Divergens sorok

Szakdolgozat

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Készítette:
Szabó Szilárd
Matematika Bsc., tanári szakirány

Témavezető:
Gémes Margit
Műszaki gazdasági tanár
Analízis tanszék

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Előszó

A klasszikusan elfogadott definíció szerint, ha egy végtelen sor részletösszegeiből képzett sorozat a végtelenhez tart, vagy több torlódási pontja van, akkor a sor divergens, nincs véges összege. Szakdolgozatomban ilyen sorokkal (főleg ez utóbbi esettel) foglalkozom. Mi történik akkor, ha megengedjük, hogy a divergens soroknak is legyen egy jól definiált összege, „szummája”?
Elöljáróban áttekintem a végtelen sorok konvergenciájának feltételeit, majd a divergens sorok szummázásának egy alapvető módszerét. Végezetül ennek két általánosításával foglalkozom.

1.2. Konvergens sorok

1.2.1. Definíció. [2] A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor részletösszegein az

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \ (n = 1,2,\dots)$$

számokat értjük. Ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat konvergens és a határértéke $A \in \mathbb{R}$; azaz, ha $\lim_{n\to\infty}(a_0 + \cdots + a_n) = A$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergens, és az összege A.

Ezt úgy jelöljük hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

1.2.2. Példa. Legyen $q \in \mathbb{R}$. A $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$. Legyen $s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. Mivel $qs_n - s_n = q^{n+1} - 1$, így $q \neq 1$ esetén

$$s_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Ha $|q| < 1$, akkor $q^{n+1} \to 0$ és $s_n \to \dfrac{1}{1-q}$ $(n \to \infty)$.

1.2.3. Tétel. [2] *Ha a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sor konvergens, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Legyen a sor összege A. Mivel

$$a_n = (a_1 + ... + a_n) - (a_1 + ... + a_{n-1}) = s_n - s_{n-1}$$

ezért

$$a_n \to A - A = 0.$$

□

A fenti tételben a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ feltétel szükséges de nem elégséges feltétele a sor konvergenciájának. Számos olyan divergens sor létezik, melynek tagjai nullához tartanak. Ilyen például a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

harmonikus sor.

1.2.4. Tétel. [2] *Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegeinek sorozata (felülről) korlátos.*
Ha egy nemnegatív tagú sor divergens, akkor az összege végtelen.

Bizonyítás. Abból a feltételből, hogy a sor tagjai nemnegatívak, következik, hogy a sor részletösszegeinek sorozata monoton növő. Ha ez a sorozat felülről korlátos, akkor konvergens is, egy a sorozatokra vonatkozó tétel szerint. Ekkor a végtelen sor is konvergens. Ha a részletösszegek sorozata nem korlátos felülről, akkor belátható, hogy végtelenhez tart, és így a szóban forgó végtelen sor divergens és az összege végtelen. □

A következő végtelen sorokkal kapcsolatos tételek alapjául a végtelen számsorozatokra vonatkozó Cauchy-kritérium szolgál. Itt következik, bizonyítás nélkül.

1.2.5. Tétel (Cauchy-kritérium sorozatokra)**. [2]** *Az (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan N, hogy minden $n, m \geq N$ -re*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

.

Ezek után a végtelen sorok konvergenciájának pontos feltétele kimondható.

1.2.6. Tétel (Cauchy-kritérium sorokra)**. [2]** *A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy N index úgy, hogy minden $N \leq n < m$-re*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Mivel $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m = s_m - s_n$, ezért az 1.2.5 tételt s_n sorozatra alkalmazva, az állítás következik. □

Alternáló sorok esetén, a konvergencia elégséges feltétele a következő:

1.2.7. Tétel (Leibniz-kritérium)**. [2]** *Ha az (a_n) sorozat monoton csökkenő és nullához tart, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ sor konvergens.*

Bizonyítás. Legyen a sor n-edik részletösszege s_n. A feltételből következik, hogy minden n-re

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_{2n-3} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1.$$

Így az (s_{2n}) sorozat monoton növő és felülről korlátos, az (s_{2n-1}) sorozat pedig monoton csökkenő és alulról korlátos, tehát mindkét sorozat konvergens. Mivel

$$s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \to 0,$$

ezért $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$. Ebből következik, hogy az (s_n) sorozat konvergens, és éppen ezt kellett belátnunk.

$\square$

2. fejezet

Divergens sorok

2.1. Szummábilitás

2.1.1. Definíció. [3] Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor szummábilis és a szummája A, ha az $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ részletösszegekre teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = A.$$

A következő két tétel a továbbiakban hasznosnak fog bizonyulni.

2.1.2. Tétel. [3] *Legyen adott az* (a_n) *sorozathoz tartozó* $s_n = \dfrac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1}$ *számtani közepek sorozata. Ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} s_n = a$*.*

Bizonyítás. A sorozatok határértékének definíciója alapján, adott $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy $n \geq N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$. Legyen $|a_0 - a| + \cdots + |a_N - a| = K$. Ha $n \geq N$, akkor

$$|s_n - a| = \left|\frac{(a_0 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n+1}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|a_0 - a| + \cdots + |a_N - a| + \cdots + |a_n - a|}{n+1} \leq$$

$$\leq \frac{K + (n+1)\varepsilon}{n+1} < 2\varepsilon,$$

ha $n + 1 > \dfrac{K}{\varepsilon}$. □

2.1.3. Tétel. [3] *Ha a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sor konvergens, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + 2a_1 + \cdots + (n+1)a_n}{n+1} = 0$$

Bizonyítás. Legyen $\lim_{n\to\infty} s_n = A$, ahol s_n a sor n-edik részletösszege. Mivel

$$a_0 + 2a_1 + \cdots + (n+1)a_n = (a_0 + \cdots + a_n) + (a_1 + \cdots + a_n) + \cdots + (a_n) =$$

$$= s_n + (s_n - s_0) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) = (n+1)s_n - (s_0 + \cdots + s_{n-1}),$$

ezért

$$\frac{a_0 + 2a_1 + \cdots + (n+1)a_n}{n+1} = s_n - \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n+1}. \tag{2.1}$$

Mivel $s_n \to A$, ezért a 2.1.2 miatt $\dfrac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} \to A$.

Így $n \to \infty$ esetén

$$\frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n} \to 1 \cdot A = A$$

Tehát a (2.1) jobb oldala nullához tart. □

2.1.4. Tétel. [3] *Ha a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *végtelen sor konvergens, és az összege* A*, akkor a sor szummábilis, és a szummája szintén* A*.*

Bizonyítás. A 2.1.2 miatt ha egy (s_n) sorozat A-hoz tart, akkor az $(s_0 + \cdots + s_n)/(n+1)$ sorozat is A-hoz tart. □

2.1.5. Tétel. [3] *Ha a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *végtelen sor szummábilis, akkor* $s_n/(n+1) \to 0$ *és* $a_n/(n+1) \to 0$*.*

Bizonyítás. A 3. feladatban. □

2.1.6. Tétel (Tauber)**. [3]** *A* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha szummábilis és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + 2a_1 + \cdots + (n+1)a_n}{n+1} = 0. \tag{2.2}$$

Bizonyítás. Ha a sor konvergens, akkor a 2.1.4 szerint szummábilis, a 2.2 pedig a 2.1.3 tételből következik.

Most tegyük fel, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ szummábilis, és a szummája A. Ha s_n jelöli a sor n-edik részletösszegét, akkor $n \to \infty$ esetén

$$\frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n} \to 1 \cdot A = A$$

Mivel

$$\frac{a_0 + 2a_1 + \cdots + (n+1)a_n}{n+1} = \frac{s_n + (s_n - s_0) + \cdots + (s_n - s_{n-1})}{n} =$$
$$= s_n - \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n+1},$$

A (2.2) miatt $n \to \infty$ esetén a bal oldal nullához tart. Így $\lim_{n\to\infty} s_n = A$. Tehát a sor konvergens, és az összege A. □

Ennek a tételnek egy következménye a következő:

2.1.7. Tétel. [3] *Ha a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *szummábilis, és* $(n+1) \cdot a_n \to 0$*, akkor a sor konvergens.*

Bizonyítás. Ha $(n+1) \cdot a_n \to 0$,akkor a (2.2) teljesül a 2.1.2 tétel miatt.Tehát alkalmazhatjuk a 2.1.6 tételt. □

2.1.8. Tétel. **[3]** *Ha* $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$*, akkor*

$$|\sin x + \cdots + \sin nx| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

és

$$|\cos x + \cdots + \cos nx| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

minden $n = 1{,}2, \cdots -re.$

Bizonyítás. A

$$2\sin\frac{x}{2}\sin jx = \cos\left(jx - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(jx + \frac{x}{2}\right)$$

és

$$2\sin\frac{x}{2}\cos jx = \sin\left(jx + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(jx - \frac{x}{2}\right)$$

azonosságokat $j = 1, \ldots, n$-re összeadva kapjuk:

$$2\sin\frac{x}{2}(\sin x + \cdots + \sin nx) = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cdots - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)$$

$$2\sin\frac{x}{2}(\cos x + \cdots + \cos nx) = \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} \cdots + \sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)$$

Innen:

$$\sin x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{2.3}$$

$$\cos x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{2.4}$$

Innen a fenti állítás könnyen következik.

