Eötvös Loránd Tudományegyetem

Stencinger Dóra

Szakdolgozat
Gráfok a sakktáblán

Témavezető:

Nagy Zoltán Lóránt

2015. május 31.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megragadni az alkalmat, hogy köszönetemet fejezzem ki mindazoknak, akik lehetővé tették szakdolgozatom létrejöttét.

Először is szeretném megköszönni témavezetőmnek, Nagy Zoltán Lórántnak, aki magyarázataival, észrevételeivel és tanácsaival segítette a munkámat, elengedhetetlen segítséget nyújtott a szakdolgozatom létrejöttéhez.

Köszönöm a családomnak és páromnak, hogy szeretetükkel támogattak, türelmet és megértést tanúsítottak felém szakdolgozatom írása közben, nélkülük ez a munka nem jöhetett volna létre.

Köszönet illeti még kollégiumi szobatársaimat, Szandit, Rékát és Kingát segítőkészségükért, tanácsaikért és ötleteikért.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Témaválasztás

„Némileg hasonlít a matematikai rendszerhez a sakk.
Ez is, az is zárt rendszert képez, megvannak a saját
kiindulási elvei és szabályai . . . ”

/Stanislaw Lem, Radó György fordítása/

Szakdolgozatomban a sakktábla kombinatorikus aspektusait fogom bemutatni. Mindig is érdekelt a különböző logikai játékok matematikai háttere, így könnyen megszületett az ötlet, hogy a szakdolgozatomat is ebből írjam. Szeretném ezen keresztül megmutatni, hogy a tanult tételek, definíciók milyen összefüggésben vannak az általunk vizsgált problémákkal. Kérdezhetjük, hogy hogyan lehet egy sakktáblát gráfelméleti szemszögből vizsgálni. A sakktábla mezőit gráfok csúcsainak feleltetjük meg, és két csúcs között akkor fut él, ha az adott bábu — amelyikről a feladat szól — tud az egyik mezőről a másikra lépni. Ebből következően a különböző bábukhoz különböző gráfok fognak tartozni.

A dolgozat felépítése

Az alábbiakban több sakktáblás feladat elméleti hátterét fogom megmutatni. Először egy rövid bevezetőben ismertetem azokat a gráfelméleti fogalmakat, amik nélkülözhetetlenek az utána következő feladatok megoldásához, majd két különböző szemszögből szeretném megközelíteni a megoldást.

Először –tanári szakirányos szemmel– szeretnék olyan választ adni a kérdésekre, amiket már egy diák is megért, olyan szavakkal, ahogyan azt ő is el tudná mondani. Ezután egy kicsit elméletibb szempontból szeretném bemutatni ugyanazt a megoldást mélyebb matematikai indoklással megtoldva. Ezek után (amennyiben érdemes), szeretném megnézni, hogy a probléma hogyan általánosítható tetszőleges méretű sakktáblára.

1. fejezet

Használt tételek és definíciók

Ebben a fejezetben átismételem az alapvető gráfelméleti fogalmakat, valamint kimondok néhány tételt, melyeket később a feladatok megoldásánál felhasználok. Elsősorban független halmazok és domináló halmazok méretére, valamint Hamilton-kör létezésére vonatkoznak a kimondott tételek. (Bővebb ismeretek lásd: [1], [2] és [7])

1.1. Definíciók

1.1.1. Definíció. Gráf: Adott egy A halmaz, és egy rajta értelmezett $\rho \subseteq A \times A$ bináris (kétváltozós) reláció. Ekkor a $G = (A, \rho)$ párt, vagyis az A halmaz feletti relációs struktúrát az A halmaz feletti gráfnak nevezzük. Az A halmazt a $G = (A, \rho)$ gráf csúcshalmazának mondjuk, és $\rho \subseteq A \times A$ pedig az élek halmazát jelöli.

1.1.2. Definíció. Páros gráf: G akkor és csak akkor páros gráf, ha csúcsainak halmazát fel tudjuk úgy osztani egy A és B halmazra, hogy az összes G-beli élre teljesül, hogy az egyik végpontja A-ban van, a másik pedig B-ben. Egy G páros gráfot következőképpen jelölünk: $G = (A, B)$.

1.1.3. Definíció. Út: Élek olyan egymáshoz csatlakozó sorozata, melyben sem él, sem pont nem fordulhat elő egynél többször.

1.1.4. Definíció. Hamilton-út: Egy P út egy $G = (V, E)$ gráfban Hamilton-út, ha P a V összes elemét pontosan egyszer tartalmazza.

1.1.5. Definíció. Kör: Élek olyan egymáshoz csatlakozó sorozata, amelyben az élek és pontok egynél többször nem szerepelhetnek, és a kiindulási pont megegyezik a végponttal.

1.1.6. Definíció. Hamilton-kör: Olyan kör, amely a gráf összes csúcsán pontosan egyszer halad át.

1.1.7. Definíció. Domináló halmaz: Egy $G = (A, \rho)$ gráfban egy $D \subset A$ halmazt domináló halmaznak nevezünk, ha $\forall x \in A \setminus D$-re, x szomszédos D egy elemével. A legkevesebb csúcsú domináló halmaz mérete a dominálási szám (jel.: $\gamma(G)$).

1.1.8. Definíció. Egy gráfban a maximális fokszám (jel.: $\Delta(G)$) az összes csúcs fokszámai közül a legnagyobb; a minimális fokszám (jel.: $\delta(G)$) a legkisebb.

1.1.9. Definíció. K_n: Az n csúcsú teljes gráf olyan n csúcsú gráf, melyben bármely két csúcs szomszédos.

1.1.10. Definíció. $K_{n,m}$: n és m elemszámú csúcsosztályokkal rendelkező teljes páros gráf.

1.1.11. Definíció. Független csúcsok: olyan csúcsok amelyek nem feszítenek élt, vagyis kölcsönösen nem szomszédosak.

1.1.12. Definíció. Egy G gráfban a klikk olyan csúcsok halmaza, melyek páronként szomszédosak. Mivel egy klikk csúcsait tartalmazó feszített részgráf teljes gráf, használjuk a teljes részgráf elnevezést is.

1.1.13. Definíció. $\nu(G)$ jelöli a G gráfban a legnagyobb független élhalmaz méretét.
$\tau(G)$ jelöli a G gráfban a legkisebb lefogó ponthalmaz méretét.
$\rho(G)$ jelöli a G gráfban a legkisebb lefogó élhalmaz méretét.
$\alpha(G)$ jelöli a G gráfban a legnagyobb független ponthalmaz méretét.

