Az Yff pontok vizsgálata különböző geometriákban

Szakdolgozat

Paulik Rita

Matematika BSc, Matematika tanári szakirány

Témavezető:
Dr. Rózsahegyiné Vásárhelyi Éva
egyetemi docens

Konzulens:
Lénárt István
oktatáskutató

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Tíz éves voltam, mikor Lénárt István tanár úr az általános iskolámban tartott előadást, ekkor találkoztam először a gömbi geometriával. Már akkor érdekesnek találtam ezt a világot, a mai napig élnek bennem emlékek arról a délutánról. A gömbi geometriát komolyabban megismerni azonban csak az egyetemen kezdtem, a Nem-euklideszi geometriák az iskolában című tantárgy keretein belül. Itt szembesültem azzal a ténnyel, hogy mivel az életünket egy gömbön éljük, ez a geometria sokkal közelebb áll a mindennapi életünkben tapasztalt dolgokhoz. Nagyon megtetszett az egész felület kézzel-foghatósága, illetve az, ahogyan a gömb megismerése a matematikai alapfogalmak alaposabb átgondolására kényszeríti az embert. A dolgozatom témájának kiválasztásakor tehát biztos voltam abban, hogy ebben a témakörben szeretnék elmélyülni, a konkrét javaslatot Lénárt István tanár úrtól kaptam. Ezúton szeretném megköszönni neki a közreműködést és támogatást, mellyel hozzájárult munkám színvonalának emeléséhez.

Néhány Yff által bizonyított síkgeometriai tétel bemutatásával kezdem munkámat. Elsőként az Yff központi háromszögről, majd az ebből származtatható Yff egybevágósági központról írok, végül az első és a második Yff pontot ismertetem. Az euklideszi síkon részletezett tételek után röviden összehasonlítom az euklideszi, az elliptikus valamint a hiperbolikus geometriát, összefoglalom a Hilbert-féle axióma rendszer lényegét, illetve a különböző geometriák ettől való eltéréseit. Mivel Yff talán legismertebb eredménye az Yff központi háromszög, ezt vizsgálom meg először gömbi, majd hiperbolikus szabályos háromszögek esetében. A szabályos gömbháromszögre vonatkozó számítások során a dualitás fogalmára is kitérek, foglalkozom az Yff háromszög duálisával is. Dolgozatomat a szabályos hiperbolikus háromszögekhez tartozó Yff központi háromszög megadásával fejezem be.

2. Az Yff központi háromszög és az Yff egybevágósági központ

Egyenvágó (isoscelizer):

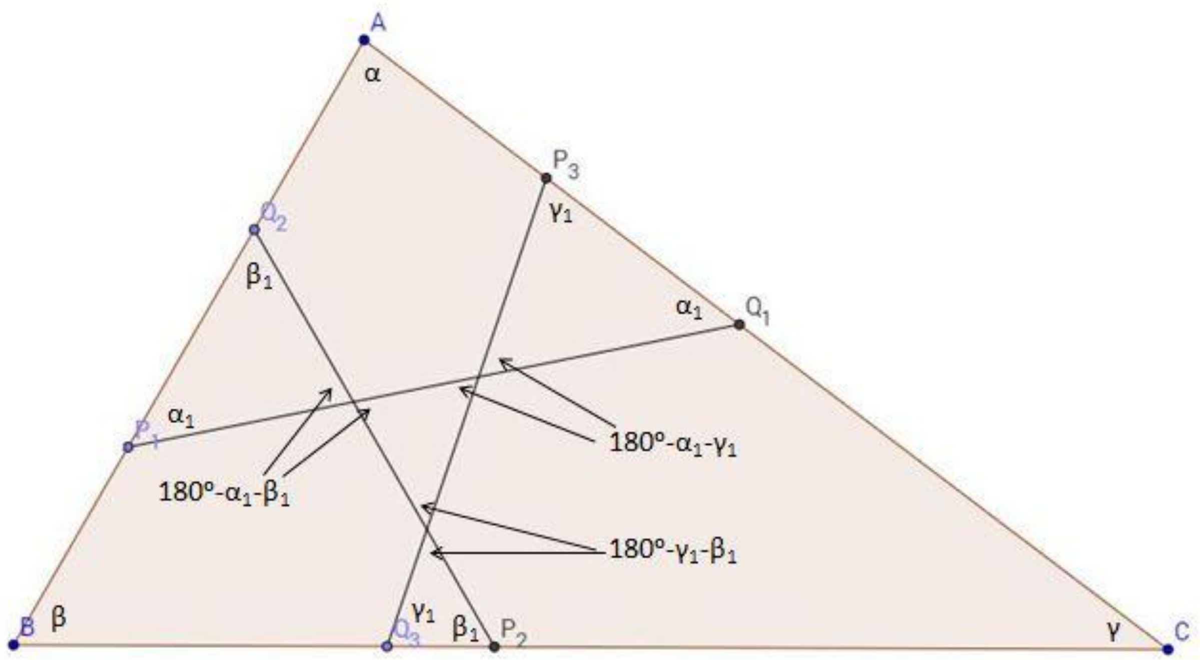
Az "isoscelizer" fogalmat Yff vezette be 1963-ban. Jelenleg nincs magyar megfelelője, ezért én a továbbiakban az "egyenvágó" kifejezést fogom használni. Azt az egyenest nevezzük így, amely egy háromszögből olyan egyenlőszárú háromszöget vág le, melynek szárai az eredeti háromszög oldalegyeneseire illeszkednek. A kapott egyenlőszárú háromszög szárai tehát az eredeti háromszög egyik csúcsában metszik egymást, ehhez a csúcshoz tartozik az egyenvágó. [1]

2.1. Yff központi háromszög:

Legyenek a P_1Q_1, P_2Q_2 és P_3Q_3 egyenesek rendre az A,B és C csúcsokhoz tartozó egyenvágók.

2.1.2. Állítás

Az egyenvágók által a háromszög belsejében létrehozott háromszögek hasonlóak egymáshoz. [2]



1. **ábra**

2.1.3. Bizonyítás

Legyenek α_1 az AP_1Q_1, β_1 a BP_2Q_2 és γ_1 a CP_3Q_3 egyenlőszárú háromszögek alapon fekvő szögei (1. ábra). Az egyenvágók által létrehozott, az eredeti háromszöggel érintkező kis háromszögek harmadik szögei ekkor $180^\circ-\alpha_1-\beta_1$, $180^\circ-\alpha_1-\gamma_1$ és $180^\circ-\gamma_1-\beta_1$. Mivel az előzőekkel csúcsszögek, ugyanezek lesznek a középső háromszög belső szögei is.

A középső háromszögben tehát felírható, hogy:

$$180^\circ-\alpha_1-\beta_1+180^\circ-\alpha_1-\gamma_1+180^\circ-\gamma_1-\beta_1=180^\circ$$

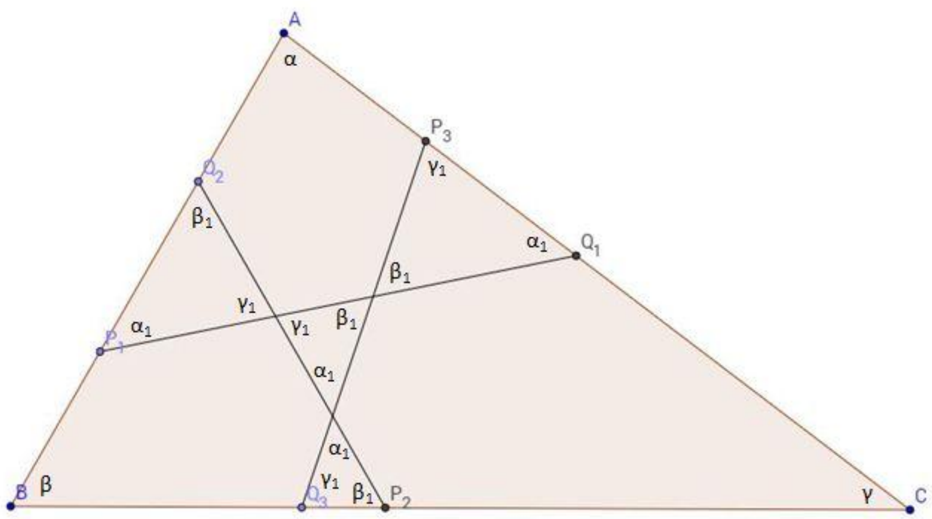
$$3*180^\circ-2*(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)=180^\circ$$