□

2.1.9. Tétel. **[3]** *A* $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ *sor minden* $x \in \mathbb{R}$*-re szummábilis, és a szummája* $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ *esetén nulla,* $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ *esetén pedig* $\frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$
A $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ *sor minden* $x \neq 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ *esetén szummábilis, és a szummája* $-\frac{1}{2}$.

Bizonyítás. Ha $x = 2k\pi$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ sor minden tagja nulla, tehát minden részletösszege, és így a szummája is nulla. Feltehetjük tehát, hogy $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Vezessük be az $s_n = s_n(x) = \sum_{j=1}^{n}\sin jx$ és $c_n = c_n(x) = \sum_{j=1}^{n}\cos jx$ jelöléseket. A (2.3) és (2.4) egyenlőségeket kicsit átalakítva, azt kapjuk hogy

$$\sin x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos nx\cos\frac{x}{2} + \sin nx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin nx\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos nx - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Így:

$$s_n(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \cdot \cos nx + \frac{1}{2} \cdot \sin nx$$

$$c_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{ctg}\,\frac{x}{2} \cdot \sin nx + \frac{1}{2} \cdot \cos nx$$

Ahonnan:

$$\frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = \frac{1}{2}\text{ctg}\,\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\text{ctg}\,\frac{x}{2} \cdot \frac{c_n(x)}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s_n(x)}{n}$$

és

$$\frac{c_1 + \cdots + c_n}{n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{ctg}\,\frac{x}{2} \cdot \frac{s_n(x)}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{c_n(x)}{n}.$$

Mivel az (s_n) és (c_n) sorozatok korlátosak a 2.1.8 tétel miatt, így $n \to \infty$ esetén:

$$\frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} \to \frac{1}{2}\text{ctg}\,\frac{x}{2}$$

és

$$\frac{c_1 + \cdots + c_n}{n} \to -\frac{1}{2}.$$

□

2.2. Feladatok

1. Feladat. *Szummábilis-e (a fenti értelemben) az* $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ *sor?*

Megoldás.

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{1 + 0 + 1 + 0 + \ldots}{n+1} = \begin{cases} \frac{\frac{n}{2}+1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} & 2 \mid n \\ \frac{\frac{1}{2}(n+1)}{n+1} = \frac{1}{2} & 2 \nmid n \end{cases}$$

Mivel páros n esetén is $\frac{1}{2}$-hez tart a részletösszegek számtani közepe:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{2k}}{2k+1} = \frac{1}{2}$$

ezért minden n-re igaz hogy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Tehát a sor szummábilis, és szummája $\frac{1}{2}$. □

2. Feladat. [3] *Szummábilis-e (a fenti értelemben) az* $1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots$ *sor?*

Megoldás. [1]

$$s_n = 1 - 2 + 3 - \ldots$$

$$\frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{1 - 1 + 2 - 2 \ldots}{n+1} = \begin{cases} 0 & 2 \nmid n \\ \frac{n+2}{2(n+1)} & 2 \mid n \end{cases}$$

[1] Ahol egy feladat megoldásánál nem hivatkozok, az önálló munka.

Így

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{2k}}{2k+1} = \frac{1}{2}$$

és

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{2k-1}}{2k} = 0$$

A részletösszegek számtani közepéből álló sornak két torlódási pontja van, így a $1 - 2 + {} + 3 - 4 + 5 \ldots$ sor nem szummábilis. $\square$

3. Feladat. [3] *Bizonyítsuk be, hogy ha a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sor szummábilis, akkor* $n \to \infty$ *esetén* $s_n/(n+1) \to 0$ *és* $a_n/(n+1) \to 0$.

Megoldás. A sor szummábilis, tehát:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = A$$

Ekkor:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = A \tag{2.5}$$

Így:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} - \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n+1} = A - A = 0$$

A bal oldalt kifejtve írható:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} = 0$$

Innen az előzőekhez hasonlóan:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} - \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n+1} = 0 - 0 = 0$$

$\square$

4. Feladat. [3] *Bizonyítsuk be, hogy ha egy nemnegatív tagú sor szummábilis, akkor konvergens.*

Megoldás. $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N} - re$, $m_n = \dfrac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$

A sor szummábilis, tehát:

$$\lim_{n\to\infty} m_n = A$$

$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ tehát az s_n sorozat monoton növekvő. Így az 1.2.4 tétel miatt, elég azt igazolni, hogy az s_n sorozat (felülről) korlátos.

Indirekt tegyük fel, hogy s_n felülről nem korlátos. Ekkor egy rögzített $K > A$ pozitív valós szám esetén létezik $N_{(K)}$ természetes szám, amelyre $s_n > K$ ha $n > N_{(K)}$.

$$m_n = \frac{s_0 + \cdots + s_{N_{(K)}} + s_{(N_{(K)}+1)} + \cdots + s_n}{n+1} \geq \frac{s_{(N_{(K)}+1)} + \cdots + s_n}{n+1} \geq$$

$$\geq \frac{(n - N_{(K)} - 1)K}{n+1}$$

Egy a sorozatokra vonatkozó tétel szerint ha $a_n \geq b_n$ véges sok n kivételével és $\lim_{n\to\infty} a_n = = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ akkor $a \geq b$. Ez alapján:

$$\lim_{n\to\infty} m_n = A \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n - N_{(K)} - 1}{n+1} \cdot K = K > A$$

amiből $A > A$ következik, ami ellentmondás.

$\square$

5. Feladat. [3] *Bizonyítsuk be, hogy ha $a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq 0$ akkor az $a_0 - a_1 + a_3 - a_4 \ldots$ sor szummábilis.*

Megoldás. Legyen $s_n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$
Vizsgáljuk az (s_n) sorozatot:

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ \ldots\ s_{n-2},\ s_{n-1},\ s_n$$

Ekkor:

$$s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq s_{2k}$$

$$s_{2k+3} = s_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq s_{2k+1}$$

illetve:

$$s_{2k+2} = s_{2k+1} + a_{2k+2} \geq s_{2k+1}$$

$$s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k}$$

Az első két egyenlőtlenségből látszik, hogy (s_n) páros indexű részsorozata monoton csökkenő, a páratlan indexű részsorozata monoton növekvő.
Utóbbi kettő egyenlőtlenségből látszik, hogy az (s_n) sorozat elemei között egy adott páratlan indexűnél mindkét szomszédos páros indexű nagyobb egyenlő.
A feltétel szerint fennáll még: $s_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N} - re$.

Tehát (s_{2k+1})-nak egy felső korlátja az (s_{2k}) egy tetszőleges tagja. Igaz az is , hogy (s_{2k})-nak alsó korlátja (s_{2k+1}) egy tetszőleges tagja, de fontosabb, hogy felső korlátja is van: s_0.

A fentiekből és az 1.2.4 tételből következik, hogy (s_{2k}) és (s_{2k+1}) is konvergens.
Legyen $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = A$ és $\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = B$.

Ekkor

$$\lim_{k\to\infty} m_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{s_0 + s_2 + \cdots + s_{2k} + s_1 + s_3 + \cdots + s_{2k+1}}{2k+2} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{s_0 + s_2 + \cdots + s_{2k}}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s_1 + s_3 + \cdots + s_{2k+1}}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{2}(A + B)$$

Az utolsó egyenlőségnél felhasználtam a 2.1.2 tételt. Hasonlóan:

$$\lim_{k\to\infty} m_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{s_0 + s_2 + \cdots + s_{2k} + s_1 + s_3 + \cdots + s_{2k-1}}{2k+1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{s_0+s_2+\dots+s_{2k}}{k+1}\cdot\frac{k+1}{2k+1}+\frac{s_1+s_3+\dots+s_{2k-1}}{k}\cdot\frac{k}{2k+1} =$$
$$= \frac{1}{2}(A+B)$$

Így $\lim_{n\to\infty} m_n = \frac{1}{2}\cdot(A+B)$ tehát az $a_0 - a_1 + a_2 - \dots$ sor szummábilis.

