EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Bicentrikus sokszögek

Szakdolgozat

Salzmann Orsolya

Matematika Bsc, Tanári szakirány

Témavezető: **Kiss György**, egyetemi docens

Geometria Tanszék

BUDAPEST

2015

Tartalom

1. Bevezetés 3
2. Hatvány, hatványvonal, hatványpont 4
3. Körsorok 7
Alapvető tételek 7
Körsorok analitikus bevezetése 8
Körsor és hatványvonal 9
Poncelet- tétele [2] 12
Brianchon-tétele [2] 13
4. Háromszögek, mint bicentrikus sokszögek 17
Euler- tétele 17
5. Bicentrikus négyszögek 22
Definíciók 22
Bevezető feladatok 22
Tétel a bicentrikus négyszögekre 26
6. Alkalmazásai, használata 33
Brahmagupta-képlet 33
7. További érdekességek bicentrikus sokszögekről 35
8. Összefoglalás 36
Köszönetnyilvánítás 37
Irodalomjegyzék 38

1. Bevezetés

A dolgozatom bicentrikus sokszögekkel foglalkozik, ezen belül is a háromszögekre és a bicentrikus négyszögekre fordít külön figyelmet. A beírható kör sugara, a körülírható kör sugara és a két kör középpontjának távolságából adódódó összefüggés problémáját járom körbe és mutatok rá többféle bizonyítást.

Először a pont körre vonatkozó hatványának fogalmát elevenítjük fel és ezzel kapcsolatosan néhány tételt és azok bizonyítását nézzük meg, majd a körsor fogalmát vezetjük be. Megismerkedünk az elliptikus, a parabolikus és a hiperbolikus körsorokkal, valamint a körsorok főbb tulajdonságaival, többek között a hatványvonal és a körsor kapcsolatával is. Ezek után Poncélet és Brianchon tételeit bizonyítjuk, illetve a továbbiakban hivatkozunk is rájuk. A háromszögekkel, mint bicentrikus sokszögekkel, kapcsolatban Euler- tételét vizsgáljuk és bizonyítjuk több módon is. A későbbiekben a bicentrikus négyszögekkel ismerkedünk meg, érintőnégyszögekre és húrnégyszögekre vonatkozó összefüggéseket bizonyítunk, majd felírjuk Nicholas *Fuss* nevéhez köthető bicentrikus négyszögekre vonatkozó egyenletet, amire két bizonyítást is adunk. Ezek után érdekességképpen Brahmagupta-képletének segítségével izgalmas formulát adunk a bicentrikus négyszögek területének kiszámításához. A dolgozat végén Fuss egyenleteit vizsgáljuk egészen a nyolcszögekig, immár bizonyítás nélkül.

Személy szerint hozzám mindig is a geometria állt a legközelebb a matematika sokszínű és szerteágazó területei közül, és bár nem saját ötlet alapján választottam ezt a témát, utólag nagyon örülök neki, a magaménak érzem, meglepően sok örömömet leltem a dolgozat megírásában. Sok gyakorlati hasznát látom a geometriának illetve a sokszögeknek, jól átláthatónak, könnyen taníthatónak és világosnak találom a matematika ezen ágát. Izgalmas összefüggésekkel és elegáns bizonyításokkal ismerkedhettem meg a dolgozatom megírása közben, melyekre remélhetőleg még sokáig emlékezni fogok.

2. Hatvány, hatványvonal, hatványpont

Definíció: Adott egy O középpontú, r sugarú kör, ekkor a P pont hatványának nevezzük az OP^2-r^2 értéket. Ez a definíció magában foglalja, hogy a hatvány pozitív, ha a P a körön kívül van és negatív, ha P a körön belül.

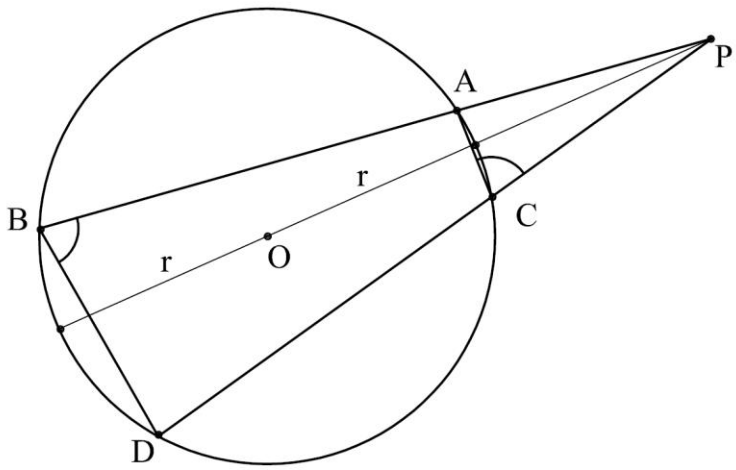
Feladat.1.1: Találjuk meg azokat a pontokat egy adott körhöz, melyeknek ugyanaz a hatványa.

Megoldás: Egyenlő hatványú pontok egy adott k körhöz egy k-val koncentrikus kört alkotnak.

Lemma: Legyen P rögzített pont a síkon. Vegyünk egy tetszőleges P-n átmenő, k kört X-ben és Y-ban metsző e egyenes. Ekkor a $PX \times PY$ szorzat nem függ az egyenestől és egyenlő a P körre vonatkozó hatványával.

Bizonyítás.: Tegyük fel, hogy van két egyenes, melyek átmennek P-n, az egyik a kört A és B pontban metszi, a másik C és D pontban. Ekkor belátjuk, hogy

$$PA \times PB = PD \times PC.$$



1. ábra

Ez azért van, mert *PAC* háromszög és *PDB* háromszög hasonló, hiszen a szögeik megegyeznek, így

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB},$$

vagyis $PA \times PB = PC \times PD$.

Húzzunk egy egyenest P-ből, k középpontján keresztül. Ekkor P távolsága a metszéspontokkal az $(OP + r) \times (OP - r)$ szorzatot adja, mely nem más, mint

$$OP^2 - r^2.$$

Ebből látszik, hogy ez a szorzat egyenlő a *P* hatványának abszolút értékével. Amennyiben *P* belső pont a hatvány negatív lesz, hiszen $OP < r$.

Tétel*:* Külső pont hatványa egyenlő a pontból a körhöz húzott érintő négyzetével.

Bizonyítás: Vegyük az előbb vizsgált *k* kört és *P* pontot. Húzzunk szelőt *P* pontból *O* középponton keresztül és érintőt *P* pontból a *k* körhöz. Kössük össze az érintési pontot az *O* középponttal. Ekkor nyilván egy derékszögű háromszöget kapunk, melyre felírva a Pithagorasz tételt meg is kapjuk a megoldást, hiszen

$$e^2 = OP^2 - r^2,$$

ami nem más, mint *P* hatványa *k* körre nézve.

***Feladat.1.2*:** Tegyük fel, hogy *AB* és *CD* egyenesek metszik egymást *P* pontban és $PA \times PB = PC \times PD$. Bizonyítsuk, hogy *ABCD* húrnégyszög.

***Megoldás*:** $PA \times PB = PC \times PD$ ez igaz, tehát

$$PA/PD = PC/PB.$$

Mivel a *PBD* és *PCA* háromszögeknek van közös szögük és megfelelő oldalaik aránya egyenlő, ezért *PBD* és *PCA* háromszögek hasonlóak, vagyis *PBD* és *PCA* szögek egyelőek.

Ekkor $DCA\measuredangle$ = 180°-$PCA\measuredangle$, vagyis *DCA* +*PBD*= 180°. Ez pedig azt jelenti, hogy *ABCD* húrnégyszög.

Tétel: Azon pontok halmaza, melyek hatványa két nem koncentrikus körre vonatkozóan egyenlő, egy egyenest alkotnak, ezt nevezzük a két kör hatványvonalának.

Bizonyítás: Tegyük fel tehát, hogy a két kör nem koncentrikus. Legyen ekkor $K_1=0$ és $K_2= O$ a két kör normálegyenlete. A hatványvonal azon P pontok mértani helye a síkban, melyek hatványa egyenlő a két körre nézve, azaz melyre igaz, hogy

$$K_1(P) = K_2(P),$$

azaz a normálegyenletekbe P pontot behelyettesítve egyenlő értékeket kapunk. Más szóval, olyan P pontok, melynek koordinátái kielégítik a

$$K_1 - K_2 = 0 \text{ egyenletet.}$$

Ez lesz a hatványvonal egyenlete, amiről be kell látnunk, hogy valóban egy egyenes. A körök normálegyenletében tudjuk, hogy x és y együtthatóinak értéke mindig 1, vagyis kiesnek, így a megoldás egy lineáris egyenlet vagy konstans. Konstans azonban nem lehet, mert akkor a körök koncentrikusak lennének, hiszen ekkor $K_1 - K_2 = c$ vagyis

$$K_1 = K_2 + c.$$

Tehát a halmaz mindenképpen egyenes.

Megjegyzés: Ha két kör koncentrikus, akkor nincs hatványvonaluk, mert bármely P pontnak a hatványa a két koncentrikus körre különböző értéket ad. Vegyük r_1 és r_2 koncentrikus körök sugarait és P pontot, melynek távolsága a közös középponttól legyen d. P hatványa ennek megfelelően $d^2 - r_1$ és $d^2 - r_2$, amik nyilván nem egyelőek r_1 és r_2 különbözősége miatt.

3. Körsorok

Alapvető tételek

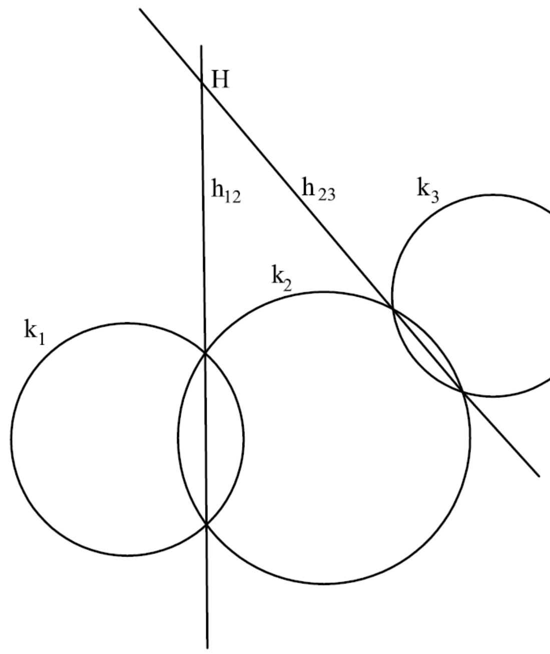
A következő tételek részletes bizonyítása Hajós György, Bevezetés a geometriába című könyvében található. [1]

Tétel: Ha két körnek létezik közös pontja, akkor az rajta van a hatványvonalon. [1]

Tétel: Két kör hatványvonala merőleges a két kör centrális egyenesére. [1]

Tétel: Ha három kör között nincs két koncentrikus, akkor hatványvonalaik egy sugársorhoz tartoznak. [1]

Tétel: Ha három kör középpontjai nincsenek egy egyenesen, akkor egyetlenegy olyan pont van, amelynek mind a három körre vonatkozó hatványa egyenlő. Ezt nevezzük a három kör hatványpontjának. [1]



2. ábra

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy van 3 kör. Ha a körök középpontjai nem kollineárisak, akkor két páronkénti hatványvonal metszi egymást. A metszéspont hatványa mindhárom körre ugyanannyi, tehát a harmadik hatványvonal is átmegy a metszésponton.