Innen kapjuk, hogy $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=180^\circ$, vagyis

$$180^\circ-\alpha_1-\beta_1= \gamma_1$$

$$180^\circ-\alpha_1-\gamma_1= \beta_1$$

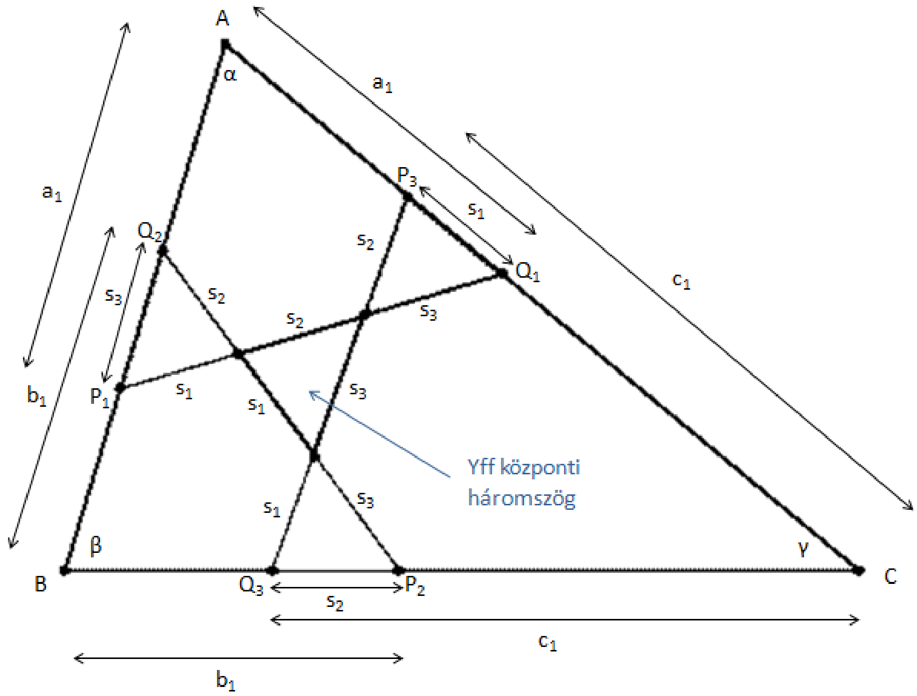
$$180^\circ-\gamma_1-\beta_1= \alpha_1$$



2. ábra

2.1.4. Állítás

A P_1Q_1, P_2Q_2 és P_3Q_3 egyenvágóknak megadható olyan speciális helyzete, amikor a háromszög belsejében négy kis háromszög jön létre, és ezek egymással egybevágók. Az állítást Peter Yff bizonyította 1987-ben. Ebben a speciális esetben a keletkező négy belső háromszög közül a legbelsőt Yff központi háromszögnek (Yff central triangle) nevezzük. [2]



3. ábra

2.2. Hogyan adható meg az Yff központi háromszög?

Legyenek az ABC háromszög oldalai rendre a, b és c, az Yff központi háromszög oldalai s_1, s_2 és s_3, az AP_1Q_1, BP_2Q_2 és CP_3Q_3 egyenlőszárú háromszögek szárai pedig a_1, b_1 valamint c_1.

Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszög szögeire:

$$a^2=b^2+c^2-2bc*\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac*\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab*\cos\gamma$$

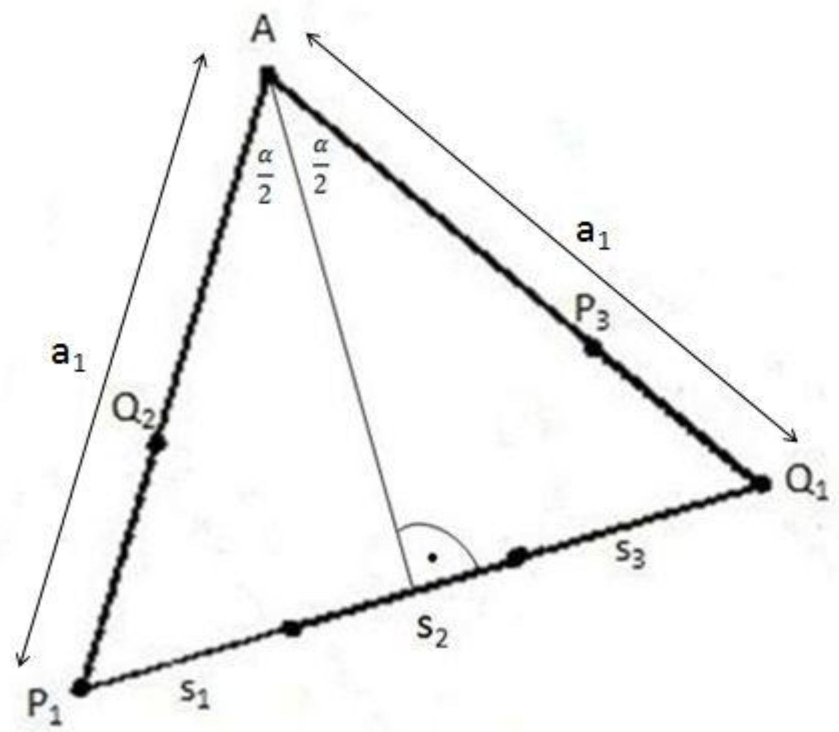
Átrendezve az egyenleteket a szögek koszinuszaira:

$$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Húzzuk be az AP_1Q_1 háromszög P_1Q_1 alaphoz tartozó magasságát. Mivel a háromszög egyenlőszárú, ezért az alaphoz tartozó magasság felezi az α szöget.



4. ábra

A magasság két derékszögű háromszögre osztja fel az eredeti háromszöget, melyekben az $\frac{\alpha}{2}$ szög szinuszára:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}(s_1 + s_2 + s_3)}{a_1}$$

Ugyanakkor a fél-szög szinuszára vonatkozó képletet használva:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(s_1+s_2+s_3)}{a_1}$$

a fenti képletet cosα helyére beírva:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(s_1+s_2+s_3)}{a_1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc})} = \frac{1}{2} * \frac{s_1+s_2+s_3}{a_1}$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{1}{4}(\frac{s_1+s_2+s_3}{a_1})^2$$

$$2\left(1-\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\right) = (\frac{s_1+s_2+s_3}{a_1})^2$$

Ugyanígy a BP_2Q_2 háromszögben:

$$2\left(1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) = (\frac{s_1+s_2+s_3}{b_1})^2$$

Valamint CP_3Q_3 háromszögben:

$$2\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = (\frac{s_1+s_2+s_3}{c_1})^2$$

Tudjuk továbbá, hogy az ABC háromszög oldalai mentén felvett távolságok segítségével felírhatóak a háromszög oldalai a következő módon:

$$a = b_1+c_1-s_2$$

$$b = a_1+c_1-s_1$$

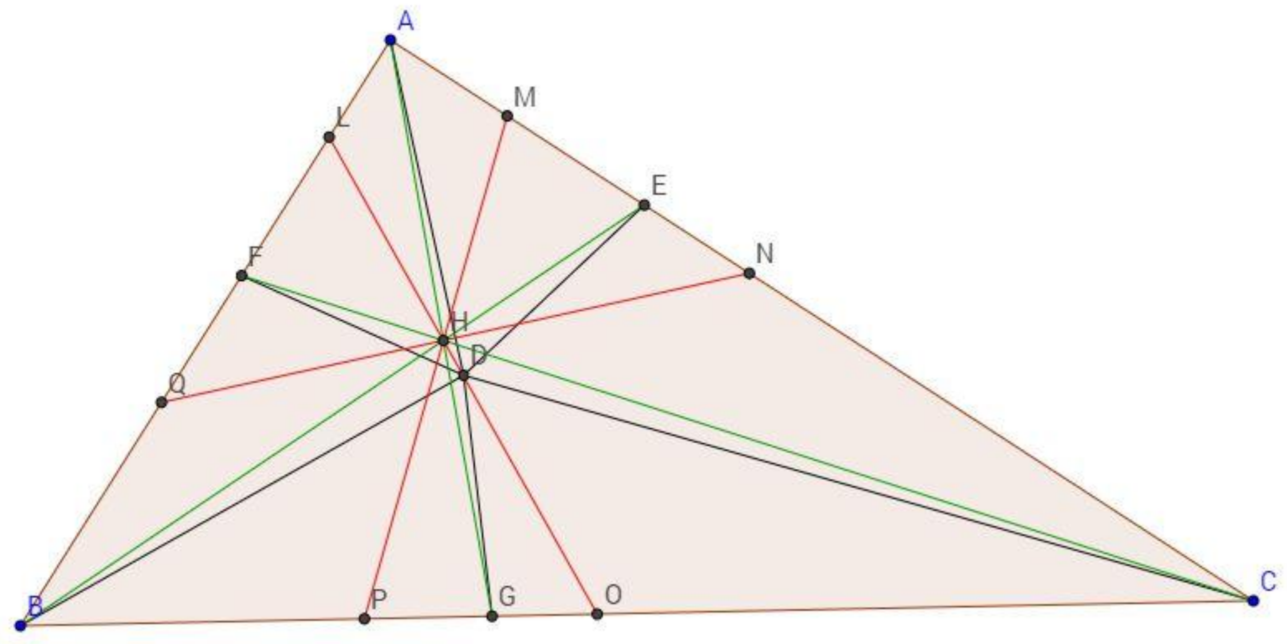
$$c = a_1+b_1-s_3$$

A fenti hat egyenletből álló egyenletrendszer megoldásai tehát megadják az egyenvágók, valamint Yff központi háromszög oldalainak hosszát. [3]

