

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Érdekes síkgörbék

BSc szakdolgozat

Szerző:
Pécsi Ágnes
Matematika alapszak,
tanári szakirány

Témavezető:
Dr. Moussong Gábor
adjunktus
Geometriai tanszék

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Nevezetes szerkesztési feladatok	4
2.1. A konhois	4
2.1.1. A konhois egyenlete	5
2.1.2. Szögharmadolás konhois segítségével	6
2.2. A cisszois	7
2.2.1. A cisszois egyenlete	8
2.2.2. Kockakettőzés cisszois segítségével	9
2.3. A kvadratrix	11
2.3.1. A kvadratrix egyenlete	12
2.3.2. Szerkesztések kvadratrix segítségével	13
2.4. Az arkhimédészi spirál	15
2.4.1. Szerkesztések arkhimédészi spirállal	15
3. Síkgörbék a környezetünkben	18
3.1. Láncgörbe és traktrix	18
3.1.1. A láncgörbe egyenlete	18
3.1.2. A traktrix egyenlete	21
3.2. Cassini-féle görbék	23
3.2.1. A Cassini-görbe egyenlete	24
3.3. Epicikloisok	25
3.3.1. A kardioid paraméteres egyenlete	26
3.4. Lissajous-görbék	27
3.4.1. A Lissajous-görbe egyenlete	28
3.4.2. A merőleges mozgások speciális esetei	29
3.5. Rozetta	31
3.5.1. A rozetta egyenlete	31
3.5.2. A rozetta területe	33
3.5.3. Az inga hossza	34
4. Irodalomjegyzék	35

1. Bevezetés

Szakedolgozatom témájaként a síkgörbét választottam. A geometria iránt az egyetemen töltött éveim alatt kezdtem el egyre inkább érdeklődni. Az utolsó évben sokat foglalkoztunk a síkgörbékkel. Amikor egy-egy görbe definícióját olvastam, és próbáltam elképzelni azt, sokszor elgondolkodtam, kérdések fogalmazódtak meg bennem: Honnan eredhet ez a görbe? Mire használhatják? Miért fontos, hogy mekkora az ívhossza? Hol használják fel, hogy pont ennyi? Megtudtam, hogy néhány görbét éppen azért definiáltak, hogy egy-egy tulajdonságát kihasználva szerkesztési feladatokat tudjanak megoldani. Azt gondoltam, biztosan vannak más görbék is, amelyekről elmondható valami hasonló. Dolgozatom megírásakor az volt a célom, hogy olyan görbét gyűjtssek össze, amelyeknek van valamilyen speciális felhasználási, illetve megjelenési területük. Két témakör szerint csoportosítottam ezeket a görbét. Az első részben olyan módszereket írtam le, amelyekkel megoldhatók a nevezetes szerkesztési feladatok, persze nem szabályosan, euklideszi szerkesztéssel, hiszen ez lehetetlen, hanem bizonyos síkgörbék felhasználásával. Ezután pedig olyan görbék következnek, amelyek valamilyen fizikai jelenséghez kapcsolódnak. A dolgozatomban leírt görbét nem volt célom teljes részletességgel jellemezni, hiszen van köztük olyan, amely annyi oldalról megközelíthető, hogy önmagában is jó téma lenne egy szakdolgozathoz.

Szerettem volna olyan dolgot írni, amelyet tanárként majd felhasználhatok. Az általam összegyűjtött görbék akár középiskolai matematika szakkörön is tárgyalhatók, illetve a fizikaórák érdekesebbé tételére is alkalmasak lehetnek. Igyekeztem úgy leírni ezeket, hogy az egy középiskolás diák számára is érthető legyen. Az elemi geometriai eszközök alkalmazása mellett a differenciálgeometria módszerei is megjelennek dolgozatomban. A definíciókat, levezetéseket ábrákkal igyekeztem szemléletesebbé tenni, ezeket a GeoGebra nevű program segítségével készítettem.

Köszönöm Moussong Gábor tanár úrnak, hogy előadásaival megszerettette velem a geometriát, és segített a szakdolgozatom elkészítésében és hibáim kijavításában!

2. Nevezetes szerkesztési feladatok

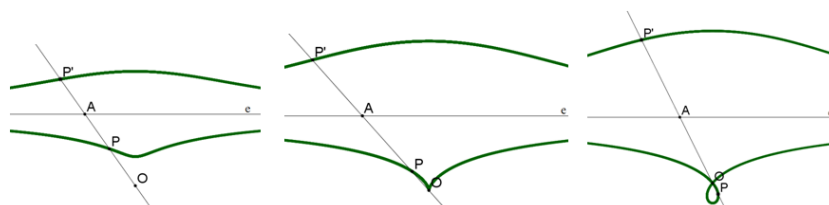
Az antik görögök is sejtették, hogy a kockakettőzés, körnégyszögesítés, illetve szögharmadolás nem vihető véghez euklideszi szerkesztéssel, azaz csak körző és vonalzó használatával. Ennek lehetetlensége bizonyítást is nyert, de csak a 19. század folyamán. Az akkori matematikai szemlélet már azt követelte, hogy ne csak a feladatok megoldásával, hanem a megoldhatatlanság miértjével is foglalkozzanak. Persze akadtak, akik mégis próbálkoztak a szerkesztéssel. A 19. század közepén a Magyar Tudományos Akadémia úgy rendelkezett, hogy az erre vonatkozó értekezések (az örökmozgó feltalálásával együtt) automatikusan visszautasítottak. Eddig azonban hosszú út vezetett. Az ókori görögök sokat foglalkoztak azzal, hogy megoldják ezeket a feladatokat, persze magát a szerkesztést, akár úgy is, hogy nem csak az euklideszi szerkesztéseknél megengedett lépéseket alkalmazzák. Ehhez igénybe vettek kúpszeleteket, különleges vonalzókat és néhány görbét direkt erre a célra definiáltak vagy erre is használtak. Most ilyen görbék következnek, illetve a hozzájuk kapcsolódó szerkesztési módszerek, amelyek közül néhány nagyban segítette a matematika fejlődését, sok matematikus tanulmányozta ezeket a differenciál-és integrálszámítás szabályainak megalkotása előtt. A görbék felhasználása ezeknél a feladatoknál azt jelenti, hogy egyetlen görbét adottnak tekintünk. Ezt nem tudjuk többször megrajzolni, a helyzete rögzített. A szerkesztés szabályai ezen kívül nem változnak, körző és vonalzó véges számú használata megengedett. A görbék persze nem szerkeszthetők, általában tetszőlegesen sok pont megszerkesztésével próbálták minél pontosabban megrajzolni ezeket.

2.1. A konhois

2.1. Definíció. (konhois) Legyen adott egy O pont és tőle d távolságban lévő e egyenes. Az egyenes egy pontja A . Legyenek P és P' az A ponttól adott h távolságban lévő pontok az OA egyenesen. A görbe, amit P és P' leír, miközben A az e egyenes mentén mozog a *konhois*.

2.2. Megjegyzés. A konhois különbözőképpen alakul aszerint, hogy $h < d$, $h = d$ vagy $h > d$. Az ábra rendre ezeket az eseteket mutatja. A görbe O ponthoz közelebbi ágán a különbség szemmel látható.

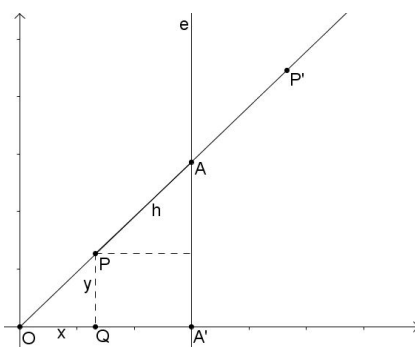
A konhoist a Kr. e. II. században Nikomédész definiálta, kockakettőzésre és szögharmadolásra használta.



1. ábra. Konhois különböző h értékekkel

2.1.1. A konhois egyenlete

A konhois egyenletének meghatározásához olyan derékszögű koordinátarendszert vegyünk fel, amelynek origója az O pont, y -tengelye párhuzamos az e egyenessel. Legyen $P(x, y)$ merőleges vetülete az x -tengelyre Q pont, $A(x', y')$ merőleges vetülete A' pont. Az AP szakasz hossza h , az OA' hossza d .