□

6. Feladat. [3] *Bizonyítsuk be, hogy $x, y \in [0{,}2\pi]$, $x \neq y$ és $x+y \neq 2\pi$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \sin ny$ sor szummábilis, és a szummája nulla.*

Megoldás. [3][2] Alkalmazzuk a

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

azonosságot!

$$\sum_{j=1}^{n}\sin jx\cdot\sin jy = \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}(\cos j(x-y)-\cos j(x+y))$$

Ha $x+y\neq 2\pi$ akkor a $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-y)$ és a $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x+y)$ sor is szummábilis a 2.1.9 tétel alapján és szummája mindkettőnek $-\frac{1}{2}$. Ekkor a különbségük is szummábilis, és a különbség szummája $-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. (Ez a később bizonyításra kerülő 3.1.4 tétel következménye.) Így a fenti állítást beláttuk.

Viszont ha $x+y=2\pi$ akkor a 2.1.9 tételt alkalmazva a $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-y)$ sorra, ez továbbra is szummábilis, és a szummája $-\frac{1}{2}$.
A $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x+y)$ sor esetében: $\cos j(x+y) = \cos 2j\pi = 1$ $\forall j\geq 1$-re. Így ez a sor nem szummábilis. Ekkor az eredeti $\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}(\cos j(x-y)-\cos j(x+y))$ sor sem az.

□

7. Feladat. [3] *a) Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $x = k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.*
b) Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ sor minden x-re divergens.
c) Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2x$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $x = k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Megoldás. [3] b): Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ sor konvergens. Ennek szükséges feltétele, hogy $\cos nx\to 0$ (ha $n\to\infty$). Ennek részsorozata $\cos 2nx$, ezért tart nullához. Másrészt, $\cos 2nx = 2\cos^2 nx - 1 \to -1$, ami ellentmondás.
a): Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ sor konvergens. Ekkor $\sin nx\to 0$ $(n\to\infty)$, amiből

$$\cos nx\cdot\sin x = \sin((n+1)x) - \sin nx\cdot\cos x \tag{2.6}$$

[2] Ötlet a szakirodalomban, megoldás kidolgozása önálló munka.

Itt a jobb oldal nullához tart, így a bal is. Mivel $\cos nx$ nem tart nullához, ezért $\sin x = 0$ azaz $x = k\pi$. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nk\pi$ sor konvergens, mert minden tagja 0.
c):Tegyük fel hogy a sor konvergens. Így a $\sin n^2x \to 0$, és ekkor a 2.6 képlethez hasonlóan írható:

$$\cos n^2x \cdot \sin((2n+1)x) = \sin((n+1)^2x) - \sin(n^2x) \cdot \cos((2n+1)x) \tag{2.7}$$

A $\cos((2n+1)x)$ korlátos. Így a 2.7 jobb oldala tart a nullához.
Mivel $|\cos n^2x| = \sqrt{1-\sin^2 n^2x} \to 1$ ezért a 2.7 bal oldala akkor és csak akkor tart nullához, ha $\sin((2n+1)x) \to 0$.
Felírható a következő:

$$2\sin(2nx) \cdot \cos x = \sin((2n+1)x) + \sin((2n-1)x)$$

Itt a jobb oldal nullához tart. Ezért a bal oldalon vagy $\sin(2nx) \to 0$, vagy $\cos x = 0$.
Itt $\cos x = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\sin(2nx) \to 0$ akkor és csak akkor ha $x = \frac{k\pi}{2}(k \in \mathbb{Z})$, és ez magában foglalja $\cos x = 0$ megoldásait is.
Ha $x = \frac{k\pi}{2}(k \in \mathbb{Z})$ és k páratlan, akkor $\sin n^2x = \pm 1$ minden páratlan $n-re$ ami lehetetlen. Így k páros és $x = \frac{k\pi}{2}$, vagyis $x = k^*\pi$. Ezzel ezt az irányt beláttuk.

Másrészt ha $x = k\pi$ akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2x$ sor minden tagja nulla, így a sor konvergens.

$\square$

Végezetül, a 2.1.7 tétel kimondható egy kevésbé szigorú feltétellel:

8. Feladat. [3] *Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szummábilis, és az $((n+1)a_n)$ sorozat alulról vagy felülről korlátos, akkor a sor konvergens.*

Megoldás. [3] Legyen $s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. A feltétel szerint az

$$m_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

sorozat konvergens. Tegyük fel, hogy A-hoz konvergál, és cseréljük ki a sor első tagját a_0-t $a_0 - A$-ra! Így elértük, hogy m_n nullához tart.
Feltehetjük, hogy $((n+1)a_n)$ alulról korlátos, mert különben áttérünk a $\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)$ sorra. $(n+1)a_n \geq -b$ minden $\forall n \in \mathbb{N}$-re, ahol b pozitív egész. Szorozzuk meg $\frac{1}{b}$-vel a sor minden tagját, az új sorra teljesül hogy $a_n^* \geq -\frac{1}{n+1}$ és a két sor egyszerre konvergens (illetve divergens).

Azt kell tehát belátnunk, hogy ha $a_n \geq -\frac{1}{n+1}$ minden n-re és $n \to \infty$ esetén $m_n \to 0$ akkor $s_n \to 0$.

Legyen $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ adott és tegyük fel, hogy $s_n \geq 2\varepsilon$ végtelen sok n-re. Ha $s_n \geq 2\varepsilon$ és $k \leq \varepsilon \cdot (n+1)$ akkor

$$s_{n+k} = s_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k} \geq 2\varepsilon - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \cdots - \frac{1}{n+k} \geq$$

$$\geq 2\varepsilon - \frac{k}{n+2} \geq 2\varepsilon - \frac{\varepsilon(n+1)}{n+2} = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{n+2} > \varepsilon$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$s_0 + \cdots + s_{(n+[\varepsilon(n+1)])} - (s_0 + \cdots + s_n) = s_{n+1} + \cdots + s_{(n+[\varepsilon(n+1)])} > [\varepsilon(n+1)] \cdot \varepsilon >$$

$$> (\varepsilon \cdot n)\varepsilon = \varepsilon^2 n$$

Innen:

$$\frac{s_0 + \cdots + s_{(n+[\varepsilon(n+1)])}}{n} - \frac{(s_0 + \cdots + s_n)}{n} > \varepsilon^2$$

ami elég nagy n-re lehetetlen, mert $\dfrac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} \cdot \dfrac{n+1}{n} \to 0$ és

$$\frac{s_0 + \cdots + s_{(n+[\varepsilon(n+1)])}}{n+[\varepsilon(n+1)]+1} \cdot \frac{n+[\varepsilon(n+1)]+1}{n} \to 0.$$

Most tegyük fel, hogy $s_n \leq -2\varepsilon$ végtelen sok n-re.

Ha $s_n \leq -2\varepsilon$ és $k < \dfrac{\varepsilon \cdot n}{2}$, akkor

$$s_{n-k} = s_n - a_n - \cdots - a_{(n-k+1)} \leq -2\varepsilon + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n-k+2} \leq -2\varepsilon + \frac{k}{n-k} =$$

$$= -\varepsilon + \frac{-\varepsilon n + k(1+\varepsilon)}{n-k} < -\varepsilon + \frac{-\varepsilon n + \frac{\varepsilon n}{2}(1+\varepsilon)}{n - \frac{\varepsilon n}{2}} = -\varepsilon + \frac{-2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon^2}{2-\varepsilon} =$$

$$= -\varepsilon + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2-\varepsilon} < -\varepsilon$$

Az hogy az utolsó összegnél $-\varepsilon$ szigorúan nagyobb, a $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ feltételből következik.

Ebből:

$$s_0 + \cdots + s_n - (s_0 + \cdots + s_{(n-[\frac{\varepsilon n}{2}])}) < -\left[\frac{\varepsilon n}{2} + 1\right] \varepsilon <$$

$$< -\left(\frac{\varepsilon n}{2}\right) \varepsilon = -\frac{\varepsilon^2 n}{2}$$

Innen:

$$\frac{s_0 + \cdots + s_n}{n} - \frac{(s_0 + \cdots + s_{(n-[\frac{\varepsilon n}{2}])})}{n} < -\frac{\varepsilon^2}{2}$$

Ami elég nagy n-re lehetetlen, mert $\dfrac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} \cdot \dfrac{n+1}{n} \to 0$ és

$$\frac{(s_0 + \cdots + s_{(n-[\frac{\varepsilon n}{2}])})}{n - [\frac{\varepsilon n}{2}] + 1} \cdot \frac{n - [\frac{\varepsilon n}{2}] + 1}{n} \to 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy $|s_n| < 2\varepsilon$ minden elég nagy n-re, tehát $s_n \to 0$.