2.3. Az Yff egybevágósági központ

Induljunk ki az Yff központi háromszögből. Ez után az egyenvágók párhuzamos eltolásával zsugorítsuk a központi háromszöget egy ponttá úgy, hogy eközben a másik három kis háromszög egybevágó marad. Az így kapott pontot nevezzük az ABC háromszög Yff egybevágósági központjának. [4]

2.3.2. Az Yff egybevágósági központ geometriai konstrukciója



5. ábra

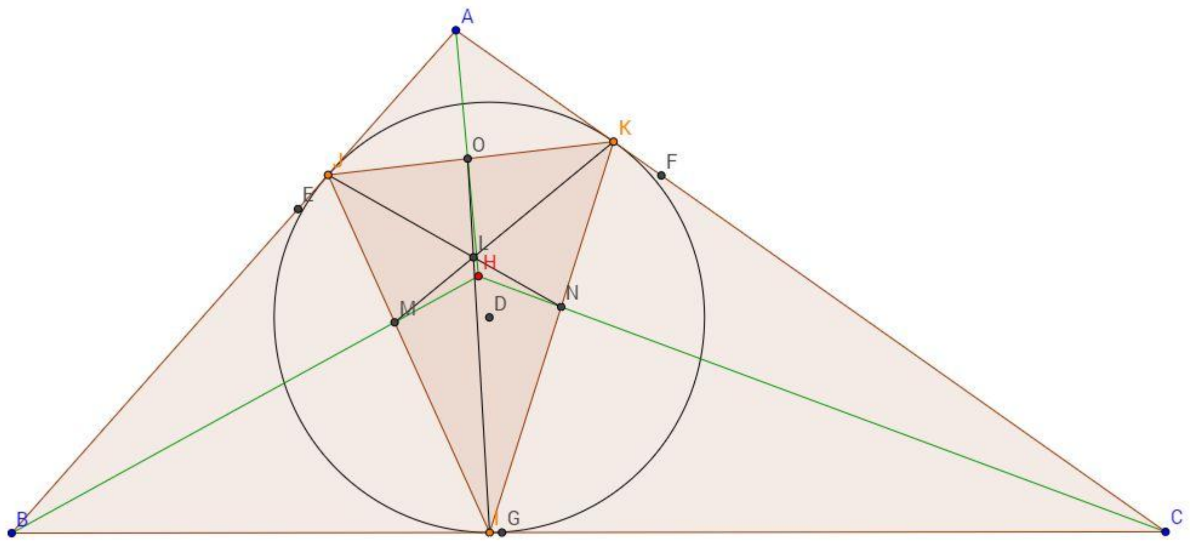
Vegyük az ABC háromszög beírt körének középpontját, D-t. Ez után szerkesszük meg az ADC, ADB és BDC szögek szögfelezőit, és tekintsük ezek metszéspontjait az AC, AB és BC oldalakkal. Így kapjuk az E, F és G pontokat. Ekkor az AG, BE és CF egyenesek egy pontban, H-ban metszik egymást. Ez a pont az ABC háromszög Yff egybevágósági központja. A QN, OL és MP egyenesek az A, B és C csúcsokhoz tartozó egyenvágók, az LHQ, PHO és NHM háromszögek pedig egybevágóak. [5]

Egy másik lehetséges szerkesztési eljárás:

Szerkesszük meg az ABC háromszög beírt körét, (középpontja a D pont) majd tekintsük ennek érintési pontjait a háromszöggel. Ezek az I, J és K pontok.

Ezután szerkesszük meg az IJK háromszög beírt körének középpontját, L-t. Az L pontot az I, J és K csúcsokkal összekötő egyenesek az O, N és M pontokban metszik az IJK háromszög oldalegyeneseit.

Az AO, BM és CN egyenesek egy H pontban metszik egymást, ez az ABC háromszöghöz tartozó Yff egybevágósági központ. [5]



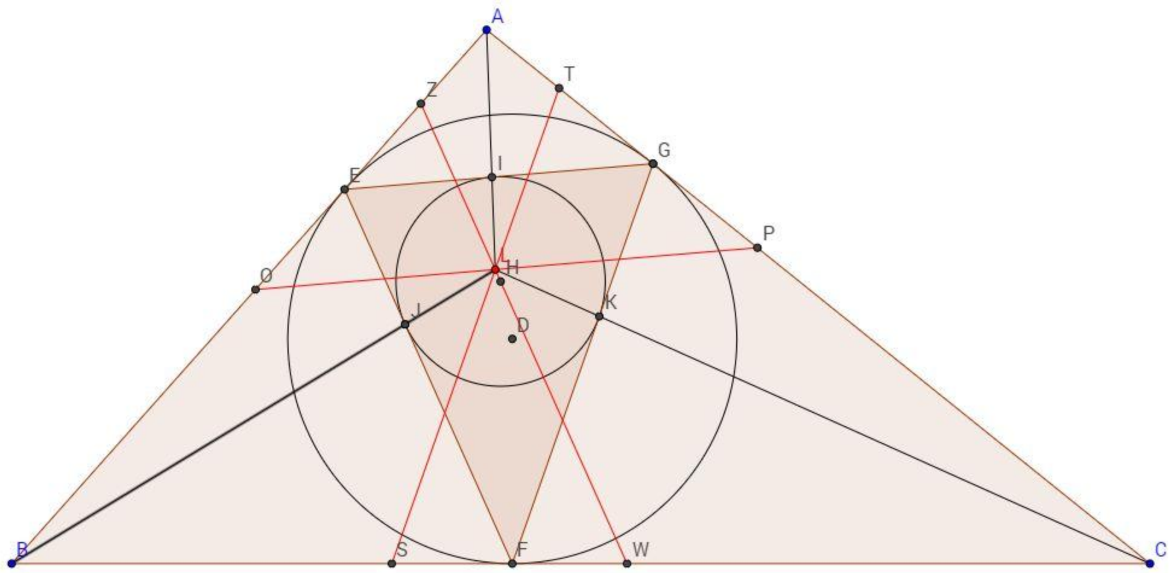
6. ábra

3. A kongruens egyenvágók pontja

1989-ben Peter Yff bebizonyította, hogy bármely háromszögben, megadható az egyenvágóknak egy olyan speciális konstrukciója mikor egyenlő hosszúak, és ekkor egy pontban fogják metszeni egymást. Ez a pont a kongruens egyenvágók pontja (congruent isoscelizers point).

3.1. A kongruens egyenvágók pontjának geometriai konstrukciója

Szerkesszük meg az ABC háromszög beírt körének középpontját, D-t, ennek érintési pontjai a háromszöggel E, F és G. Ezután szerkesszük meg az EFG háromszög beírt körét (középpontja a H pont), melynek érintési pontjai az EFG háromszöggel legyenek az I, J és K pontok. Ekkor az AI, BJ és CK egyenesek egy pontban metszik egymást, L-ben, kongruens egyenvágók pontjában. [5]

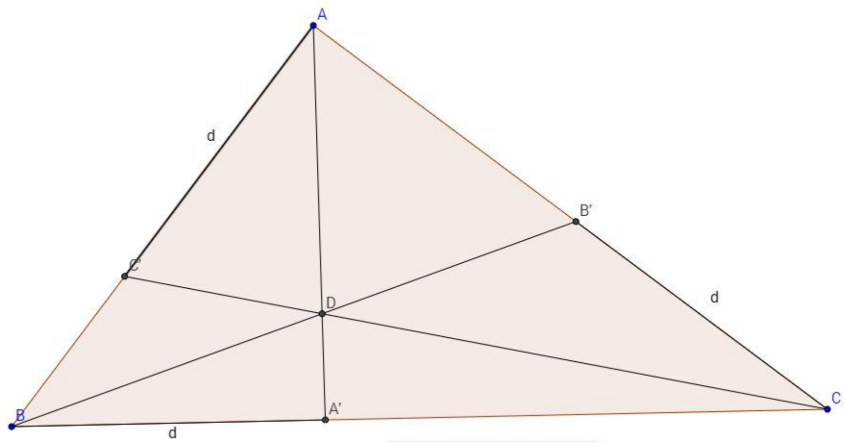


7. ábra

4. Az első és a második Yff pont

4.1. Az első Yff pont

Mérjünk fel az ABC háromszög BC, CB és AB oldalaira pozitív körüljárási irány szerint egy adott x távolságot, így kapjuk az A', B' illetve C' pontokat. Megfelelő d távolság választása esetén az AA' BB' és CC' szakatok egy pontban, D-ben metszik egymást.



8. ábra

Ezt a keresett d távolságot az

$$x^3 = (a - x)(b - x)(c - x)$$

egyenlet valós gyöke adja, ahol a, b és c az ABC háromszög oldalai.