Körsorok analitikus bevezetése

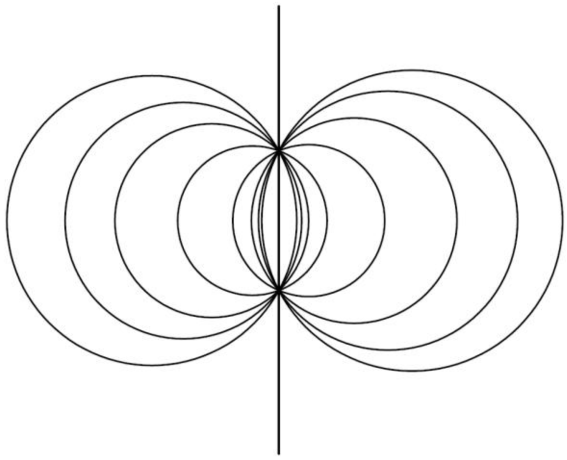
Definíció.: Legyen $K_1=0$ és $K_2=0$ egy-egy kör másodfokú egyenlete vagy egy egyenes lineáris egyenlete. Körsoroknak nevezzük azokat az alakzatokat, melyek valamely $\mu_1 K_1+\mu_2 K_2=0$ alakba írhatóak.

Tétel: Ha két körsor nem azonos, akkor legfeljebb egy közös elemük van. [1]

Tétel: A sík összes pontja eleme a körsor egy tagjának.

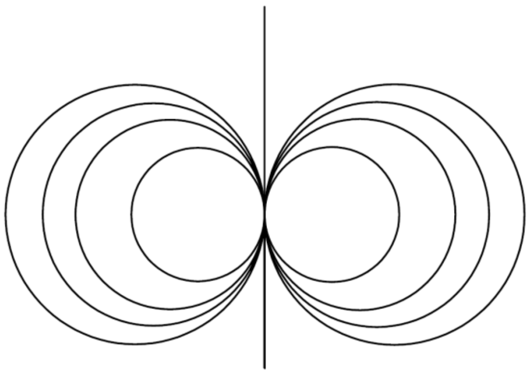
Tétel: Egy körsor két elemének közös tagját a körsor valamennyi eleme tartalmazza, ez a körsor alappontja. [1]

Definíció: Hiperbolikus körsornak nevezzük az olyan körsort, melynek minden köre átmegy két adott ponton és az egyenese pedig a két pontot összekötő egyenes.



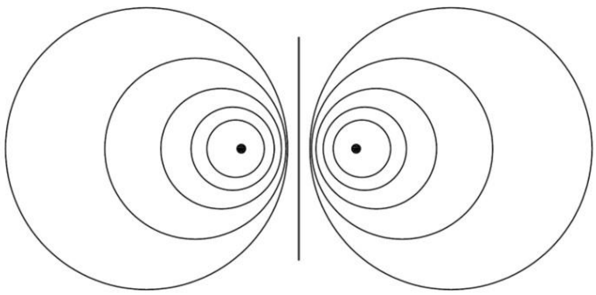
3. ábra

Definíció: Parabolikus körsornak nevezzük az olyan körsort, melynek minden köre érint egy egyenest a megadott pontjában. Ekkor az egyenes és a pont is tagja a körsornak.



4. ábra

Definíció: Elliptikus körsornak nevezzük az olyan körsorokat, melyben az elemeknek nincsen közös pontjuk.



5. ábra

Körsor és hatványvonal

Tétel: Ha egy körsornak van két olyan eleme, melyek körök és van hatványvonaluk, akkor ez a hatványvonal is eleme a körsornak. Ha a körsorban nincs egyenes, akkor létezik benne centrum, ami minden a körsorba tartozó kör középpontja.

Tétel: Ha egy körsor elemei között van egyenes, akkor az az egyenes a körsor bármely két körének hatványvonala. [1]

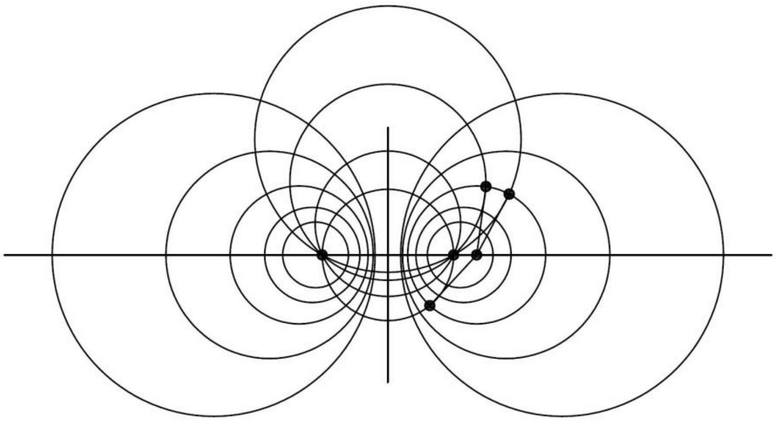
Tétel: Ha adott köröknek egy olyan halmaza, hogy bármely kettőnek ugyanaz a hatványvonala, akkor a körök a hatványvonallal együtt egy körsor elemei.

Tétel: Ha egy körsornak van hatványvonala, akkor a körsor köreinek középpontjai egy, a hatványvonalra merőleges egyenesre esnek. Ez a körsor centrálisa. [1]

Apollóniosz- körök: Azon pontok mértani helye a síkban, melyeknek két adott ponttól mért távolságaik aránya λ>0. Tehát P, Q pontokhoz és λ>0 számhoz tartozó Apollóniosz kör azon X pontokból áll, melyre $\frac{XP}{XQ} = \lambda$.

Tétel: Két ponthoz tartozó Apollóniosz-körök, a pontokkal és köztük húzott szakasz felezőmerőlegesével, elliptikus körsort alkotnak.

Állítás: A hatványvonal bármely pontjából a körsor elemeihez húzott érintők egyelőek.



6. ábra

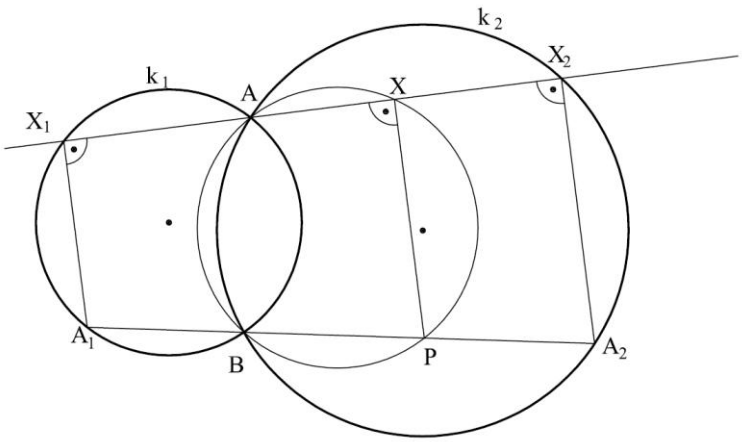
Bizonyítás: Ennek oka, hogy a hatványvonal bármely pontja köré írt kör, mely metszi az összes körsorbeli kört, épp érintő hosszúságú sugárral rendelkezik és merőlegesen metszi a körsor köreit. Az összes ilyen kör egy másik körsorból való és közülük bármely kettő meghatározza az eredeti körsort.

Ebből következik, hogy tetszőleges kör középpontú inverzió egyik körsort a másikba viszi, továbbá a körsor, amelyik tartalmazza az inverzió alapkörét önmagába megy át. Az elliptikus körsor pontkörei egymásba mennek át, ha alapkörnek a körsor egy tagját választjuk. Vegyük észre, hogy ha a pontköröket választjuk az inverzió középpontjának, akkor a körsorra merőleges körsorból egyenesek lesznek. Sőt az eredeti körsorból koncentrikus körök lesznek.

Feladat.2.1: Bizonyítsuk az utolsó állítást három dimenzióban.

Megoldás**:** Nézzük a gömbök egy metsző családját, melyek az eredeti síkunkat a körsor tagjai mentén metszik. Ezen gömbök szintén gömbsort alkotnak. Inverzió alkalmazása után ezek a gömbök egy kört metsző gömbökké alakulnak. Ezért azok metszeni fogják az eredeti síkot egy körsor mentén.

Tétel: Adott két kör, k_1 és k_2. Azon pontok, melyeknek a körökre vonatkozó hatványainak aránya állandó, egy olyan kört alkotnak, mely beletartozik a k_1 és k_2 körök által meghatározott körsorba.



7. ábra

Bizonyítás.: Tegyük fel, hogy két kör metszi egymást A és B pontokban. Nevezzük O_1-nek, O_2-nek a középpontjaikat és r_1-nek illetve r_2-nek a sugaraikat. Legyen A_1 és A_2 az A pontnak O_1 –re, illetve O_2-re vett tükörképe. Ekkor $A_2A_1 \perp AB$, hiszen AA_1 és AA_2 is átmérő, így Thalész tétele miatt $A_1BA\sphericalangle = A_2BA\sphericalangle = 90°$. Ebből az is látszik, hogy A_1, B, A_2 egy egyenesen fekszenek. Lássuk be, hogy azon X pontok, melynek hatványaránya h, egy körön vannak. XA egyenesnek a k_1 és k_2 körökkel való metszéspontjai legyenek X_1 illetve X_2. Ekkor $XA \times XX_1$az egyik hatvány és $XA \times XX_2$ a másik, ezért

$$h=XX_1/XX_2.$$

Mivel AA_1 és AA_2 átmérők, az AX_1A_1 és AX_2A_2 szögek derékszögek. Ezért X_1 és X_2 az A_1 és A_2 merőleges vetületei az AX egyenesen. Legyen P az a pont az A_1A_2 szakaszon, melyre igaz, hogy

$$PA_1/PA_2=h.$$

Ekkor X a P-nek vetülete az AX egyenesre, ezért a párhuzamos szelők tétele miatt az AP átmérőjű körön fekszik. Visszafelé gondolkodva könnyű rájönni, hogy bármely ezen körön fekvő pont hatványainak aránya h.