1.2. Tételek

1.2.1. Tétel. *Egy G gráf akkor és csak akkor páros, ha minden G-beli kör páros hosszúságú.*

1.2.2. Tétel. *Ha egy G gráfban létezik k olyan pont, amelyeket elhagyva a megmaradt gráf több, mint k részre esik szét, akkor nincs benne Hamilton-kör. Amennyiben létezik k pont amelyeket elhagyva több mint $k+1$ komponensre esik szét, akkor Hamilton-út sincsen.*

1.2.3. Tétel. *Dirac-tétel: Ha G egy egyszerű, legalább 3 pontú gráf, amelynek minden pontjának legalább $\frac{|V(G)|}{2}$ a foka, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.*

1.2.4. Tétel. *Ore-tétel: Ha G egy n csúcsú olyan egyszerű gráf, amire teljesül, hogy ha $x, y \in V(G)$ nem alkotnak élet, és ekkor $d(x) + d(y) \geq n$, akkor G -ben van Hamilton-kör.*

1.2.5. Tétel. *Kőnig-tétel: Legyen G egy páros gráf. Ekkor $\nu(G) = \tau(G)$, és ha G-ben nincs izolált pont, akkor $\rho(G) = \alpha(G)$.*

1.2.6. Tétel. *Gallai-tétel: Minden hurokmentes G gráfra $\tau(G) + \alpha(G) = |V(G)|$, azaz a legkisebb lefogó és a legnagyobb független ponthalmaz elemszámának összege egyenlő a gráf pontjainak számával.*

1.2.7. Tétel. *Egy $K_{n,m}$ teljes páros gráfban akkor és csak akkor létezik Hamilton-kör, ha $n = m$.*

1.2.8. Tétel. *Egy $K_{n,m}$ teljes páros gráfban akkor és csak akkor létezik Hamilton-út, ha n és m eltérése legfeljebb 1.*

1.3. Egyéb megjegyzések

1.3.1. Megjegyzés. Ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor van Hamilton-út is. Az implikáció megfordítva már nem igaz.

1.3.2. Állítás. Egy G gráf dominálási száma legalább $\lceil \frac{n}{\Delta(G)+1} \rceil$.

2. fejezet

Feladatok

Dolgozatban 11 különböző sakktáblás feladatot szeretnék kifejteni. A feladatok részben nehézségi sorrendbe vannak rendezve, valamint esetenként az egymást követő feladatok az előzőekre épülnek. Először egy elemi megoldást mutatok be, majd igyekszem feltárni a mögöttes mélyebb matematikát, gráfelméleti tartalmat. Ezt követően általánosítom tetszőleges méretű sakktáblára, amennyiben ennek értelme van.

A következő feladatokkal fogok foglalkozni a megoldási részben:

1. Feladat. Egy huszár a 8×8 - as sakktáblán elindul egy mezőről, majd néhány lépés után visszaérkezik a kiindulási mezőre, és eközben mindig új mezőre lép. Mit mondhatunk a lépésszámáról?

2. Feladat. A huszár most szeretné bejárni az összes mezőt úgy, hogy mindig új mezőre lép, de a fekete és fehér király az ellentétes sarkokban állva elfoglalnak 1-1 mezőt.

3. Feladat. Be tudja-e járni a huszár a teljes sakktáblát az egyik mezőről indulva úgy, hogy oda is térjen vissza a végén?

4. Feladat. Hány huszárt helyezhetünk el legfeljebb egy sakktáblán úgy, hogy ne üssék egymást?

5. Feladat. Minimum hány huszárt kell elhelyezni a sakktáblán ahhoz, hogy ha az ellenfél bármely üres mezőre leteszi a királyát, az sakkban legyen?

6. Feladat. Hány bástyát helyezhetünk el legfeljebb egy sakktáblán úgy, hogy semelyik 2 ne üsse egymást?

7. Feladat. Minimum hány bástyát kell elhelyezni a sakktáblán ahhoz, hogy ha az ellenfél bármely üres mezőre leteszi a királyát, az sakkban legyen?

8. Feladat. Hány királynőt helyezhetünk el legfeljebb egy sakktáblán úgy, hogy semelyik 2 ne üsse egymást?

9. Feladat. Minimum hány királynőt kell elhelyezni a sakktáblán ahhoz, hogy ha az ellenfél bármely üres mezőre leteszi a királyát, az sakkban legyen?

10. Feladat. Lehetséges úgy bábukat elhelyezni a sakktáblán, hogy minden átlóban páratlan sok legyen belőlük?

11. Feladat. Legyen $n \geqq 2$ egész szám. Tekintsünk egy n^2 egységnégyzetből álló $n \times n$-es sakktáblát. n bástyának az elhelyezkedését ezen a sakktáblán békésnek nevezzük, ha minden sorban és oszlopban pontosan egy bástya áll. Határozzuk meg a legnagyobb olyan k pozitív egész számot, amire igaz, hogy n bástya minden békés elhelyezkedéséhez található olyan $k \times k$-as négyzet, amelynek a k^2 egységnégyzete egyikén sem áll bástya. (IMO 2014 [4])

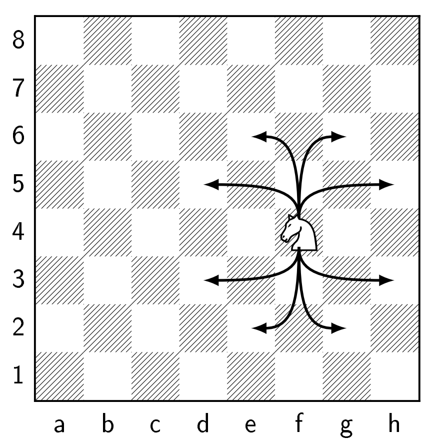
3. fejezet

Megoldások

1. feladat

Egy huszár a 8×8 - as sakktáblán elindul egy mezőről, majd néhány lépés után visszaérkezik a kiindulási mezőre, és eközben mindig új mezőre lép. Mit mondhatunk a lépésszámáról?

Elemi megoldás A huszár világos mezőről csak sötétekre tud lépni, és sötétről csak világosra, ezáltal páros sok lépés után juthat vissza a kiindulási mezőre. Egy lépéssorozat hossza legalább 2, és mivel mindig új mezőre lépünk legfeljebb 64.



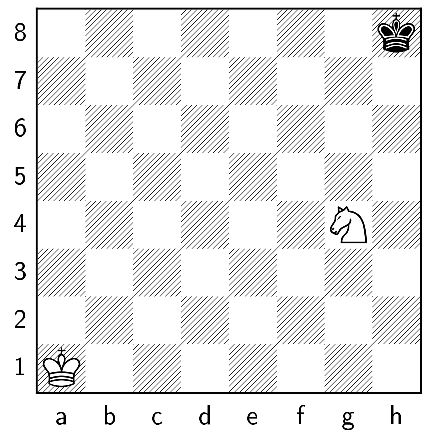
Gráfelméleti háttér A huszár lépéseit egy páros gráfon (ld.: 1.1.2 definíció) tudjuk modellezni, ahol a mezőket csúcsoknak feleltetjük meg, és élek azon csúcsok között futnak, ahol a huszár tud lépni. Mivel ez csak sötét és világos mező között lehetséges, ezért az egyik csúcsosztály a sötét mezők halmaza, a másik pedig a világosoké, élek pedig e között a kettő között futnak, tehát a gráf páros. Ebben a huszárlépések által indukált gráfban vizsgáljuk a körök hosszúságát, vagyis hogy milyen kör részgráfokat tartalmaz. Mivel a lépéssorozat a gráfban egy körnek felel meg, mindig páros sok lépés szükséges a 1.2.1 tétel alapján, hogy ugyanabba a csúcsosztályba visszajussunk. Legalább 2 lépés szükséges, hogy ugyanabba a csúcsosztályba érjünk vissza, tehát ez alsó korlát lesz, felső korlát pedig a gráf csúcsainak száma, $|V(G)| = 64$.

