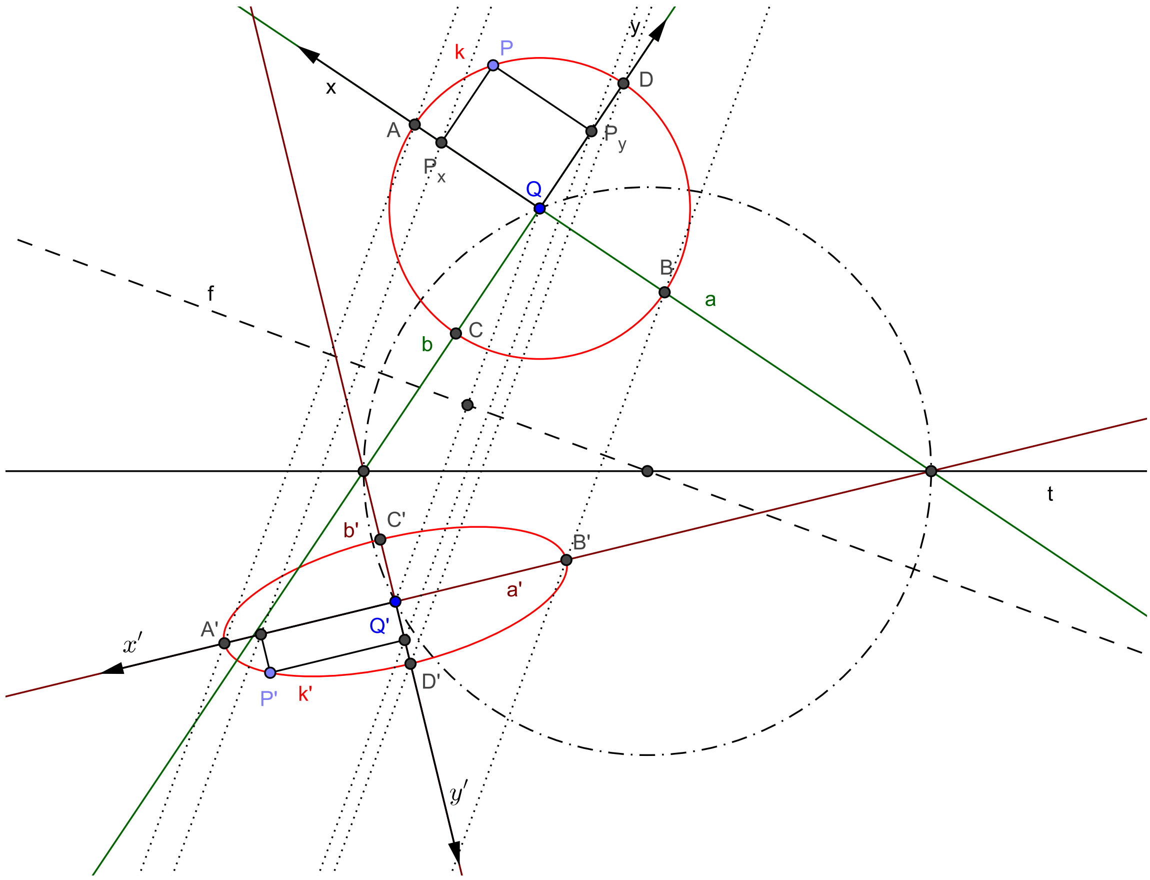
Ebben az alfejezetben igazoljuk, hogy a kör affin képe egy olyan ellipszis, amelynél a nagytengely és a kistengely egyenese éppen az affinitás egy invariáns derékszögét adó egyenespárnak a képe.

4.4.1. Tétel. *Legyen adott egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affinitás és egy k kör a σ síkon. A k kör $\varphi(k)$ affin képe ellipszis.*

Bizonyítás: Mint ismeretes, a φ affinitást felírhatjuk a $\varphi = \tau \circ \eta \circ \varepsilon$ szorzat alakjában, ahol τ tengelyes affinitás, η forgatva nyújtás és ε eltolás. Mivel a forgatva nyújtás és az eltolás kört körbe képez, így elegendő belátni, hogy a tengelyes affinitás kört ellipszisbe képez.