Ha a két kör nem metszi egymást, akkor ismét átmegyünk 3 dimenzióba. Tegyük fel, hogy van két metsző gömb, amik az eredeti síkot a k_1 és k_2 körökben metszik. A fenti gondolatmenetet használva igazoljuk, hogy azon pontok halmaza, melyek a gömbökre vonatkozó hatványpontjainak aránya állandó, egy olyan gömböt alkotnak, mely benne van a metsző gömbök által meghatározott gömbsorban, sőt a gömb tartalmazza azt a kört, mely a metszésköre a két gömbnek. Ennek a kapott gömbnek a síkkal való metszete eleme a k_1 és k_2 körök által meghatározott körsornak.

Poncelet- tétele [2]

Tétel: Legyenek k_i olyan körök, melyek ugyanahhoz a körsorhoz tartoznak és A_0 a k_0 egy pontja. k_1 érintője A_0-ból metszi k_0 –t A_1-ben, k_2 érintője A_1-ből metszi k_1-et A_2-ben, stb, a k_{i+1} érintője A_i-ből metszi k_i-t az A_{i+1}-en. Tegyük fel, hogy valamely n-re A_0 és A_n megegyeznek. Ekkor bármely B_0 pontra a k_0 körön az ugyanígy megkonstruált B_n megegyezik B_0-al.

(Nem mindig lehet ilyen módon B_n-et konstruálni.)

Bizonyítás.: Elég megmutatni, hogy A_iB_i érintője egy meghatározott körnek a körsorból. Sőt ha $A_0=A_n$, akkor az A_0-on keresztülmenő érintő egybeesik A_n-en keresztülmenő érintővel. (Irányítás miatt.) Ezért a k_0 –al közös részük is megegyezik, de ezek B_0 és B_n.

Tegyük fel, hogy A_0A_1 és B_0 B_1 egyenesek érintik k_1-et X és Y pontokban. Legyen Z a két egyenes metszéspontja. XYZ háromszög egyenlőszárú, mert ZX és ZY érintői k_1-nek és átmennek Z-n. Emiatt az X és Y-nál lévő szögek egyelőek. Sőt $B_1A_1A_0$ és $B_1B_0A_0$ szögek is egyelőek. Így XQA_1 és YPB_0 háromszögek hasonlóak, ahol P és Q az XY egyenes és az A_1B_1 illetve A_0B_0 egyenesek metszéspontjai. Mivel PQA_1 és QPB_0 szögek egyelőek, ezért létezik egy olyan k' kör, amely A_0B_0-t és A_1B_1-et is érinti P-ben illetve Q-ban.

Erről a körről akarjuk megmutatni, hogy a körsorhoz tartozik. Ehhez azt kell belátni, hogy k_0 eleme a k_1 és k' által meghatározott körsornak, vagyis hogy az A_0, A_1, B_0 és B_1 pontok hatványának aránya a két körre nézve egyenlő. (Egyes pontok a két körre vett hatványaránya egyenlő. Itt az előző tételt használjuk fel.) Ez nyilván így van: ($A_0X^2/A_0P^2= A_1X^2/A_1Q^2= B_0Y^2/B_1P^2 = B_1Y^2/B_1Q^2$.)

$$\frac{A_0X^2}{A_0P^2}=\frac{A_1X^2}{A_1Q^2}=\frac{B_0Y^2}{B_1P^2}=\frac{B_1Y^2}{B_1Q^2}$$

Az A_0XP és B_1YQ háromszögek hasonlósága miatt az

$$A_0X^2/A_0P^2 = B_1Y^2/B_1Q^2.$$

Hasonlóan a B_0YQ és A_1XQ háromszögek hasonlósága miatt az

$$A_1X^2/A_1Q^2 = B_0Y^2/B_0P^2.$$

Ebből levezethetjük, *hogy*

$$A_0X/A_0P = \sin A_0PX\measuredangle / \sin A_0XP\measuredangle = \sin B_0PY\measuredangle / \sin B_0YP\measuredangle = B_0Y/B_0P.$$

Hasonlóan A_iB_i és $A_{i+1}B_{i+1}$ érintői ugyanannak a körnek a körsorból. Ez nyilván csak egy körre igaz, csak egy ilyen tulajdonágú kör létezik. Mivel minden i-re teljesülnie kell, nyilván a keresett kör a k''.

(Ha egy pont hatványa egy körre nézve ugyanannyi, mint egy körsor két tagjára nézve, akkor az a kör is a körsorhoz tartozik.)

A Poncelet tétel azt mutatja, hogy ha van egy sokszög, ami köré és belé is írható kör, akkor a sokszög megforgatható a körök között. Továbbá minden átlója a sokszögnek, érintője lesz egy olyan körnek, mely benne van a beírható és a köré írható körök által meghatározott körsorban.

Definíció: Ha egy sokszög érintősokszög és húrsokszög is, akkor röviden bicentrikus sokszögnek nevezzük.

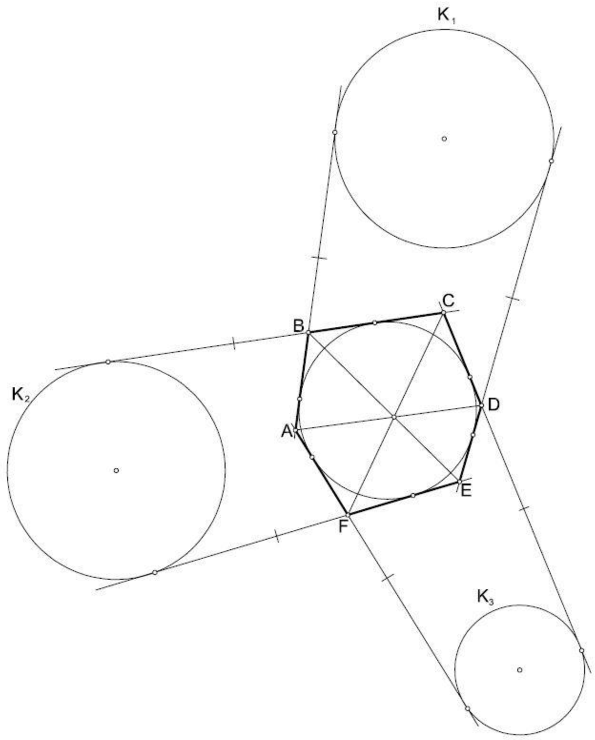
A tétel tehát bicentrikus sokszögekre vonatkozik, mint a háromszögek, hiszen bármely háromszögnek van beírható és köré írható köre is. Négyszögek közül a deltoid lehet ilyen. Speciális esetben a sokszög beírható és körülírható körének középpontja egybe esik. Ilyen például a négyzet és minden szabályos n-szög.

Brianchon-tétele [2]

Tétel: Legyenek l_i olyan egyenesek (i=1,2,3,4,5,6), melyek érintik ugyanazt a kúpszeletet és legyen $A_{i,j}$ az l_i és l_j metszéspontja. Ekkor $A_{12}A_{45}$; $A_{23}A_{56}$ és $A_{34}A_{61}$ egyenesek egy pontban metszik egymást.

Elfajuló esetben lehetséges, hogy két érintő ugyanabban a pontban érinti a kúpszeletet, ekkor az érintési pontra metszéspontként tekintünk és a tétel ugyanúgy érvényes lesz.

Bizonyítás.: Projektív geometriai transzformációt használva csináljunk a kúpszeletből kört, így kapunk egy kör köré írt hatszöget, melynek főátlói a tételben szereplő egyenesek. Be kell látnunk, hogy az *ABCDEF* hatszögben az *AD, BE* és *CF* átlók egy pontban metszik egymást.



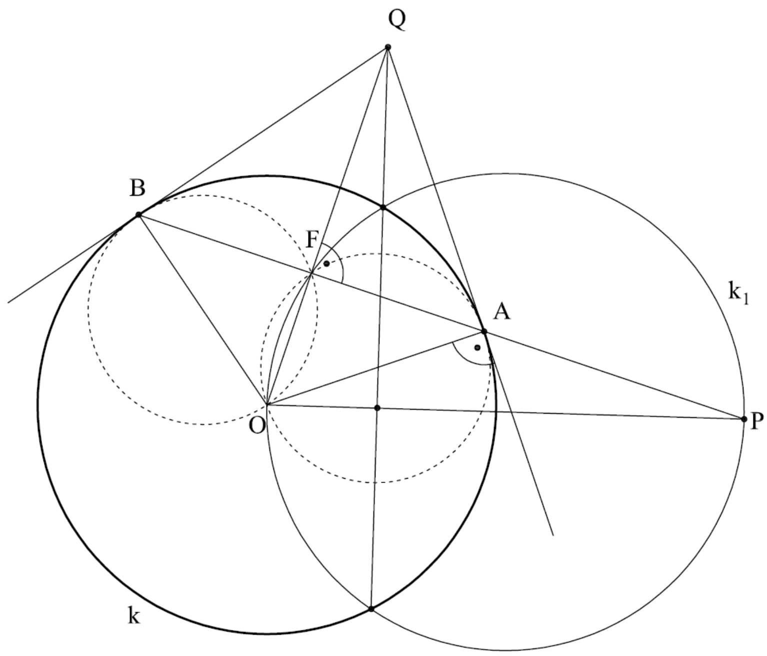
Nézzük azokat a köröket (k_1, k_2, k_3), melyek érintik *az AB-DE, BC-FE* és *CD-FA* egyenes párokat, mégpedig úgy, hogy az érintési pontok *a* távolságra legyenek a hatszög és a kör megfelelő érintési pontjaitól. ($A_1 \ldots F_1$). Ekkor *A* hatványa k_1 és k_3 körökre nézve egyenlő

$$-(AA_1+a)^2.$$

Ebből látszik, hogy a két kör hatványvonalán van *A*. Ez ugyanúgy igaz *D*-re is. Így *AD* a k_1 és k_3 hatványvonala. Hasonlóan belátható, hogy *BE* a k_1 és k_2 hatványvonala és *CF* *a* k_2 és k_3 körök hatványvonala. Tudjuk, hogy 3 nem koncentrikus és nem kollineáris középpontú kör hatványvonalai egy ponton mennek át, ami a 3 kör hatványpontja.