Általánosítás A feladat vizsgálható akár $n \times n$ - es sakktáblára is, hiszen a megoldás technikája átvihető, vagyis a huszár lépéseit bármekkora sakktábla esetében páros gráfon modellezhetjük.

2. feladat

A huszár most szeretné bejárni az összes mezőt úgy, hogy mindig új mezőre lép, de a fekete és fehér király az ellentétes sarkokban állva elfoglalnak 1-1 mezőt.

Elemi megoldás Az ábrán jól látható, hogy a 2 király ugyanolyan színű mezőt foglal el, így a sötét és világos mezők különbsége 2, de a bejárás megvalósításához legfeljebb 1 lehetne a különbség. Honnan látjuk, hogy csak 1 lehetne a különbség? Az előző feladatban láttuk, hogy a huszár csak a sötét és világos mezők között tud lépni, azaz páros gráfban a 2 csúcsosztály között: $A \to B \to A \to B \ldots$ Ez alapján a lépéssorozatban a használt mezők eltérése 0 vagy 1 lehet.



Gráfelméleti háttér A huszár lépéseit itt is páros gráfon ($= G$) tudjuk szemléltetni, ahol $G \subset K_{32,30}$. Ebben a gráfban keresünk Hamilton-utat(ld.: 1.1.4 definíció). Viszont mivel $32 > 30 + 1$, ezért a 1.2.8 tétel alapján nem létezik Hamilton-út $K_{32,30}$-ben. Mivel $G \subset K_{32,30}$, ezért $K_{32,30}$-ből éleket elhagyva kapjuk G-t, így biztos nem találunk G-ben sem Hamilton-utat.

Általánosítás Általánosítható ez a gondolat az $n \times n$ - es sakktáblára?

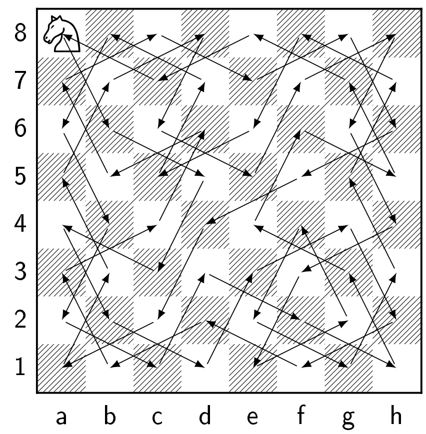
1.eset: $n = 2k$ esetén $\frac{n^2}{2}$ a világos és a sötét mezők száma is, valamelyikből 2-t elhagyva az előző bizonyítás itt is működik, hiszen 2 lesz a különbség.

2.eset: $n = 2k + 1$ esetén $\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$, illetve $\lceil \frac{n^2}{2} \rceil$ a sötét, illetve világos mezők száma, így az utóbbiból 2-t elhagyva a különbség 1 marad, így ezekben az esetekben az előző érvelés nem működik.

3. feladat

Be tudja-e járni a huszár a teljes sakktáblát az egyik mezőről indulva úgy, hogy oda is térjen vissza a végén?

Elemi megoldás Igen. Példa egy jó bejárásra:



Gráfelméleti háttér Ha a lépéseket gráfon szemléltetjük, ahol a mezők megfelelői a csúcsok, és a huszár lehetséges lépései pedig az élek, akkor ez a bejárás a gráf egy Hamilton-körét (ld.:1.1.6 definíció) adja.

Általánosítás Általánosítható a feladat állítása $n \times n$ - es sakktáblára?

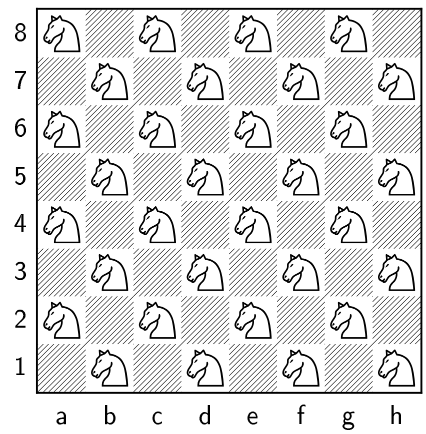
1. eset: $n = 2k + 1$ esetén mivel a 2 csúcsosztály között lépkedünk ($A \to B \to A \to B \ldots$), és a kiindulási mezőre akarunk visszatérni, ezért ugyanannyi sötét mezőnek kell lenni, mint világosnak. Amennyiben $2k+1$ az oldalhosszúság, akkor $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ lesz a csúcsszám, ami páratlan, tehát nem lehet ugyanannyi sötét mező, mint világos.

2. eset: $n = 2k$ esetén $k \geq 2$ - t érdemes vizsgálni. $k = 2$ esetén nincs ilyen bejárás, $k = 3, 4, 5$ esetekre viszont található megoldás.

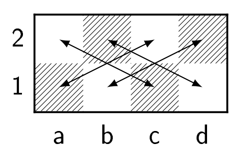
4. feladat

Hány huszárt helyezhetünk el legfeljebb egy sakktáblán úgy, hogy ne üssék egymást?

Elemi megoldás 32 elhelyezhető, ugyanis ha az ugyanolyan színű mezőkre teszünk az jó, mert sötétről csak világosra tud ütni, és fordítva.

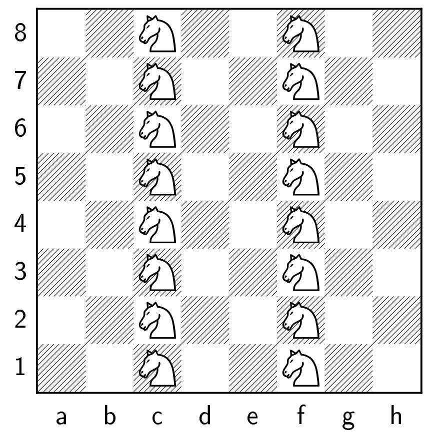


Az is meggondolandó, hogy ennél több miért nem lehet. Ha párba állítjuk a mezőket úgy, hogy a pár tagjai között tud lépni a huszár, akkor minden párból legfeljebb egyet tudunk kiválasztani, vagyis ha az egész sakktábla összes mezőjét párba tudnánk állítani, akkor látható, hogy nem lehet 32-nél több. Az alábbi 2×4-es sakktáblával ki lehet parkettázni a 8×8-ast.



Mivel ezen a sakktáblán párban vannak a mezők, azért ha a ilyenekkel fedjük le a teljes sakktáblát, akkor ott is tudunk egy párosítást csinálni. Mivel a párokból legfeljebb az egyiket választhatjuk be, ezért legfeljebb 32 huszár tehető le.

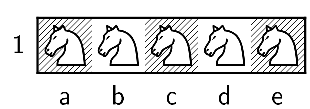
Fontos látni azt is, hogy ha egy elrendezés tovább már nem bővíthető, az nem ekvivalens azzal, hogy maximális is. Hiszen található olyan elrendezés ami már tovább nem bővíthető, mégsem maximális. Ilyenre példa a következő ábra.