Legyen adva a σ síkban egy φ tengelyes affinitás. Vegyünk a síkban egy Q centrumú és r sugarú k kört. A 4.1.2. Állítás szerint vannak olyan $a,\ b$ egyenesek, amelyek derékszögben metszik egymást a Q pontban, és amelyeknek a φ szerinti a' és b' képei is merőlegesek egymásra. A φ tengelyes affinitásnak a $a,\ b$ egyenesekhez tartozó nyújtási arányszámait jelölje n_a és n_b.

A síkban vegyünk fel most két derékszögű koordináta-rendszert. Az elsőnek a kezdőpontja legyen Q és az x tengelye legyen az a egyenes, az y tengelye pedig a b egyenes. Világos, hogy ebben a koordináta-rendszerben a k kör egyenlete: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. A második derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a Q' pont és az $x',\ y'$ tengelyei essenek az $a',\ b'$ merőleges egyenesekre.



4.2. ábra. Kör affin képe

Vegyünk a k körön egy P pontot. Ennek az első koordináta-rendszerben a koordinátái legyenek (x_P, y_P). Tekintsük P-nek a koordináta-tengelyekre eső P_x, P_y merőleges vetületeit. Ezekkel nyilván fennáll $QP_x = |x_P|$ és $QP_y = |y_P|$.

Vegyük a QP_xPP_y téglalapot. Mivel az a', b' egyenesek is merőlegesek egymásra ennek a $Q'P'_xP'P'_y$ képe is téglalap lesz. A képként kapott téglalap oldalaival pedig fennáll $Q'P'_x = n_a \cdot QP_x$ és $Q'P'_y = n_b \cdot QP_y$. Ebből viszont következik, hogy a P' pontnak a második koordináta-rendszerben vett koordinátáira teljesül:

$$
\begin{aligned}
x'_{P'} &= n_a \cdot x_P, \\
y'_{P'} &= n_b \cdot y_P.
\end{aligned}
$$

Mivel P rajta van a k körön, emiatt a koordinátáival fennáll

$$x_P^2 + y_P^2 - r^2 = 0.$$

Amennyiben felhasználjuk a P' képpont koordinátáira kapott kifejezéseket, akkor ebből az

$$\left(\frac{x'_{P'}}{n_a}\right)^2 + \left(\frac{y'_{P'}}{n_b}\right)^2 - r^2 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ezt átrendezve az

$$\left(\frac{x'_{P'}}{n_a \cdot r}\right)^2 + \left(\frac{y'_{P'}}{n_b \cdot r}\right)^2 - 1 = 0$$

egyenletet nyerjük. Vezessük be az $\tilde{a} = n_a \cdot r$ és $\tilde{b} = n_b \cdot r$ értékeket. A fenti összefüggés szerint a P' képpont koordinátái kielégítik az

$$\frac{(x')^2}{\tilde{a}^2} + \frac{(y')^2}{\tilde{b}^2} - 1 = 0$$

egyenletet. Ismeretes, hogy ez egy olyan ellipszist ír le, amelynek szimmetriatengelyei a koordinátarendszer tengelyeivel azonosak, továbbá az ellipszis féltengelyeinek hosszai $\tilde{a}$ és $\tilde{b}$. ■

Megjegyzés: Az ellipszis átmérői között a nagytengely a leghosszabb és a kistengely a legrövidebb. Ily módon a fenti bizonyítás során is azt kaptuk, hogy ha egy affinitás nem hasonlóság, akkor az invariáns derékszög irányaihoz tartozik a maximális és a minimális nyújtási arányszám.

Irodalomjegyzék

[1] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[2] Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004.

[3] Reiman István: *A geometria és határterületei*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.

[4] H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyviadó, Budapest, 1987.