***Feladat:2.2*:** Adott a síkban egy k kör, melynek középpontja O, sugara r. Tetszőleges P pontból húzzunk szelőket a körhöz, majd érintőket oda, ahol a szelők metszik a kört. Keressük meg, hogy hol lesz a szelőnként behúzott érintők metszéspontjának mértani helye!

***Megoldás*:** Ha P pont a k körön van, akkor a keresett mértani hely a P-ben húzott érintő egyenese lesz. Ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk. Legyenek A és B pontok a P-n át húzott szelő k körrel vett metszéspontjai. Húzzunk érintőket A-n és B-n keresztül, legyen Q ezeknek a metszéspontja.



8. ábra

A megoldáshoz használjunk inverziót, melynek alapköre legyen k. Ekkor az A és B pontokba húzott érintőkből az inverzió után OA és OB átmérőjű körök lesznek. Ezek metszéspontja AB felezőpontjában lesz a Thalész tétel miatt, nevezzük ezt F-nek. Ekkor felírhatjuk az OAQ derékszögű háromszögre a befogótételt, vagyis

$$OQ \times OF = OA^2 = r^2.$$

Ez azt jelenti, hogy Q képe az inverzió után F lesz.

Legyen k_1 az OP szakasz Thalész köre. $FO \perp FP$, ezért $F \in k_1$. k_1 továbbá átmegy O-n, vagyis az inverzió középpontján, így belőle egy OP-re merőleges egyenes lesz a transzformáció után.

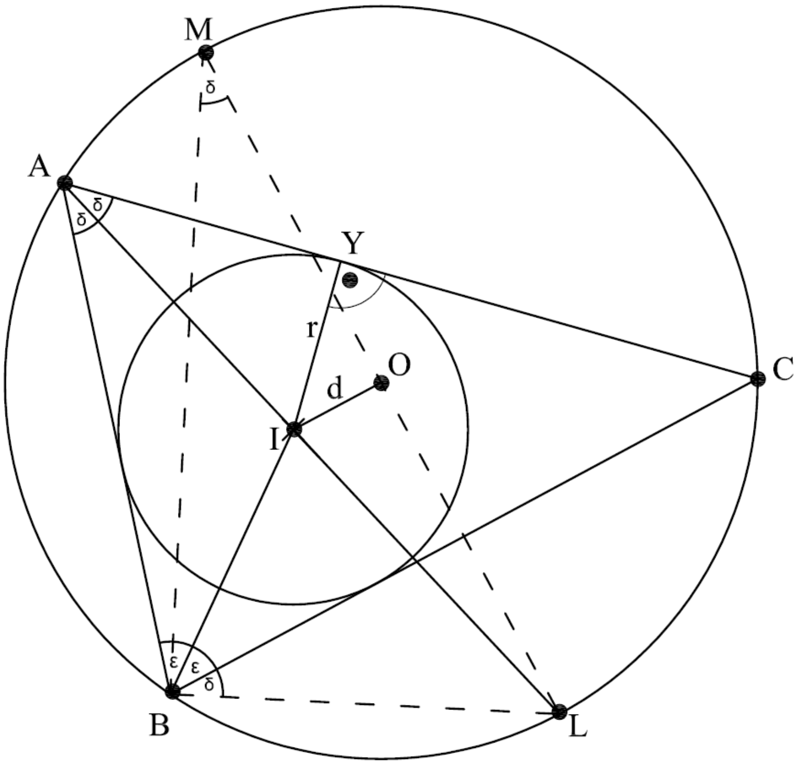
Ha P-t a k körön kívül vettük fel, akkor a megoldás a k és k_1 körök közös húregyenesének k körön kívüli része, ha viszont P a k körön belül van, akkor P képében az OP egyenesre állított merőleges egyenes lesz a megoldás.

4. Háromszögek, mint bicentrikus sokszögek

Euler- tétele

Tétel: Adott egy *ABC* háromszög, melynek köré írható körének középpontja *O*, sugara *R*, beírható körének középpontja *I*, sugara pedig *r*. Ha az *OI* szakasz hossza *d*, akkor

$$d^2 = R^2 - 2rR.$$



9**. ábra**

***Bizonyítás* 1:** Az ábrán látható *ABC* háromszög *A* csúcsánál lévő szöget elfelezzük és az egyenest meghosszabbítjuk, hogy messe a körül írt kört. A metszéspont legyen *L*. Ekkor tudjuk, hogy *L* az *A* csúcsot nem tartalmazó *BC* körív felezőpontja. *M* legyen az a pont, melyre *LM* a *BC* oldalra merőleges átmérő. Vezessük be a $\delta=\frac{1}{2}\alpha$ és $\varepsilon=\frac{1}{2}\beta$ szögeket, ahol α és β az *ABC* háromszögben az *A* illetve *B* csúcsnál lévő szögek.

Ekkor az ábráról leolvashatjuk, hogy $BML\sphericalangle = BAL\sphericalangle = \delta$, mivel ugyanahhoz az ívhosszhoz tartoznak és ugyanezért $LBC\sphericalangle = LAC\sphericalangle = \delta$.

Azt is látjuk, hogy az *ABI* háromszög *I*-nél fekvő külső szöge *BIL* ∡ =ε+δ = LBI ∡, ezért az LBI háromszög egyenlőszárú, vagyis LI=LB. Írjuk fel *I* hatványát a körülírt körre vonatkozóan.

$$R^2 - d^2 = LI \times IA = LB \times IA = LM \times \frac{LB/LM}{IY/IA} \times IY = LM \frac{sin\delta}{sin\delta} IY$$

A $\frac{sin\delta}{sin\delta}$ az LBM és *YIA* derékszögű háromszögekre felírt szögfüggvényből következik. Ezek után könnyen leolvasható, hogy

$$\text{LM} \times IY = 2R \times r.$$

Innen átrendezve megkapjuk a bizonyítandó egyenletet:

$$d^2 = R^2 - 2Rr\ .$$

Ennek egy algebrai átalakítással kapott alakja az

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d}$$

***Bizonyítás* 2:** A bizonyításhoz használjunk vektorokat. [3] Rajzoljuk be az ABC háromszög helyvektorait, mégpedig úgy, hogy az origó a háromszög körülírt körének középpontja legyen, vagyis *O.* Ekkor nyilván $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = R$. Továbbá tudjuk, hogy $|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}| = a,$ vagyis $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})^2 = a^2$. A zárójelet felbontva $b^2 + c^2 - 2\boldsymbol{bc} = 2R - 2\boldsymbol{bc}$ eredmény kapjuk, amiből rendezéssel $2\boldsymbol{bc} = 2R^2 - a^2$ adódik. Ugyanígy igaz lesz az is, hogy

$$2\boldsymbol{ab} = 2R^2 - c^2 \text{ és } 2\boldsymbol{ac} = 2R^2 - b^2.$$

Tudjuk továbbá, hogy bármely háromszög körülírt körének középpontjának helyvektorát az alábbi formula adja meg [3]

$$k = \frac{a\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{b} + c\boldsymbol{c}}{a + b + c}$$

Mivel *O*-t választottuk origónak, ezért

$$d^2 = \boldsymbol{k}^2 = \frac{1}{4s^2}(a\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{b} + c\boldsymbol{c})^2 =$$

$$= \frac{1}{4s^2}[R^2(a^2 + b^2 + c^2) + 2ab\boldsymbol{ab} + 2bc\boldsymbol{bc} + 2ca\boldsymbol{ca}] =$$

$$= \frac{1}{4s^2}\left[R^2(a^2 + b^2 + c^2) + ab(2R^2 - c^2) + bc(2R^2 - a^2) + ca(2R^2 - b^2)\right] =$$

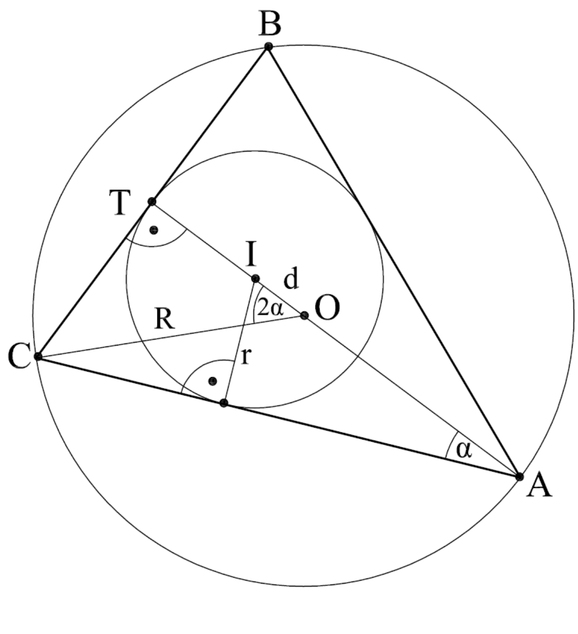
$$= \frac{1}{4s^2}\left[R^2(a + b + c)^2 - abc(a + b + c)\right] = R^2 - \frac{abc}{2s}.$$

Tudjuk, hogy *abc=4RT,* ahol *T* a háromszög területe és hogy *T=sr,* ahol *s* a félkerület és a szokásos jelölések érvényesek. Így *abc=4sRr*, amit behelyettesítve az előző egyenletbe megkapjuk, hogy

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Bizonyítás 3: Vegyük a tételbeli *ABC* háromszög körülírható és beírható körét. Kössük össze az *O* és *I* középpontokat, majd nevezzük A' –nek az összekötő egyenes és a körülírható kör egyik metszéspontját. Húzzuk be A'-ből mindkét érintőt a beírható körhöz. Legyenek a metszéspontok B' és C'. Tekintsük az így kapott $A'B'C'$ háromszöget az új *ABC* háromszögnek. Ezt megtehetjük, hiszen a Poncélet tételből tudjuk, hogy ha adott a körülírt és beírt kör, akkor a sokszöget tetszőleges pontból, érintők behúzásával újra megkaphatjuk. Ezzel a módszerrel azonban kétféle háromszöget kaphatunk.

Nézzük elsőnek azt, melyben az *A* csúcs, az *OI* szakasz és a körülírt kör *I*-től távolabbi metszéspontja.