2. ábra. A konhois egyenletének meghatározása

POQ és AOA' háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \implies y' = x' \frac{y}{x} = d \frac{y}{x}.$$

Pitagorasz tétele miatt:

$$(y' - y)^2 + (d - x)^2 = h^2,$$

y' -t behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \left(d\frac{y}{x} - y\right)^2 + (d-x)^2 &= h^2 \\ \left(\frac{d}{x}(y-1)\right)^2 + (d-x)^2 &= h^2 \\ y^2(d-x)^2 + x^2(d-x)^2 - h^2x^2 &= 0. \end{aligned}$$

A konhois egyenlete tehát:

$$(d-x)^2(y^2+x^2) - h^2x^2 = 0.$$

Az egyenletet pontosan a konhois pontjai elégítik ki.

2.1.2. Szögharmadolás konhois segítségével

Azért nem tudunk tetszőleges szöveget harmadolni, mert ez a feladat harmadfokú egyenlet megoldására vezet. Ez nem kettő hatványa, tehát nem származhat másodfokú bővítésből. A harmadfokú egyenlet a következő trigonometriai azonosságból látható:

$$\cos \varphi = 4 \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \cos \frac{\varphi}{3},$$

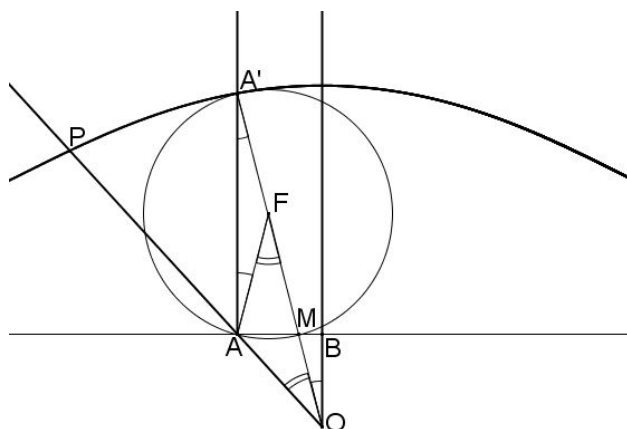
ami $x = \cos \frac{\varphi}{3}$ helyettesítéssel, ha $\cos \varphi = a$ így adódik:

$$4x^3 - 3x - a = 0.$$

A konhoissal történő szerkesztéshez vegyünk fel egy tetszőleges hegyesszöveget. Az egyik szögcsúcsát merőlegesen egy e egyenes B pontban, a másik szögcsúccsal vett metszéspont legyen A . Legyen adott az e egyenes és O pont által meghatározott azon konhoisnak O -tól távolabb eső ága, amelyre $d = OB$ és $h = 2OA$. Az A -ba állított merőleges messe a konhoist A' pontban. Legyen az OA' szakasz és e egyenes metszéspontja M , az $A'M$ szakasz felezőpontja F .

Ekkor a konhois definíciója miatt $A'M = h$. Az $A'AM$ derékszögű háromszög Thálesz-körének sugara $\frac{h}{2}$, ezért

$$A'F = AF = OA.$$



3. ábra. Szögharmadolás konhoissal

AOF egyenlőszárú háromszög F csúcsánál fekvő szöge egyúttal az FAA' szög külső szöge is. Mivel egy háromszög külső szöge megegyezik a nem mellette fekvő belső szögek összegével,

$$AFO = FAA' + AA'F.$$

Az $A'OB$ és $OA'A$ szögek váltószögek, $OA'A$ és $A'AF$, illetve OFA és AOF egy-egy egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei. Ezek alapján

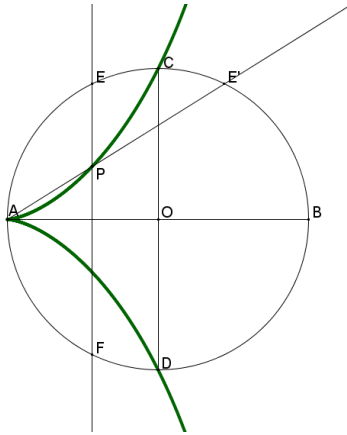
$$A'OA = 2A'OB.$$

Az OA' félegyenes tehát harmadolja az AOB szöget, a feladatot megoldottuk.

2.3. Megjegyzés. Hegyesszöget harmadoltunk, de bármely szög felosztható hegyesszögekre, így ezzel a módszerrel bármely szög harmadolható.

2.2. A cisszois

2.4. Definíció. (cisszois) Tekintsünk egy tetszőleges AB átmérőjű kört, amelyben CD a kör AB -re merőleges átmérője, EF egy ezzel párhuzamos húr. Legyen E' az E pont tükörképe a CD tengelyre nézve, P az EF egyenes és az AE' félegyenes metszéspontja. A görbe, amelyet a P pont leír, miközben E a körön mozog, a *cisszois*.



4. ábra. Cisszois

2.5. Megjegyzés. Amikor E pont egybeesik B ponttal, akkor E' egybeesik A -val. A görbe ekkor kifut a végtelenbe és a másik félsíkban tér vissza.

A cisszoist a Kr. e. II. században, Dioklész görög matematikus definiálta, hogy segítségével megoldja a kockakettőzés problémáját. A feladat az, hogy egy egységnyi térfogatú kockához képest kétszer akkora térfogatú kocka élét megszerkesszük. Ekkor

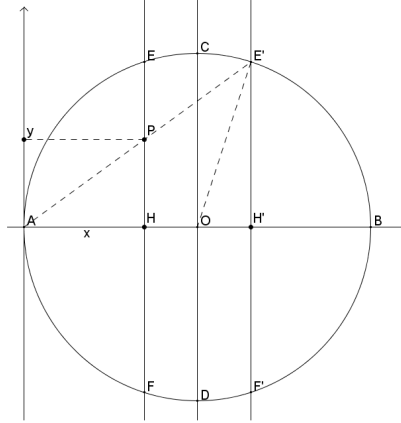
$$\begin{aligned} a_1^3 = 1 &\implies a_1 = 1 \\ a_2^3 = 2 &\implies a_2 = \sqrt[3]{2}, \end{aligned}$$

ahol a_1 az eredeti kocka éle, a_2 pedig a megkétszerezett kockáé. Feladatunk tehát $\sqrt[3]{2}$ arányú szakaszok szerkesztése. A $\sqrt[3]{2}$ nem szerkeszthető.

2.2.1. A cisszois egyenlete

A cisszois egyenletének meghatározásához vegyünk fel egy olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelynek x -tengelye a kör AB átmérője, az origó az A pont. Az E és E' pontok merőleges vetületei az x -tengelyre legyenek H és H' . Az AHP és $AH'E'$ háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{y}{x} = \frac{E'H'}{AH'}.$$



5. ábra. A cisszois egyenletének meghatározása

A kör átmérője d hosszúságú,

$$AH' = d - x.$$

Pitagorasz tétele miatt

$$E'H' = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - x\right)^2} = \sqrt{x(d-x)}.$$

Innen

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x(d-x)}}{d-x}.$$

A cisszois egyenlete tehát:

$$y^2 = \frac{x^3}{d-x}.$$

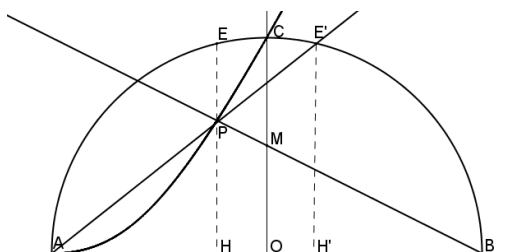
Az egyenletet kielégítő pontok pontosan a görbe pontjai.