$\square$

3. fejezet

A szummábilitás általánosításai

3.1. A Hölder-szummáció

A kényelmesebb jelölés kedvéért az n-edik részletösszeget ezentúl s_n helyett A_n-el jelölöm. Így ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ szummábilis és szummája A akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ kifejtése:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_n}{n+1} = A \tag{3.1}$$

Hölder nevéhez fűződik az egyik legkézenfekvőbb általánosítás. Egymás után elvégzett szummációk egy sorozatát definiálta a következő módon:

Legyen a (H,1) módszer ekvivalens a már korábban megismert szummációval (3.1), és legyen ennek az n-edik részletösszege H_n^1.

$$H_n^1 = \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_n}{n+1}$$

Ha most ismételten elvégezzük a (H_n^1) sorra a (3.1) szummációt, megkapjuk az eredeti $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor $(H,2)$-szummáját:

$$H_n^2 = \frac{H_0^1 + H_1^1 + \cdots + H_n^1}{n+1} \to A \ (n \to \infty)$$

A módszer hasonlóan értelmezhető bármely pozitív k-ra:

3.1.1. Definíció. [1] Legyen $k = 0,1,2,\ldots$ nemnegatív egész szám. Ekkor H_n^k jelentse $k = 0$-ra: $H_n^0 = A_n$, egyébként:

$$H_n^{k+1} = \frac{H_0^k + H_1^k + \cdots + H_n^k}{n+1} \tag{3.2}$$

Ha $n \to \infty$ esetén $H_n^k \to A$, akkor azt mondjuk hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (H,k)-szummábilis és a (H,k)-szummája A:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = A(H,k).$$

A $(H,0)$-szummábilitás alatt a konvergenciát értjük.

3.1.2. Tétel. [1] *Legyen $k > 0$ és $k' > k$. Ha $\sum a_n = A(H,k)$, akkor $\sum a_n = A(H,k')$.*

Bizonyítás. A tétel szerint tehát a (H_n^k) sorozat konvergál A-hoz. Ekkor a (2.1.2) tétel szerint ($n \to \infty$ esetén) az ehhez a sorozathoz tartozó számtani közepek sorozata is A-hoz tart:

$$H_n^{k+1} = \frac{H_0^k + H_1^k + \cdots + H_n^k}{n+1} \to A \ (n \to \infty)$$

Teljes indukcióval belátható, hogy ekkor minden $k' > k$-ra:

$$H_n^{k'} \to A \ (n \to \infty)$$

□

3.1.3. Tétel. [1][1] *Ha* $\sum a_n$ *(H,k)-szummábilis, akkor* $A_n/n^k \to 0$ *és* $a_n/n^k \to 0$.

Bizonyítás. Írjuk fel H_n^{k-1}-et a következőképpen:

$$H_n^{k-1} = (H_0^{k-1} + \cdots + H_n^{k-1}) - (H_0^{k-1} + \cdots + H_{n-1}^{k-1})$$

$$H_n^{k-1} = (n+1) \cdot \frac{H_0^{k-1} + \cdots + H_n^{k-1}}{n+1} - n \cdot \frac{H_0^{k-1} + \cdots + H_{n-1}^{k-1}}{n}$$

$$H_n^{k-1} = (n+1) \cdot H_n^k - n \cdot H_{n-1}^k \tag{3.3}$$

A következőkhöz használom a kis ordó jelölést: Legyen $f(n) = o(g(n))$ akkor és csak akkor, ha $n \to \infty$ esetén $f(n)/g(n) \to 0$ teljesül.
Például, $g(n) = 1$-re: $f(n) = o(1) \Leftrightarrow f(n) \to 0 \ (n \to \infty)$.

Ekkor, mivel a sor (H,k)-szummábilis, ezért:$H_n^k \to A$ és $H_{n-1}^k \to A$ tehát: $H_n^k = A + o(1)$ illetve $H_{n-1}^k = A + o(1)$. Ezt a (3.3) képletbe beírva:

$$H_n^{k-1} = (n+1) \cdot (A + o(1)) - n \cdot (A + o(1))$$

Az $o(1)$ jobbról is és balról is tarthat a nullához, ezért:

$$H_n^{k-1} = A + (2n+1) \cdot o(1)$$

Innen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n^{k-1}}{n} = 0$$

$$H_n^{k-1} = o(n), \ (H_{n-1}^{k-1} = o(n))$$

Hasonlóan:

$$H_n^{k-2} = (n+1) \cdot H_n^{k-1} - n \cdot H_{n-1}^{k-1} = (2n+1) \cdot o(n)$$

$$\frac{H_n^{k-2}}{n^2} = \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{o(n)}{n}$$

$$H_n^{k-2} = o(n^2)$$

És így tovább. Végül:

$$H_n^0 = A_n = o(n^k)$$

azaz

$$A_n/n^k \to 0 \ (n \to \infty)$$

[1] A bizonyítás részletezése saját munka.

illetve:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{A_n}{n^k} - \frac{A_{n-1}}{n^k} \right) = 0$$

azaz

$$a_n/n^k \to 0 \ (n \to \infty).$$

□

3.1.4. Tétel. **[1]**[2] *A Hölder-szummáció tulajdonságai:*
a) $\sum C \cdot a_n = C \cdot \sum a_n$,
b) $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$,
c) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = a_0 + (a_1 + a_2 + \dots)$,
d) $a_0 + (a_1 + a_2 + \dots) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$
Itt mindegyik egyenlőség úgy értendő, hogy ha a jobboldal (H, k)-szummábilis, akkor a baloldal is és a két érték megegyezik. Így például d) azt jelenti, hogy ha $a_0 + a_1 + \dots$ (H, k)-szummája A, akkor $a_1 + a_2 + \dots$ (H, k)-szummája $A - a_0$.

Bizonyítás. A következő alfejezetben bizonyításra kerülő ekvivalencia tétel (3.2.5) alapján elegendő lesz a 3.1.4 tételben szereplő tulajdonságokat a Hölder- és Cesaro-szummációk közül csak az egyikre bizonyítani. A c) és d) állításokat a Cesaro-szummációra bizonyítom.
a) Legyen $b_n = C \cdot a_n$

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

így:

$$B_n = Ca_0 + Ca_1 + \cdots + Ca_n = C(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = C \cdot A_n.$$

Ekkor:

$$H_n^1(B) = \frac{B_0 + B_1 + \cdots + B_n}{n+1} = \frac{CA_0 + CA_1 + \cdots + CA_n}{n+1} =$$
$$= C\frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_n}{n+1} = C \cdot H_n^1(A)$$

Most k szerinti teljes indukcióval:
Tegyük fel hogy,

$$H_n^k(B) = C \cdot H_n^k(A)$$

Ekkor:

$$H_n^{k+1}(B) = \frac{H_0^k(B) + H_1^k(B) + \cdots + H_n^k(B)}{n+1} = \frac{CH_0^k(A) + CH_1^k(A) + \cdots + CH_n^k(A)}{n+1} =$$
$$= C\frac{H_0^k(A) + H_1^k(A) + \cdots + H_n^k(A)}{n+1} = C \cdot H_n^{k+1}(A)$$

b)

$$A_n + B_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + b_0 + b_1 + \cdots + b_n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots (a_n + b_n) =$$
$$= (A + B)_n$$
$$H_n^1(A) + H_n^1(B) = \frac{A_0 + \cdots + A_n}{n+1} + \frac{B_0 + \cdots + B_n}{n+1} = \frac{(A_0 + B_0) + \cdots + (A_n + B_n)}{n+1}$$

[2] A bizonyítás saját munka.

$$= H_n^1(A+B)$$

Tegyük fel hogy:

$$H_n^k(A) + H_n^k(B) = H_n^k(A+B).$$

Ekkor:

$$H_n^{k+1}(A) + H_n^{k+1}(B) = \frac{H_0^k(A) + \dots H_n^k(A)}{n+1} + \frac{H_0^k(B) + \dots + H_n^k(B)}{n+1} =$$

$$= \frac{H_0^k(A+B) + \dots + H_n^k(A+B)}{n+1} = H_n^{k+1}(A+B)$$

□

3.2. A Cesaro-szummáció

A Hölder-szummációtól eltérően, a most következő módszerben k darab összegzést követ egyetlen osztás.