10. ábra

Ekkor az ábrán látható derékszögű háromszögekből könnyen felírhatóak a következő összefüggések:

$$sin\alpha = \frac{r}{d+R}$$

$$cos2\alpha = \frac{d+r}{R}$$

Az ismert trigonometrikus azonosság miatt $cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$. Helyettesítsük be ebbe a fenti összefüggéseket, majd rendezzük az egyenletet.

$$\frac{d+r}{R} = 1 - \frac{2r^2}{(d+R)^2}$$

$$(d^2 + 2dR + R^2)(d+r) = R(d+R)^2 - 2r^2R$$

A zárójeleket felbontva, ügyes bővítéssel, majd $(\mathrm{d} + \mathrm{R} + \mathrm{r}) \neq 0$ $-$val osztva megkapjuk a kívánt végeredményt.

$$d^3 + 2d^2R + R^2d + d^2r + 2dRr + R^2r = Rd^2 + 2dR^2 + R^3 - 2r^2R$$

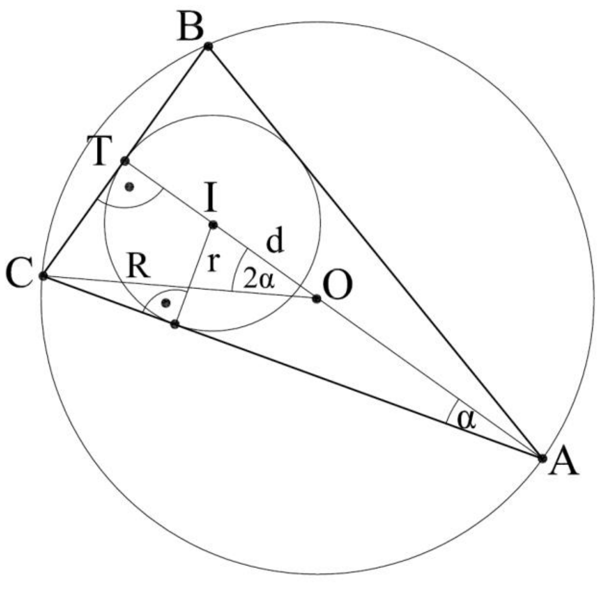
$$d^3 + d^2R + d^2r + 2dRr + 2R^2r - R^2r = dR^2 + R^3 - 2r^2R$$

$$d^3 + d^2R + d^2r = -2dRr - 2R^2r + R^2r + dR^2 + R^3 - 2r^2R$$

$$d^2(d+R+r) = R^2(d+R+r) - 2rR(d+R+r)$$

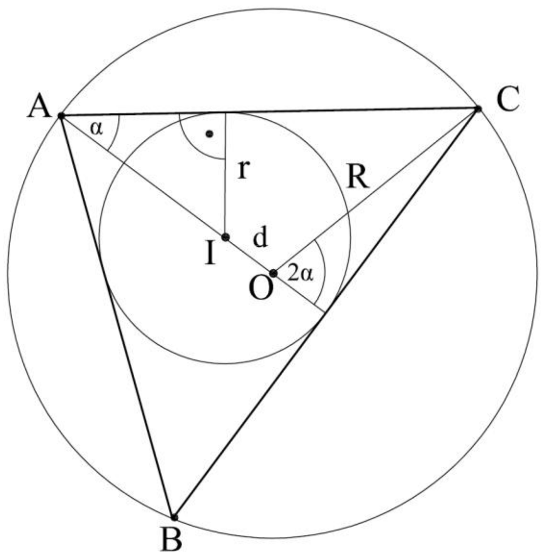
$$d^2 = R^2 - 2rR$$

Abban az esetben, ha az *O* a beírt körön kívül esne, a bizonyítás nyilvánvalóan ugyanígy működik, ahogyan a 12. ábra is mutatja.



11. ábra

A másik eset, amikor az *A* csúcsot az *OI* szakasz és a körülírt kör *I*-hez közelebbi metszéspontjának tekintem.



12. ábra

Ekkor az előzőhöz hasonló, mégis eltérő összefüggéseket írhatunk fel az ábra alapján.

$$sin\alpha = \frac{r}{R-d}$$

$$cos2\alpha = \frac{r-d}{R}$$

Ezután már pontosan ugyanazokat a lépéseket és azonosságokat hajtjuk végre, mint az első esetben, vagyis behelyettesítünk a $cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$ egyenletbe, rendezzük, felbontjuk a zárójelet és a korábbi praktikus bővítés $(2R^2r - R^2r = R^2r)$ és osztás után megkapjuk az eredményt.

$$(R^2 - 2dR + d^2)(r-d) = R(R-d)^2 - 2r^2R$$

$$2R^2r - R^2r - 2rdR + d^2R + d^2r - d^3 = R^3 - dR^2 - 2r^2R$$

$$d^2(R+r-d) = R^2(R+r-d) - 2rR(R+r-d)$$

Nyilván itt is oszthatunk $(\mathrm{R} + \mathrm{r} - \mathrm{d})$ −vel, hiszen $R > d$, vagyis $\neq 0$ −val osztunk, így kapjuk, hogy

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

5. Bicentrikus négyszögek

Definíciók

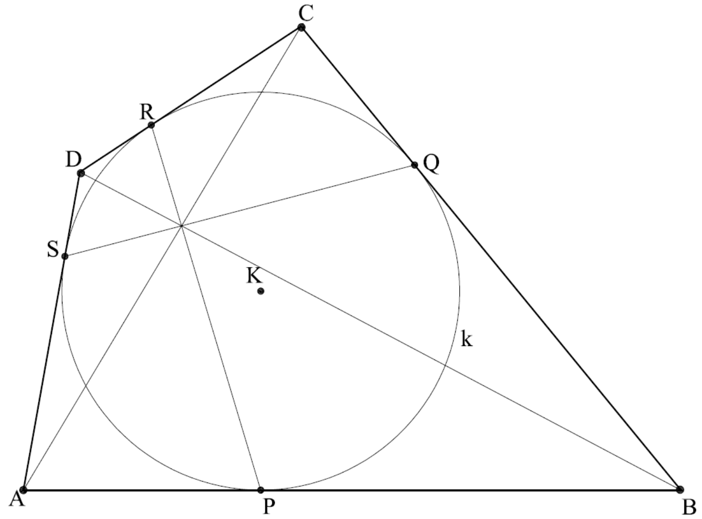
Definíció: Egy $A_1 \ldots A_n$ sokszöget húrsokszögnek nevezünk, ha létezik olyan kör, mely átmegy a sokszög minden csúcsán.

Definíció: Egy $A_1 \ldots A_n$ sokszöget érintősokszögnek nevezünk, ha létezik olyan k kör, melynek az A_1A_2, A_2A_3, $\ldots A_{n-1}A_n$ oldalak mindegyike érintő egyenesei.

A beírható kör sugarát r-rel, a köré írható kör sugarát R-rel jelöljük általában. A két kör középpontjának távolsága *d*. Korábban, a Poncelet- tételnél már találkoztunk bicentrikus sokszögekkel, bár akkor még nem így neveztük őket.

Bevezető feladatok

4.1.Feladat: Tetszőleges érintőnégyszögben az átlók metszéspontja és a szemközti érintési pontokat összekötő szakaszok metszéspontja egybeesik.

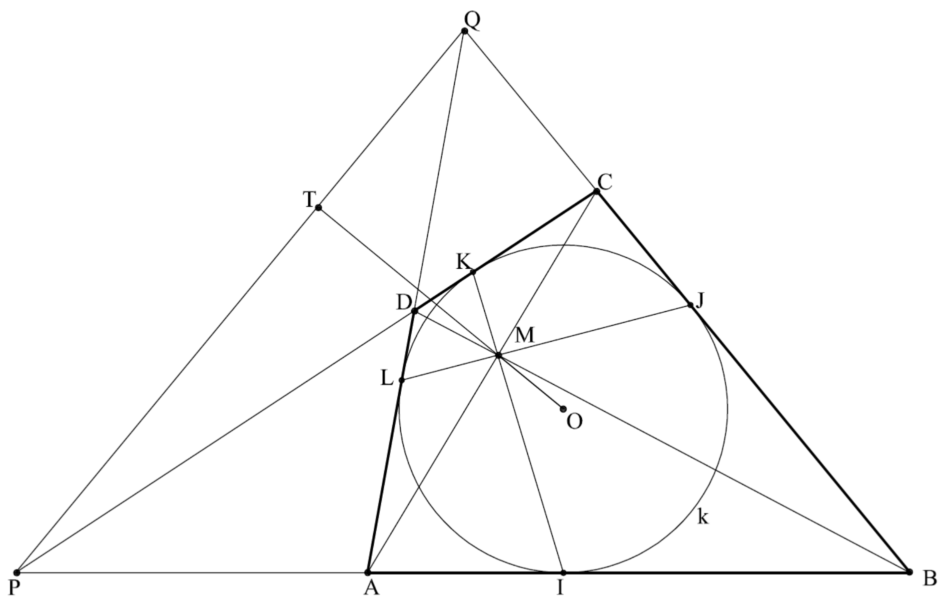


13. ábra

***Megoldás*:** A bizonyításhoz Brianchon tételét használhatjuk. A tétel szerint tetszőleges kúpszelet 6 érintője által meghatározott hatszögben, a hatszög átellenes csúcsait összekötve kapott egyenesek egy ponton mennek át.

Ebben az esetben a kúpszeletet legyen a k kör, hozzá a hat érintő pedig legyen az *AB, BQ, QC, CD, DS, SA*. A tétel miatt ekkor *AC* és *BD* metszéspontján átmegy *SQ* szakasz és ugyanígy *PR* szakasz is.

4.2 Feladat: Egy *ABCD* érintőnégyszög szemközti oldalegyeneseinek metszéspontja *P* és *Q*. Bizonyítsuk, hogy a négyszög beirt körének középpontja és az átlók metszéspontja által meghatározott egyenes merőleges a *PQ* egyenesre.



14**. ábra**

Megoldás: Legyen az *ABCD* érintőnégyszög beírható köre *k*, érintési pontjai pedig *I, J, K, L*, az átlók metszéspontja pedig *M.*

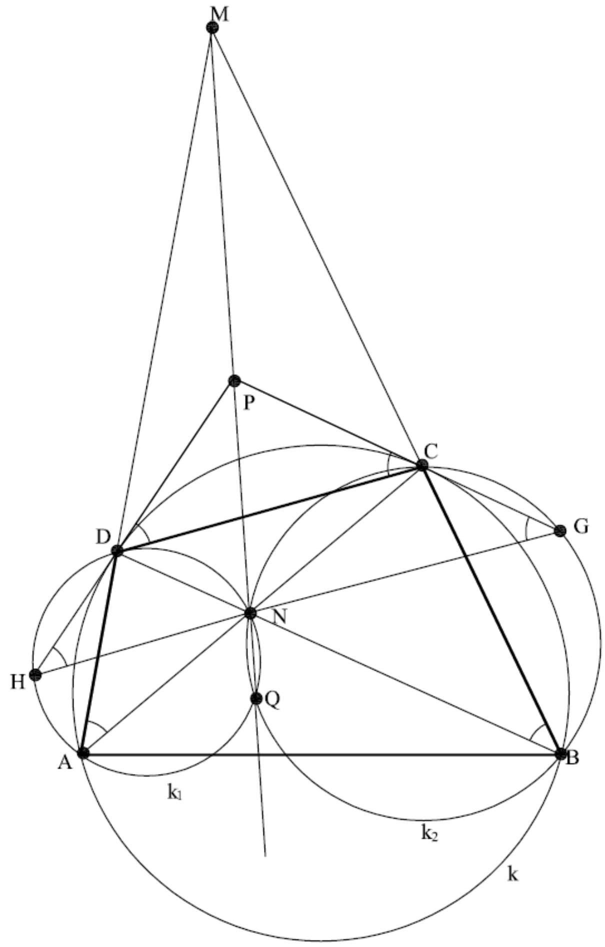
A *4.1. Feladatból* tudjuk, hogy az átlók metszéspontja egybeesik a szemközti érintési pontokat összekötő szakaszok metszéspontjával.