A zárójeleket kibontva:

$$x^3 = abc - acx - bcx + cx^2 - abx + ax^2 + bx^2 - x^3$$

Az egyenletet átrendezve:

$$2x^3 - cx^2 - ax^2 + abx + acx + bcx - abc$$

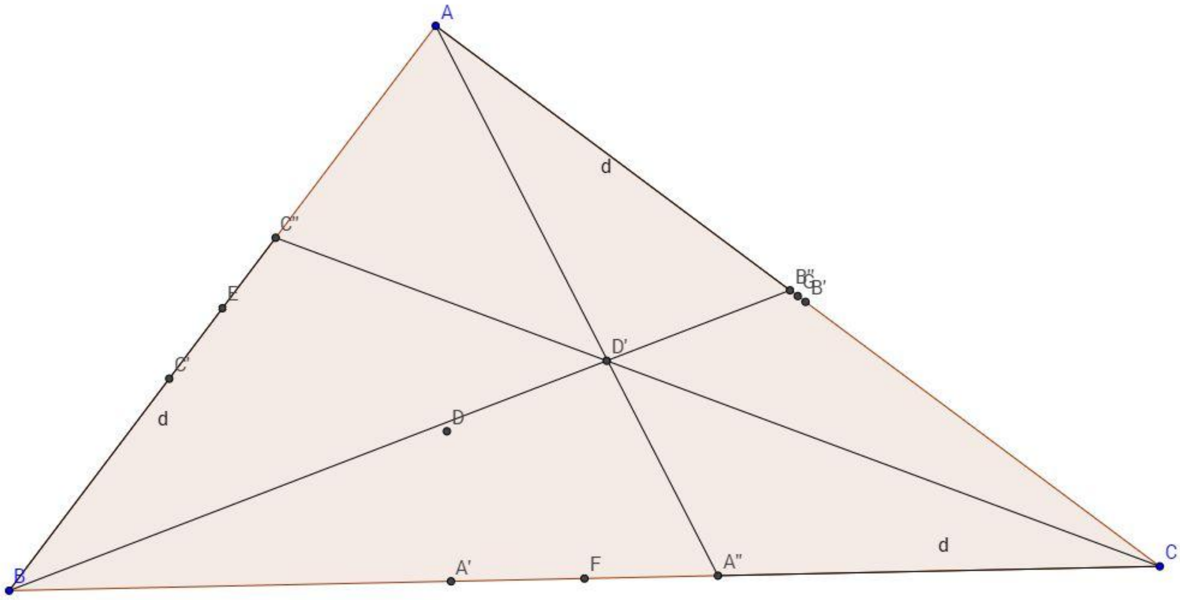
Kiemelések után a következő harmadfokú egyenletet kapjuk:

$$2x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$$

Ennek x valós gyöke adja meg a keresett d távolságot. [3]

4.2. A második Yff pont:

Az előző konstrukcióhoz hasonlóan, a d távolságot negatív körüljárási irányban felmérve az oldalakra (vagy az A', B' és D' pontokat az oldalfelező pontokra tükrözve) kapjuk az A", B" és C" pontokat, melyeket az A, B és C csúcsokkal összekötve kapjuk a D' pontot. Ez a második Yff pont.



9. ábra

Yff 1963-ban bizonyította, hogy a DD' egyenes merőleges a háromszög köré írt körének középpontját a beírt kör középpontjával összekötő egyenesre. [3]

5. Az Yff háromszög vizsgálata a gömbi és a hiperbolikus geometriában

5.1. Az euklideszi, gömbi és hiperbolikus geometriák rövid összehasonlítása

Egy axiómarendszerrel szemben támasztott alapvető matematikai elvárásaink a következőek:

1. *Ellentmondástalanság:*

   Ne lehessen levezetni egy állítást és annak a tagadását is

2. *Függetlenség:*

   Egy axióma se legyen levezethető a többiből

3. *Teljesség:*

   Az axiómák alapján minden kérdésről eldönthető legyen annak igaz vagy hamis volta

Ezen felül filozofikusabb jellegű elvárás, hogy az axiómák megkérdőjelezhetetlen igazságot fejezzenek ki a minket körülvevő világ természetéről.

Az ellentmondástalanság és a függetlenség együttes megkövetelése a következőt eredményezi:

Az A axiómarendszer egy $a \in A$ axiómája pontosan akkor levezethető az $A - \{a\}$ axiómarendszerből, ha az $(A - \{a\}) \cup \{\neg a\}$ axiómarendszer ellentmondásos. Ez az indirekt bizonyítás elve.

5.1.2. A Hilbert-féle axiómarendszer

Az euklideszi geometria ma használt axiómarendszerét 1899-ben fogalmazta meg David Hilbert német matematikus. Axiómái öt csoportot alkotnak. Ezek az illeszkedési axiómák, a rendezési axiómák, az egybevágósági axiómák, a folytonossági axiómák és párhuzamossági axióma. Mivel a nem-euklideszi geometriák létrejöttét a párhuzamossági axióma inspirálta, ezt részletesebben is kifejtem.

Illeszkedési axiómák

Az illeszkedési alapfogalmak a pont, az egyenes, a sík és az illeszkedés. Az adott P alaphalmaz elemei a pontok, ebben egy-egy halmazrendszert alkotnak az egyenesek és a síkok. Az illeszkedési axiómák ezek egymáshoz való viszonyát határozzák meg.

Rendezési axiómák

Az ezeknél felhasznált legfontosabb fogalom az elválasztási reláció, vagyis a "között" fogalma. A rendezési axiómák segítségével levezethető például a szakasz, félegyenes, félsík, szögtartomány illetve sokszög fogalma.

Egybevágósági axiómák

Itt alapfogalom az egybevágóság, mint reláció a szakaszok, illetve szögtartományok körében. Ezekből származtatott fogalmak és tételek például az egyenlőszárú háromszög és annak tulajdonságai, a derékszög, merőleges vetítés, valamint az egybevágósági transzformációk.

Folytonossági axiómák

Ez garantálja, hogy az egyenesek "ugyanolyanok", mint a valós számegyenes. Származtatott fogalmak a távolság, szögmérés, kerület, terület és a térfogat.

Párhuzamossági axióma

Euklidesz híres ötödik posztulátuma az Elemek 1998-as magyar fordítású kiadásában így szól:

"*És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak*."

Egyszerűbb megfogalmazásban:

Ha adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont, akkor a pont és az egyenes által meghatározott síkban egyetlen, a ponton átmenő és az egyenest nem metsző egyenes létezik.

Formálisan, ha X a pontok alaphalmaza, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ az egyenesek halmazrendszere, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ pedig a síkok halmazrendszere akkor:

$$P \in X\,; e \in \mathcal{E}\,; S \in \mathcal{S}\,;\ P \notin e\,;\ P, e \in S \Rightarrow \exists!\, f \in \mathcal{E}, S : P \in f\,, f \cap e = \emptyset$$

A geometriai vizsgálatok fő célja évszázadokon keresztül annak bebizonyítása volt, hogy Euklidesz ötödik posztulátuma levezethető az axiómarendszer többi axiómájából. Ha ez igaz lenne, ezt az axiómát nem kellene föltenni, mely tisztábbá, elfogadhatóbbá tenné a geometriát. A matematikusok tehát azt próbálták belátni, hogy amennyiben az ötödik posztulátumot a tagadásával helyettesítjük, az így nyert axiómarendszer ellentmondásos.

5.1.3. Abszolút geometria

Abszolút geometriának nevezzük a párhuzamossági axióma feltétele nélkül, a többi axióma megtartásával létrehozott geometriákat. A párhuzamossági axióma elhagyásával kapott axiómarendszert maradék axiómarendszernek nevezzük. Ez alkotja az euklideszi és a hiperbolikus geometria közös magját. Ha ennek tételeit és axiómáit Euklidesz ötödik posztulátumával bővítjük, megkapjuk az euklideszi geometriát. Ha az ötödik posztulátum helyett annak tagadását tesszük fel az abszolút geometria axiómái és tételei mellé, a hiperbolikus geometriához jutunk.

Fontos különbség az euklideszi és a hiperbolikus geometria között, hogy a párhuzamossági axióma megtartásával bármely háromszög belső szögeinek összege 180°, míg a párhuzamossági axióma tagadásából levezethető, hogy a háromszögek szögösszege mindig kevesebb 180°-nál. Emiatt merült fel a kérdés egy olyan geometria létezéséről, melyben minden háromszög szögösszege nagyobb, mint 180°. Ez vezetett az elliptikus geometria megalapozásához.

5.1.4. Elliptikus geometria

Az elliptikus geometria felépítését Georg Friedrich Bernhard Riemann német matematikusnak köszönhetjük. Alapvető ismérve, hogy itt nem léteznek párhuzamosok, vagyis bármely két egyenes metszi egymást.

Az elliptikus geometria a rendezési axiómákban is eltér a Hilbert-féle axiómarendszertől. Itt ugyanis érvényes az úgynevezett ciklikus rendezés, miszerint bármely négy, egy egyenesre illeszkedő pontra az (ABCD), (ACBD) vagy (ABDC) rendezések valamelyike áll fenn.