2.2.2. Kockakettőzés cisszois segítségével

Legyen adott egy AB átmérőjű félkör és a belőle származtatott cisszois egyik íve. Az AB -re merőleges átmérő végpontja C , az OC szakasz felezőpontja M . Legyen az MB félegyenes és a cisszois metszéspontja P pont. A P -n át AB -re állított merőleges messe a körívet E pontban, AB -t H pontban. Az EH

szakaszt OC -re tengelyesen tükrözzük. D és E pontok tükörképei D és E' pontok. Ekkor PHB és MOB háromszögek hasonlósága miatt:

$$\frac{PH}{HB} = \frac{MO}{OB} = \frac{1}{2}.$$



6. ábra. Kockakettőzés cisszoissal

A következő egybevágóságok és hasonlóságok fennállnak:

$$AHE \sim EHB$$

$$AHE \cong BH'E'$$

$$AH'E' \sim E'H'B$$

$$AH'E' \sim AHP.$$

Emiatt

$$\frac{BH}{EH} = \frac{EH}{AH} = \frac{E'H'}{BH'} = \frac{AH'}{E'H'} = \frac{AH}{PH}.$$

Vezessünk be új jelöléseket: $a = BH$, $b = EH$, $c = AH$. Ekkor

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \implies c = \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{\frac{1}{2}a} \implies c = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b}.$$

Innen

$$\frac{b^2}{a} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b}$$

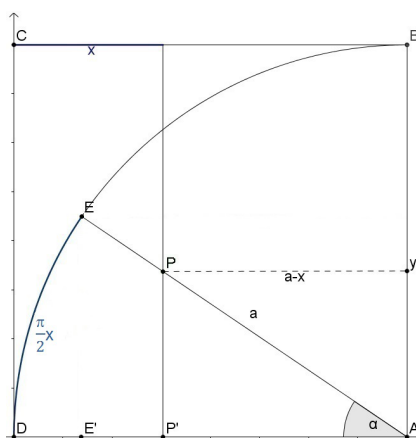
$$2b^3 = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{2}b.$$

Így tehát a kockakettőzés elvégezhető.

2.3.1. A kvadratrix egyenlete

Mindkét mozgás a D csúcsból indul, ezért a kvadratrix egyenletének meghatározásához olyan koordinátarendszert vegyünk fel, ahol a D csúcs az origó, a négyzet DA oldala az x -tengely, a DC oldal pedig az y -tengely. Definíció szerint a kör sugara és a négyzet oldala azonos ideig mozog. Legyen a sugár a köríven végigfutó végpontja E . Az E pont által bejárt teljes út a negyedkör ívhossza, azaz $\frac{2a\pi}{4} = \frac{a\pi}{2}$. Az E pont által bejárt út tehát minden pillanatban az AB által megtett x út $\frac{a\pi}{2}$ -szöröse. Egy α középponti szöghöz tartozó körív hossza a sugár α -szorososa, tehát az ábrán jelölt szög nagysága $\alpha = \frac{\pi x}{2a}$.



8. ábra. A kvadratrix egyenletének meghatározása

A szögfüggvények definíciója alapján

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{a - x},$$

azaz

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} = \frac{y}{a - x}.$$

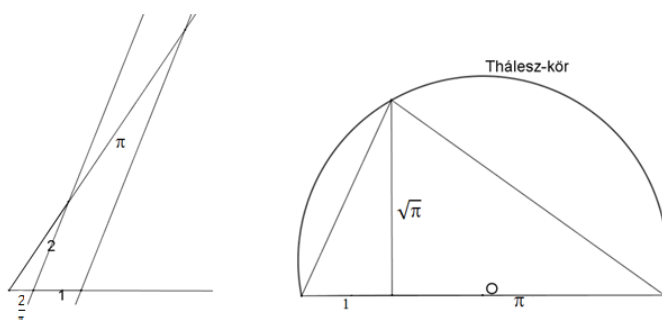
A kvadratrix egyenlete tehát:

$$y = (a - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}.$$

Az egyenletet definíció szerint a $[0, a[$ intervallumon értelmezzük, ezen az intervallumon a görbe minden pontja elő is áll.

2.3.2. Szerkesztések kvadratrix segítségével

A körnégyszögesítéshez a görbe T talppontjára van szükségünk, ez az egyenlet alapján könnyen meghatározható: $\lim_{x \rightarrow 1} (a - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} = \frac{2}{\pi} a$. A T pont koordinátái $a = 1$ esetén tehát: $(\frac{2}{\pi}, 0)$. Legyen adott egy egységsugarú kör és a kör és egy egységnyi oldalú négyzet által meghatározott kvadratrix a T talpponttal együtt. Ez a görbét folytonosan meghosszabbítva előállítható. Az OT szakasz hossza $\frac{2}{\pi}$. Ebből a párhuzamos szelők tétele alapján megszerkeszthető π , és a magasságtétel segítségével megkaphatjuk $\sqrt{\pi}$ -t.



9. ábra. A szükséges szerkesztési eljárások

A határértékszámítást természetesen jóval Papposz után fedezték fel, habár éppen a hasonló matematikai problémák megoldása jelentette az első lépést ehhez. Papposznak a szerkesztés előtt be kellett látnia, hogy a talppont a négyzet oldalát éppen olyan arányban osztja, mint ahogy a sugár aránylik a körívhez. A bizonyítás a kimerítés módszerén alapszik, amelyet először Eudoxosz görög matematikus használt a Kr. e. IV. században. Ezt például síkidomok területének és görbe vonalak ívhosszának számítására használták. Lényege, hogy a görbét beírt alakzatokkal közelítették, amelyek felső korlátja maga a görbe. Megkeresték az alakzatok határértékét és indirekt bebizonyították, hogy ez maga a keresett terület vagy ívhossz. Ezt az indirekt bizonyítást láthatjuk Papposznál. A körív hosszát jelölje \widehat{DB} .

2.8. Állítás. $\frac{\widehat{DB}}{DA} = \frac{DA}{AT}$, ahol T a kvadratrix talppontja.

Bizonyítás. (indirekt) Tegyük fel, hogy

$$\frac{\widehat{DB}}{DA} = \frac{DA}{AK},$$

ahol vagy $AK > AT$ vagy $AK < AT$. Tekintsük az első esetet. Körívezzünk A csúcs körül AK sugárral. A körív a kvadratrixot P pontban, az AD oldalt L pontban metszi. P merőleges vetülete AB -re P' . Az AP félegyenes és a körív metszéspontja E pont. Ekkor

$$\frac{\widehat{DB}}{DA} = \frac{AB}{AK} = \frac{\widehat{DB}}{\widehat{LK}}.$$

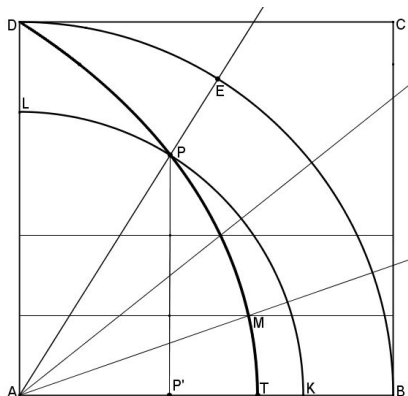
Emiatt

$$DA = \widehat{LK}.$$

A kvadratrix definíciója szerint

$$\frac{DA}{PP'} = \frac{\widehat{LK}}{\widehat{PK}}.$$

Ha $DA = \widehat{LK}$, akkor $PP' = \widehat{PK}$. Ez nem lehetséges. $AK < AT$ esetben hasonlóképpen ellentmondásra jutunk. Ekkor T és P' szerepe felcserélődik. \square



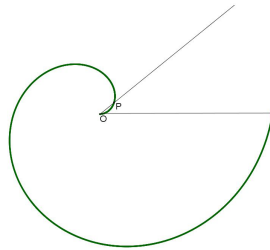
10. ábra. Szerkesztések kvadratrixszal

Papposz tudta, hogy egy kör területe éppen akkora, mint annak a háromszögnek a területe, amelynek alapja a kör kerülete, magassága pedig a kör sugara. Egy háromszög már könnyen négyszögesíthető, hiszen a területe megegyezik egy feleakkora magasságú téglalap területével. A téglalap területe, pedig akkora, mint annak a négyzetnek a területe, melynek oldala egyenlő a téglalap oldalainak mértani közepével.

