Szakdolgozat

A logaritmikus közép

Szabó Tímea
Matematika Bsc. – Tanári szakirány

Témavezető:
Besenyei Ádám
Adjunktus
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2015.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatom témájának választásakor fontosnak tartottam, hogy olyan tanári szakiránnyal kapcsolatos témakört válasszak, amelyet későbbi oktatói pályafutásom során nagyobb tudású diákoknak is megtaníthatok. Így esett a válsztásom a logaritmikus közép témakörére. Közepekkel középiskolai tanulmányai alatt mindenki találkozik, de a logaritmikus közép általában nem fordul elő. Szakkörökön azonban sok ezzel kapcsolatos érdekesség tárgyalható mélyebb analízis használata nélkül.

A dolgozat három részből áll. Az első fejezetben definiáljuk két pozitív szám logaritmikus közepét, igazoljuk néhány tulajdonságát, majd háromféle bizonyítást is mutatunk arra, hogy a logaritmikus közép a számtani és a mértani közepek közé esik.

A második fejezetben bevezetjük két pozitív szám p-edik hatványközepének fogalmát, ismertetjük tulajdonságait, illetve néhány nevezetes hatványközepet is megemlítünk. A fejezet további részében azt tárgyaljuk, hogy milyen p értékek esetén hasonlítható össze a p-edik hatványközép és a logaritmikus közép.

Végül a harmadik fejezetben kiterjesztjük a logaritmikus közép fogalmát három változóra, megvizsgáljuk néhány tulajdonságát, majd összehasonlítjuk a háromváltozós számtani és mértani közepekkel.

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Besenyei Ádámnak, aki rengeteg segítséget nyújtott a szakdolgozatom elkészítésében.

1. fejezet

A logaritmikus közép két változóra

Ebben a fejezetben bevezetjük két pozitív szám logaritmikus közepének fogalmát, majd megmutatjuk, hogy ez a közép mindig a számtani és a mértani közepek között helyezkedik el. Erre a tulajdonságra háromféle bizonyítást is adunk. A fejezet a [3] és a [6] cikkek felhasználásával készült.

1.1. A logaritmikus közép értelmezése

Már a középiskolai tanulmányainkból is jól ismert a számtani és mértani közepek fogalma.

1.1.1. Definíció. Legyen a és b pozitív szám. Ekkor a két szám számtani (aritmetikai) közepe

$$A(a, b) := \frac{a+b}{2},$$

mértani (geometriai) közepe pedig

$$G(a, b) := \sqrt{ab}.$$

A logaritmikus közép viszont már nem tananyag a középiskolában, és az egyetemen sem kerül elő. Most bevezetjük a fogalmát, illetve belátjuk néhány tulajdonságát.

1.1.2. Definíció. Legyen a és b pozitív szám. Ekkor logaritmikus közepük

$$L(a, b) := \begin{cases} \dfrac{a-b}{\log a - \log b}, & \text{ha } a \neq b, \\ a, & \text{ha } a = b, \end{cases}$$

ahol log jelöli a természetes alapú logaritmust.

1.1.3. Állítás. *A logaritmikus közép a következő tulajdonságokkal rendelkezik.*

(i) Minden $a, b > 0$ szám esetén $L(a,b) = L(b,a)$, vagyis változóiban szimmetrikus.

(ii) Minden $a, b, \lambda > 0$ szám esetén $L(\lambda a, \lambda b) = \lambda \cdot L(a,b)$, vagyis változóiban pozitív homogén.

(iii) Minden $a, b > 0$ szám esetén $\min\{a,b\} \leq L(a,b) \leq \max\{a,b\}$, vagyis teljesül a középérték-tulajdonság, sőt, egyenlőség csak $a = b$ esetben áll fenn.

(iv) Az L függvény folytonos $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$-on.

Az 1.1.3. Állításban szerplő tulajdonságok igazolásához szükségünk van a Lagrange-féle középértéktételre, amely egyetemi tananyag, ezért a bizonyítását nem közöljük (megtalálható például az [5] könyvben).

1.1.4. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)**.** *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely differenciálható (a,b)-n. Ekkor van olyan $c \in (a,b)$, hogy*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Most rátérünk az 1.1.3. Állításban szereplő tulajdonságok bizonyítására.

Az 1.1.3. Állítás bizonyítása. (i) A szimmetriát elég $a \neq b$ esetben igazolni, ekkor

$$L(a,b) = \frac{a - b}{\log a - \log b} = \frac{b - a}{\log b - \log a} = L(b,a).$$

(ii) A pozitív homogenitás is könnyen belátható a logaritmus azonosságainak segítségével:

$$\begin{aligned} L(\lambda a, \lambda b) &= \frac{\lambda a - \lambda b}{\log \lambda a - \log \lambda b} = \frac{\lambda(a - b)}{(\log \lambda + \log a) - (\log \lambda + \log b)} = \\ &= \frac{\lambda(a - b)}{\log a - \log b} = \lambda \cdot L(a,b). \end{aligned}$$