Az elliptikus geometrián belül megkülönböztethetünk egyszeres, illetve kétszeres elliptikus geometriát. Mivel ezek egy jól kezelhető modellje a gömbfelület, dolgozatomban is ezt a modellt használom és a későbbiekben gömbi geometriaként hivatkozom rá. [6]

Egyszeres elliptikus geometria

A gömb két átellenes pontját egy pontnak tekinti, vagy más megközelítésben csak a félgömbfelületen dolgozik. Utóbbi esetben a határoló főkörnek pontosan az egyik felét tekintjük a modell részének. Ilyen módon bármely két egyenesnek pontosan egy metszéspontja van, ugyanúgy, ahogyan az euklideszi geometriában.

Kétszeres elliptikus geometria

A gömb két átellenese pontját két különböző pontnak tekinti, ezért bármely két egyenes a gömb két átellenes pontjában metszi egymást. Míg az euklideszi geometriában bármely két ponton át pontosan egy egyenes húzható, a gömb két átellenes pontján végtelen sok egyenes megy keresztül. [7]

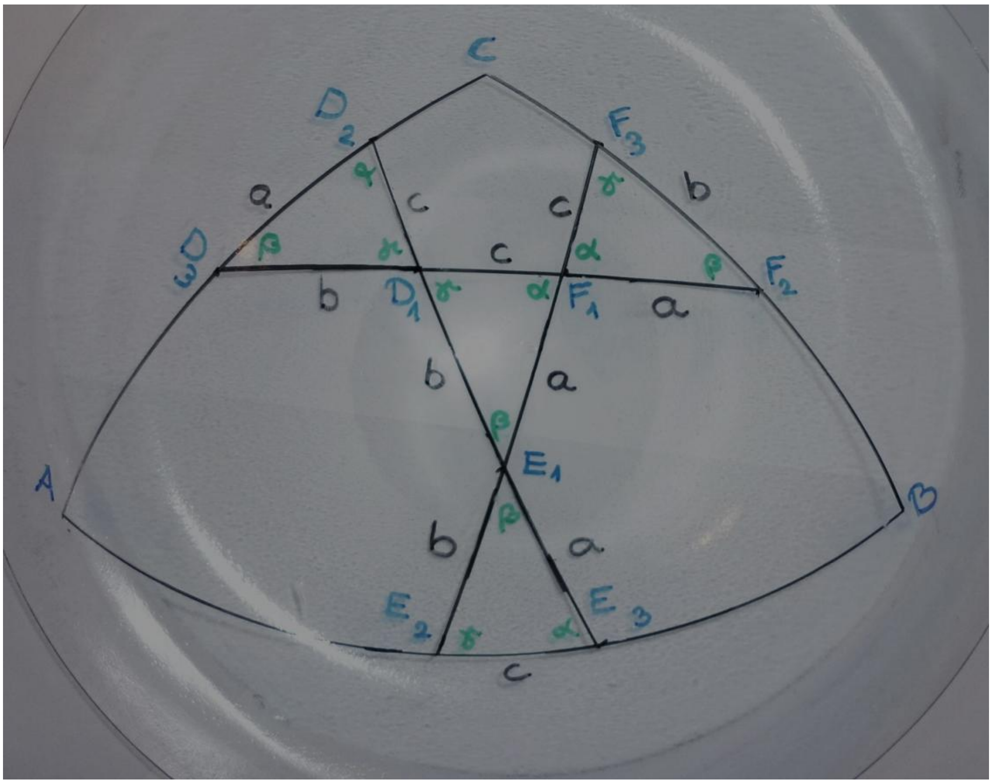
5.2. Az Yff központi háromszög a nem-euklideszi geometriákban

Mivel Yff tételei újnak mondhatóak, kevesen foglalkoztak velük eddig. Az euklideszi esetben is nehéz releváns szakirodalmat találni, nem-euklideszi esetekkel foglalkozó források pedig nem fellelhetőek. A következőkben leírtak ezért elsősorban önálló utat követnek.

Az alábbi gondolatmenet ugyanúgy megállja a helyét a hiperbolikus, mint a gömbi geometriában, ezért én csak az utóbbit fogom részletezni.

Az egyenvágók által létrehozott háromszögek hasonlóságának bizonyítása nem állja meg a helyét a gömbi geometriában, ugyanis kihasználja, hogy egy síkbeli háromszög belső szögeinek összege 180°, de ez a gömbi háromszögre már nem teljesül.

Amennyiben a gömbi háromszög esetében is megköveteljük, hogy a síkbeli esetben mindig egybevágó szögek most is legyenek ugyanakkorák, akkor gömbi háromszögek esetében a keletkező 4 kis háromszög egybevágóságára fogalmaztunk meg feltételt, a gömbön ugyanis a szögek egybevágósága elégséges a háromszögek egybevágóságához.



10. ábra

5.3. Az Yff központi háromszög vizsgálata szabályos gömbháromszög esetén

5.3.2. Állítás

Szabályos gömbháromszög esetében az egyenvágók által létrehozott négy egybevágó háromszög nem csak egybevágó, hanem szabályos is.

A bizonyítás során két, gömbháromszögekre vonatkozó tételre lesz szükségünk. Ha adott gömbi háromszög oldalai a, b és c, az oldalakkal szemközti belső szögek pedig rendre α, β és γ, akkor az alábbi két tétel érvényes:

Oldalakra vonatkozó gömbi koszinusz-tétel:

$$\cos c = \cos a * \cos b + \sin a * \sin b * \cos\gamma$$

Szögekre vonatkozó gömbi koszinusztétel:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha * \cos\beta + \sin\alpha * \sin\beta * \cos c \text{ [8]}$$

5.3.3. Bizonyítás

Adott a gömbön egy szabályos háromszög, legyen minden belső szöge ω. Mivel a négy egybevágó háromszöget létrehozó egyenvágók a 10. ábrán látható módon helyezkednek el, az egyenvágók hossza azonos.

Írjuk fel a szögekre vonatkozó gömbi koszinusztételt az AE_3D_2, BF_3E_2 és CD_3F_2 háromszögekben, legyen a+b+c=d:

$$\cos\omega = -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha * \cos d$$

$$\cos\omega = -\cos^2\beta + \sin^2\beta * \cos d$$

$$\cos\omega = -\cos^2\gamma + \sin^2\gamma * \cos d$$

Az első és a második egyenletből:

$$-\cos^2\alpha + \sin^2\alpha * \cos d = -\cos^2\beta + \sin^2\beta * \cos d$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ - et felhasználva:

$$-\cos^2\alpha + (1 - \cos^2\alpha) * \cos d = -\cos^2\beta + (1 - \cos^2\beta) * \cos d$$

$$-\cos^2\alpha + \cos d - \cos^2\alpha * \cos d = -\cos^2\beta + \cos d - \cos^2\beta * \cos d$$

$$-\cos^2\alpha * (1 + \cos d) = \; - \cos^2\beta * (1 + \cos d)$$

Ha $1 + \cos d = 0$, akkor cos d = -1, ahonnan d = a+b+c = 180°

Ha $1 + \cos d \neq 0$, akkor az egyenletet ezzel a kifejezéssel elosztva kapjuk:

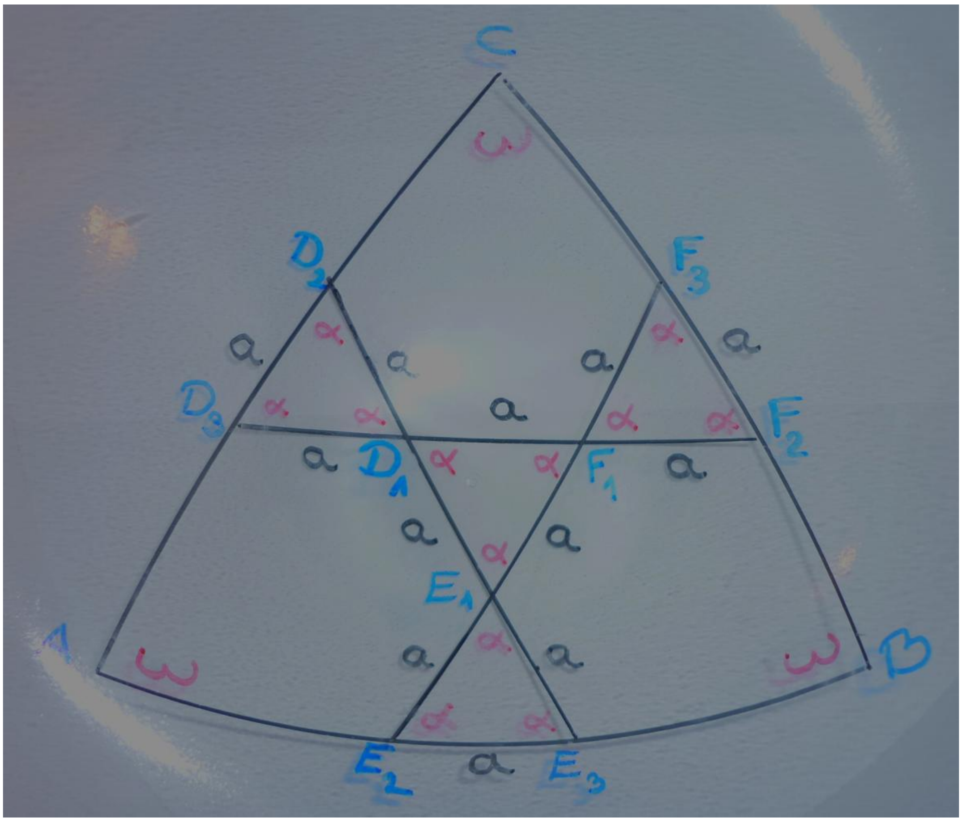
$$-\cos^2\alpha = -\cos^2\beta$$

Innen $\cos\alpha = \pm\cos\beta$, ezért $\alpha = \pm\beta$, de mivel szögekről van szó, így α = β.