Tudjuk továbbá a *2.2. Feladatból*, hogy ha egy *O* középpontú körhöz *M*$\neq O$ ponton keresztül szelőket húzunk, majd ezeknek a körrel vett metszéspontjaikba érintőket húzunk, akkor a szelőnként vett két-két érintő metszéspontjai egy olyan egyenesre esnek, amely merőleges *OP*-re.

Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben, ha a *k* körbelsejében lévő *M* ponton átmenő *IK* húr két végpontjába húzott érintő metszéspontja az *P,* az *LJ* húr két végpontjába húzott érintők metszéspontja pedig az *Q,* akkor $PQ \perp OM$.

Megjegyzés: A *4.2. Feladatból* azt is látjuk, hogy *PQ* és *OM* egyenesek *T* metszéspontjára felírhatjuk az $OM \times OT = R^2$összefüggést, ahol *R* az *ABCD* érintőnégyszög beírt körének sugara.

4.3. Feladat: Adott egy *ABCD* húrnégyszög, melyben két szemközti oldalegyenesnek a metszéspontja *M*, az átlók metszéspontja pedig *N*. Bizonyítsuk, hogy a négyszög *k* körülirt köréhez, a *C* és *D* csúcsokba húzott érintők metszéspontja rajta van az *MN* egyenesen.



15. **ábra**

Megoldás**:** Rajzoljuk be a húrnégyszögbe az *ADN* és *BCN* háromszögeket és ezek körülírt köreit k_1-et és k_2-t. Ezen körök második metszéspontja legyen *Q*. A *k* körhöz húzzunk érintőket *C* és *D* pontokban, ezek metszéspontja legyen *P*, k_1 –el illetve k_2 –vel a második metszéspontjuk pedig *H* és *G*.

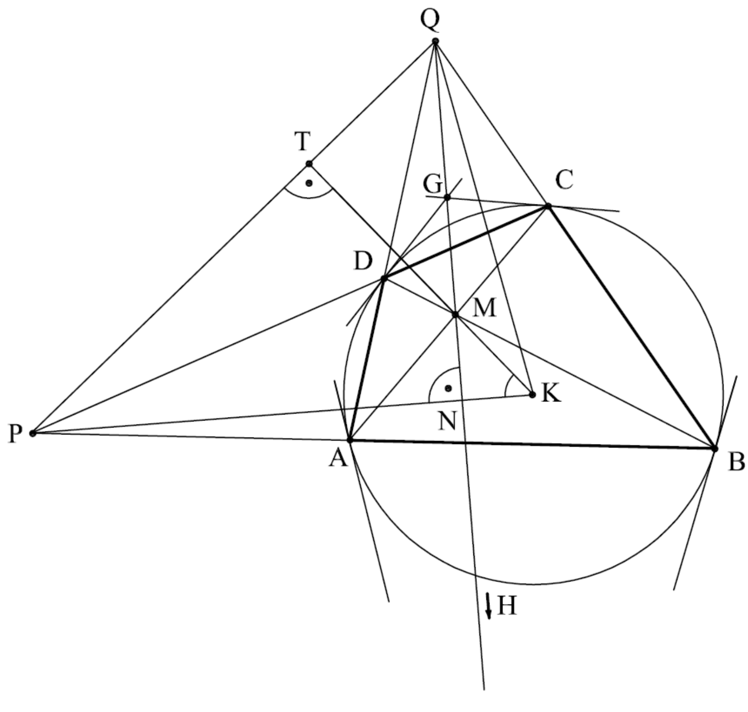
M pont rajta van k_1 és k_2 körök hatványvonalán, hiszen az *AD* közös húrja a *k* és k_1 köröknek, vagyis *M* rajta van a hatványvonalukon is, illetve hasonlóan *BC* közös húrja *k* és k_2 köröknek, vagyis *M* ezek hatványvonalán is rajta van, tehát $M \in QN$. Ekkor elég bizonyítani, hogy *P* pontnak is egyenlő a hatványa a k_1 és k_2 körökre nézve, abból már következik, hogy *P* rajta van *MN* egyenesen.

Jelöljük α-val k kör *CD* húrjának látószögét *A* csúcsból. Ekkor *DBC* ∡=α, a kerületi szögek tétele miatt. Ha összekötjük *H* és *G* pontokat *N*-nel, akkor látjuk, hogy k_1 és k_2 körökben a *DN* és *NC* húrok α szög alatt látszanak *H* és *G* pontokból szintén a kerületi szögek tétele miatt, azaz $DHN\measuredangle = CGN\measuredangle = \alpha$.

A *PDC* háromszög *C* és *D* csúcsánál lévő szögek is α nagyságúak az érintőszárú szögek tétele miatt, tehát PDC $\measuredangle = DHN\measuredangle$, vagyis egyállásúak, tehát HN∥ DC. Ugyanígy PDC$\measuredangle = CGN\measuredangle$, tehát egyállásúak, így NG∥ CD. Ezért *H, N* és *G* pontok egy egyenesen vannak.

A *PDC* háromszög egyenlőszárú, tehát *PHG* háromszög is egyenlőszárú, vagyis *PH*=*PG* és *PD*=*PC*. Ekkor *P* pont hatványa k_1 körre nézve $PD \times PH$, ami nem más mint $PC \times PG$, vagyis *P* hatványa k_2 körre nézve. Mivel a két hatvány egyenlő, *P* valóban rajta van k_1 és k_2 körök közös hatványvonalán.

4.4.Feladat: Adott egy *ABCD* húrnégyszög, melynek körülírható körének középpontja *K*, a szemközti oldalegyenesek metszéspontja *P* és *Q*, az átlók metszéspontja *M*. Mutassuk meg, hogy $KM \perp PQ$.



16**. ábra**

Megoldás: Nézzük az *ABCD* húrnégyszöget. A *4.3. Feladatból* következik, hogy a körülírt körhöz az *A* és *B* pontokba húzott érintők *H* metszéspontja és a *C* és *D* pontokba húzott érintők *G* metszéspontja rajta van *MQ* egyenesen.

A *2.2. Feladat* miatt pedig *H* és *G* metszéspontok egy a *PK* egyenesre merőleges egyenesre esnek. Így a *QM* egyenes a *PKQ* háromszög *PK* oldalához tartozó magasságvonala. Hasonlóan $PM\ \perp QK$, vagyis *M* a *PKQ* magasságpontja. Ekkor *KM* a harmadik magasságvonal, vagyis merőleges *PQ*-ra.

Megjegyzés: A *4.2 Feladat* miatt, *QM* egyenes és *PK* szakasz olyan *N* pontban metszik egymást, amire igaz, hogy $KN \times KP = R^2$, ahol *R* az *ABCD* húrnégyszög körülírt körének a sugara. Továbbá *KTP* és *KNP* háromszögek hasonlóak, hiszen van két ugyanakkora szögük, ezért felírható

$$\frac{KN}{KM} = \frac{KT}{KP}$$

ebből pedig következik, hogy $KM \times KT = KN \times KP = R^2$.

Tétel a bicentrikus négyszögekre

A háromszögekre, mint bicentrikus sokszögekre, Euler tétele adott összefüggést a sugarakra és a középpontok távolságára. Hasonló tételt írhatunk fel bicentrikus négyszögekre is.

Tétel: Ha egy négyszög bicentrikus, azaz van körülírható és beírható köre is, akkor nevezzük a két kör középpontjának távolságát d-nek, legyen *R* a négyszög körülírt körének, *r* pedig a beírt körének sugara. Ekkor az

$$\frac{1}{(r+d)^2} + \frac{1}{(r-d)^2} = \frac{1}{R^2}$$

összefüggés igaz.

Bizonyítás 1: Használjuk a szokásos jelöléseket, vagyis legyen a négyszög beírt körének középpontja *O*, körülírt körének középpontja pedig *K*.

1. Segédállítás: Adott egy érintőnégyszög, melynek szemközti oldalegyeneseinek metszéspontjait nevezzük el *P*-nek és *Q*-nak, átlóinak metszéspontját *M*-nek. Ekkor *OM* egyenes *PQ* egyenest olyan *T* pontban metszi melyre

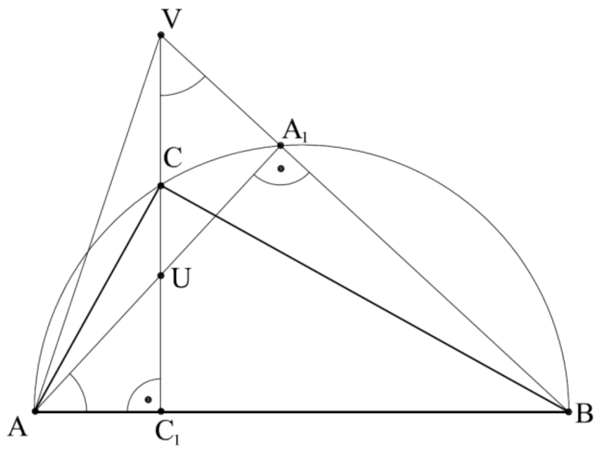
$$OM \times OT = r^2.$$

Biz: *4.2. Feladat*

2. Segédállítás: Adott egy húrnégyszög, melynek szemközti oldalai *P* és *Q* pontokban metszik egymást, átlói pedig *M* pontban. Ekkor *KM* egyenes egy olyan *T* pontban metszi *PQ* egyenest, melyre
$$KM \times KT = R^2.$$
Biz: *4.4. Feladat*

3. Segédállítás: Legyen *ABC* derékszögű háromszög és C_1 az *AB* oldal magasságához tartozó talppont. Ekkor, ha CC_1 magasság félegyenesén úgy választjuk ki *U* és *V* pontokat, hogy *ABV* háromszög magasságpontja éppen *U*, akkor igaz a

$$C_1U \times C_1V = C_1C^2$$ összefüggés.