(iii) A középérték-tulajdonság igazolásához használjuk a Lagrange-féle középértéktételt. Ha $a = b$, akkor $L(a,a) = a$. Legyen most $a < b$ (ami az (i) részben bizonyított szimmetria miatt feltehető), és tekintsük az $[a,b]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \log x$ függvényt. Ekkor van olyan $c \in (a,b)$, hogy

$$\frac{1}{c} = \frac{\log a - \log b}{a - b},$$

vagyis

$$a < c = L(a,b) < b.$$

(iv) Világos, hogy az L függvény minden $a \neq b$ esetén folytonos az (a,b) pontban. Tekintsük ezután azt az esetet, amikor $(x,y) \to (a,a)$, ekkor a (iii) rész bizonyításához hasonlóan $L(x,y) = c_{x,y}$ valamilyen $c_{x,y} \in (x,y)$ esetén. Mivel $(x,y) \to (a,a)$, ezért $c_{x,y} \to a$, így $L(x,y) \to a = L(a,a)$, tehát L folytonos az (a,a) pontban is.

□

1.2. Összehasonlítás a számtani és a mértani közepekkel

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy bármely két pozitív szám logaritmikus közepe a két szám számtani és mértani közepe között helyezkedik el.

1.2.1. Tétel. *Minden a és b pozitív számra*

$$G(a,b) \leq L(a,b) \leq A(a,b),$$

és egyenlőség pontosan $a = b$ esetén áll fenn.

Bizonyítás. Ha $a = b$, akkor $G(a,b) = L(a,b) = A(a,b) = a$.

Ha $a \neq b$, akkor szimmetria miatt feltehető, hogy $a > b$, ekkor két egyenlőtlenséget bizonyítunk: $G(a,b) < L(a,b)$ és $L(a,b) < A(a,b)$. Gondoljuk meg először a $G(a,b) < L(a,b)$ egyenlőtlenséget. Ez azt jelenti, hogy

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\log a - \log b}, \tag{1.1}$$

amit úgy is írhatunk, hogy

$$\sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{\frac{a}{b} - 1}{\log \frac{a}{b}}.$$

Vezessük be a $z = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ új változót, ahol $a > b$ miatt $z > 1$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőség a következő alakot ölti:

$$z < \frac{z^2 - 1}{\log z^2} = \frac{z^2 - 1}{2 \log z}.$$

Mivel $z > 1$, ezért $\log z > 0$, így $\log z$-vel való beszorzás ekvivalens átalakítás. Ekkor rendezés után azt kapjuk, hogy

$$0 < z - \frac{1}{z} - 2\log z. \tag{1.2}$$

Tekintsük az

$$f(z) = z - \frac{1}{z} - 2\log z$$

folytonos függvényt a $z > 1$ számokon. Mivel

$$f'(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2} > 0,$$

ha $z > 1$, ezért f szigorúan monoton növő, így $f(z) > f(1) = 0$, ha $z > 1$. Ez éppen az (1.2) egyenlőtlenség, amely ekvivalens az (1.1) egyenlőtlenséggel.

Most lássuk be az $L(a,b) < A(a,b)$ egyenlőtlenséget, ahol ismét feltehető, hogy $a > b$. Ekkor azt kell igazolni, hogy

$$\frac{a-b}{\log a - \log b} < \frac{a+b}{2},$$

vagyis

$$\frac{\frac{a}{b} - 1}{\log \frac{a}{b}} < \frac{\frac{a}{b} + 1}{2}.$$

Vezessük be a $z = \frac{a}{b}$ változót, ahol $z > 1$, és helyettesítsük be az iménti egyenlőtlenségbe:

$$\frac{z-1}{\log z} < \frac{z+1}{2},$$

azaz $\log z > 0$ miatt

$$0 < \log z - \frac{2z-2}{z+1}. \tag{1.3}$$

Tekintsük a

$$g(z) = \log z - \frac{2z-2}{z+1}$$

folytonos függvényt a $z > 1$ számokon. Mivel

$$g'(z) = \frac{(z-1)^2}{z(z+1)^2} > 0,$$

ha $z > 1$, ezért g szigorúan monoton növő, így $g(z) > g(1) = 0$. Ezzel beláttuk az (1.3) egyenlőtlenséget, amely ekvivalens az $L(a,b) < A(a,b)$ összefüggéssel.

A tétel bizonyítása ezzel kész.

$\square$

1.3. Bizonyítás az integrálközép segítségével

Ebben a szakaszban az integrálközép alkalmazásával egy újabb bizonyítást adunk az 1.2.1. Tételre.

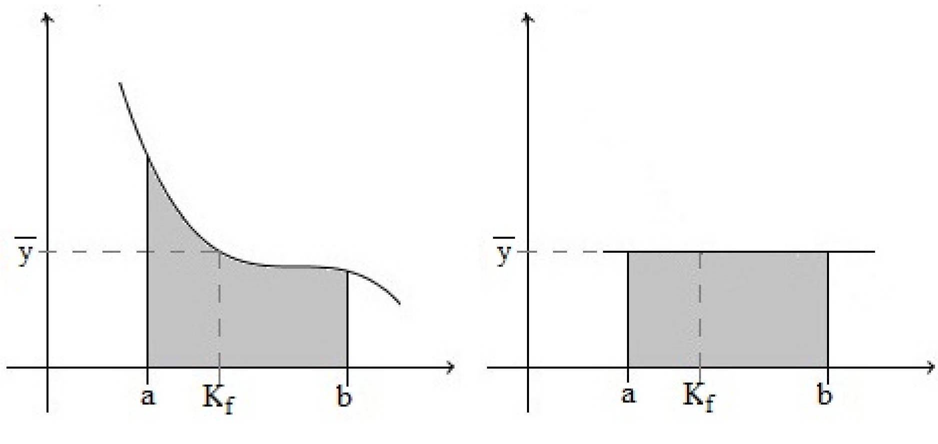
1.3.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ szigorúan monoton, folytonos függvény. Tegyük fel, hogy a és b az f értelmezési tartományának két pontja, $a < b$, és jelölje I az f függvény integrálját az $[a, b]$ intervallumon, azaz $I := \int\limits_a^b f(x)dx$, továbbá