3.2.1. Definíció. [1] Legyen $A_n^0 = A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$,
$A_n^k = A_0^{k-1} + A_1^{k-1} + \dots + A_n^{k-1}$ és E_n^k legyen egyenlő A_n^k-nak azon speciális értékével, amikor $a_0 = 1$ és $a_n = 0$ minden $n > 0$-ra, azaz ha $A_n = 1$ minden n-re. Ha

$$C_n^k(A) = \frac{A_n^k}{E_n^k} \to A$$

$n \to \infty$ esetén, akkor azt mondjuk hogy a $\sum a_n$ sor (C,k)-szummábilis és (C,k)-szummája A, azaz:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = A(C,k).$$

3.2.2. Megjegyzés. [1][3] Az A_n^k-t ki lehet fejezni az A_n illetve az a_n sorozat tagjaival. Tekintsük a következő azonosságot:[4]

$$(1-x)^{-p} = \sum (-1)^n \binom{-p}{n} x^n = \sum \binom{n+p-1}{p-1} x^n \tag{3.4}$$

Itt felhasználtuk, hogy:

$$(-1)^n \binom{-p}{n} = \frac{(-1)^n(-p)(-p-1)\dots(-p-n+1)}{n!} =$$

$$= \frac{(p+n-1)(p+n-2)\dots(p+1)p(p-1)!}{n!\,(p-1)!} = \frac{(p+n-1)!}{n!\,(p-1)!} = \binom{n+p-1}{p-1}$$

Mivel

$$A_n^j = A_0^{j-1} + A_1^{j-1} + \dots + A_{n-1}^{j-1} + A_n^{j-1}$$

és

$$A_{n-1}^j = A_0^{j-1} + A_1^{j-1} + \dots + A_{n-1}^{j-1}$$

[3] A levezetés részletezése önálló munka.

[4] A továbbiakban, ha azt nem jelölöm külön, az összegzést $n = 0$-tól végtelenig végzem.

ezért

$$A_n^j - A_{n-1}^j = A_n^{j-1} \tag{3.5}$$

Igaz továbbá a következő:

$$\sum A_n^k x^n = (1-x)^{-1} \sum A_n^{k-1} x^n \tag{3.6}$$

Mivel átírható a következő alakba:

$$\sum A_n^k x^n - x \cdot \sum A_n^k x^n = \sum A_n^{k-1} x^n$$

Ez az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a bal oldali polinomban adott fokú tag együtthatója megegyezik a jobb oldali polinomban ugyanazon fokú tag együtthatójával. Az x^m tag együtthatójára:

$$A_m^k - A_{m-1}^k = A_m^{k-1}$$

Ez éppen a (3.5), így (3.6) teljesül. Hasonló módon folytatva:

$$\sum A_n^k x^n = (1-x)^{-1} \sum A_n^{k-1} x^n = (1-x)^{-2} \sum A_n^{k-2} x^n = \dots$$

$$\dots = (1-x)^{-k} \sum A_n x^n = (1-x)^{-k-1} \sum a_n x^n \tag{3.7}$$

Innen, felhasználva a (3.4) azonosságot:

$$\sum A_n^k x^n = (1-x)^{-k} \sum A_n x^n = \sum \binom{n+k-1}{k-1} x^n \sum A_n x^n \tag{3.8}$$

A bal oldali polinomban az x^n együtthatója A_n^k, így a jobb oldaliban is az. A jobb oldalon az n-ed fokú tag így adódik:

$$\sum_{v=0}^{n} \binom{n-v+k-1}{k-1} x^{n-v} A_v x^v$$

Tehát:

$$A_n^k = \sum_{v=0}^{n} \binom{n-v+k-1}{k-1} A_v = \sum_{v=0}^{n} \binom{v+k-1}{k-1} A_{n-v}.$$

Ha most a (3.7) egyenlőségből az utolsó lépést használom fel, és kifejtem (3.8) mintájára:

$$\sum A_n^k x^n = (1-x)^{-(k+1)} \sum a_n x^n = \sum \binom{n+k}{k} x^n \sum A_n x^n. \tag{3.9}$$

Így az előző gondolatmenethez hasonlóan az n-ed fokú tag együtthatójára:

$$A_n^k = \sum_{v=0}^{n} \binom{n-v+k}{k} a_v = \sum_{v=0}^{n} \binom{v+k}{k} a_{n-v}.$$

Ha $a_0 = 1$ és a többi $a_n = 0$, akkor $A_n^k = \binom{n+k}{k}$. Így:

$$E_n^k = \binom{n+k}{k} = \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+n)}{n!}. \tag{3.10}$$

Mindazonáltal:

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$$

ha k rögzített, és $n \to \infty$.

Így a Cesaro-szummábilitás úgy is definiálható hogy ha

$$k!\, n^{-k} A_n^k \to A$$

fennáll ($n \to \infty$ esetén), akkor a sor (C, k)-szummábilis és (C, k)-szummája A.

3.2.3. Tétel. [1][5] *A Cesaro-szummábilitásra is teljesülnek a 3.1.4 tételben foglaltak.*

Bizonyítás. Az a) és b) állítások a 3.1.4 és a 3.2.5 tételekből következnek. A c) és a d) állítások bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy ha

$$b_n = a_{n+1}, \tag{3.11}$$

akkor a

$$\sum a_n = A(C,k) \textit{ illetve } \sum b_n = (A - a_0)(C,k)$$

állítások egyikéből következik a másik, vagy fordítva. Ekkor a (3.11) és a (3.7) összefüggések felhasználásával:

$$\sum A_n^k x^n = (1-x)^{-k-1} \sum a_n x^n = (1-x)^{-k-1}(a_0 + x \sum b_n x^n)$$

$$\sum A_n^k x^n = (1-x)^{-k-1} a_0 + (1-x)^{-k-1} x \sum b_n x^n$$

Az a_0-t tartalmazó tagra felhasználva a (3.4) összefüggést, a másik tagot pedig a (3.7) szerint átírva:

$$\sum A_n^k x^n = \sum \binom{n+k}{k} x^n a_0 + x \sum B_n^k x^n$$

$$\sum A_n^k x^n = \sum \binom{n+k}{k} x^n a_0 + \sum B_{n-1}^k x^n.$$

Az egyenlőség két oldalán álló polinomok n-ed fokú tagjainak együtthatóját vizsgálva minden $n > 0$-ra:

$$A_n^k = \binom{n+k}{k} a_0 + B_{n-1}^k.$$

Felhasználva a (3.10) összefüggést:

$$A_n^k = E_n^k a_0 + B_{n-1}^k$$

$$A = a_0 + B$$

Ezt kellett belátnunk.

□

[5] A bizonyítás részletezése önálló munka.

Meg lehet mutatni, hogy a Hölder- és Cesaro-szummációk bizonyos értelemben ekvivalensek egymással, ehhez azonban szükség lesz a következő tételre.

3.2.4. Tétel. [1][6] *Ha*

$$m_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \tag{3.12}$$

akkor a

$$s_n \to s(C,k),\ \textit{illetve}\ m_n \to s(C,k-1)$$

állítások ekvivalensek.

Bizonyítás. Definiáljuk a s_n^k-t hasonló módon mint ahogy A_n^k volt definiálva a 3.2.1 definícióban. Ekkor a definíciót és a (3.10) összefüggést felhasználva:

$$s_n^k = \binom{n+k}{k} C_n^k(s). \tag{3.13}$$

Az m_n^k és $C_n^k(m)$ hasonlóan definiálható.

Legyen $u_v^1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_v$, $u_v^2 = u_0^1 + u_1^1 + \cdots + u_v^1$. Ekkor:

$$\sum_{v=0}^{n} (v+p)u_v = (0+p)u_0 + (1+p)u_1 + \cdots + (n+p)u_n =$$

$$= p \cdot u_n^1 + n \cdot u_n^1 - n \cdot u_0 - (n-1) \cdot u_1 - \cdots - 1 \cdot u_{n-1} = p \cdot u_n^1 + n \cdot u_n^1 - \sum_{v=0}^{n-1} u_v^1 =$$

$$= (n+p)u_n^1 + u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n - [u_0 + (u_0+u_1) + (u_0+u_1+u_2) + \cdots + (u_0+u_1+\cdots+u_n)]$$

Tehát:

$$\sum_{v=0}^{n} (v+p)u_v = (n+p+1)u_n^1 - u_n^2 \tag{3.14}$$

teljesül minden p és $n \geq 0$ egészre. Innen, mivel a (3.12) alapján $s_n^1 = (n+1)m_n$:

$$s_n^2 = \sum_{v=0}^{n} s_v^1 = \sum_{v=0}^{n} (v+1)m_v = (n+2)m_n^1 - m_n^2$$

Hasonlóan:

$$s_n^3 = \sum_{v=0}^{n} s_v^2 = \sum_{v=0}^{n} (v+2)m_v^1 - \sum_{v=0}^{n} m_v^2 =$$

$$= (n+3)m_n^2 - m_n^3 - m_n^3$$

k-ra vonatkozó teljes indukciót használva:

$$s_n^k = (n+k)m_n^{k-1} - (k-1)m_n^k \tag{3.15}$$

[6] A bizonyítás részletezése önálló munka.