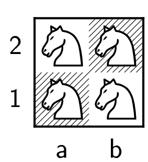
Gráfelméleti háttér 32-t le tudunk tenni úgy, hogy az ugyanolyan színűeket fedjük le. Ez egy páros gráfban az egyik csúcsosztálynak felel meg. Honnan tudjuk, hogy ennél nem lehet több? $\nu(G) = \tau(G)$ a Kőnig tétel (1.2.5 tétel) szerint. A gráfban van teljes párosítás, tehát akkor $\nu(G) = \tau(G) = 32$. Viszont Gallai tétele (1.2.6 tétel) szerint $|V(G)| = \alpha(G) + \tau(G)$, ahol $|V(G)| = 64$, $\tau(G) = 32$, tehát $\alpha(G) = 32$.

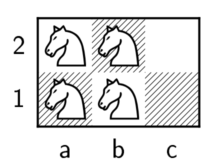
Általánosítás Tudunk általánosítani $n \times m$-es sakktáblára is?

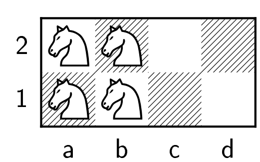
1. eset: $1 \times k$ esetén letehető k darab:

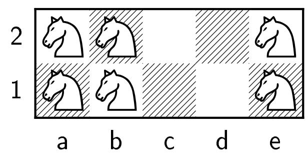


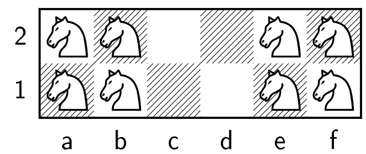
2. eset: $2 \times k$ esetén $(k = 2, 3, 4, 5 \ldots)$:





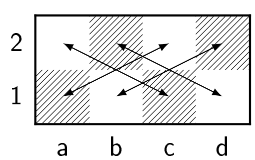






Így $2 \times (4m+1)$-es tábla esetén $4m+2$ db bábu letehető, valamint $2 \times (4m-2)$, $2 \times (4m-1)$ és $2 \times 4m$ esetben $4m$ db bábut le tudunk tenni. A konstrukciót az adja, hogy 2×4-es kis táblákkal parkettázunk, és ha nem fér ki a teljes tábla, akkor az elejét használom.

Többet miért nem tudunk letenni? Mert ha a mezőket a huszár lépései mentén párba állítjuk, akkor a párból itt is legfeljebb egyet választhatunk ki, hogy ne üssék egymást. Hogyan találunk 4-es maradék szerint ilyen párokat? 2×4-es parkettákból.

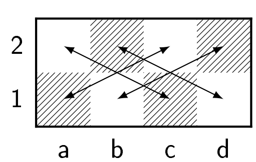


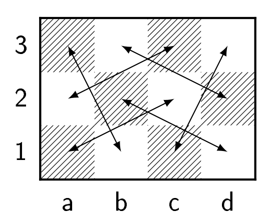
3. eset: $n \geqq 3$ és $m \geqq 3$ esetén $\lceil \frac{n \cdot m}{2} \rceil$ bábu biztosan letehető az azonos színű mezőkre (ugyanis előbb már láttuk, hogy csak a másik színre tud ütni).

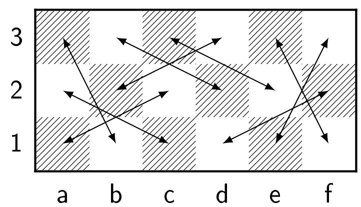
Meggondolható, hogy minden 3×3-as és annál nagyobb sakktáblára található $\lfloor \frac{n \cdot m}{2} \rfloor$ méretű párosítás, így legalább ennyi csúcsot elveszítünk, vagyis tényleg $\lceil \frac{n \cdot m}{2} \rceil$ lesz a letehető bábuk maximuma.

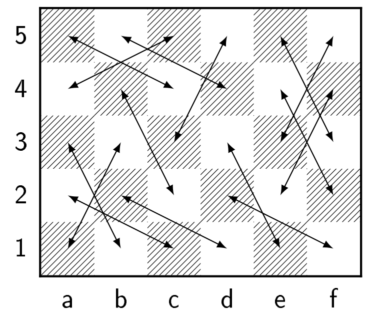
Konstrukció $\lfloor \frac{n \cdot m}{2} \rfloor$ méretű párosítás létrehozására:

3.1.eset: Ha az oldalhosszak közül legalább az egyik páros, akkor teljes párosítás létrehozható a következőkkel parkettázva:

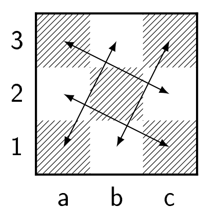


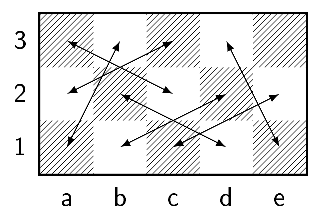


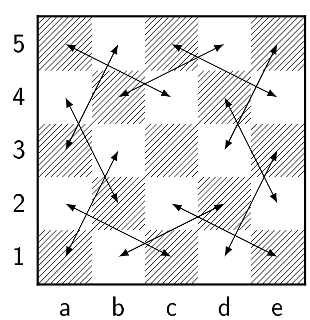




3.2. eset: Ha mindkét oldal hossza páratlan, akkor parkettázható az előzőek felhasználásával, valamint az alábbiak közül pontosan eggyel:





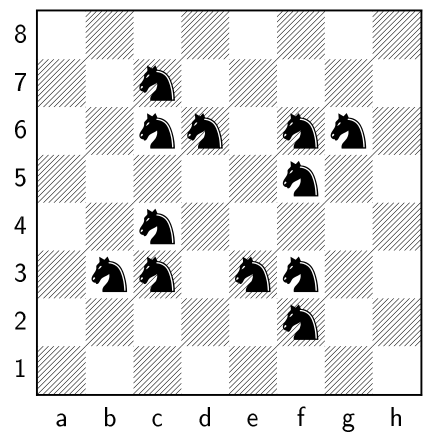


Ha az egyik sarokból levágunk egy ekkora darabot, akkor a maradék sakktábla 3 kisebb táblára esik szét, amelyeknek már van egy páros oldaluk, így a maradék sakktáblán létrehozható ez előző esetben használt párosításokkal egy teljes párosítás.

5. feladat

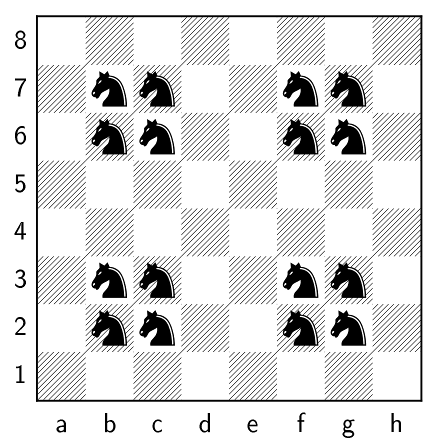
Minimum hány huszárt kell elhelyezni a sakktáblán ahhoz, hogy ha az ellenfél bármely üres mezőre leteszi a királyát, az sakkban legyen?