$$\overline{y} := \frac{I}{b-a} = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Ha $a > b$, akkor a szokásos módon $I = \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, és $\overline{y}$-t ugyanúgy definiáljuk. Ekkor az a és b pozitív számok f-integrálközepét a következőképpen értelmezzük:

$$K_f(a, b) := \begin{cases} f^{-1}(\overline{y}) = f^{-1}\left(\dfrac{I}{b-a}\right), & \text{ha } a \neq b, \\ a, & \text{ha } a = b. \end{cases}$$

Szemléletesen, $K_f(a, b)$ az az érték a és b között, amelyre az $f\,(K_f(a, b))$ magasságú és $(b-a)$ alapú téglalap területe megegyezik az f grafikonja alatti területtel az $[a, b]$ intervallumon (lásd 1.1. ábra).



1.1. ábra. Az integrálközép

1.3.2. *Megjegyzés.* Első látásra nem nyilvánvaló, hogy $K_f(a, b)$ definíciója korrekt. Ennek belátására tegyük fel, hogy $a < b$, ekkor az integrálszámítás első középértéktétele szerint

$$(b-a)\cdot\min_{[a,b]} f \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\cdot\max_{[a,b]} f,$$

ezért

$$\min_{[a,b]} f \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le \max_{[a,b]} f.$$

Mivel f folytonos $[a,b]$-n, így a Bolzano-tétel miatt minden $\min\limits_{[a,b]} f$ és $\max\limits_{[a,b]} f$ közötti értéket felvesz, és a szigorú monotonításból következően pontosan egyszer veszi azokat fel. Vagyis egyértelműen létezik olyan $x \in [a,b]$, amelyre $f(x) = \overline{y}$, és ekkor $K_f(a,b) = x$. Az integrálközép definíciója tehát valóban korrekt $a < b$ esetén, és világos módon $K_f(b,a) = K_f(a,b)$ miatt minden $a, b > 0$ esetén is.

Másrészt pedig az iménti meggondolás alapján az is könnyen látható, hogy $K_f(a,b)$ folytonos $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$-on.

Az alábbiakban az integrálközép és a számtani közép összehasonlíthatóságával kapcsolatban igazolunk egy eredményt, amelynek segítségével új bizonyítást nyerünk majd az 1.2.1. Tételre.

1.3.3. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ differenciálható függvény. Ha f szigorúan monoton növő és konkáv, vagy szigorúan monoton csökkenő és konvex függvény, akkor minden $a, b > 0$ esetén*

$$K_f(a,b) \le A(a,b).$$

Ha f szigorúan monoton növő és konvex, vagy szigorúan monoton csökkenő és konkáv függvény, akkor minden $a, b > 0$ esetén

$$K_f(a,b) \ge A(a,b).$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$, vagy f lineáris függvény az $[a,b]$ intervallumon.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f szigorúan monoton növő és konkáv. Legyen $0 < a < b$ (ez a szimmetria miatt feltehető), és tekintsük az f grafikonjának az $\left(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})\right)$ pontjába húzott érintőjét. Mivel f konkáv, így a grafikon az érintő alatt fekszik, ezért az érintő alatti T terület az $[a,b]$ intervallumon legalább akkora, mint a grafikon alatti I terület (lásd 1.2. ábra). Világos, hogy

$$T = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a) = f(A(a,b))\cdot(b-a),$$

és

$$I = \int_a^b f(x)dx = \overline{y}(b-a),$$

tehát

$$\overline{y}(b-a) \leq f(A(a,b)) \cdot (b-a),$$

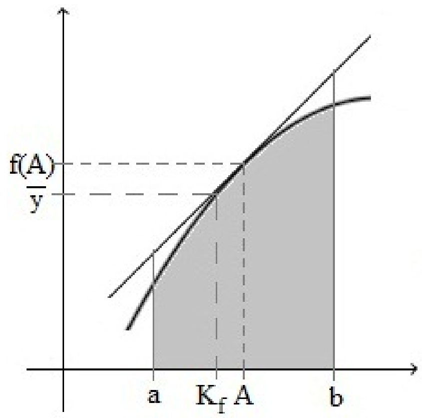
ahonnan $(b-a)$-val egyszerűsítve $\overline{y} \leq f(A(a,b))$ adódik. Ha f szigorúan monoton növő, akkor f^{-1} is szigorúan monoton növő, ezért