A szögharmadolás, sőt egy szög n részre osztása szintén megoldható a görbe segítségével. Mivel $\frac{\widehat{DB}}{DA} = \frac{DA}{AT}$, a PP' szakasz felosztásával megkaphatjuk a szög felosztását. Legyen a szakasz harmadolópontján keresztül húzott, a négyzet AB oldalával párhuzamos egyenes és a kvadratrix metszéspontja M . Ekkor az MAB szög éppen a PAB szög harmada.

2.4. Az arkhimédészi spirál

2.9. Definíció. (arkhimédészi spirál) Forgassunk egy félegyenest O kezdőpontja körül, miközben a félegyenes egy P pontja egyenletes sebességgel távolodik O -tól. A P pont által leírt görbe az *arkhimédészi spirál*.

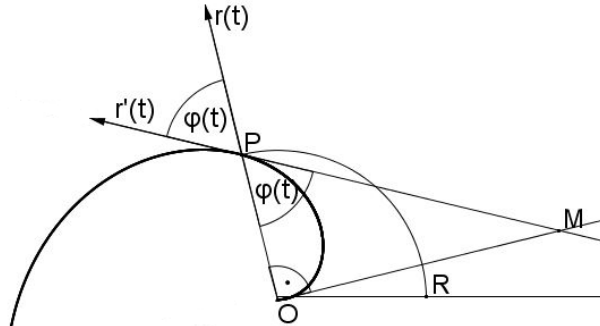


11. ábra. Arkhimédészi spirál

Arkhimédész szürakuszai matematikus vezette be ezt a görbét *A spirálisokról* című könyvében. Felhasználta szögharmadolásra és körnégyszögesítésre is. Az érintő vizsgálatánál használt végtelenül kicsi differenciál-háromszög Eudoxosz kimerítéses módszeréhez hasonlóan segítséget jelentett az integrálszámítás szabályinak megalkotásakor.

2.4.1. Szerkesztések arkhimédészi spirállal

A szögharmadolás az arkhimédészi spirál segítségével könnyen elvégezhető. A görbét két egyenletes mozgás határozza meg, az OP szakasz tehát a φ szöggel arányosan nő. A görbe paraméteres egyenlete: $r = a\varphi$. Az r szakasz harmadolásával tehát elvégezhető a szög harmadolása is. $\frac{r}{3} = \frac{a\varphi}{3}$, azaz a spirált O pontból $\frac{r}{3}$ -mal metszve az elfordulás szögének harmadát kapjuk. Természetesen ugyanígy megoldható a szög bármilyen n részre osztása.



12. ábra. Az arkhimédészi spirál érintőjének vizsgálata

Az érintő vizsgálatával Arkhimédész a körnégyszögesítésre is megoldást talált. Legyen a görbe egy pontja P . Állítsunk az OP szakaszra merőlegest O pontban. A P -beli érintő és a merőleges metszéspontja legyen M . A kezdő félegyenest messük el egy OP sugarú, O középpontú körívvel, a metszéspont legyen R .

2.10. Állítás. *Az OM szakasz hossza megegyezik a \widehat{PR} körív hosszával.*

Bizonyítás. Arkhimédész bizonyítása közelítésekre épült, mi induljunk ki a görbe paraméteres egyenletéből, amely a következő:

$$\underline{r}(t) = at(\cos t, \sin t).$$

Az \underline{r} vektor hossza a t időpillanatban:

$$|\underline{r}(t)| = \sqrt{a^2 t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} = at.$$

Az érintő irányvektora:

$$\underline{r}'(t) = a(\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t).$$

Ennek hossza:

$$|\underline{r}'(t)| = \sqrt{a^2 (\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t)},$$

egyszerűsítve:

$$|\underline{r}'(t)| = a\sqrt{1 + t^2}.$$

Legyen $OPM = \varphi(t)$. Ennek a szögnek koszinusza a következőképpen meghatározható:

$$\begin{aligned}\cos \varphi(t) &= \frac{\underline{r}(t) \cdot \underline{r}'(t)}{|\underline{r}(t)| \cdot |\underline{r}'(t)|} = \frac{a^2(t \cos^2 t - t \cos t \sin t + t \sin^2 t + t \sin t \cos t)}{a^2 t \sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{a^2 t}{a^2 t \sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\end{aligned}$$

A szög szinusza pedig:

$$\sin \varphi(t) = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi(t)} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Innen a $\varphi(t)$ szög tangense:

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\sin \varphi(t)}{\cos \varphi(t)} = t$$

Ebből az OM szakasz hossza:

$$OM = r \operatorname{tg} \varphi = at^2$$

A \widehat{PR} körív hossza könnyen meghatározható, hiszen a körív sugara at , középponti szöge t , az ívhossz pedig ezek szorzata, tehát:

$$\widehat{PR} = at^2.$$

Tehát az OM szakasz hossza valóban megegyezik a \widehat{PR} körív hosszával. \square

A fentiek alapján tehát, ha adott az $r = a\varphi$ egyenletű arkhimédészi spirál, annak $\frac{\pi}{2}$ -beli érintője a kezdő félegyenesen az $OM = \frac{\pi}{2}r$ szakaszt jelöli ki. Innen $\sqrt{\pi}$ már megszerkezhető.

2.11. Megjegyzés. Ez a szerkesztés eltér a többitől, hiszen itt nem elég a görbe megadása, az érintőre is szükségünk van.

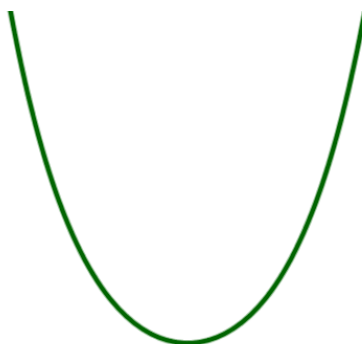
3. Síkgörbék a környezetünkben

Az általam vizsgált síkgörbék másik csoportját később, a 17.-19. században definiált görbék alkotják. Ezek közül olyanokat választottam ki, amelyek valamilyen fizikai felfedezéshez, folyamathoz, jelenséghez, természeti törvényhez kapcsolódnak. Ez a görbék jellemzésénél is megjelenik, főleg azoknál, amelyek definíciója összeforrt magával a fizikai folyamattal. Ilyenkor ugyanis kézenfekvő módszer az egyenlet megadására az erők összegzése, vagy a mozgás egymásra merőleges komponensekre bontása.

3.1. Láncgörbe és traktrix

3.1. Definíció. (láncgörbe) Az a görbe, amelyet egy két pontjánál felfüggesztett kötél ír le, egy *láncgörbe* vagy *kötélgörbe* íve.

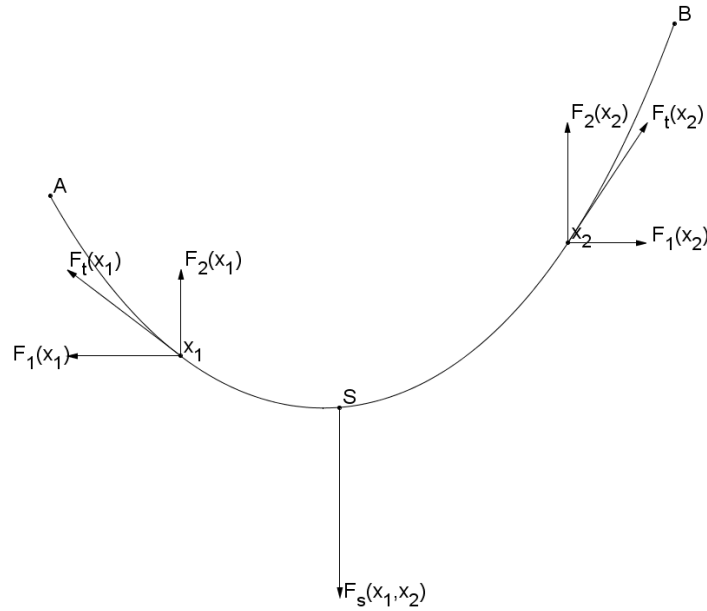
A későbbiekben láthatjuk, hogy a kötél csak a végtelen láncgörbe egy szakasza. A teljes görbét tekintve bármely két láncgörbe hasonló egymáshoz.