A második és harmadik egyenletből ugyanígy adódik, hogy β = γ, tehát összességében

α = β = γ.

Mivel a belső négy háromszög szögei egyenlők, a háromszögek szabályosak lesznek.



11. ábra

5.3.4. Az Yff központi háromszög oldalhosszának kiszámítása

Legyen adott az ABC szabályos háromszög, melynek minden belső szöge ω. A kis háromszögek keresett oldalhossza a. A szögekre vonatkozó koszinusztétel az AE_3D_2, BF_3E_2 és CD_3F_2 háromszögekben ekkor:

$$\cos\omega = -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha * \cos(3a)$$

A $D_1E_1F_1$ háromszögben az oldalakra vonatkozó gömbi koszinusz-tételt felírva:

$$\cos a = \cos a * \cos a + \sin a * \sin a * \cos\alpha$$

$$\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a * \cos\alpha$$

Ezt cosα –ra átrendezve:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos^2 a}{\sin^2 a}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a(1 - \cos a)}{1 - \cos^2 a}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a(1 - \cos a)}{(1 + \cos a)(1 - \cos a)}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a}{1 + \cos a}$$

Így tehát adott ω esetén a következő kétismeretlenes egyenletrendszerhez jutunk:

I.

$$\cos\omega = -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha * \cos(3a)$$

II.

$$\cos\alpha = \frac{\cos a}{1 + \cos a}$$

Az I. egyenletben $\sin^2\alpha$ - t $(1 - \cos^2\alpha)$ - val helyettesítve:

$$\cos\omega = -\cos^2\alpha + (1 - \cos^2\alpha) * \cos(3a)$$

$$\cos\omega = -\cos^2\alpha + \cos(3a) - \cos(3a) * \cos^2\alpha$$

A II. egyenletet az elsőbe behelyettesítve:

$$\cos\omega = -\frac{\cos^2 a}{(1+\cos a)^2} + \cos(3a) - \frac{\cos(3a) * \cos^2 a}{(1+\cos a)^2}$$

$(1+\cos a)^2$-el beszorozva:

$$(1+\cos a)^2 * \cos\omega = -\cos^2 a + \cos(3a) * (1+\cos a)^2 - \cos(3a) * \cos^2 a$$

$$\cos\omega + \cos^2 a * \cos\omega + 2\cos a * \cos\omega =$$
$$-\cos^2 a + \cos(3a) + \cos^2 a * \cos(3a) + 2\cos a * \cos(3a) - \cos^2 a * \cos(3a)$$

$\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$ - t behelyettesítve:

$$\cos\omega + \cos^2 a * \cos\omega + 2\cos a * \cos\omega$$
$$= -\cos^2 a + 4\cos^3 a - 3\cos a + 2\cos a * (4\cos^3 a - 3\cos a)$$

$$\cos\omega + \cos^2 a * \cos\omega + 2\cos a * \cos\omega = 8\cos^4 a + 4\cos^3 a - 7\cos^2 a - 3\cos a$$

Átrendezés és kiemelések után a következő negyedfokú egyenletet kapjuk:

$$8\cos^4 a + 4\cos^3 a - \cos^2 a * (7 + \cos\omega) + \cos a * (2\cos\omega - 3) - \cos\omega = 0$$

5.4. Dualitás

A dualitás fogalmának bevezetéséhez először bővítsük ki az euklideszi síkot:

Minden egyenest bővítsünk ki egy végtelen távoli ponttal, ennek neve legyen ideális pont. Két egyeneshez akkor és csak akkor tartozik ugyanaz az ideális pont, ha az egyenesek párhuzamosak. Az ideális ponttal kibővített egyeneseket nevezzük projektív egyeneseknek. Az euklideszi síkot ekkor kibővíthetjük a sík egyeneseinek ideális pontjaival. A sík összes egyenesének ideális pontjai alkotják a síkhoz tatozó ideális egyenest. Az így kibővített síkot nevezzük projektív síknak.

A projektív sík illeszkedési tulajdonságaiban a pontok és egyenesek szerepe felcserélhető, vagyis ha a projektív sík egy igaz állításában a pontot egyenessel, az egyenest pedig ponttal helyettesítjük, az így kapott állítás szintén igaz lesz. Ez a dualitás elve, a pont duálisa tehát az egyenes és fordítva. Egyszerű példa erre az alábbi állítás, mely eddig is teljesült az euklideszi síkon:

Bármely két különböző pontra egy és csak egy egyenes illeszkedik.

Ennek duálisa a sík kibővítésével válik igazzá:

Bármely két különböző egyenesnek egy és csak egy közös pontja van. [9]

5.4.2. Dualitás a gömbön

A gömbön minden ponthoz egyértelműen tartozik egy olyan egyenes, melyre az összes, a ponton átmenő egyenes merőleges. Ugyanígy, bármely egyeneshez két olyan pont tartozik, melyeken átmenő összes egyenes merőleges az eredeti egyenesre. Az ilyen pontokat az egyeneshez tartozó pólusoknak vagy sarkpontoknak, az egyenest pedig a pontok polárisának vagy egyenlítőjének nevezzük. Az ilyen kapcsolatban álló pontok és egyenesek egymás duálisai.

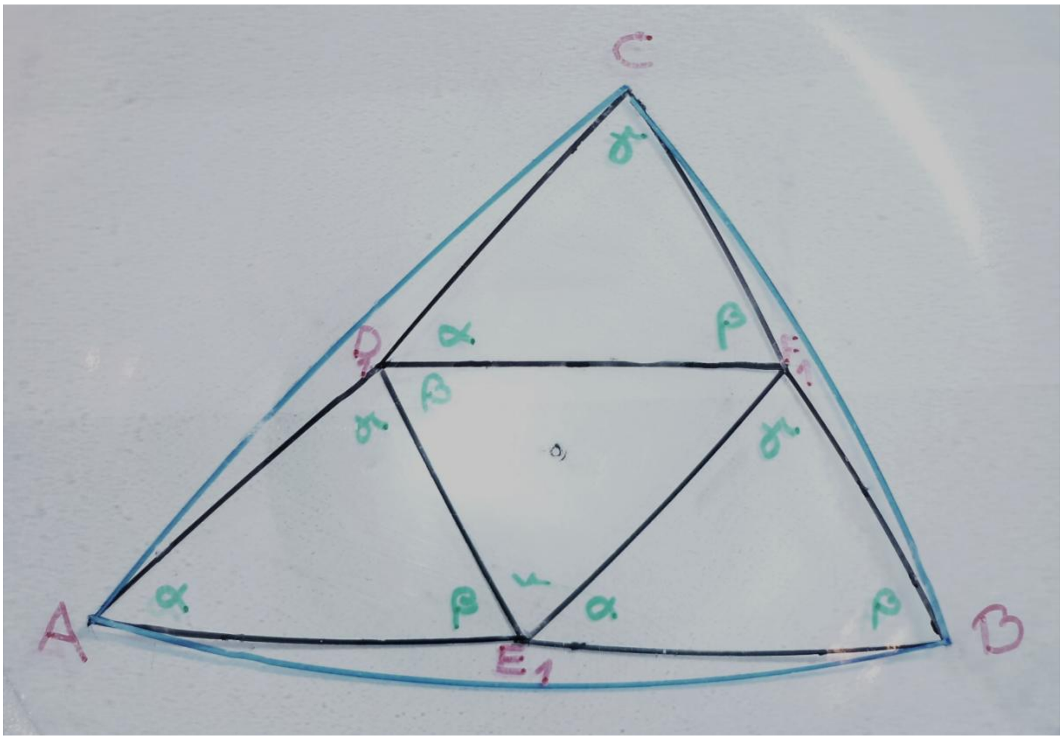
A gömbön azonban nem csak a pont és az egyenes fogalma dualizálható. Bármely gömbi szög egyértelműen meghatározza a szög csúcsához tartozó poláris egyenes szögtartományba eső szakaszának hosszát. A gömbi geometriában tehát ilyen módon szög és távolság között is fennáll a dualitás. [10]