$$f^{-1}(\overline{y}) \leq f^{-1}\left(f(A(a,b))\right),$$

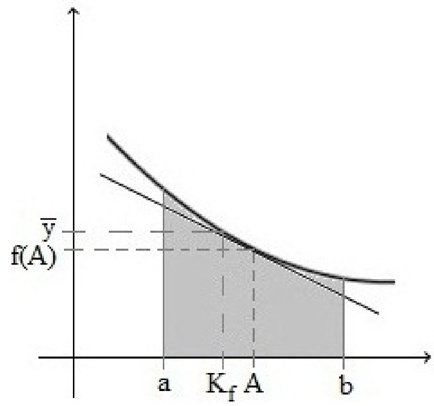
vagyis

$$K_f(a,b) \leq A(a,b),$$

és éppen ezt akartuk belátni.



1.2. ábra. $I \leq T$



1.3. ábra. $I \geq T$

Szigorúan monoton csökkenő, konvex függvény esetén hasonlóképpen okoskodhatunk. Tekintsük ismételten az $\left(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})\right)$ pontba húzott érintőt. Ekkor az érintő alatti terület az $[a,b]$ intervallumon

$$T = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) = f(A(a,b)) \cdot (b-a).$$

Másrészt f grafikonja alatti terület az $[a,b]$ intervallumon $I = \overline{y}(b-a)$. Mivel f pozitív, szigorúan monoton csökkenő és konvex, így $I \geq T$ (lásd 1.3. ábra), ezért

$$\overline{y}(b-a) \geq f(A(a,b)) \cdot (b-a),$$

ahonnan egyszerűsítés után $\overline{y} \geq f(A(a,b))$ adódik. Ha f szigorúan monoton csökken, akkor f^{-1} is szigorúan monoton csökken, így

$$f^{-1}(\overline{y}) \leq f^{-1}(f(A(a,b))),$$

vagyis

$$K_f(a,b) \le A(a,b).$$

Ezzel az 1.3.3. Tétel első állítását igazoltuk. A tétel második állítása hasonlóan bizonyítható, ezt nem részletezzük. Hátra van még az egyenlőség kérdése.

Egyrészt, ha $a = b$, akkor $K_f(a,b) = a = A(a,b)$. Másrészt, ha $a \neq b$, akkor a bizonyításból kiolvasható, hogy egyenlőség csak akkor áll fenn, ha az érintő alatti terület megegyezik a grafikon alatti területtel, vagyis f lineáris függvény az $[a,b]$ intervallumon.

Ezzel az 1.3.3. Tétel bizonyítása kész.

□

Most lássunk az 1.2.1. Tételre egy új bizonyítást az 1.3.3. Tétel segítségével.

Az 1.2.1. *Tétel bizonyítása.* Ha $a = b$, akkor egyenlőség áll fenn, hiszen

$$G(a,b) = L(a,b) = A(a,b) = a.$$

Tegyük fel, hogy $a \neq b$. Az $L(a,b) < A(a,b)$ egyenlőtlenség igazolásához alkalmazzuk az 1.3.3. Tételt az $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ szigorúan monoton csökkenő, konvex (nem lineáris) függvényre.

$$\overline{y} = \frac{\int\limits_a^b \frac{1}{x} dx}{b-a} = \frac{[\log x]_a^b}{b-a} = \frac{\log b - \log a}{b-a} = \frac{\log a - \log b}{a-b} = \frac{1}{L(a,b)},$$

ezért

$$K_{\frac{1}{x}}(a,b) = f^{-1}(\overline{y}) = f^{-1}\left(\frac{1}{L(a,b)}\right) = L(a,b).$$

Mivel $K_{\frac{1}{x}}(a,b) < A(a,b)$ minden $a \neq b$ pozitív számra, így a bizonyítandó $L(a,b) < A(a,b)$ egyenlőtlenséget nyerjük.

A $G(a,b) < L(a,b)$ egyenlőtlenség igazolásához legyen $f(x) = e^x$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ szigorúan monoton növő és konvex (nem lineáris) függvény. Ekkor

$$\overline{y} = \frac{\int\limits_a^b e^x dx}{b-a} = \frac{[e^x]_a^b}{b-a} = \frac{e^b - e^a}{b-a} = \frac{e^a - e^b}{a-b},$$

ezért

$$K_{e^x}(a,b) = f^{-1}(\overline{y}) = f^{-1}\left(\frac{e^a - e^b}{a-b}\right) = \log\frac{e^a - e^b}{a-b}.$$

Az $f(x) = e^x$ választással tehát

$$K_{e^x}(a,b) = \log\frac{e^a - e^b}{a-b}.$$

Alkalmazzuk a 1.3.3. Tételt, ekkor $A(a,b) < K_{e^x}(a,b)$, ha $a \neq b$, azaz

$$\frac{a+b}{2} < \log \frac{e^a - e^b}{a-b}. \tag{1.4}$$

Az (1.4) egyenlőtlenségbe helyettesítsünk be a helyébe $\log a$-t és b helyébe $\log b$-t, ekkor

$$\frac{\log a + \log b}{2} < \log \frac{e^{\log a} - e^{\log b}}{\log a - \log b}.$$

Alkalmazva a logaritmus azonosságait azt kapjuk, hogy

$$\log(ab)^{\frac{1}{2}} < \log \frac{a-b}{\log a - \log b}.$$

A logaritmus függvény szigorú monoton növekedése miatt ez azt jelenti, hogy

$$(ab)^{\frac{1}{2}} < \frac{a-b}{\log a - \log b},$$

vagyis $G(a,b) < L(a,b)$ minden $a \neq b$ pozitív számra.