13. ábra. Láncgörbe

3.1.1. A láncgörbe egyenlete

Amikor egy kötelet két pontjánál fogva felakasztunk, az akkor áll meg, amikor nyugalmi állapotba került, amikor a helyzete a lehető legstabilabb. A görbe létrejöttének feltétele tehát az, hogy a kötél nyugalmi helyzetben legyen, ezért az egyenlete is az erők egyensúlyából határozható meg. A levezetés során feltesszük, hogy a görbe folytonos, kétszer differenciálható.



14. ábra. A kifeszített kötélre ható erők

Legyenek A és B a felfüggesztési pontok. A kötélt által felvett $r(x) = (x, f(x))$ görbe ívhossza bármely $x_1 < x_2$ pontok közt

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

A kötélt súlya arányos a kötélt hosszával.

$$F_s = \sigma \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

ahol a σ arányossági tényező a kötélt egységnyi hosszának súlyát mutatja. A kötélt minden x pontjára $F_t(x) = (F_1(x), F_2(x))$ érintőirányú tartóerő hat. Ezeknek összege a kötéltre ható súlyerővel egyensúlyban van. Mivel F érintőirányú, a következő összefüggés fennáll:

$$F_2(x) = \pm f'(x) F_1(x).$$

A kötéldarabra ható súlyerő függőleges irányú, ami úgy lehetséges, ha a két pontra ható tartóerő F_1 vízszintes komponensei kiegyenlítik egymást, (azaz

$F_1 = F_2 = c$ azonos nagyságú és ellentétes irányú,) az F_2 függőleges komponensekre pedig

$$F_2(x_1) + F_2(x_2) = F_s(x_1, x_2).$$

Az egyenletet x_2 szerint deriválva, a következő másodrendű differenciálegyenlethez jutunk:

$$\sigma\sqrt{1 + (f'(x_2))^2} = F_2'(x_2) = (\pm f'(x_2)F_1(x_2))' = \pm cf''(x_2).$$

Mivel $f'' < 0$ esetén a görbe szigorúan konkáv lenne, ami definíció szerint lehetetlen, így ezt az esetet elhagyhatjuk. Az $a = \frac{c}{\sigma}$ jelölés bevezetésével a megoldandó differenciálegyenlet:

$$f''(x) = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

A megoldás hiperbolikus helyettesítéssel megadható: legyen $f'(x) = \text{sh}\left(\frac{x}{a}\right)$. Ekkor

$$f''(x) = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\text{sh}\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\text{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{a}\int \text{ch}\left(\frac{x}{a}\right) = \text{sh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$f(x) = \int \text{sh}\left(\frac{x}{a}\right) = a\text{ch}\left(\frac{x}{a}\right).$$

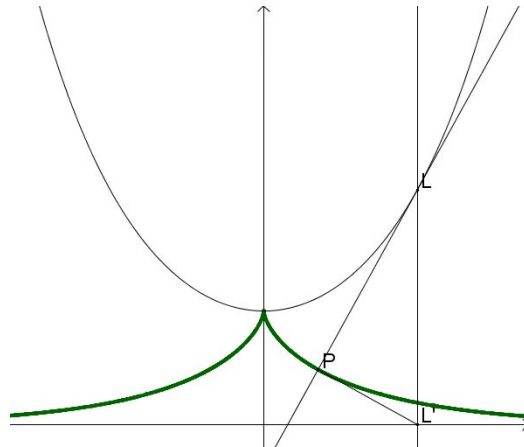
A görbe egyenlete tehát:

$$y = a\text{ch}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Az egyenletet kielégítő pontok egy olyan végtelen görbe pontjai, amelynek egy szakasza a felakasztott kötél. Nem követeltük meg, hogy a két felfüggesztési pont azonos magasságban legyen, tehát bármely két (nem egymás felett lévő) pontra felakasztva egy kötelet a láncgörbe egy szakaszát kapjuk. Az egyenletből látszik, hogy bármely két láncgörbe hasonló egymáshoz, csak az a paraméter különbözteti meg őket egymástól. A láncgörbe kapcsán érdemes megemlíteni egy hozzá kapcsolódó síkgörbét, a traktrixot. A láncgörbe a traktrix evolútája, vagyis a traktrix görbületi középpontjai által meghatározott görbe a láncgörbe. Ezzel együtt a traktrix a láncgörbe evolvens. Az evolvens bármely pontjába a pontbeli érintőre merőlegest állítva az evoluta

érintőjét kapjuk. Az evoluta két pontja közti ívhossz pedig a görbületi sugarak különbségét mutatja meg. Ezek alapján az evolvens fogalmát úgy szokás magyarázni, hogy az az evolutáról lefejtett fonal vége által leírt görbe.

3.2. Definíció. (traktrix) Legyen az $y = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right)$ egyenletű láncgörbe egy pontja L és a pont x -tengelyre vett merőleges vetülete L' . Legyen P a görbe L pontbeli érintőjének azon pontja, amely L' -től a távolságra van. A görbe, amelyet a P pont ír le, miközben L a láncgörbén mozog a *traktrix*. Traktrixot ír le egy a hosszúságú fonal egyik végéhez rögzített P pont, ha a másik végpont az x -tengelyen, mint vezéregyenesen mozog.



15. ábra. Traktrix

3.1.2. A traktrix egyenlete

Határozzuk meg annak a traktrixnak az egyenletét, amely az $y = \operatorname{ch} x$ egyenletű láncgörbe evolvensé, azaz tekintsük az $a = 1$ esetet! A láncgörbe paraméteres egyenlete ekkor:

$$\underline{r}(t) = (t, \operatorname{ch} t).$$

Az érintő irányvektora:

$$\underline{r}'(t) = (1, \operatorname{sh} t).$$

Az L pont koordinátái legyenek: $(t_0, \operatorname{ch} t_0)$. A láncgörbe ívhossza $t = 0$ -tól t_0 -ig:

$$\int_0^{t_0} |\underline{r}'(t)| dt = \int_0^{t_0} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} dt = \int_0^{t_0} \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} t$$

A P pont koordinátái az $r(t_0)$ vektor és az $\text{sh } t_0$ hosszúságú, érintőirányú vektor koordinátáinak különbsége, azaz

$$\begin{aligned} \underline{r}_{tr} &= \underline{r}(t_0) - \text{sh } t_0 \frac{(1, \text{sh } t_0)}{\sqrt{1 + \text{sh}^2 t_0}} = \underline{r}(t_0) - \text{sh } t_0 \frac{(1, \text{sh } t_0)}{\text{ch } t_0} = \\ &= \left(t_0 - \text{th } t_0, \text{ch } t_0 - \frac{\text{sh}^2 t_0}{\text{ch } t_0} \right) = \left(t_0 - \text{th } t_0, \frac{1}{\text{ch } t_0} \right) \end{aligned}$$

Az evolvens paraméteres egyenlete tehát:

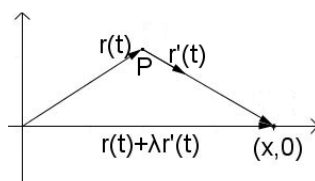
$$\underline{r}(t) = \left(t - \text{th } t, \frac{1}{\text{ch } t} \right).$$

Könnyen belátható, hogy a traktrix bármely érintőjén az érintési ponttól az x -tengelyig terjedő szakasz hossza egységnyi. Az érintő irányvektora:

$$\underline{r}'(t) = \left(1 + \frac{1}{\text{ch}^2 t}, -\frac{\text{sh } t}{\text{ch}^2 t} \right) = \left(\text{th}^2 t, -\frac{\text{sh } t}{\text{ch}^2 t} \right).$$