5.4.3. Az Yff központi háromszög duálisa

Első lépésként közelítsük a problémát visszafelé, adott Yff központi háromszöghöz könnyedén megszerkeszthető a hozzá tartozó eredeti háromszög:

Ha adott a $D_1E_1F_1$ Yff központi háromszög, csúcsaihoz szerkesszük meg a vele egybevágó háromszögeket a síkbeli esetben látott elhelyezkedéssel. Így kapjuk az E_2, E_3, F_2, F_3, D_2 és D_3 pontokat. Mivel a négy egybevágó háromszöget úgy szerkesztettük meg, hogy $E_1E_3E_2 \sphericalangle = D_1D_2D_3\sphericalangle$ és $D_1D_3D_2\sphericalangle = F_1F_2F_3\sphericalangle$ valamint $E_1E_2E_3\sphericalangle = F_1F_3F_2\sphericalangle$, ezért a D_2D_3, E_2E_3 és F_2F_3 egyenesek metszéspontjaival három egyenlőszárú háromszöget kapunk. Az így létrejött ABC háromszögben tehát az E_2F_3, D_2E_3 és F_2D_3 szakaszok egyenvágók, az általuk létrehozott belső négy háromszög pedig egybevágó, ezért a $D_1E_1F_1$ háromszög az ABC háromszög Yff központi háromszöge.

A fenti eljárást dualizálva a következőt kapjuk:

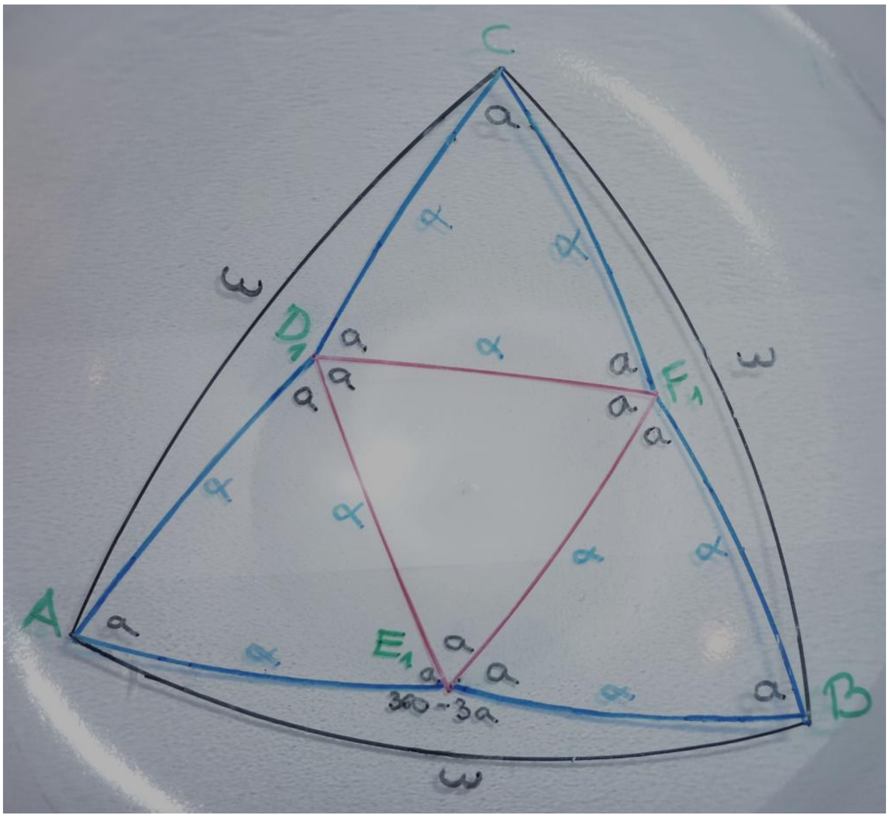


12. ábra

Adott $D_1E_1F_1$ Yff központi háromszög csúcsaihoz mérjük fel az oldalakra a csúccsal szemközti szögeket a 12. ábrán látható módon. Így a háromszög oldalaira szerkesztettünk vele egybevágó háromszögeket.

A kapott 3 háromszög D_1–től E_1-től és F_1-től különböző csúcsai meghatározzák az ABC háromszöget. Ekkor a BE_1A, AED_1C és CF_1B háromszögek egyenlőszárúak. Az ABC háromszög így négy egybevágó és három egyenlőszárú háromszögre van felosztva. A probléma ezért a következő módon is megfogalmazható: Adott ABC háromszög belsejébe szerkesztendőek egyenlőszárú háromszögek az oldalakra úgy, hogy a csúcsaik által meghatározott négy háromszög egybevágó legyen.

Az Yff háromszög duálisának megadása szabályos gömbháromszög esetén



13. ábra

Legyen az ABC háromszög egy oldalának hossza ω, a belső négy háromszög oldalainak hossza α, belső szögük pedig a. Az oldalakra vonatkozó koszinusztételt az ABE_1 háromszögben felírva:

I.

$$\cos\omega = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha * \cos(360° - 3a) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha * \cos(3a)$$

Az AD_1E_1 háromszögben a szögekre vonatkozó gömbi koszinusz-tételt felírva:

$$\cos a = -\cos^2 a + \sin^2 a * \cos\alpha$$

Ezt $\cos\alpha$ –ra átrendezve:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a + \cos^2 a}{\sin^2 a}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a(1 + \cos a)}{1 - \cos^2 a}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a(1 + \cos a)}{(1 + \cos a)(1 - \cos a)}$$

II.

$$\cos\alpha = \frac{\cos a}{1 - \cos a}$$

A II. egyenletet az I. egyenletbe behelyettesítve és $\sin^2\alpha$ helyett $1 - \cos^2\alpha$ -t írva:

$$\cos\omega = \frac{\cos^2 a}{(1 - \cos a)^2} + \cos(3a) - \frac{\cos(3a) * \cos^2 a}{(1 - \cos a)^2}$$

Az eredeti esethez hasonlóan az egyenletet beszorozhatjuk $(1 - \cos a)^2$ – tel, és felhasználhatjuk a $\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$ összefüggést, így a következőt kapjuk:

$$\cos\omega + \cos^2 a * \cos\omega - 2\cos a * \cos\omega =$$
$$\cos^2 a + \cos(3a) + \cos^2 a * \cos(3a) - 2\cos a * \cos(3a) - \cos^2 a * \cos(3a)$$

$$\cos\omega + \cos^2 a * \cos\omega - 2\cos a * \cos\omega =$$
$$\cos^2 a + 4\cos^3 a - 3\cos a - 2\cos a * 4\cos^3 a + 2\cos a * 3\cos a$$
$$= \cos^2 a + 4\cos^3 a - 3\cos a - 8\cos^4 a + 6\cos^2 a$$

A végleges egyenlet tehát:

$$8\cos^4 a - 4\cos^3 a + \cos^2 a * (\cos\omega - 7) + \cos a * (3 - 2\cos\omega) + \cos\omega = 0$$

5.5. Szabályos hiperbolikus háromszögekhez tartozó Yff központi háromszög

4.1.1. Állítás

Szabályos hiperbolikus háromszögnél a gömbháromszöghöz hasonlóan megmutatható, hogy az egyenvágók által létrehozott négy kis háromszög szintén szabályos lesz.

4.1.2. Bizonyítás

A szögekre vonatkozó koszinusztételek itt a következők:

$$\cos\omega = -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha * \mathrm{ch}\, d$$

$$\cos\omega = -\cos^2\beta + \sin^2\beta * \mathrm{ch}\, d$$

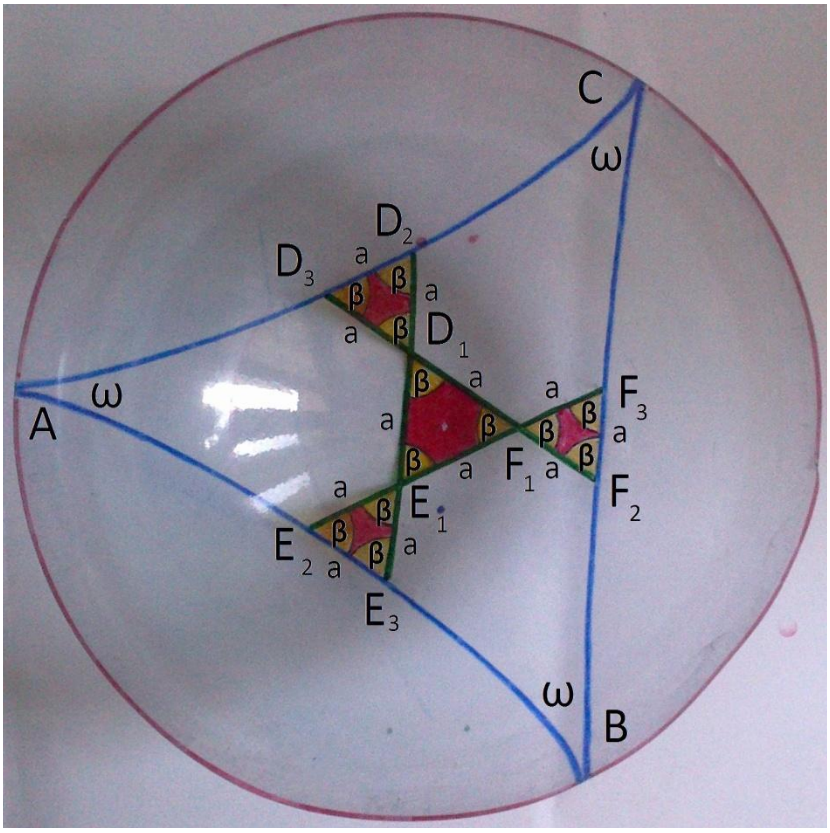
$$\cos\omega = -\cos^2\gamma + \sin^2\gamma * \mathrm{ch}\, d$$