Elemi megoldás 12-vel megvalósítható a következő módon:



Szükséges alsó korlátot is megadni arra, hogy 12-nél kevesebbel nem lehet. Ennek belátása nehéz. Legalább $\lceil 64/9 \rceil = 8$ huszár szükséges, ami abból következik, hogy egy huszár legfeljebb 9 mezőt foglal le, 1-et amin áll, és további 8-at üt.

Meggondolandó itt is, hogy ha egy elrendezés tovább már nem szűkíthető, az nem jelenti azt, hogy egyben minimális is. Erre példa a következő ábra.



Gráfelméleti háttér Ha a huszár lépéseit gráfon ábrázoljuk, akkor az egyes csúcsokhoz a következő fokszámok tartoznak:

8	2	3	4	4	4	4	3	2
7	3	4	6	6	6	6	4	3
6	4	6	8	8	8	8	6	4
5	4	6	8	8	8	8	6	4
4	4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	8	8	8	8	6	4
2	3	4	6	6	6	6	4	3
1	2	3	4	4	4	4	3	2
	a	b	c	d	e	f	g	h

Ebben a gráfban keresünk minimális elemszámú domináló halmazt (ld.: 1.1.7 definíció), vagyis a dominálási számot.

Az elemi megoldásban már láttuk, hogy legalább 8 huszár szükséges (1.3.2 alapján). Létezik konstrukció 12 huszárra, tehát ezt tekinthetjük felső korlátnak.

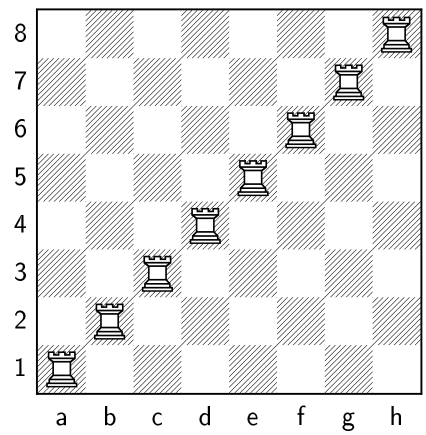
Viszont mivel van 4 másodfokú csúcs, amelyek csak hatodfokúhoz kapcsolódnak, ezért vagy bele kell venni a másodfokúakat, vagy a hatodfokúakból 1-1 darabot minden másodfokúhoz. 8 huszárral $4 \cdot 7 + 4 \cdot 9 = 64$ mező elvben így is lefedhető, viszont így nem lehet átfedő ütés.

Ellenben nincs 4 db nyolcadfokú csúcs, amelynek nincs se egymással, se a hatodfokúakkal közös ütése, vagyis átfedő ütés nélkül nem tudunk 4-et kiválasztani közülük. Így 8 még nem lesz elég, így az alsó határ 9-re emelkedett. A fokszámokból további „szép" becslést nem tudunk mondani, viszont számítógéppel könnyen tesztelhető, hogy még 11 huszár sem elég.

6. feladat

Hány bástyát helyezhetünk el legfeljebb egy sakktáblán úgy, hogy semelyik 2 ne üsse egymást?

Elemi megoldás Az egyértelmű, hogy 8-nál többet nem lehet, mert akkor egy sorba és oszlopba kettő bábu kerül (a skatulya-elv miatt), és azok ütik egymást. 8-ra jó konstrukció:



Gráfelméleti háttér A bástya mozgásai által indukált gráfban keresünk maximális független (ld.: 1.1.11 definíció) halmazt. Mivel az oszlopok minden eleme össze van kötve egymással, ezért ezek 8 db teljes 8-as klikket (ld.: 1.1.12 definíció) alkotnak, így minden klikkből maximum 1-et választhatunk ki. Tudunk így kiválasztani? Ez attól függ, hogy a K_8-as klikkek között hogyan futnak élek. Ebben a gráfban lehetséges a fenti módon.

Általánosítás Általánosítható ez $n \times n$ - es sakktáblára?

Az ábra alapján látható, hogy bármekkora méretű sakktáblánál ha az egyik átlójára rakjuk a bábukat, akkor azok nem fogják ütni egymást, így legalább n db bástya felrakható.

Az is látható viszont, hogy ez egyben maximum is, mivel ha n-nél többet tennénk fel, akkor lenne olyan sor és oszlop, ahol legalább 2 bábu van, és ezek ütnék egymást.

Hány különböző jó elrendezés lehetséges? A válasz $n!$, hiszen először még bármelyiket választhatjuk az első oszlopból, azaz n választási lehetőség van. Utána már egyel kevesebbet, vagyis $n-1$-et, hiszen nem választhatunk olyan sorból, ahonnan már választottunk, majd $n-2$-t, mert már 2 szerepelt ...

Általánosítható ez $n \times k$ - as sakktáblára?

Ekkor az előző gráfelméleti szemléletet átvéve sorokat nézve van n db teljes k-as, az oszlopokat tekintve pedig van k db teljes n-es ebben a bástyamozgások által indukált gráfban.Teljes részgráfokból mindig legfeljebb egyet tudunk kiválasztani.

1. eset: Ha $n < k$, akkor, illetve, n db bábu tehető le legfeljebb, minden sorba pontosan egy:

- 1. sor 1. mező
- 2. sor 2. mező

  ...

- n. sor n. mező

Ez megtehető, hiszen minden sorban $k > n$ mező van. Több biztosan nem lehet, különben lenne olyan K_k - as klikk, amiből kettőt választottunk.

Mennyi a lehetséges jó konstrukciók száma? Először kiválasztjuk azokat az oszlopokat, ahova tenni szeretnénk, ezt $\binom{k}{n}$ féleképpen tehetjük meg. Eztán a kiválasztott oszlopok közül az első sornál még nincs megkötés, bármely mezőt választhatjuk az n mező közül. A második oszlopban már nem választhatjuk ugyanazt a sorszámú mezőt, mint az elsőnél, tehát a további $n-1$ mező közül választhatunk, a harmadik oszlopnál már az előző 2 oszlop sorszáma van kizárva, így $n-2$ mezőből választhatunk ..., így $n!$ féle jó elrendezés lehetséges ezekben a oszlopokban, vagyis összesen $\binom{k}{n}n!$.

2. eset: Ha $n > k$, akkor k db bábu tehető le legfeljebb, minden oszlopba pontosan egy:

A konstrukció az 1. eset 90°-os elforgatottjaként hozható létre, tehát a sorok és oszlopok szerepe felcserélődik. Az indoklás is átvihető, valamint ezáltal a lehetséges jó konstrukciók száma is megkapható a sorok és oszlopok szerepének felcserélésével.

7. feladat

Minimum hány bástyát kell elhelyezni a sakktáblán ahhoz, hogy ha az ellenfél bármely üres mezőre leteszi a királyát, az sakkban legyen?

Elemi megoldás Szintén 8 bástya szükséges.

(Az ábrát lásd: előző feladatban.)