Az érintő az x -tengelyt az $(x, 0)$ pontban metszi. Az $\underline{r}(t)$ vektor és egy $\underline{r}'(t)$ irányú vektor összege ebbe a pontba mutat. Ha az $\underline{r}'(t)$ irányú vektor hossza $\lambda \underline{r}'(t)$, akkor ez az összeg a következőképpen írható fel:

$$\underline{r}(t) + \lambda \underline{r}'(t) = (x, 0).$$



16. ábra. Az érintőszakasz hosszának meghatározása

A λ érték a második koordináták segítségével meghatározható:

$$\frac{1}{\text{ch } t} - \frac{\lambda \text{sh } t}{\text{ch}^2 t} = 0,$$

azaz

$$\lambda = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{\operatorname{th} t}.$$

Ezt visszahelyettesítve megkapjuk az x koordinátát:

$$x = t - \operatorname{th} t + \frac{\operatorname{th}^2 t}{\operatorname{th} t} = t - \operatorname{th} t + \operatorname{th} t = t$$

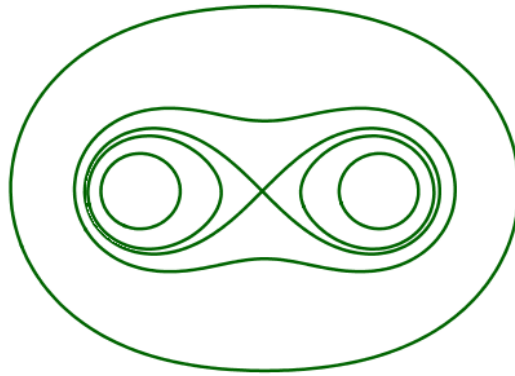
Az x tengellyel vett metszéspont koordinátái tehát $(t, 0)$. Ennek a P pottól való távolsága:

$$\sqrt{(t - t + \operatorname{th} t)^2 + \left(-\frac{1}{\operatorname{ch} t}\right)^2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}} = 1$$

3.3. Megjegyzés. A hiperbolikus geometria egyik modellje, a pszeudoszféra a traktrix forgatásával létrejövő forgásfelület.

3.2. Cassini-féle görbék

3.4. Definíció. (Cassini-féle görbe) Ha egy P pont úgy mozog, hogy két adott, egymástól $2a$ távolságra lévő F_1, F_2 fókuszponttól való távolságainak szorzata állandó c^2 nagyságú, akkor a pont egy *Cassini-féle görbét* ír le.



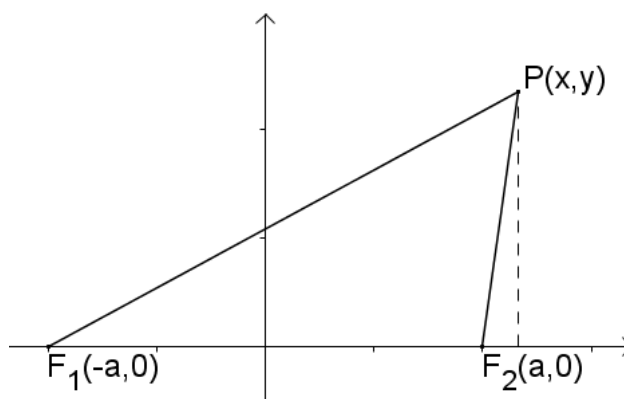
17. ábra. Cassini-görbék különböző c értékek esetén

3.5. Megjegyzés. A görbe alakja a és c viszonyától függően változó. Ha $c > a$, akkor önmagát nem átmetsző, zárt görbét, $c < a$ esetén két diszjunkt görbét kapunk. Ha $c = a$, akkor önmagát átmetsző, nyolcas alakú görbét kapunk, melynek neve *lemniskáta*.

Cassini olasz csillagász a 17. században írta le ezt a görbeosztályt. Ezek a görbék úgy is származtathatók, hogy egy tóruszt, amely egy r sugarú kör megforgatásával jött létre, elmetszünk az $y = r$ egyenletű síkkal. Cassini azt gondolta, hogy a bolygók pályája is ilyen alakú.

3.2.1. A Cassini-görbe egyenlete

A görbe egyenletének meghatározásához vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert, amelynek x -tengelye az F_1F_2 egyenes, origója az F_1F_2 szakasz felezőpontja.



18. ábra. P és a fókuszpontok távolsága

A P pont és a fókuszpontok távolsága ekkor a következőképpen írható fel:

$$F_1P = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$$

$$F_2P = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Definíció szerint ezek szorzata c^2 :

$$\begin{aligned}\sqrt{((x+a)^2+y^2)((x-a)^2+y^2)} &= c^2 \\ ((x+a)^2+y^2)((x-a)^2+y^2) &= c^4 \\ (x^2-a^2)^2+y^2((x-a)^2+(x+a)^2)+y^4 &= c^4 \\ (x^2-a^2)^2+2y^2((x^2+a^2))+y^4 &= c^4 \\ x^4-2x^2a^2+a^4+2x^2y^2+2c^2y^2+y^4 &= c^4.\end{aligned}$$

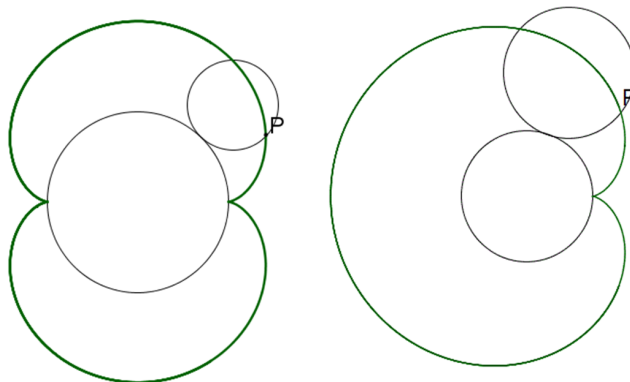
A Cassini-görbe egyenlete tehát:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=c^4-a^4.$$

Ezt pontosan a görbe pontjai elégítik ki.

3.3. Epicikloisok

3.6. Definíció. (epiciklois) Egy R sugarú kör külsején gördülő r sugarú kör egy P kerületi pontja által leírt görbét *epicikloisnak* nevezünk.



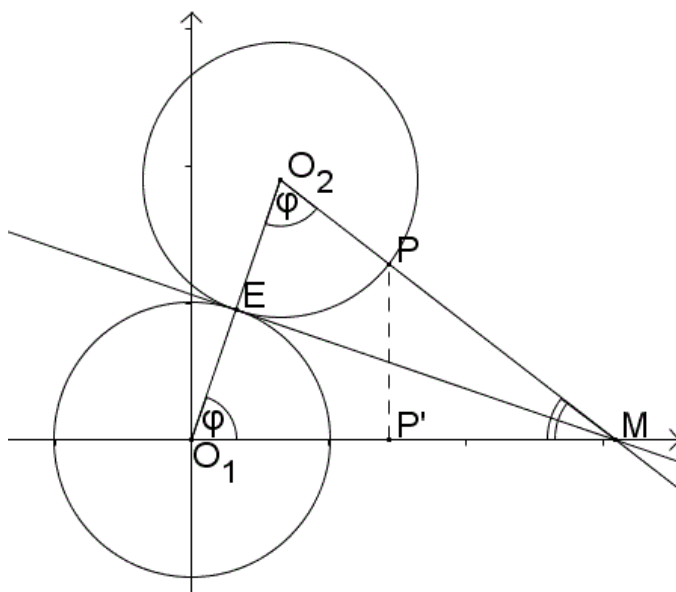
19. ábra. Epicikloisok: kardioid és nefroid

3.7. Definíció. (burkológörbe) Egy egyenessereg *burkológörbéje* az a görbe, amelynek érintői az egyenessereg egyenesei.

Ha egy felületre fénysugarak esnek és visszaverődnek, a visszavert sugarak burkológörbéje (kausztikája) a tükröző felülettől függően sokféle lehet. Kör alakú felület esetén, ha a beérkező sugarak párhuzamosak, például amikor egy pohárra rásüt a vízszintesen érkező reggeli fény, és a belső felületén visszaverődik, a kausztika nefroid alakú. Ha a beeső fény a kör egy pontjából indul, akkor kardioidot láthatunk. Ezek a görbék az epicikloisok görbeosztályába tartoznak, azok speciális esetei. A kardioid $R = r$, a nefroid $R = 2r$ esetben jön létre.