Ezzel az 1.2.1. Tétel bizonyítása kész.

□

1.4. Carlson bizonyítása az egyenlőtlenségre

Ebben a szakaszban egy harmadik bizonyítást adunk az 1.2.1. Tételre, sőt, belátunk egy élesebb egyenlőtlenséget is, amely a [2] cikkben szerepel.

1.4.1. Tétel. *Tetszőleges $a, b > 0$ egymástól különböző számok esetén érvényes az alábbi egyenlőtlenségláncolat:*

$$G(a,b) = \sqrt{ab} < \sqrt[4]{ab} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < L(a,b) < \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 < \frac{a+b}{2} = A(a,b).$$

Bizonyítás. Először belátjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{\left(t+\frac{a+b}{2}\right)^2} < \frac{1}{(t+a)(t+b)} < \frac{1}{t+(\sqrt{ab})^2}, \tag{1.5}$$

ahol $t, a, b > 0$ és $a \neq b$. Ebből t szerinti integrálással adódik majd az 1.2.1. Tételbeli egyenlőtleneg.

Az (1.5) egyenlőtlenség igazolásához fejtsük ki a $(t+\sqrt{ab})^2$ kifejezést, alkalmazzuk az $a, b > 0$, $a \neq b$ számokra a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$(t+\sqrt{ab})^2 = t^2 + 2t\sqrt{ab} + ab < t^2 + 2t \cdot \frac{a+b}{2} + ab = (t+a)(t+b).$$

Másrészt

$$(t+a)(t+b) = t^2 + t(a+b) + ab < t^2 + t(a+b) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(t + \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

ahol ismét a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget használtuk. Azt kaptuk tehát, hogy

$$(t+\sqrt{ab})^2 < (t+a)(t+b) < \left(t + \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Vegyük mindegyik tag reciprokát, ekkor a relációk megfordulnak, és az (1.5) egyenlőtlenség adódik. Integráljuk most az (1.5) egyenlőtlenséget t szerint a $[0,+\infty)$ intervallumon. Ekkor

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t+\frac{a+b}{2}\right)^2} dt < \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+a)(t+b)} dt < \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+\sqrt{ab})^2} dt. \tag{1.6}$$

Végezzük el az integrálásokat. Világos módon

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t+\frac{a+b}{2}\right)^2} dt = \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{-1}{t+\frac{a+b}{2}}\right]_0^r = 0 - \frac{-1}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2}{a+b}.$$

A második integrál kiszámításához a törtet parciális törtekre bontjuk, ezzel azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(t+a)(t+b)} = \frac{1}{(b-a)(a+t)} - \frac{1}{(b-a)(b+t)},$$

így

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+a)(t+b)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(b-a)(a+t)} - \frac{1}{(b-a)(b+t)} dt =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \lim_{r\to+\infty} \left[\log \frac{a+t}{b+t}\right]_0^r = \frac{1}{b-a}\left(\lim_{r\to+\infty} \log \frac{\frac{a}{r}+1}{\frac{b}{r}+1} - \log\frac{a}{b}\right) = \frac{\log a - \log b}{a-b}.$$

Végül számítsuk ki az (1.6) egyenlőtlenség harmadik tagját is:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+\sqrt{ab})^2} dt = \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{-1}{t+\sqrt{ab}}\right]_0^r = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Ezeket az eredményeket az (1.6) egyenlőtlenségbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{2}{a+b} < \frac{\log a - \log b}{a-b} < \frac{1}{\sqrt{ab}},$$

ahonnan reciprokképzés után

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\log a - \log b} < \frac{a+b}{2} \tag{1.7}$$

adódik. Az (1.7) egyenlőtlenségbe a helyébe $\sqrt{a}$-t és b helyébe $\sqrt{b}$-t helyettesítünk, így

$$\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\log\sqrt{a} - \log\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}.$$

Alkalmazzuk a logaritmus és a hatványozás azonosságait, ekkor

$$\sqrt[4]{ab} < \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\frac{1}{2}(\log a - \log b)} < \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2},$$

azaz

$$\sqrt[4]{ab} < \frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\log a - \log b} < \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2},$$

amit $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$-vel beszorozva a tételben szereplő

$$\sqrt[4]{ab}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < \frac{a-b}{\log a - \log b} < \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

Hátra van még a tétel két szélső egyenlőtlenségének igazolása, ezekben a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségét alkalmazzuk. Egyrészt

$$G(a,b) = \sqrt{ab} = \sqrt[4]{ab}\cdot\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} < \sqrt[4]{ab}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < \frac{a-b}{\log a - \log b},$$

másrészt pedig

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 = \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} < \frac{a+2\frac{a+b}{2}+b}{4} = \frac{a+b}{2} = A(a,b).$$

Ezzel a tételt igazoltuk. $\square$

2. fejezet

A hatványközepek és a logaritmikus közép

Ebben a fejezetben a logaritmikus közép és a különböző kitevőjű hatványközepek összehasonlítását vizsgáljuk. Itt felhasználjuk az [1], a [2], az [5] és a [7] irodalmat.