Kevesebben nem lehet? Indirekt tegyük fel, hogy 7-tel is ütés alatt lehet tartani. Így biztosan lesz olyan oszlop, amelyben nincs bástya. Ez még önmagában nem jelent problémát, ha van minden sorban, hiszen a bástya üti a sort is, nem csak az oszlopot. Viszont sorból is van 8, tehát sor is marad üresen. Az üres oszlop és sor keresztezését pedig semmi nem fogja ütni, tehát 7 bábuval még nem lehet ütés alatt tartani.

Gráfelméleti háttér A bástya mozgásai által indukált gráfban keresünk minimális elemszámú domináló halmazt.

Általánosítás Hány bástya szükséges ahhoz egy $n \times n$ - es sakktáblán, hogy bármely szabad mezőre letéve az ellenfél királyát, az sakkban legyen?

Ehhez n db bástya szükséges.

Bizonyítás. Ind. tegyük fel, hogy elég $n-1$ bástya. Így biztosan lesz olyan oszlop és sor, ahol nincs bástya, és ezek kereszteződése nem lesz ütés alatt, tehát legalább n kell. Elég is ennyi? Igen, például ha az átlóra sorakoztatjuk őket. $\square$

Bizonyítás. Teljes indukcióval: $k = 1$ esetén 1 bástya szükséges.

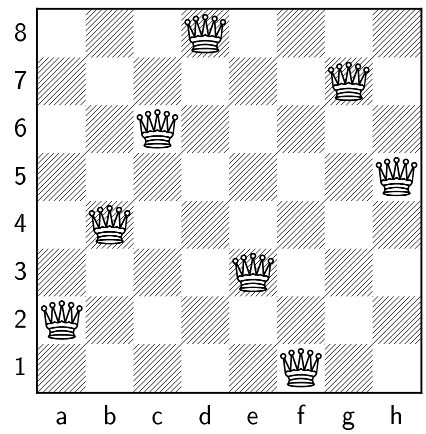
Tegyük fel, hogy $k = (n-1)$-re igaz, hogy $n-1$ bástya szükséges.

Ezután $k = n$ esetén kiválasztunk egy csúcsot, amit a domináló halmazba teszünk. Ennek elhagyjuk az összes szomszédját, vagyis $2n-2$ csúcsot. Így összesen $2n-1$ csúcsot hagytunk el a kiválasztott csúccsal együtt. Így a megmaradt gráf egy $(n-1) \times (n-1)$-es sakktáblán indukált gráffal lesz izomorf. $\square$

8. feladat

Hány királynőt helyezhetünk el legfeljebb egy sakktáblán úgy, hogy semelyik 2 ne üsse egymást?

Elemi megoldás Az egyértelmű, hogy 8-nál többet nem lehet. (Az előző feladatban gyengébb feltételek mellett is csak 8 volt.) 8-ra jó konstrukció:



Gráfelméleti háttér Maximális független halmazt keresünk egy, az előző-nél sűrűbb gráfban.

Hány ilyen létezik?

92 jó elrendezést ismerünk, amelyek közül 12 az, ami lényegében különböző, azaz nem vihető egymásba elforgatással és tükrözéssel. (Azért szerepel a legtöbb elrendezés 8-szor, mert saját magán kívül a 3 elforgatottja, a tükörképe, illetve annak a 3 elforgatottja is jó, viszont van köztük egy eleve forgásszimmetrikus.)

Általánosítás Hány királynőt helyezhetünk el legfeljebb egy $n \times n$ - es sakktáblán, úgy hogy semelyik 2 ne üsse egymást?

Le tudunk helyezni n db királynőt a következő módon. Algoritmus a királynők elhelyezéséhez ([5] alapján):

- Osszuk el n-et 12-vel. Jegyezzük le a maradékot.
- Írjuk le egy listába 2-től n-ig a páros számokat növekvő sorrendben.
- Ha a maradék 3 vagy 9, akkor a 2-es számot vigyük át a lista végére.
- Írjuk a lista végére 1-től n-ig a páratlan számokat növekvő sorrendben, de ha a maradék 8, akkor páronként cseréljük fel őket (például 3, 1, 7, 5, 11, 9,…).

- Ha a maradék 2, akkor cseréljük ki az 1-et és 3-at, valamint tegyük az 5-öt a lista végére.
- Ha a maradék 3 vagy 9, akkor tegyük az 1-et és 3-at a lista végére (ebben a sorrendben).
- Végül tegyük le a bábukat a sakktáblára: az első sorba oda, ahova a lista első száma mutatja; a második sorba oda, ahová a lista második száma mutatja...

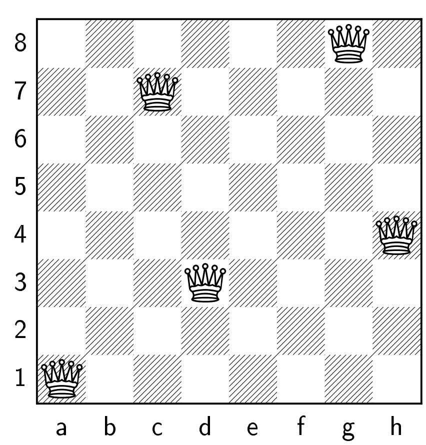
Néhány példa:

- 14 királynő: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 1, 7, 9, 11, 13, 5
- 15 királynő: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 1, 3
- 20 királynő: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 3, 1, 7, 5, 11, 9, 15, 13, 19, 17

9. feladat

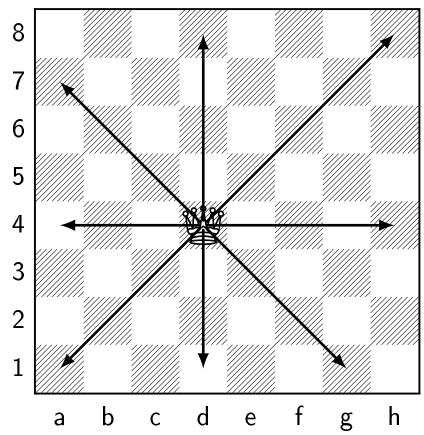
Minimum hány királynőt kell elhelyezni a sakktáblán ahhoz, hogy ha az ellenfél bármely üres mezőre leteszi a királyát, az sakkban legyen?

Elemi megoldás 5-tel már lehet:



Természetesen itt is szükséges bizonyítani, hogy kevesebbel nem lehet, de ez elemi módszerekkel nehéz.

Gráfelméleti háttér Egy királynő legfeljebb 28 mezőt tud lefedni, 1 mezőn áll és további 27-et üt:



Ezért legalább $\lceil 64/28 \rceil = 3$ királynő kell a domináló halmazhoz. Ennyi vajon elég is lenne? Az alábbi fokszámok tartoznak a mezőkhöz:

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**
7	**21**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**21**
6	**21**	**23**	**25**	**25**	**25**	**25**	**23**	**21**
5	**21**	**23**	**25**	**27**	**27**	**25**	**23**	**21**
4	**21**	**23**	**25**	**27**	**27**	**25**	**23**	**21**
3	**21**	**23**	**25**	**25**	**25**	**25**	**23**	**21**
2	**21**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**23**	**21**
1	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**

Bizonyítsuk be, hogy 3 még nem elég. Válasszunk szét eseteket a bábuk elhelyezkedése szerint.