3.3.1. A kardioid paraméteres egyenlete

Tekintsük az epicikloisok azon speciális esetét, amikor a két kör sugara megegyezik. A kardioid egyenletét olyan koordináta-rendszerben írjuk fel, amelynek origója a nem mozgó kör középpontja, az x -tengely pedig úgy álljon, hogy a kardioid csúcsa arra essen. Legyen P' a P pont merőleges vetülete az x -tengelyre. A két kör E érintési pontjába húzott érintő és az x -tengely metszéspontja legyen M . A két kör középpontjai O_1 és O_2 . A két kör sugara megegyezik, az elfordulás szöge pedig megegyezik az O_1O_2P szöggel.



20. ábra. A kardioid egyenlete

Az O_1O_2M háromszög ismeretlen oldalai meghatározhatók az O_1EM és O_2EM derékszögű háromszögek segítségével:

$$O_1M = O_2M = \frac{r}{\cos \varphi}$$

$$PM = \frac{r}{\cos \varphi} - r.$$

Az O_1MO_2 szög nagysága $\pi - 2\varphi$. A $PP'M$ háromszög alapján

$$y = \left(\frac{r}{\cos \varphi} - r \right) \sin(\pi - 2\varphi) = \left(\frac{r}{\cos \varphi} - r \right) \sin 2\varphi = \left(\frac{2r \sin \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi} - r \sin 2\varphi \right)$$

$$x = \frac{r}{\cos \varphi} - \left(\frac{r}{\cos \varphi} - r \right) \cos(\pi - 2\varphi) = \frac{r}{\cos \varphi} + \left(\frac{r}{\cos \varphi} - r \right) \cos(2\varphi) =$$

$$= \frac{r + r \cos 2\varphi}{\cos \varphi} - r \cos 2\varphi = \frac{r(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{\cos \varphi} - r \cos 2\varphi =$$

$$= r(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi).$$

A paraméteres egyenlet tehát:

$$x = r(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi)$$

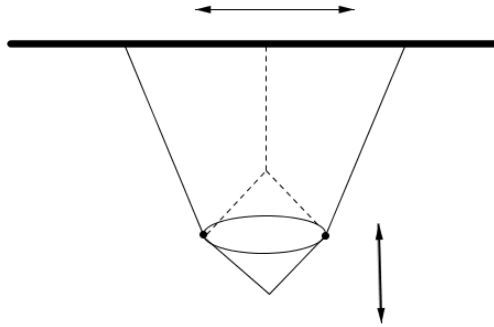
$$y = r(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi).$$

Ezt pontosan a görbe pontjai elégítik ki.

3.4. Lissajous-görbék

3.8. Definíció. (Lissajous-görbe) Két különböző frekvenciájú, egymásra merőleges rezgőmozgás eredője *Lissajous-görbét* ír le.

Lissajous francia fizikus publikálta először a görbékkel kapcsolatos megfigyeléseit a 19. század elején. A két merőleges rezgést egy olyan kettős inga segítségével lehet jól szemléltetni, amely egy rúdból és egy ráerősített tölcserből áll. A rúd x -irányban képes mozogni, a tölcser pedig erre merőleges y -irányban leng. A tölcser úgy erősíti a rúdhöz, hogy az ne mozduljon y -irányba, így a két mozgás egymástól függetlennek tekinthető. A tölcserből kifolyó homok Lissajous-görbét ír le.



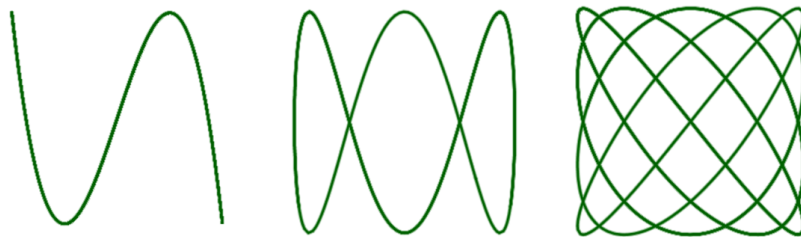
21. ábra. Kettős inga az egymásra merőleges rezgőmozgások szemléltetésére

3.4.1. A Lissajous-görbe egyenlete

A definíció alapján a görbe paraméteres egyenlete a következő alakban megadható:

$$\begin{aligned}x &= a \sin(\omega_1 t) \\ y &= b \sin(\omega_2 t + \delta).\end{aligned}$$

A két mozgás eredője csak akkor periodikus, ha azok frekvenciáinak aránya ($\omega_1 : \omega_2$) racionális. Az ábrák erre mutatnak példát. A görbét leíró pont helyzete minden esetben periodikusan változik, az első görbe esetén a pont a két végpont közt ide-oda mozog. Irracionális arány esetén a görbét leíró pont soha nem tér vissza a kezdeti helyzetébe, azaz a görbe egy teljes téglalapot lefed. Az alábbi ábrák azonos amplitúdójú, rezgések eredőit által leírt Lissajous-görbéket mutatnak. A frekvenciák aránya az első két képen $1 : 3$, a harmadik képen $4 : 5$. A második képen $\delta = \frac{\pi}{2}$, a többi képen nincs fáziseltolás.



22. ábra. Lissajous-görbék

3.4.2. A merőleges mozgások speciális esetei

3.9. Állítás. Ha $\omega_1 : \omega_2 = \frac{1}{2}$ és $\delta = \frac{\pi}{2}$, akkor a mozgás által leírt görbe egy parabolaív.

Bizonyítás. A paraméteres egyenlet:

$$\begin{aligned}x &= a \sin(\omega t) \\y &= b \sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Innen

$$y = b \cos(2\omega t) = b(1 - \sin^2 \omega t).$$

Ide x -et behelyettesítve a következő egyenlethez jutunk:

$$y = b\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right).$$

Ez egy parabola egyenlete. A Lissajous-görbe azonban a parabolával ellentétben véges. Mivel $-1 \leq \sin(\omega t) \leq 1$, a görbe csak a $[-a, a]$ intervallumon van értelmezve. \square

Definíció szerint kikötöttük, hogy a rezgések frekvenciája különböző legyen. Milyen görbét kapnánk azonos frekvenciájú rezgések eredőjeként?

3.10. Állítás. Ha $\omega_1 : \omega_2 = 1$, akkor a rezgések eredője által létrehozott görbe ellipszis. (Ideértjük az elfajuló esetet is, azaz a szakaszt.)

Bizonyítás. A paraméteres egyenlet ekkor:

$$\begin{aligned}x &= a \sin(\omega t) \\y &= b \sin(\omega t + \delta).\end{aligned}$$

Vagyis

$$\frac{x}{a} = \sin(\omega t)$$

$$\frac{y}{b} = \sin(\omega t) \cos(\delta) + \cos(\omega t) \sin(\delta).$$

Ez átalakítva:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos(\delta) + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \sin(\delta),$$

ahol felhasználtuk, hogy $\cos(\omega t) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega t)}$. Az egyenletet négyzetre emelve:

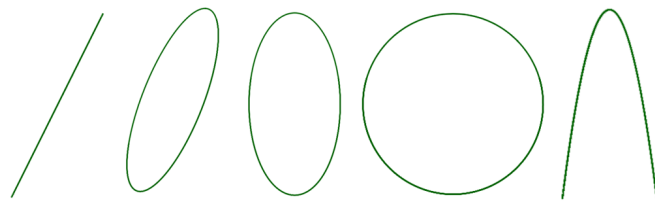
$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos(\delta)\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \sin^2(\delta).$$

Azaz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Ez egy ellipszis egyenlete. A teljes ellipszis elő is áll. Mivel $-1 \leq \sin(\omega t + \delta) \leq 1$, igaz, hogy $-a \leq x \leq a$ és $-b \leq y \leq b$. Az ellipszis főtengelyei a $\delta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ esetben megegyeznek a koordinátatengelyekkel. Ha emellett $a = b$ is fennáll, akkor a leírt görbe kör. Ha $\delta = 0 + k\pi$, akkor a leírt görbe egy szakasz. \square

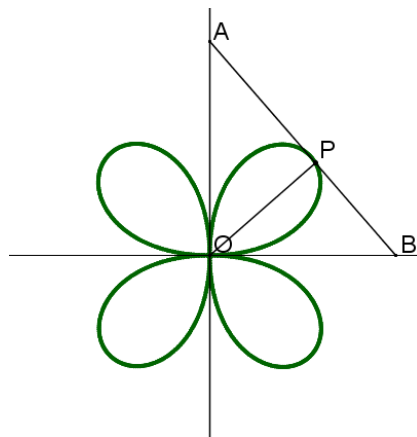
3.11. Megjegyzés. Az első három ábra a $b = 2a$ esetet mutatja $\delta = 0, \frac{\pi}{4}$, illetve $\frac{\pi}{2}$ mellett. A kör és a parabolaív a fent leírtak szerint adódik.