Ekkor:

$$s_n^{k+1} = \sum_{v=0}^{n} s_v^k = \sum_{v=0}^{n}(v+k)m_v^{k-1} - \sum_{v=0}^{n}(k-1)m_v^k$$

A (3.14) összefüggést alkalmazva:

$$s_n^{k+1} = (n+k+1)m_n^k - m_n^{k+1} - (k-1)m_n^{k+1} = (n+k+1)m_n^k - km_n^{k+1}$$

Tehát az eredeti (3.15) feltevésünk igaz.

Előbb a (3.13) majd a (3.15) egyenlőséget alkalmazva:

$$C_n^k(s) = \frac{s_n^k}{\binom{n+k}{k}} = \frac{(n+k)m_n^{k-1}}{\frac{(n+k)!}{k!n!}} - \frac{(k-1)m_n^k}{\binom{n+k}{k}} = \frac{k \cdot m_n^{k-1}}{\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}} - (k-1)C_n^k(m) =$$

$$= k \cdot \frac{m_n^{k-1}}{\binom{n+k-1}{k-1}} - (k-1)C_n^k(m) = k \cdot C_n^{k-1}(m) - (k-1)C_n^k(m)$$

Tehát:

$$C_n^k(s) = k \cdot C_n^{k-1}(m) - (k-1)C_n^k(m) \tag{3.16}$$

[Abból hogy $C_n^{k-1}(m) \to s$ következik hogy $C_n^k(m) \to s$][1][7], így a (3.16) alapján $C_n^k(s) \to s$. Ezzel az eredeti feltevés egyik iránya bizonyítva van.

Másrészről, tegyük fel hogy $C_n^k(s) \to s$. Az m_n^k definíciójából következik, hogy:

$$m_n^{k-1} = m_n^k - m_{n-1}^k.$$

Ekkor a (3.15) összefüggés így írható át:

$$s_n^k = (n+k)m_n^{k-1} - (k-1)m_n^k = (n+k)(m_n^k - m_{n-1}^k) - (k-1)m_n^k =$$

$$= (n+1)m_n^k - (n+k)m_{n-1}^k$$

Ezt a (3.13) egyenlőség alapján átírva:

$$C_n^k(s) = \frac{s_n^k}{\binom{n+k}{k}} = \frac{(n+1)m_n^k}{\binom{n+k}{k}} - \frac{(n+k)m_{n-1}^k}{\binom{n+k}{k}} =$$

$$= (n+1)C_n^k(m) - \frac{n \cdot m_{n-1}^k}{\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}} = (n+1)C_n^k(m) - nC_{n-1}^k(m) \tag{3.17}$$

Innen:

$$C_0^k(s) + C_1^k(s) + \cdots + C_n^k(s) =$$

$$= (C_0^k(m) - 0) + (2C_1^k(m) - C_0^k(m)) + (3C_2^k(m) - 2C_1^k(m)) + \cdots + (n+1)C_n^k(m) - nC_{n-1}^k(m)$$

$$C_0^k(s) + C_1^k(s) + \cdots + C_n^k(s) = (n+1)C_n^k(m) \tag{3.18}$$

A 2.1.2 tétel alapján az (3.18) állításból és a kezdeti feltevésből következik hogy $C_n^k(m) \to s$, ebből és (3.16) egyenlőségből pedig hogy $C_n^{k-1}(m) \to s$.

□

[7] Az állítás bizonyítása a szakirodalomban megtalálható.

3.2.5. Tétel (Ekvivalencia tétel)**.** **[1]** *A (C,k)- és a (H,k)-szummációk ekvivalensek: ha $\sum_{n=0}^{\infty}$ szummázható (C,k) szerint és (C,k)-szummája A, akkor szummázható (H,k) szerint is és a két módszerrel kapott szumma megegyezik.*

Bizonyítás. A 3.2.4 tétel segítségével a bizonyítás könnyen adódik. Ha ezt a tételt k-szor alkalmazzuk, látható hogy a

$$C_n^k(A) \to A,\ C_n^{k-1}\{H^1(A)\} \to A,\ \ldots,\ C_n^1\{H^{k-1}(A)\} \to A,\ H_n^k(A) \to A$$

állítások mind ekvivalensek. Ezt kellett belátnunk. □

Így a szummációk tulajdonságaival foglalkozó tételek (a 3.1.4 és a 3.2.3) is teljes bizonyítást nyernek. Ami az egyikben bizonyítva volt, az ekvivalencia miatt igaz a másikban is.

3.3. Feladatok

9. Feladat. **[3]** *Az $1-2+3-4+5\ldots$ sor $(H,2)$-szummábilis-e?*

Megoldás. [8] Legyen

$$\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1} = \begin{cases} 0 & 2 \nmid n \\ \frac{n+2}{2(n+1)} & 2 \mid n \end{cases}$$

(Ahogy azt a 2. feladatban láttuk.) Kezdődjenek a sorok az 1-es indexszel:

$$t_n = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n} = \begin{cases} 0 & 2 \mid n \\ \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) & 2 \nmid n \end{cases}$$

Legyen

$$u_n = \frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{n}$$

minden n-re. Így:

$$u_{2n} = \frac{n+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{4n} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4n}+\frac{2n-1}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{2n-1} \tag{3.19}$$

és

$$u_{2n+1} = \frac{n+1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}}{4n+2} = \frac{n+1}{4n+2}+\frac{1}{4n+2}+\frac{2n+1}{4n+2}\cdot\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}}{2n+1} \tag{3.20}$$

$$0 < \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1} < \int_1^{2n-1}\frac{1}{x}dx = \ln(2n-1)$$

és

$$0 < \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n+1} < \int_1^{2n+1}\frac{1}{x}dx = \ln(2n+1)$$

[8] Ahol egy feladat megoldásánál nem hivatkozok, az önálló munka.

Továbbá $\frac{\ln n}{n} \to 0$ ha $n \to \infty$, így (3.19) -ből és (3.20)-ból következik, hogy

$$u_{2n} \to \frac{1}{4} \quad , \quad u_{2n+1} \to \frac{1}{4}$$

Ahonnan

$$u_n \to \frac{1}{4}$$

Tehát a $1 - 2 + 3 \ldots$ sor (H,2)-szummábilis, és

$$H_n^2 \to \frac{1}{4}$$

□

10. Feladat. [3] *Mutassuk meg, hogy az* $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^i(i+1)^2 + \ldots$ *sor* $(H,3)$*-szummábilis és határozzuk meg a* $(H,3)$*-szummáját!*

Megoldás.

$$H_n^0 = A_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (i+1)^2 = \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{2} \quad n = 0,1,2\ldots \tag{3.21}$$

Ezt n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyíthatjuk:
$n = 0$-ra: $A_0 = (-1)^0(0+1)^2 = 1 = \frac{1}{2}((-1)^0(0+1)(0+2))$
Tegyük fel, hogy $n \geq 0$ és $A_n = \frac{1}{2}((-1)^n(n+1)(n+2))$
Ekkor

$$A_{n+1} = A_n + (-1)^{n+1}(n+2)^2 = \frac{1}{2}((-1)^n(n+1)(n+2)) + (-1)^{n+1}(n+2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+2)(2n+4-n-1) = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+2)(n+3).$$

$$H_n^1 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} A_i = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (i+1)(i+2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (i+1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (i+1)$$

Legyen

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (i+1)^2 \tag{3.22}$$

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (i+1) \tag{3.23}$$

Folytassuk az eljárást külön a b_n illetve a c_n sorozatra!
(3.21)-ből és (3.22)-ből: $b_n = \frac{1}{n+1} A_n = \frac{1}{2}(-1)^n(n+2)$ adódik.

$$d_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (i+2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (i+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i = \frac{1}{2} \cdot c_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i$$

Mivel

$$c_n = \frac{1}{n+1} \begin{cases} \frac{1}{2}(n+2) & 2 \mid n \\ -\frac{1}{2}(n+1) & 2 \nmid n \end{cases}$$