1. eset: Mindhárom bábu maximális fokszámú csúcsban áll. Ekkor az átfedő ütések száma nagyon nagy: 1 mezőt mindhárman ütnek, valamint 20 további mezőt tartanak ketten is ütés alatt, így $(28 \cdot 3) - 20 - 2 = 62 < 64$ mezőt fedhetnek legfeljebb.

2. eset: Kettő bábu áll a maximális fokszámú csúcsokban, egy pedig kívül. Így legalább 14 mezőt ütünk duplán, és 3-at triplán, vagy 10-et duplán és 5-öt triplán. Így $(28 \cdot 2) + 26 - 14 - 6 = 62 < 64$ vagy $(28 \cdot 2) + 26 - 10 - 10 = 62 < 64$ csúcsot fogunk le, ami még mindig nem elég.

3. eset: Egy bábu áll maximális fokszámú csúcson, a másik kettő pedig kívül. Így legalább 14 dupla és 2 tripla ütés lesz. $(26 \cdot 2) + 28 - 14 - 4 = 62 < 64$ lefedése nem elég.

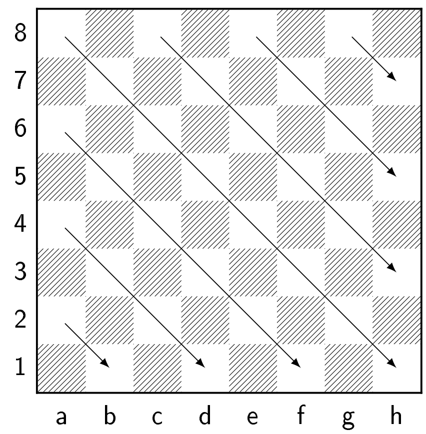
4. eset: Mindhárom bábu maximális fokszámú csúcsokon kívül áll. Legalább 14 dupla és 1 tripla ütéssel $(26 \cdot 3) - 14 - 2 = 62 < 64$ fedhető, ez sem elég.

Azt, hogy 4 miért nem elég nehéz elemi úton belátni, számítógéppel tesztelhető.

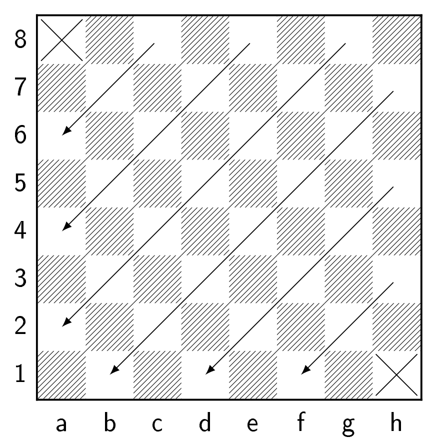
10. feladat

Lehetséges úgy bábukat elhelyezni a sakktáblán, hogy minden átlóban páratlan sok legyen belőlük?

Elemi megoldás Próbáljuk először csak ugyanolyan színű mezőkre, ugyanis ezek pont átlósan helyezkednek el. Számoljuk meg először a főátlóval párhuzamos irányú mellékátlókat, amelyek ugyanolyan színűek (itt: világos).



Ebből 7 db van. Tehát 7 átlóba kell páratlan számú bábut letenni, ami azt jelenti, hogy az összes ugyanolyan színű (jelen esetben: összes világos) mezőn páratlan sok bábu lesz. Ezek után számoljuk meg a másik irányba mutató, ugyanilyen színű átlókat is.



Ebből van 8 db (a két sarokmezőt is beleértve, hiszen az 1 hosszú átló is átló). Így látható, hogy 8 átlóba kell páratlan sok bábut elhelyezni, ami összességében páros sok bábut jelent ezen a mezőszínen. Ez viszont ellentmondást eredményez az előző leszámlálással, ugyanis a szerint páratlan sok bábut kell elhelyezni ezeken a mezőkön, tehát nem létezik jó elrendezés.

Általánosítás Letehető $n \times n$ - es sakktábla minden átlójára páratlan sok bábu?

1.eset: $n = 2k$ alakú szám esetén nem lehet, ugyanis a jobbra lefelé futó világos átlókból mindig $n - 1$ db lesz, azaz mindig páratlan sok átlóba kell páratlan sok bábut helyezni.

2.eset: $n = 2k + 1$ alakú számoknál ez a logika nem működik.

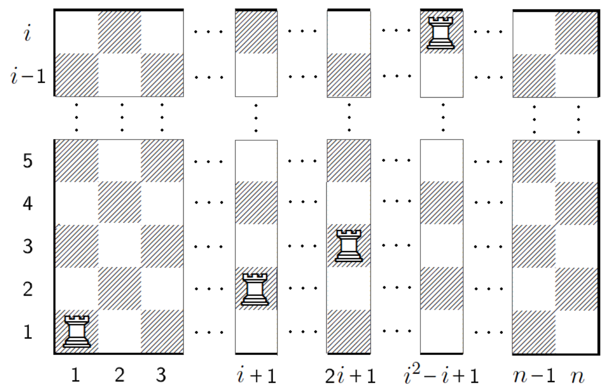
11. feladat

Legyen $n \geqq 2$ egész szám. Tekintsünk egy n^2 egységnégyzetből álló $n \times n$-es sakktáblát. n bástyának az elhelyezkedését ezen a sakktáblán békésnek nevezzük, ha minden sorban és oszlopban pontosan egy bástya áll. Határozzuk meg a legnagyobb olyan k pozitív egész számot, amire igaz, hogy n bástya minden békés elhelyezkedéséhez található olyan $k \times k$-as négyzet, amelynek a k^2 egységnégyzete egyikén sem áll bástya. (IMO 2014 [4])

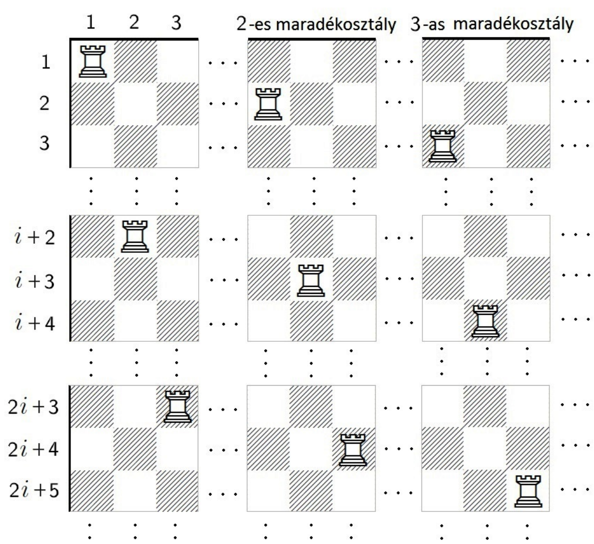
3.0.3. Állítás. Amennyiben $i^2 < n \leqq (i+1)^2$, ahol $i > 0$ egész, akkor $i = k$.

Bizonyítás. A fenti állítás igazolásához be kell látnunk, hogy ekkora mindig létezik, és van olyan elrendezés, ahol ennél nagyobb nincs.