2.1. A hatványközepek

Ebben a részben definiáljuk két pozitív valós szám p-edik hatványközepét, illetve ismertetünk néhány nevezetes hatványközepet, majd igazoljuk a hatványközép p kitevőben való monotonítását.

2.1.1. Definíció. Legyenek a és b pozitív valós számok, továbbá $p \neq 0$ valós szám. Ekkor az a és b szám p-edik hatványközepe

$$M_p(a,b) := \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.1.2. *Megjegyzés.* Legyenek a és b pozitív valós számok, ekkor a p kitevő (paraméter) néhány speciális értékére a p-edik hatványközép ismert közepet ad.

(i) Ha $p = 1$, akkor $M_1(a,b) = \left(\frac{a^1 + b^1}{2}\right)^1 = \frac{a+b}{2}$, ami a számtani közép.

(ii) Ha $p = 2$, akkor $M_2(a,b) = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, ami a négyzetes közép.

(iii) Ha $p = -1$, akkor $M_{-1}(a,b) = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{-1}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$, ami a harmonikus közép.

(iv) Ha $p = \frac{1}{3}$, akkor $M_{\frac{1}{3}}(a,b) = \left(\frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2}\right)^3$, amely kifejezést az a és b pozitív valós számok Lorentz-közepének is szokás nevezni.

A hatványközepet egyelőre $p = 0$ esetben nem értelmezzük, azonban a következő tétel segítségével könnyen kiterjeszthetjük erre a kitevőre is.

2.1.3. Tétel. *Legyenek $a, b > 0$ számok. Ekkor $\lim\limits_{p\to 0} M_p = \sqrt{ab}$.*

Bizonyítás. A határérték igazolásához $\lim\limits_{p\to 0} \log M_p(a,b) = \frac{1}{2}\log(ab)$ összefüggést fogjuk belátni, ekkor az exponenciális függvény folytonossága miatt

$$\lim_{p\to 0} M_p(a,b) = \lim_{p\to 0} \exp\left(\log M_p(a,b)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\log(ab)\right) = \sqrt{ab}.$$

Mivel

$$\log M_p(a,b) = \log\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\log\frac{a^p+b^p}{2}}{p},$$

ezért célszerű bevezetni az $f(p) = \log\frac{a^p + b^p}{2}$ és $g(p) = p$ függvényeket. Ekkor alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt, mert f és g differenciálható $p = 0$-ban, $f(0) = g(0) = 0$, de $g'(0) \neq 0$. Világos módon

$$f'(p) = \frac{1}{a^p + b^p}\left(a^p \cdot \log a + b^p \cdot \log b\right),$$

így $\lim\limits_{p\to 0} f'(p) = \log\sqrt{ab}$, másrészt $g'(p) = 1$. Végül tehát

$$\lim_{p\to 0} \log M_p(a,b) = \lim_{p\to 0} \log\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to 0}\frac{f(p)}{g(p)} = \lim_{p\to 0}\frac{f'(p)}{g'(p)} = \log\sqrt{ab}.$$

Ezzel igazoltuk a tételt.

□

2.1.4. *Megjegyzés.* A 2.1.3. Tétel alapján bármely a és b pozitív valós számok esetén legyen $M_0(a,b) = \sqrt{ab}$, ami a két szám mértani közepe.

A hatványközepek egy fontos tulajdonsága a p kitevőben való monotonitás.

2.1.5. Tétel. *Ha a, b pozitív valós számok és $q < p$, akkor $M_q(a,b) < M_p(a,b)$.*

A tétel igazolásához a Jensen-egyenlőtlenséget fogjuk alkalmazni.

2.1.6. Tétel (Jensen-egyenlőtlenség)**.** *Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$ korlátos vagy nem korlátos intervallum. Tegyük fel, hogy $a_1, a_2, \dots, a_n$ tetszőleges elemei az I intervallumnak, továbbá $p_1, p_2, \dots, p_n$ nemnegatív számok (súlyok), melyekre $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Ekkor*

$$f(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n) \le p_1 f(a_1) + p_2 f(a_2) + \dots + p_n f(a_n).$$

Ha f szigorúan konvex és a $p_1, p_2, \dots, p_n$ súlyok pozitívak, akkor egyenlőség csak az $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ esetben lehetséges.

Ha f konkáv, akkor a tétel fordított irányú egyenlőtlenséggel teljesül.

A Jensen-egyenlőtleség segítségével igazoljuk a 2.1.5. Tételt.

A 2.1.5. Tétel bizonyítása. A q és p számok elhelyezkedése szempontjából négy lépésben igazoljuk a tételt.