így

$$d_n = \frac{1}{2} c_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \begin{cases} 1 & 2 \mid n \\ 0 & 2 \nmid n \end{cases} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \begin{cases} \frac{n+2}{2} + 1 & 2 \mid n \\ -\frac{n+1}{2} & 2 \nmid n \end{cases}$$

$$d_n = \frac{1}{4} \begin{cases} 1 + \frac{3}{n+1} & 2 \mid n \\ -1 & 2 \nmid n \end{cases}$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} d_i = \frac{1}{4(n+1)} \begin{cases} (1+\frac{3}{1}) - 1 + (1+\frac{3}{3}) - 1 + \cdots + (1+\frac{3}{n+1}) & 2 \mid n \\ (1+\frac{3}{1}) - 1 + \cdots + (1+\frac{3}{n}) - 1 & 2 \nmid n \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{4(n+1)} \begin{cases} 1 + 3(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}) & 2 \mid n \\ 0 + 3(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) & 2 \nmid n \end{cases}$$

Mivel

$$0 < 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} < 1 + \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = 1 + \ln(n+1)$$

és $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\ln(n+1)}{n+1} = 0$ ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} d_i = 0 \tag{3.24}$$

Hasonlóan:

$$c_n = \frac{1}{2} \begin{cases} 1 + \frac{1}{n+1} & 2 \mid n \\ -1 & 2 \nmid n \end{cases}$$

$$e_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} c_i = \frac{1}{2(n+1)} \begin{cases} (1+\frac{1}{1}) - 1 + (1+\frac{1}{3}) - 1 + \cdots + (1+\frac{1}{n+1}) & 2 \mid n \\ (1+\frac{1}{1}) - 1 + \cdots + (1+\frac{1}{n}) - 1 & 2 \nmid n \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \begin{cases} 1 + 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} & 2 \mid n \\ 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} & 2 \nmid n \end{cases}$$

Ebből $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} c_i = 0$. Így a 3.1.2 szerint:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} e_i}{n+1} = 0 \tag{3.25}$$

$H_n^1 = \dfrac{1}{2} b_n + \dfrac{1}{2} c_n$ így (3.24)-ből és (3.25)-ből következik, hogy az eredeti sor $(H,3)$-szummábilis és $(H,3)$-szummája 0.

□

11. Feladat. *Vizsgáljuk meg az* $1-3+6-10+15+\dots+\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(i+1)^2+\dots$ *sort szummábilitás szempontjából.*

Megoldás. $A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$

$$A_n : 1,\ -2,\ 4,\ -6,\ 9,\ -12,\ 16,\ -20\ \dots$$

$$A_n = \begin{cases} (\frac{n+2}{2})^2 & 2 \mid n \\ -\frac{(n+1)(n+3)}{4} & 2 \nmid n \end{cases} \tag{3.26}$$

Ez teljes indukcióval bizonyítható:

$$n=0: \ 1 = A_0 = \left(\frac{0+2}{2}\right)^2$$

$$n=1: \ -2 = A_1 = -\frac{(1+1)(1+3)}{4}$$

Tegyük fel hogy $n \geq 1$ és (3.26) teljesül.
Ha $2 \mid n$ akkor:

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} = \frac{(n+2)(n+2)}{4} + \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(i+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+2)(n+2)}{4} + (-1)^{n+1}\frac{(n+2)(n+3)}{2} = \frac{n+2}{4}(n+2-2n-6) = -\frac{(n+2)(n+4)}{4}$$

Ha $2 \nmid n$ akkor:

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} = -\frac{(n+1)(n+3)}{4} + \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(i+1)^2 =$$

$$= -\frac{(n+1)(n+3)}{4} + (-1)^{n+1}\frac{(n+2)(n+3)}{2} = -\frac{(n+1)(n+3)}{4} + \frac{(2n+4)(n+3)}{4} =$$

$$= \frac{n+3}{4}(2n+4-n-1) = \left(\frac{n+3}{2}\right)^2$$

Szintén teljes indukcióval bizonyítható hogy:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = \begin{cases} \frac{1}{8}(n+2)(n+4) & 2 \mid n \\ -\frac{1}{8}(n+1)(n+3) & 2 \nmid n \end{cases} \tag{3.27}$$

Ugyanis:

$$n=0: \ A_0 = \left(\frac{0+2}{2}\right)^2 = 1, \ \sum_{i=0}^{0} A_i = \frac{1}{8}(0+2)(0+4) = 1$$

$$n=1: \ A_0 + A_1 = 1-2 = -1, \ \sum_{i=0}^{1} A_i = -\frac{(1+1)(1+3)}{8} = -1$$

Tegyük fel hogy $n \geq 1$ és (3.27) teljesül.
Ha $2 \mid n$ akkor:

$$\sum_{i=0}^{n+1} A_i = \sum_{i=0}^{n} A_i + A_{n+1} = \frac{1}{8}(n+2)(n+4) - \frac{(n+2)(n+4)}{4} = -\frac{(n+2)(n+4)}{8}$$

Ha $2 \nmid n$ akkor:

$$\sum_{i=0}^{n+1} A_i = \sum_{i=0}^{n} A_i + A_{n+1} = -\frac{1}{8}(n+1)(n+3) + \frac{(n+3)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{8}(n+3)(-n-1+2n+6) = \frac{1}{8}(n+3)(n+5)$$

Így tehát:

$$H_n^1 = \frac{\sum_{i=0}^{n} A_i}{n+1} = \frac{1}{8}\begin{cases} \frac{(n+2)(n+4)}{n+1} & 2 \mid n \\ -(n+3) & 2 \nmid n \end{cases} = \frac{1}{8}\begin{cases} n+5+\frac{3}{n+1} & 2 \mid n \\ -(n+3) & 2 \nmid n \end{cases} \tag{3.28}$$

A $\dfrac{3}{n+1}$ elhagyható mert $n \to \infty$ esetén tart a nullához, így ennek a résznek a $(H,1)$-, $(H,2)$-, $(H,3)$-szummája is 0.(A 3.1.2 és a 3.1.4 tételek alapján.)

Ha

$$b_n = \begin{cases} n+5 & 2 \mid n \\ -(n+3) & 2 \nmid n \end{cases}$$

akkor:

$$\sum_{i=0}^{n} b_i = \begin{cases} 5+\frac{3}{2}n & 2 \mid n \\ \frac{1}{2}(n+1) & 2 \nmid n \end{cases} \tag{3.29}$$

Teljes indukcióval:

$$n = 0: \; b_0 = 0+5 = 5, \; \sum_{i=0}^{0} b_i = 5 + \frac{3}{2} \cdot 0 = 5$$

$$n = 1: \; b_0 + b_1 = 5 - (1+3) = 1, \; \sum_{i=0}^{1} b_i = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Tegyük fel hogy $n \geq 1$ és (3.29) teljesül.
Ha $2 \mid n$:

$$\sum_{i=0}^{n+1} b_i = \sum_{i=0}^{n} b_i + b_{n+1} = 5 + \frac{3}{2}n - (n+4) = \frac{1}{2}(n+2)$$

Ha $2 \nmid n$:

$$\sum_{i=0}^{n+1} b_i = \sum_{i=0}^{n} b_i + b_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1) + n + 6 = 5 + \frac{3}{2}(n+1)$$

Így:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} b_i}{n+1} = \begin{cases} \frac{3}{2}\frac{n}{n+1} + \frac{5}{n+1} & 2 \mid n \\ \frac{1}{2} & 2 \nmid n \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\frac{1}{n+1} & 2 \mid n \\ \frac{1}{2} & 2 \nmid n \end{cases}$$

A $\dfrac{7}{2}\dfrac{1}{n+1}$ is elhagyható mert $n \to \infty$ esetén tart a nullához, így ennek a résznek a $(H,2)$- és $(H,3)$-szummája is nulla. Legyen tehát

$$c_n = \begin{cases} \frac{3}{2} & 2 \mid n \\ \frac{1}{2} & 2 \nmid n \end{cases}$$

Innen

$$\sum_{i=0}^{n} c_i = \begin{cases} \frac{3}{2} + n & 2 \mid n \\ 1 + n & 2 \nmid n \end{cases}$$

belátható, mivel 0-ra, 1-re teljesül, azonkívül:

$$\sum_{i=0}^{n+2} c_i - \sum_{i=0}^{n} c_i = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Végül:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n+1} c_i}{n+1} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2(n+1)} & 2 \mid n \\ 1 & 2 \nmid n \end{cases}$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} c_i}{n+1} = 1$$

ami azt jelenti, hogy az eredeti

$$1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + \dots$$

sor $(H,3)$-szummábilis és $(H,3)$-szummája $\dfrac{1}{8}$. (Az $\dfrac{1}{8}$-os szorzó a (3.28) és a (3.29) egyenlőségekből adódik.) □