17**. ábra**

***Bizonyítás*:** Legyen A_1 az ABV háromszög VB oldalához tartozó magasság talppontja. A Thalész tétel miatt A_1 az ABC körülírt körén van. Továbbá AC_1U és VC_1B háromszögek hasonlóak, mivel derékszögűek és $C_1AU\ \measuredangle = C_1VB\measuredangle,$ hiszen merőleges szárú szögek. A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak arányát felírhatjuk

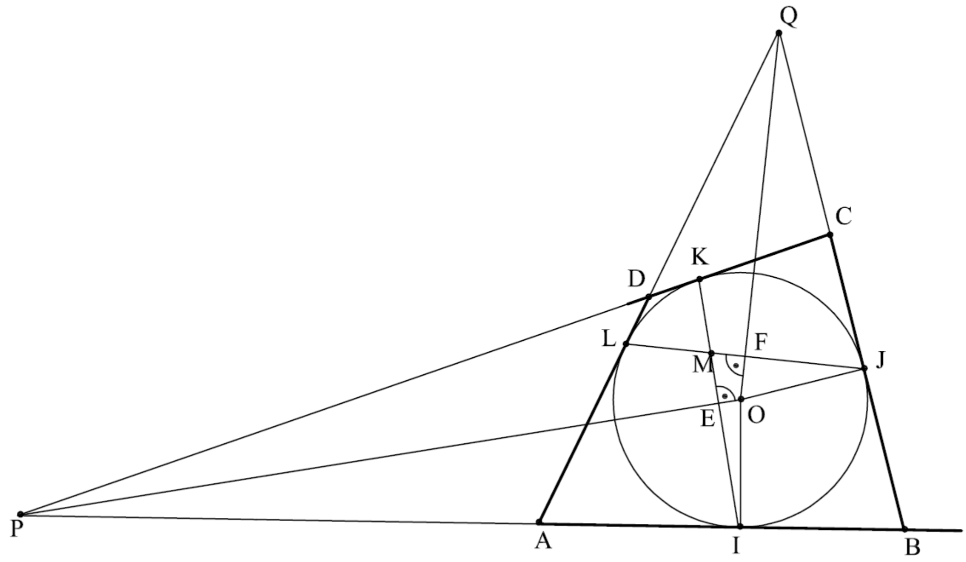
$$\frac{C_1V}{C_1B} = \frac{AC_1}{C_1U}$$

alakban. Rendezés és a magasságtétel felhasználása után megkapjuk, hogy

$$C_1U \times C_1V = AC_1 \times C_1B = C_1C^2 \ .$$

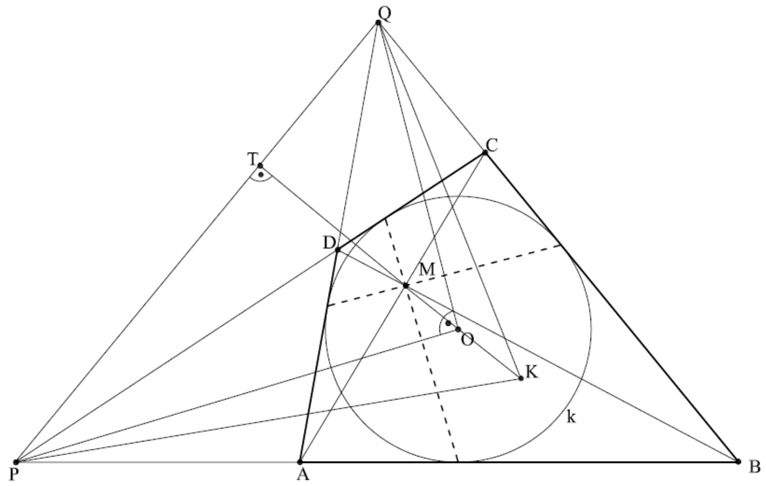
Tétel bizonyítása:

Tetszőleges érintőnégyszögben, a szemközti oldalak metszéspontjait a beírható kör középpontjával összekötve egy olyan egyenest kapunk, amely merőleges a szemközti oldalakon lévő érintési pontokat összekötő szakaszra. Ennek oka, hogy a szemközti oldalak metszéspontja, az érintési pontokkal és a beírható kör középpontjával deltoidot alkotnak, aminek az átlói merőlegesek egymásra.



18. ábra

Ennek következménye, hogy az *MEOF* négyszög húrnégyszög, vagyis az M-nél és O-nál lévő szögek egymás kiegészítő szögei, azaz tetszőleges érintőnégyszögben a szemközti oldalak által bezárt szög szögfelezőinek szöge és a szemközti érintési pontokat összekötő szakaszok szögei egymásnak kiegészítő szögei.



19. ábra

Tekintsük az *ABCD* érintőnégyszöget. Tudjuk, hogy *ABCD* húrnégyszög is, mivel a szemközti érintési pontokat összekötő szakaszai valóban merőlegesek egymásra, vagyis *PO⊥QO*. A vizsgált *ABCD* négyszög tehát bicentrikus négyszög, vagyis megfelel a tételben feltett négyszögnek.

A *4.4. Feladatból* következik, hogy a *PKQ* háromszög magasságpontja nem más, mint az átlók metszéspontja, vagyis M. Ezekből és a 3. segédállításból felírhatjuk, hogy

$$KT \times MT = OT^2.$$

Továbbá az első segédállításból következik az

$$OM \times OT = r^2$$

egyenlet és a második segédállításból a

$$KM \times KT = R^2.$$

Az ábráról leolvasva $KT = OT + d$ és $MT = OT - OM$.

Az előbbieket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$OT^2 = KT \times MT = (OT + d)(OT - OM) = OT^2 + d(OT - OM) - OT \times OM.$$

Ebből OT^2- tel egyszerűsítve a $0 = d(OT - OM) - OT \times OM$ összefüggést kapjuk vagyis

$$d(OT - OM) = OT \times OM = r^2,$$

ebből pedig

$$OT - OM = \frac{r^2}{d}$$

nyilvánvaló.

Hasonló módon írhatjuk fel a $KM = OM + d$ és $KT = OT + d$ összefüggésekből az

$$R^2 = KM \times KT = (OM + d)(OT + d) = OM \times OT + d(OM + OT) + d^2 = r^2 + d(OM + OT) + d^2$$ egyenletet.

Ebből átalakítással kapjuk, hogy

$$OM + OT = \frac{R^2 - r^2 - d^2}{d}$$

Ezt az egyenletet és a korábban felírt $OT - OM = \frac{R^2}{d}$ összefüggést egymáshoz adva és egymásból kivonva a

$$OT = \frac{R^2 - d^2}{2d} \text{ és } OM = \frac{R^2 - d^2 - 2r^2}{2d}$$

egyenletek adódnak. Ezeket az $OM \times OT = r^2$ egyenletbe helyettesítve

$$r^2 = \frac{(R^2 - r^2 - d^2)(R^2 - d^2)}{4d^2}$$

adódik, amiből kapjuk, hogy

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2.$$

Ezután egyszerű algebrai átalakításokat végzünk, hogy megkapjuk a végeredményt.

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{(R - d)^2 + (R + d)^2}{(R - d)^2(R + d)^2} = \frac{1}{(R + d)^2} + \frac{1}{(R - d)^2}$$

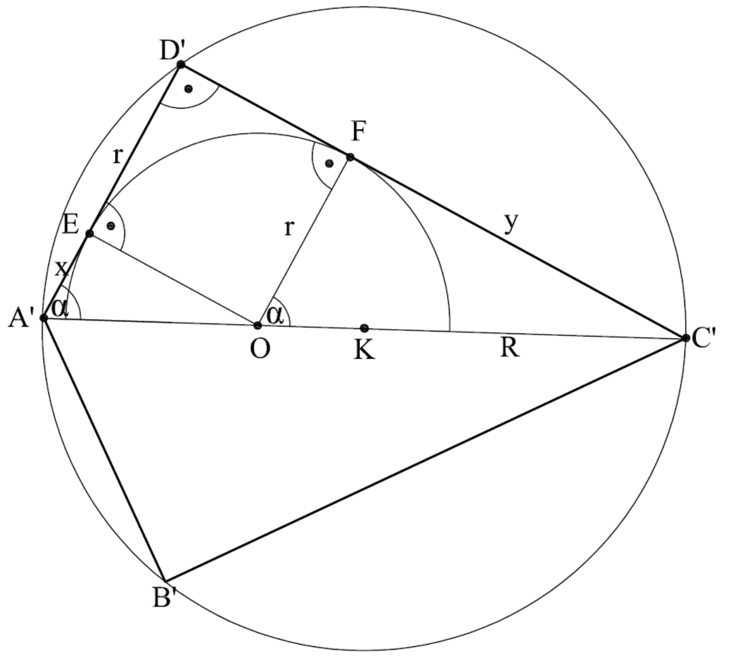
Érdekes hasonlóságot figyelhetünk meg, ha összehasonlítjuk a fenti képletet, a háromszögekre kapott eredménnyel:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R + d} + \frac{1}{R - d}.$$

Bizonyítás 2: Poncelete –tétel segítségével.

Tekintsük az $ABCD$ négyszög körülírt és beírt körét, majd készítsük el az $A'B'C'D'$ négyszöget. Kössük össze a körök O és K középpontjait, majd nevezzük A'-nek a metszéspontot a körülírt körrel. Feltehetjük, hogy A', O, K, C' a sorrend. Érintők behúzásával kapjuk a B', C' és D' pontokat. Rajzoljuk be a beírt kört, az érintési pontok legyenek E, F, G, H.

Elég erre a négyszögre belátni a tételt, hiszen a Poncelet tétel kimondja, hogy adott körsor esetén, mely ebben az esetben a négyszög beírható és a körülírható körei által meghatározott körsor, ha a sokszög oldalai érintői a körsor megfelelő tagjainak, akkor a sokszöget tetszőleges pontból elkezdhetjük, és az érintők behúzásával kaphatjuk meg. Ezen változtatásokkal a jelen esetben felhasznált körök sugara, valamint a középpontok távolsága nem változik, tehát az egyenlet ugyanúgy érvényes lesz. Sőt a négyszögnek elég egy része is, pontosabban az $A'C'D'$ háromszög.



20. ábra

Az ábrán nyilvánvaló, hogy $OFD'E$ négyzet, a körülírt kör sugara továbbra is r, illetve a beírt kör sugara R. $A'E$ szakaszt x-szel, $C'F$ szakaszt pedig y-nal jelöljük.