23. ábra. A merőleges rezgések speciális esetei

3.5. Rozetta

3.12. Definíció. (rozetta) Legyen adott két merőleges egyenes e és f , és egy adott a hosszúságú AB szakasz, amelyre igaz, hogy $A \in e$ és $B \in f$. Az egyenesek O metszéspontjából bocsássunk merőlegest az AB szakaszra, amelynek talppontja legyen P . A görbe, amelyet a P pont leír, miközben AB úgy mozog, hogy végpontjai mindvégig az egyeneseken maradnak a *rozetta*.



24. ábra. Rozetta

A 19. század közepén Léon Foucault francia fizikus ingát készített. Egy hosszú zsinórra súlyt, arra pedig vékony tűt erősített, amely kirajzolta az inga útját. Az inga lengési síkja nem változik, a tű a homokba mégse egyenes szakaszt írt. Foucault ezzel a kísérlettel a Föld forgását bizonyította. Az inga által leírt görbe egy rozetta volt.

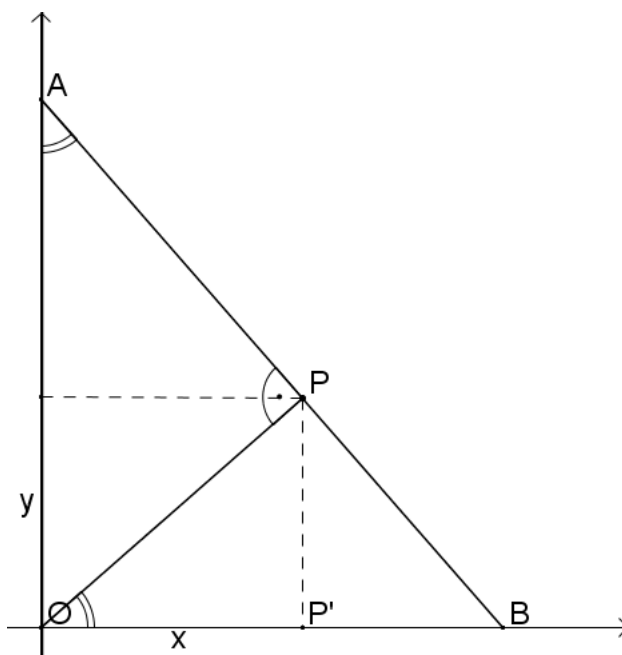
3.5.1. A rozetta egyenlete

A rozetta egyenletének felírásához vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert, aminek tengelyei az e és f egyenesek. Legyen P' a $P(x, y)$ pont x -tengelyre vett merőleges vetülete, az AB szakasz hossza a . Ekkor

$$AOB \sim OPB.$$

A hasonlóság miatt

$$\frac{AB}{OB} = \frac{OP}{PP'}.$$



25. ábra. A rozetta egyenlete

A magasságtételt alkalmazva a POB háromszögre:

$$y = \sqrt{x \cdot P'B} \implies P'B = \frac{y^2}{x}.$$

OPP' háromszögben Pitagorasz tétele miatt

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ezek alapján

$$\frac{a}{x + \frac{y^2}{x}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

$$ayx = (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}.$$

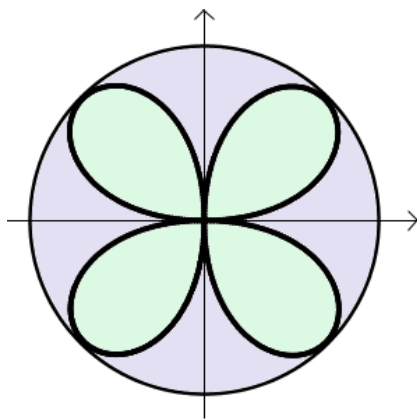
A görbe egyenlete tehát

$$a^2 y^2 x^2 = (x^2 + y^2)^3.$$

Az egyenletet pontosan a rozetta pontjai elégítik ki.

3.5.2. A rozetta területe

Egy érdekesség a rozettával kapcsolatban, hogy a területe éppen feleakkora, mint a köré írt kör területe. (Azaz az ábrán különböző színnel jelölt területek megegyeznek.)



26. ábra. A rozetta területe

3.13. Állítás. $T_{rozetta} = \frac{1}{2}T_{kör}$.

Bizonyítás. A rozetta köré írt kör sugara $R = \frac{a}{2}$, hiszen az OP távolság akkor maximális, ha P az AB szakasz felezőpontja és ekkor POB háromszög egyenlőszárú. A kör területe

$$T_{kör} = R^2\pi.$$

A rozetta területének kiszámításához térjünk át polárkoordinátákra:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi.$$

A görbe egyenlete:

$$r = \frac{a}{2} \sin(2\varphi) = R \sin(2\varphi).$$

A görbe által határolt terület:

$$\begin{aligned}
 T_{rozetta} &= 4 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2(2\varphi) d\varphi \right) = 2R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(4\varphi)}{2} d\varphi = \\
 &= R^2 \left[\varphi - \frac{\sin(4\varphi)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{R^2\pi}{2} = \frac{1}{2} T_{kör}.
 \end{aligned}$$

□

3.5.3. Az inga hossza

A Foucault-inga által kirajzolt rozetta persze nem az itt látható szabályos görbe volt. A Föld lassú forgása miatt a szögeltérés igen kicsi, így a görbe „levelei” nagyon sűrűn helyezkednek el. Honnan kellett volna lelógatnia Foucaultnak az ingát, hogy a fent leírt görbéhez teljesen hasonlót kapjon? Tegyük fel, hogy az inga mozgására vonatkozó törvényszerűségek igazak bármilyen magasságban. A görbe egyenletéből látszik, hogy a lengés körfrekvenciája $\omega = 2$. Ez azt jelenti, hogy amíg a Föld egyszer körbefordul, azaz egy nap alatt, az ingának két teljes lengést kell megtennie, azaz kétszer kell visszatérnie eredeti helyzetébe. A periódusidő, azaz két azonos állapot között eltelt idő csak a hosszától függ.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

ahol $g \approx 10$, a periódusidő esetünkben $T = \text{fél nap} = 43200$ s. Behelyettesítve:

$$l = 10 \frac{43200^2}{4\pi^2} = 472724,114 \text{ km.}$$

Ha tehát Foucault módszerével nem a Föld forgására keresett volna bizonyítékot, hanem szép rozettát szeretett volna rajzolni, akkor ehhez a Holdig kellett volna utaznia, sőt még tovább. (A Hold távolsága a Földtől 384400 km.)

4. Irodalomjegyzék

Bronstejn, Szemengyajev, Musiol, Mühling: Matematikai kézikönyv, Typo-
tex, Budapest, 2006

Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1970

Kurusa Árpád: Kötélgörbe, avagy miért hasonlítanak egymásra a kupolák?,
Polygon, Szeged, 2009

Pelikán József: Klasszikus algebrai görbék, Új matematikai mozaik, Typo-
tex, Budapest, 2002

Ribnyikov, K.A.: A matematika története, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974

Sain Márton: Nincs királyi út!, Gondolat, Budapest 1986

Waerden, Bartel Leander van der: Egy tudomány ébredése, Gondolat, Buda-
pest, 1977