12. Feladat. **[3]** *Bizonyítsuk be, hogy ha egy nem negatív tagú sor (H,k)-szummábilis, akkor konvergens.*

Megoldás.

$$A_n = a_1 + \dots + a_n,\ a_i \geq 0\ i = 1,2,\dots$$

$$H_n^0 = A_n,\ H_n^{r+1} = \frac{H_1^r + \dots + H_n^r}{n},\ H_n^k \to A,\ ha\ n \to \infty.$$

$$A_n = A_{n-1} + a_n \geq A_{n-1}$$

Ebből következik hogy A_n monoton növekvő sorozat, így a $\sum a_n$ konvergenciájához elegendő igazolni, hogy A_n felülről korlátos. Indirekt módon tegyük fel, hogy A_n felülről nem korlátos, de monoton növekvő ezért $\forall L > A$ pozitív valós számhoz létezik $N(L)$ természetes szám, hogy $\forall n > N(L)$ esetén $A_n > L \cdot 2^k$, ($k \in \mathbb{Z}^+$ rögzített, a sorról tudjuk hogy

(H,k)-szummábilis).
Ekkor:

$$H_n^1 = \frac{H_1^0 + \cdots + H_n^0}{n} = \frac{A_1 + \cdots + A_n}{n} \geq \frac{(n - N(L))L \cdot 2^k}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{N(L)}{n}\right) \cdot 2^k \cdot L > 2^{k-1} \cdot L, \ ha \ n > 2N(L).$$

Hasonlóan:

$$H_n^2 = \frac{H_1^1 + \cdots + H_n^1}{n} \geq \frac{(n - 2N(L)) \cdot 2^{k-1} \cdot L}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{2N(L)}{n}\right) \cdot 2^{k-1} \cdot L \geq 2^{k-2} \cdot L, \ ha \ n > 2^2 \cdot N(L).$$

Ezt folytatva:

$$H_n^k = \frac{H_1^{k-1} + \cdots + H_n^{k-1}}{n} \geq \frac{(n - 2^{k-1} \cdot N(L)) \cdot 2L}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{2^{k-1}N(L)}{n}\right) \cdot 2L \geq L, \ ha \ n > 2^k \cdot N(L).$$

Mivel $H_n^k \to A$ ha $n \to \infty$ ezért $A \geq L > A$ ellentmondásra jutunk. Tehát az eredeti állítás igaz volt. □

13. Feladat. *A* $1-1+1-1+1-\ldots$ *sornak adjuk meg egy általánosítását, és határozzuk meg a Hölder-szummáját.*

Megoldás. Legyen az a_n sorozat periodikus, úgy hogy egy perióduson belül a sorozat tagjainak értéke egyszer 1, egyszer -1, egyébként 0, a következő módon:

$$a_{n,r} : 0{,}0, \ldots ,1{,}0{,}0, \ldots , -1{,}0{,}0, \ldots 1{,}0{,}0, \ldots , -1$$

Itt a periódus hossza legyen m, így az első periódus végét jelentő tag az $a_{m-1} = -1$, a perióduson belül az 1 helye egy rögzített $0 \leq r \leq m-2$ index, $a_r = 1$. Így:

$$a_{n,r} = \begin{cases} 1 & n = mk + r \\ -1 & n = mk + m - 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$A_{mk+s} = \begin{cases} 1 & r \leq s \leq m-2 \\ 0 & 0 \leq s \leq r-1 \ vagy \ s = m-1 \end{cases}$$

$$H_{mk+s}^1 = \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_{mk+s}}{mk+s+1} = \frac{(A_0 + \cdots + A_{mk-1}) + A_{mk} + \cdots + A_{mk+s}}{m-k+s+1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{k(m-1-r)}{mk+s+1} & 0 \leq s \leq r-1 \\ \frac{k(m-1-r)+s+1-r}{mk+s+1} & r \leq s \leq m-2 \\ \frac{k(m-1-r)+(m-2)+1-r-1}{mk+s+1} & s = m-1 \end{cases}$$

Innen:

$$\lim_{k\to\infty} H^1_{mk+s} = \frac{m-1-r}{m}$$

Mivel $mk+s$ az összes természetes számon végigfut, ezért:

$$\lim_{n\to\infty} H^1_n = \frac{m-1-r}{m}. \tag{3.30}$$

Tehát a fenti $\sum a_n$ $(H,1)$-szummábilis és $(H,1)$-szummája $\dfrac{m-1-r}{m}$.
Látható, hogy az $m=2$, $r=0$ helyettesítés éppen a $1-1+1-1+\dots$ sort adja, $(H,1)$-szummájára pedig visszakapom az 1. feladatban kiszámolt $\dfrac{1}{2}$-et.
Most legyen

$$b_n:\ a_0,\ a_1,\ -(a_0+a_1),\ a_0,\ a_1,\ -(a_0+a_1),\ \dots$$

$$b_n:\ a_0(1,\ 0\ -1,\ 1,\ 0,\ -1,\ \dots) + a_1(0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ \dots)$$

Itt az a_0-hoz tartozó periodikus sorra $m=3,\ r=0$, az a_1-hez tartozóra $m=3,\ r=1$. Ha a b_n sorozat $(H,1)$-szummája $\lim_{n\to\infty} H^1_n(B)$ akkor a (3.30) képletet felhasználva:

$$\lim_{n\to\infty} H^1_n(B) = a_0\frac{3-1-0}{3} + a_1\frac{3-1-1}{3} = \frac{2a_0+a_1}{3}$$

Általánosabban, ha

$$c_n:\ a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{m-2},\ -(a_0+a_1+\dots+a_{m-2}),\ a_0,\ a_1,\ \dots a_{m-2},\ -(a_0+\dots+a_{m2})\dots$$

$$c_n = \begin{cases} a_s & n=mk+s,\ 0\le s\le m-2 \\ -(a_0+\dots+a_{m-2}) & n=mk+m-1 \end{cases}$$

$$c_n = \sum_{r=0}^{m-2} a_r \cdot a_{n,r}$$

A (3.30) -ból és a 3.1.4 -ből következik hogy c_n $(H,1)$-szummábilis és $(H,1)$-szummája:

$$\sum_{r=0}^{m-2} a_r \cdot \frac{m-1-r}{m}.$$

Speciálisan, ha $a_0=\dots=a_{m-2}=1$ akkor:

$$\sum_{r=0}^{m-2} \frac{m-1-r}{m} = \frac{1}{m}\frac{m(m-1)}{2} = \frac{m-1}{2}.$$

□

14. Feladat. *Vizsgáljuk meg az* $1-1+1+1-2+1+1+1-3+\dots$ *sort szummábilitás szempontjából.*

Megoldás.

$$A_n: \; 1, \; 0, \; 1, \; 2, \; 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 0, \; \ldots$$

Egyértelműen létezik $m, s \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $0 \leq s \leq m-1$, hogy

$$n = 2 + 3 + 4 + \cdots + m + s$$

Ha $s \geq 1$ akkor:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = (m-1)1 + (m-2)2 + \cdots + 1(m-1) + \sum_{i=1}^{s} i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)i + \sum_{i=1}^{s} i = m \sum_{i=1}^{m-1} i - \sum_{i=1}^{m-1} i^2 + \sum_{i=1}^{s} i =$$

$$= \frac{m^2(m-1)}{2} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} + \frac{s(s+1)}{2}$$

Ha $s = 0$, akkor

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i + A_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \frac{(m-2)(m-1)m}{6} + \frac{(m-1)m}{2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{6}.$$

Innen:

$$H_n^1 = \frac{\sum_{i=0}^{n} A_i}{n+1} = \frac{\frac{(m-1)m(m+1)}{6} + \frac{s(s+1)}{2}}{\sum_{j=2}^{m} j + s + 1} = \frac{(m-1)m(m+1) + 3s(s+1)}{6 \cdot \left(\frac{(m+2)(m-1)}{2} + s + 1 \right)}$$

$0 \leq s \leq m-1$, $0 \leq 3s(s+1) \leq 3(m-1)m$, továbbá $n \to \infty$ akkor és csak akkor, ha $m \to \infty$, így

$$\lim_{n \to \infty} H_n^1 = \lim_{n \to \infty} \frac{(m-1)m(m+1) + 3s(s+1)}{3(m+2)(m-1) + 6s} = \infty.$$

Tehát $\sum a_n$ nem $(H,1)$-szummábilis.

$\square$

Irodalomjegyzék

[1] G. H. Hardy: Divergent Series, Clarendon Press, Oxford, 1949

[2] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera: Valós Analízis I., Typotex, Budapest, 2012

[3] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera: Valós Analízis II., Typotex, Budapest, 2013