Keressünk az ábrán hasonló háromszögeket és írjuk fel a hasonlóságok arányát. Látjuk, hogy az $A'C'D'$ és $OC'F$ valamint $A'C'D'$ és $A'OE$ háromszögek hasonlóak. Ezek alapján írjuk fel az arányokat.

$$\frac{2r}{y+r} = \frac{R+d}{r} = \frac{r-d}{y},$$

vagyis

$$y = \frac{(R-d)r}{R+d}.$$

Továbbá

$$\frac{2R}{x+r} = \frac{R+d}{x} = \frac{R-d}{r},$$

vagyis

$$x = \frac{r(R+d)}{(R-d)}.$$

Írjuk fel az *ACD* derékszögű háromszögre a Pithagorasz- tételt.

$$(y+r)^2 + (x+r)^2 = 4R^2,$$

ebből részletezve és behelyettesítve

$$(y+r)^2 = (\frac{(R-d)r}{R+d} + r)^2 = \frac{(R-d)^2 r^2}{(R+d)^2} + 2r\frac{(R-d)r}{R+d} + r^2 = \frac{r^2 4R^2}{(R+d)^2}$$

$$(x+r)^2 = (\frac{r(R+d)}{(R-d)} + r)^2 = (\frac{r(R+d)}{(R-d)})^2 + 2r\frac{r(R+d)}{(R-d)} + r^2 = \frac{r^2 4R^2}{(R-d)^2}$$

Ezeket a Pithagorasz tételbe helyettesítve

$$\frac{r^2 4R^2}{(R+d)^2} + \frac{r^2 4R^2}{(R-d)^2} = 4r^2, \text{azaz}$$

$$\frac{r^2}{(R+d)^2} + \frac{r^2}{(R-d)^2} = 1,$$

ami nyilván a tételbeli egyenlet.

6. Alkalmazásai, használata

Brahmagupta-képlet

Bicentrikus négyszögek területének kiszámítását a Brahmagupta –képletének segítségével kapjuk meg.

Tétel: Bármely *ABCD* húrnégyszög területét a

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

képlet adja meg, ahol *a,b,c,d* az oldalak hossza és *s* a félkerület.

Bizonyítás: Vegyük az *ABCD* húrnégyszög *BD* átlóját, ezáltal két háromszöget kaptunk, melyek területének összege nyilván megegyezik a húrnégyszög területével. Nevezzük α-nak az *A* csúcsnál fekvő szöget és γ-nak a *C*-nél fekvőt. Használjuk a két oldal és a közbezárt szög szorzata területképletet, és írjuk fel a húrnégyszögre a két háromszög segítségével. Így

$$T_{ABCD} = T_{ABD} + T_{BCD} = \frac{ad(sin\alpha)}{2} + \frac{bc(sin\gamma)}{2}.$$

Mivel *ABCD* húrnégyszög, a szemközti szögeinek összege 180°, vagyis sinα=sinγ. Kiemelés és négyzetre emelés után kapjuk

$$T^2 = \frac{sin^2\alpha(ad+bc)^2}{4}$$

egyenletet. A $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ azonosság felhasználásával alakítsuk át a kapott egyenletet.

$$4T^2 = (ad+bc)^2(1 - cos^2\alpha)$$

$$4T^2 = (ad+bc)^2 - (ad+bc)^2 cos^2\alpha$$

Írjuk fel a koszinusz-tételt a húrnégyszög *BD* átlójára a két háromszög segítségével.

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\ cos\alpha$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\gamma$$

Ezekből kapjuk, hogy

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\ cos\alpha.$$

Ezt rendezve

$$a^2 + d^2 - c^2 - b^2 = 2cos\alpha(ad + bc)$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + d^2 - c^2 - b^2) = cos\alpha(ad + bc)$$

$$\frac{1}{4}(a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2 = cos^2\alpha(ad + bc)^2$$

Helyettesítsük be a terület egyenletébe.

$$4T^2 = (ad + bc)^2 - \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2$$

Rendezzük és használjuk az $(a+b)(a-b)=(a^2-b^2)$ azonosságot.

$$16T^2 = [2(ad + bc) + (a^2 + d^2 - c^2 - b^2)][2(ad + bc) - (a^2 + d^2 - c^2 - b^2]$$

$$16T^2 = ((a + d)^2 - (c - b)^2)((c + b)^2 - (a - d)^2)$$
$$= [(a + d + c - b)(a + d - c + b)][(c + b + a - d)(c + b - a + d)]$$

Vezessük be a félkerületet, mint $s = \frac{(a+b+c+d)}{2}$, helyettesítsük is be az egyenletbe.

$$16T^2 = (2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2d) = 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

$$T = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

Ezzel meg is kaptuk a bizonyítandó képletet.

Bicentrikus négyszögek esetén ez még egyszerűbb formulára módosul, hiszen az érintőnégyszögekre igaz, hogy szemközti oldalaik össze egyenlő, vagyis $a+c=b+d$, így $s= a+b = c+d$. A fenti képletbe megfelelően helyettesítve bicentrikus négyszögek esetén kapjuk, hogy

$$T = \sqrt{abcd}.$$

Brahmagupta képletét $d=0$ oldalhosszúsággal háromszögekre felírva éppen Heron – képletét kapjuk, azaz

$$T = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)s}.$$

7. További érdekességek bicentrikus sokszögekről

Nicolaus *Fuss* német matematikus nevéhez fűződnek a bicentrikus sokszögekkel kapcsolatos összefüggések. Munkája során bicentrikus öt-, hat-, hét-, és nyolcszögekre is felírt képleteket. Bár ő csak n=8-ig jutott el, az n>8 bicentrikus n-szögekre felírt összefüggéseket is az ő nevéhez kötik, így tisztelegve munkássága előtt.

Bicentrikus négyszögre felírt összefüggése nyilvánvalóan a fenti tételben szereplő egyenlettel egyezik meg:

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2),$$

ahol R továbbra is a körülírt kör sugara, r a beírt kör sugara és d pedig a két kör középpontjának távolsága.

Bicentrikus ötszögekre felírt összefüggés:

$$2rpq\sqrt{(p-r)(q-r)} = r^2(p^2 + q^2) - p^2q^2.$$

Bicentrikus hatszögekre felírt öszefüggés:

$$3p^4q^4 = 2p^2q^2r^2(p^2 + q^2) + r^4(p^2 - q^2)^2.$$

Bicentrikus hétszögekre felírt összefüggés:

$$[pq - r(p-q) - 2r^2]2pqr\sqrt{(p-r)(p+q)} + [p^2q^2 - r^2(p^2 + q^2] \times$$
$$\times\, 2r\sqrt{(q-r)(p+q)} = \pm[pq - r(p-q)][p^2q^2 + r^2(p^2 - q^2)].$$

Bicentrikus nyolcszögekre felírt összefüggés:

$$[r^2(p^2 + q^2) - p^2q^2]^4 = 16p^4q^4r^4(p^2 - r^2)(q^2 - r^2).$$

Az egyenletekben a szokásos jelölések érvényesek, illetve p=R+d és q=R-d. [4]

8. Összefoglalás

A dolgozatom végén néhány mondatban összefoglalom az eddig leírtakat. A bevezetés után két fejezeten keresztül a később használt fogalmakat elevenítettük fel, néhány újat vezettünk be és az ezekkel kapcsolatos alapvető tételeket vettük sorra, általában bizonyítás nélkül.

A negyedik fejezetben a háromszögekkel, mint bicentrikus sokszögekkel foglalkoztunk és Euler tételére adtunk háromféle bizonyítást. A bicentrikus sokszögek fogalmával csak azután ismerkedtünk meg alaposabban, majd közülük a négyszögekkel foglalkoztunk hosszabban. Néztünk néhány előkészítő feladatot, majd felírtuk az összefüggést a bicentrikus négyszögekre, amire aztán kétfajta bizonyítást is adtunk.

Az utolsó fejezetekben Brahmagupta képletének segítségével a bicentrikus négyszögek területére adtunk összefüggést, majd Fuss egyenleteit írtuk fel öt-, hat-, hét, és nyolcszögekre, immár bizonyítás nélkül.

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban hálás köszönetem kiváló tanáromnak és konzulensemnek, Dr. Kiss György Tanár úrnak, aki fáradhatatlanul és végtelen türelemmel válaszolt a legutolsó, legjelentéktelenebb kérdésemre is, aki a reménytelen pillanatokban is bíztatott és pozitívan állt a munkámhoz. A legelső vázlatomtól az utolsó zárójelig tucatszor átolvasta, kijavította az írásaimat, buzdított a haladásra, mindezt kíméletesen és megértően, de határozottan és motiválóan.

Köszönöm az ELTE TTK oktatóinak, akik a képzésem alatt tanítottak, elláttak a szükséges tudással, kihívások elé állítottak, melyek megharcolásával szakmailag és emberileg is fejlődésre kényszerítettek. Kiváltképp köszönöm Moussong Gábor Tanár úrnak, aki nagy szerepet játszott abban, hogy megszerettem a geometriát.

Köszönöm Atzél Kata Tanárnőnek, aki elindított a matematika tanári pályán.

Köszönöm a családomnak és a barátaimnak, hogy megoszthattam velük a szakdolgozatírással kapcsolatos félelmeimet, kétségeimet, Panninak, akihez bármikor fordulhattam és Janinak, aki remek meglátásaival mindig tudott valami bíztatót mondani. Annának, aki szigorúságával és kedvességével a helyes irányba terelt.

És végül köszönöm Andrisnak, aki megtanított az AutoCad használatára, ellenőrizte az összes rajzomat, és aki bármilyen számítógépes programmal kapcsolatos kérdésemre válaszolt. Köszönöm neki, hogy kitartott mellettem a legrosszabb napokon is, hogy végig bíztatott, segített, motivált és példát mutatott a tökéletesre való törekvésben.

Irodalomjegyzék

[1] Hajós György, Bevezetés a geometriába, Budapest: Tankönyvkiadó Vállalat, 1960.

[2] A.V.Akopyan,A.A.Zaslavsky, Geometry of Conics, American Mathematical Society, 2007.

[3] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, Az újra felfedezett geometria, Budapest: Gondolat Kiadó, 1977.

[4] M.Radić, „Certain Relations concerning bicentric polygons and 2-parametric presentation of Fuss' relations," *Mathematica Pannonica,* pp. 219-248, Február 2009.

[5] István Reiman, A geometria és határterületei, Budapest: Gondolat Kiadó, 1986.

[6] Kiss György, „Amit jó tudni a háromszögekről," *Kömal,* pp. 130-139, 2002.