(i) Tegyük fel, hogy $0 < q < p$. Ekkor $\dfrac{p}{q} > 1$, ezért az $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ függvény szigorúan konvex $x > 0$ esetén. Alkalmazva a Jensen-egyenlőtlenséget az $a^q \neq b^q$ pozitív számokra a $p_1 = p_2 = \dfrac{1}{2}$ súlyokkal azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{1}{2}a^q + \frac{1}{2}b^q\right)^{\frac{p}{q}} < \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p = \frac{a^p + b^p}{2},$$

azaz

$$\left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{\frac{p}{q}} < \frac{a^p + b^p}{2}.$$

Mivel $p > 0$, ezért a $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$ függvény szigorúan monoton nő $x > 0$ esetén, így

$$g\left(\left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{\frac{p}{q}}\right) < g\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right),$$

vagyis

$$\left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} < \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

ami azt jelenti, hogy $M_q(a, b) < M_p(a, b)$.

(ii) Most a $q < p < 0$ esetet vizsgáljuk meg. Ekkor $1 > \dfrac{p}{q} > 0$, ezért az $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ függvény szigorúan konkáv $x > 0$ esetén. Ismételten alkalmazzuk a Jensen-egyenlőtlenséget az $a^q \neq b^q$ pozitív számokra a $p_1 = p_2 = \dfrac{1}{2}$ súlyokkal, ekkor

$$\left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{\frac{p}{q}} > \frac{a^p + b^p}{2}.$$

Alkalmazzuk az egyenlőtlenség mindkét oldalára a $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$ szigorúan monoton csökkenő függvényt. Ekkor éppen

$$\left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} < \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

adódik.

(iii) Tegyük fel, hogy $q < 0 < p$, ekkor $0 > \dfrac{p}{q}$. Ezt az esetet is az (i) részhez hasonlóan bizonyíthatjuk, hiszen az $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ függvény szigorúan konvex $x > 0$ esetén, és a $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$ függvény szigorúan monoton nő, ha x pozitív szám.

(iv) Ebben a pontban azt az esetet vizsgáljuk meg, ha p vagy q közül az egyik 0-val egyenlő. Az (i) pont alapján $0 < q < p$ esetén $M_q(a, b) < M_p(a, b)$, ahol elvégezve a $q \to 0$ határátmenetet $M_0(a, b) < M_p(a, b)$ adódik. Ha $p \to 0$, akkor hasonlóan kapjuk, hogy $M_q(a, b) < M_0(a, b)$.

Ezzel bizonyítottuk a tételt.

□

2.2. A hatványközepek és a logaritmikus közép

Ebben a részben az a és b pozitív számok p-edik hatványközépét és logaritmikus közepét hasonlítjuk össze. A korábbi eredmények alapján igaz az alábbi tétel.

2.2.1. Tétel. *Ha a, $b > 0$, és $a \neq b$, akkor*

$$M_0(a, b) < L(a, b) < M_{\frac{1}{2}}(a, b).$$

Bizonyítás. Ez az 1.2.1. és az 1.4.1. Tételekből, valamint a 2.1.4. Megjegyzésből következik.

□

Felmerül az a kérdés, hogy melyik az a legkisebb p és legnagyobb q, amelyre $M_q(a, b) < L(a, b) < M_p(a, b)$ teljesül minden $a \neq b$ pozitív szám esetén?

2.2.2. Tétel. *Ha a, $b > 0$, $a \neq b$ és $p \geq \dfrac{1}{3}$, akkor $L(a, b) < M_p(a, b)$.*

Bizonyítás. Tekintsük az $\dfrac{L(a, b)}{M_p(a, b)}$ hányadost, erről látjuk be, hogy $a \neq b$ és $p \geq \dfrac{1}{3}$ esetén 1-nél kisebb. Ehhez alakítsuk át a következő módon:

$$\frac{L(a, b)}{M_p(a, b)} = \frac{\frac{a-b}{\log a - \log b}}{\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}} = \frac{2^{\frac{1}{p}}(a - b)}{(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \log \frac{a}{b}} = \frac{2^{\frac{1}{p}}\left(\frac{a}{b} - 1\right)}{\left(\frac{a^p}{b^p} + 1\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \log \frac{a}{b}} = \frac{2^{\frac{1}{p}}\left(z^{\frac{1}{p}} - 1\right)}{(z + 1)^{\frac{1}{p}} \cdot \log z^{\frac{1}{p}}},$$

ahol a $z = \left(\frac{a}{b}\right)^p$ új változót vezettük be, amelyre $a, b > 0$ és $a \neq b$ miatt $z > 0$ valamint $z \neq 1$. Legyen $w = \frac{z-1}{z+1}$, ekkor $z > 0$ és $z \neq 1$ folytán $0 < |w| < 1$, továbbá $z = \frac{1+w}{1-w}$ helyettesítéssel

$$\frac{L(a,b)}{M_p(a,b)} = \frac{2^{\frac{1}{p}}\left(z^{\frac{1}{p}} - 1\right)}{\frac{1}{p}(z+1)^{\frac{1}{p}} \cdot \log z} = \frac{2^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right)}{\frac{1}{p}\left(\frac{1+w}{1-w} + 1\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \log \frac{1+w}{1-w}} =$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(1+w)^{\frac{1}{p}} - (1-w)^{\frac{1}{p}}}{(1-w)^{\frac{1}{p}}}\right)}{\frac{2^{\frac{1}{p}}}{p(1-w)^{\frac{1}{p}}} \cdot \log \frac{1+w}{1-w}} = \frac{p\left((1+w)^{\frac{1}{p}} - (1-w)^{\frac{1}{p}}\right)}{\log(1+w) - \log(1-w)}$$