Mivel ezek az egyenletek csak annyiban térnek el a gömbi esetben felírtaktól, hogy cos d helyett ch d szerepel, a végeredmény is csak ennyiben tér el az előzőtől:

$$-\cos^2\alpha * (1 + \mathrm{ch}\, d) = -\cos^2\beta * (1 + \mathrm{ch}\, d)$$

Innen vagy ch d =-1, de ez nem ad valós megoldást d-re, vagy $\alpha = \beta$.

A négy egybevágó kis háromszög tehát szabályos, az egyenvágók hossza pedig d=3a



14. ábra

4.1.3. Az Yff hároszög belső szögeinek kiszámítása

Felírva a szögekre vonatkozó koszinusztételt az AE_3D_2, BF_3E_2 és CD_3F_2 háromszögek valamelyikében, valamint az egyik kis háromszögben, a következő kétismeretlenes egyenletrendszert kapjuk:

I.

$$\cos\omega = -\cos^2\beta + \sin^2\beta * \mathrm{ch}(3a)$$

II.

$$\cos\beta = -\cos^2\beta + \sin^2\beta * \mathrm{ch}\, a$$

Első lépésként fejezzük ki ch(3a)-t cha segítségével:

$$\mathrm{ch}(3a) = \mathrm{ch}(2a + a) = \mathrm{ch}(2a) * \mathrm{ch}\, a + \mathrm{sh}(2a) * \mathrm{sh}\, a$$

$$\mathrm{ch}(3a) = (\mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a) * \mathrm{ch} a + 2\mathrm{sh}^2 a * \mathrm{ch} a$$

A zárójelet felbontva, valamint felhasználva a $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ összefüggést:

$$\mathrm{ch}(3a) = 4\mathrm{ch}^3 a - 3\mathrm{ch} a$$

Ezt az I. egyenletbe behelyettesítve:

III.

$$\cos\omega = -\cos^2\beta + \sin^2\beta * (4ch^3a - 3cha)$$
$$= -\cos^2\beta + (1 - \cos^2\beta) * (4ch^3a - 3cha)$$

Fejezzük ki a II. egyenletből ch a – t:

IV.

$$ch\ a = \frac{\cos\beta + \cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{\cos\beta * (1 + \cos\beta)}{1 - \cos^2\beta} = \frac{\cos\beta * (1 + \cos\beta)}{(1 + \cos\beta)(1 - \cos\beta)} = \frac{\cos\beta}{(1 - \cos\beta)}$$

A III. és a IV. egyenlet felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\cos\omega = -\cos^2\beta + (1 - \cos^2\beta) * \left(\frac{4\cos^3\beta}{(1 - \cos\beta)^3} - \frac{3\cos\beta}{1 - \cos\beta}\right)$$

$$\cos\omega = -\cos^2\beta + \frac{4\cos^3\beta}{(1 - \cos\beta)^3} - \frac{3\cos\beta}{1 - \cos\beta} - \frac{4\cos^5\beta}{(1 - \cos\beta)^3} + \frac{3\cos^3\beta}{1 - \cos\beta}$$

Az egyenletet $(1 - \cos\beta)^3$-bel beszorozva:

$$\cos\omega * (1 - \cos\beta)^3 =$$

$$-\cos^2\beta * (1 - \cos\beta)^3 + 4\cos^3\beta$$
$$- 3\cos\beta * (1 - \cos\beta)^2 - 4\cos^5\beta + 3\cos^3\beta * (1 - \cos\beta)^2$$

A zárójelek felbontásával:

$$\cos\omega - 3\cos\beta * \cos\omega + 3\cos^2\beta * \cos\omega - \cos^3\beta * \cos\omega =$$
$$-\cos^2\beta + 3\cos^3\beta - 3\cos^4\beta + \cos^5\beta + 4\cos^3\beta - 3\cos\beta + 6\cos^2\beta - 3\cos^3\beta - 4\cos^5\beta$$
$$+ 3\cos^3\beta - 6\cos^4\beta + 3\cos^5\beta =$$

$$-9\cos^4\beta + 7\cos^3\beta - 5\cos^2\beta - 3\cos\beta$$

Az egyenletet 0-ra rendezve, kiemelések után a következő negyedfokú egyenletet kapjuk adott ω esetén:

$$9\cos^4\beta - \cos^3\beta * (7 + \cos\omega) + \cos^2\beta * (3\cos\omega - 5) + 3\cos\beta(1 - \cos\omega) + \cos\omega = 0$$

6. Összegzés

A dolgozat síkgeometriai részének megírásához szükséges forrásanyagok bizonyos esetekben nehezen fellelhetőek ugyan, megfelelő kutatás után azonban elegendő információ állt rendelkezésemre a témakör kidolgozásához. Az Yff központi háromszög gömbi, illetve hiperbolikus geometriában történő vizsgálatával kapcsolatban azonban semmilyen konkrét utalással nem találkoztam, így a témakör nem csak újszerűnek mondható, de a dolgozat második részében leírt számítások korábban nem publikált eredményeket is tartalmaznak.

Mivel a síkgeometriai rész kidolgozásakor sem találkoztam magyar nyelvű forrásanyaggal, a tételek kimondása során használt és bevezetett fogalmak között vannak olyanok, melyeknek feltehetően jelenleg még nincs magyar megfelelője. Az általam bevezetett fordításokkal igyekeztem a lehető legközelebb maradni az eredeti fogalom jelentéséhez és eközben a bevezetett szóval jelképezni annak értelmét is.

A síkbeli Yff háromszög megadására felírt hat ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerhez képest a gömbi és hiperbolikus geometriákban felírt negyedfokú egyenletek egyszerűbb, kényelmesebb megoldásnak tűnnek számomra. Meggondolandó, hogy a síkbeli szabályos háromszögekre is felírhatóak a gömbi és hiperbolikus esetekkel analóg összefüggések, melyek szintén hasonló eredményre vezethetnek.

Dolgozatom nem-euklideszi részében csak az Yff központi háromszöggel foglalkoztam, a többi síkon megemlített tétellel nem, azonban úgy gondolom, hogy ezek vizsgálata szintén érdekes, meggondolandó eredményekhez vezethetne.

7. Irodalomjegyzék

[1] E. W. Weisstein, „Isoscelizer,” [Online]. Available: http://mathworld.wolfram.com/Isoscelizer.html.

[2] E. W. Weisstein, „Yff Central Triangle,” [Online]. Available: http://mathworld.wolfram.com/YffCentralTriangle.html.

[3] E. W. Weisstein, CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Boca Raton: CRC Press.

[4] E. W. Weisstein, „Yff Center of Congruence,” [Online]. Available: http://mathworld.wolfram.com/YffCenterofCongruence.html.

[5] D. Dekov, „Journal of Computer-Generated Euclidean Geometry,” [Online]. Available: http://www.docstoc.com/docs/70786195/Yff-Center-of-Conguence.

[6] I. Lénárt, Rajz a gömbön, Múzsák Kiadó Kft..

[7] A. Dobó, „Az elliptikus geometria két modelljéről,” [Online]. Available: https://doboandor.files.wordpress.com/2013/02/az-elliptikus-geometria-kc3a9t-modelljc3a9rc591l_vs12_20130307085718.pdf.

[8] B. G. C. B. F. P. G. A. G. A. H. A. K. E. L. M. L. L. M. B. M. G. P. J. P. J. R. A. R. I. Ambrus Gergely, „A gömb belső geometriája, egy „más világ”,” in *Új matematikai mozaik,* 2001.

[9] B. G. C. B. F. P. G. A. G. A. H. A. K. E. L. M. L. L. M. B. M. G. P. J. P. J. R. A. R. I. Ambrus Gergely, „Véges projektív síkok,” in *Új matematikai mozaik,* Typotex, 2001.

[10] I. Lénárt, „Jó szó, segítő szándék,” [Online]. Available: http://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/lenart-istvan-jo-szo-segito-szandek.