Számozzuk be a sorokat és az oszlopokat is 1-től n-ig. Ekkor létezik egy bástya, amely az 1. oszlop s_1-edik sorában van. Tekintsünk i szomszédos sort úgy, hogy s_1 is köztük legyen. Ezen a területen az előbb tekintett bástyákon kívül további $i - 1$ bástya található, hiszen minden sorban pontosan egy darab van. Indirekt tegyük fel, hogy nem marad szabadon $i \times i$ nagyságú négyzet. Ez azt jelenti, hogy 2 olyan oszlop sorszáma között, ahol áll bástya legfeljebb i lehet a különbség. Mivel az első oszlopban fixen van egy bástya, ezért további $i - 1$-et kell elhelyezni. Ebből viszont adódik, hogy a legtávolabbi oszlopban lévő bástya sorszáma legfeljebb $1 + (i - 1) \cdot i = i^2 - i + 1$. Viszont mivel $n > i^2$, ezért $n \geqq i^2 + 1$, ez viszont i-vel nagyobb, mint a bástyákhoz tartozó legnagyobb oszlopsorszám, vagyis marad legalább i üres oszlop egymás mellett, ami azt jelenti, hogy lesz szabad $i \times i$-s rész, tehát ellentmondásra jutottunk.



A bizonyítás másik irányában azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan elrendezés, amelyben nem marad szabadon $(i+1)\times(i+1)$-es négyzet. Példa ilyen elrendezésre: A bástyákat oszloponként helyezem el, legelőször az első oszlop első mezőjére. Ezután a következő oszlopba az $i+2$-edik sorba teszem, majd mindig az előző sorszámoz adok hozzá $i+1$-et. Ha elértem a tábla alját akkor az első szabad sorszámú sorba teszem a bástyát.



Először is meg kell gondolni, hogy az így kapott elrendezés békés. Ez oszlopokra nyilvánvaló, hiszen azokon egyesével lépkedtünk végig, és minden oszlopban egy bábut tettünk le. A sorokban azért nem lehet kettő egy sorban, mert ott először az $i+1$-gyel való maradékosztályba tartozás szerint soroltuk fel a számokat 1-től n-ig, és mivel nincs olyan szám, ami 2 maradékosztályba is beletartozna, ezért nem lehet egy sorban 2 bábu. Viszont mivel n sorunk van és n bábunk, ezért minden sorban pontosan egy lesz.

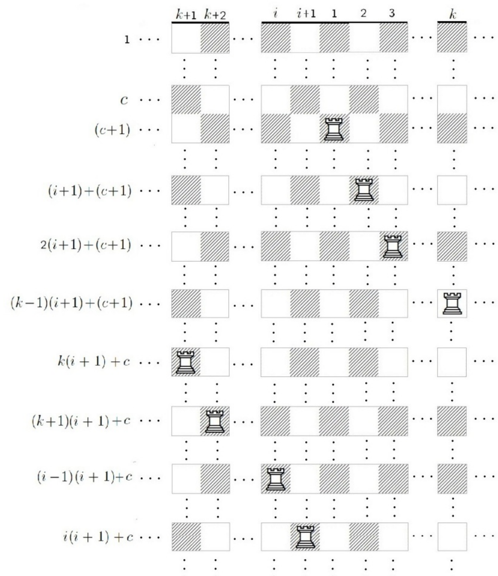
Ezután még ellenőriznünk kell, hogy nem maradt szabadon $(i+1)\cdot(i+1)$-es négyzet.

Először tekintsük azt az esetet, amikor kiválasztunk úgy $i+1$ oszlopot egymás mellett, hogy az teljesen tartalmazzon egy maradékosztályt. Ez biztosan kivitelezhető, ugyanis egy maradékosztály szélessége nem lehet nagyobb, mint $i+1$, viszont kisebb sem, mint $i-1$. (A maradékosztályok elemszámát $\frac{n}{i+1}$ alsó- és felső egészrésze adja.) Ha így választunk, akkor biztosan nem marad egymás mellett $i+1$ üres sor, ugyanis ezek sorszáma teljes maradékrendszert alkotna, így az egyik sorban biztosan lesz bábu.

Ha nem így választunk $i+1$ oszlopot, akkor pontosan 2 maradékosztály elemei jelennek meg a sorokban, hiszen 3 maradékosztály esetén a középsőt teljesen tartalmazná, ugyanis csak akkor váltunk maradékosztályt ha már teljes egészében felsoroltuk az előtte lévőket. Viszont ha már teljesen felsoroltuk, akkor azt az esetet már megvizsgáltuk az előzőekben.

Így azt kell vizsgálnunk, hogy a kiválasztott $i+1$ oszlopban van-e egymást követő $i+1$ szabad sor. Azt az esetet vizsgálom, amikor a maradékosztály a lehető legszélesebb, vagyis $i+1$ elemű. Ennek nyomán kisebb szélességre már könnyű belátni.

Tekintsük az $i+1$-el c, illetve $c+1$ maradékot adó maradékosztályok találkozását. Maradékosztályon belül biztosan nincs $i+1$ szabad sor, ennek indoklása ugyanaz, mint amikor a maradékosztályt teljesen tartalmazza az $i+1$ oszlop. „Probléma” a két maradékosztály találkozásánál lehet, amennyiben a c maradékot adók közül az első, és a $c+1$ maradékot adók közül az utolsó között szabadon marad $i+1$ sor. Számozzuk a c maradékot adó oszlopokat $k+1$, $k+2 \dots i+1$ oszlopszámokkal, a $c+1$ maradékot adókat pedig $1, 2 \dots k$



oszlopszámokkal, amely azt jelöli, hogy az adott maradékrendszer hányadik oszlopa. A kiválasztott intervallumban a c maradékot adók közül a legkisebb sorszámú a $k+1$-es számú oszlopban van, ez pedig a $([k+1)-1](i+1)+c = k(i+1)+c = ki+k+c$ számú sort jelenti. Ugyanezen az intervallumon $c+1$ maradékot adók közül a legnagyobb sorszámú a k számú oszlopban van, amely a $(k-1)(i+1)+(c+1) = ki-i+k-1+c+1 = ki-i+k+c$ számú sort adja. Az így kapott sorszámok különbsége $(ki+ki+c)-(ki-i+k+c) = i$, vagyis $i-1$ üres sor van a kettő között, így itt sem található üres $i+1 \times i+1$-es négyzet.

$\square$

Irodalomjegyzék

[1] Lovász László – Pelikán József – Vesztergombi Katalin: *Diszkrét matematika*, TypoTEX kiadó, 2010

[2] Katona Gyula Y. – Recski András – Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*, TypoTEX kiadó, 2007

[3] Róka Sándor: *1500 feladat az elemi matematika köréből* TypoTEX Kiadó, 1996

[4] *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, 2014 október

[5] http://hu.wikipedia.org/wiki/Nyolckirálynő-probléma

[6] Haynes, T. W.; Hedetniemi, S. T.; and Slater, P. J. Domination in Graphs–Advanced Topics. New York: Dekker, 1998.

[7] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. Graph theory with applications (Vol. 290). London: Macmillan, 1976.