adódik. Vezessük be az

$$f(p,w) = \frac{p\left((1+w)^{\frac{1}{p}} - (1-w)^{\frac{1}{p}}\right)}{2w}$$

és

$$g(w) = \frac{\log(1+w) - \log(1-w)}{2w}$$

függvényeket. Ekkor

$$\frac{L(a,b)}{M_p(a,b)} = \frac{f(p,w)}{g(w)}.$$

A bizonyítás további részében Taylor-sorfejtés segítségével megmutatjuk, hogy $p \geq \frac{1}{3}$ és $0 < |w| < 1$ esetén $f(p,w) < g(w)$.

Először $g(w) = \frac{\log(1+w) - \log(1-w)}{2w}$ függvényt fejtsük Taylor-sorba, ekkor $0 < |w| < 1$ esetén

$$\log(1+w) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{w^k}{k} = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \ldots,$$

és

$$\log(1-w) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-w)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-w^k}{k} = -w - \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} - \ldots,$$

ezért

$$\log(1+w) - \log(1-w) = 2w + \frac{2w^3}{3} + \frac{2w^5}{5} + \ldots,$$

így

$$g(w) = \frac{\log(1+w) - \log(1-w)}{2w} = 1 + \frac{1}{3}w^2 + \frac{1}{5}w^4 + \frac{1}{7}w^6 + \ldots. \tag{2.1}$$

Most fejtsük sorba az $f(p,w) = \dfrac{p\left((1+w)^{\frac{1}{p}} - (1-w)^{\frac{1}{p}}\right)}{2w}$ függvényt. A binomiális sorfejtés alapján $0 < |w| < 1$ esetén

$$(1+w)^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{p}}{k} w^k = 1 + \binom{\frac{1}{p}}{1} w + \binom{\frac{1}{p}}{2} w^2 + \binom{\frac{1}{p}}{3} w^3 + \dots$$

és

$$(1-w)^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{p}}{k} (-w)^k = 1 - \binom{\frac{1}{p}}{1} w + \binom{\frac{1}{p}}{2} w^2 - \binom{\frac{1}{p}}{3} w^3 + \dots,$$

ahol $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Ezek alapján

$$(1+w)^{\frac{1}{p}} - (1-w)^{\frac{1}{p}} = 2w\left(\binom{\frac{1}{p}}{1} + \binom{\frac{1}{p}}{3} w^2 + \binom{\frac{1}{p}}{5} w^4 + \dots\right),$$

vagyis

$$f(p,w) = p\left(\frac{1}{p} + \binom{\frac{1}{p}}{3} w^2 + \binom{\frac{1}{p}}{5} w^4 + \dots\right) = 1 + p\binom{\frac{1}{p}}{3} w^2 + p\binom{\frac{1}{p}}{5} w^4 + \dots.$$

Vizsgáljuk most meg a $p\binom{\frac{1}{p}}{k}$ együtthatókat. Definíció alapján

$$p\binom{\frac{1}{p}}{k} = p\left(\frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{p}-k+1\right)}{k!}\right),$$

így

$$p\binom{\frac{1}{p}}{3} = p\left(\frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)}{3!}\right) = \frac{\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{2p}-1\right),$$

továbbá

$$\begin{aligned} p\binom{\frac{1}{p}}{5} &= p\left(\frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)\left(\frac{1}{p}-3\right)\left(\frac{1}{p}-4\right)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\right) = \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{2p}-1\right)\left(\frac{1}{3p}-1\right)\left(\frac{1}{4p}-1\right), \end{aligned}$$

általában pedig

$$\begin{aligned} p\binom{\frac{1}{p}}{k} &= p\left(\frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{p}-k+1\right)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}\right) = \\ &= \frac{1}{k}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{2p}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{(k-1)p}-1\right). \end{aligned}$$

Bevezetve az

$$a_k = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{2p} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{2kp} - 1\right)$$

jelölést, ahol $k \geq 1$ egész szám, azt kapjuk, hogy

$$f(w,p) = 1 + \frac{1}{3}a_1 w^2 + \frac{1}{5}a_2 w^4 + \frac{1}{7}a_3 w^6 + \ldots .$$

Mindezek alapján tehát

$$\frac{L(a,b)}{M_p(a,b)} = \frac{f(w,p)}{g(w)} = \frac{1 + \frac{1}{3}a_1 w^2 + \frac{1}{5}a_2 w^4 + \frac{1}{7}a_3 w^6 + \ldots}{1 + \frac{1}{3}w^2 + \frac{1}{5}w^4 + \frac{1}{7}w^6 + \ldots}.$$

Megmutatjuk, hogy $p \geq \dfrac{1}{3}$ esetén $a_1 \leq 1$, továbbá $a_k < 1$, ha $k \geq 2$ egész szám. Ebből már következik, hogy $f(w,p) < g(w)$. Mivel

$$a_1 = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{2p}\right) = 1 - \frac{3}{2p} + \frac{1}{2p^2} = 1 + \frac{3}{2p^2}\left(\frac{1}{3} - p\right),$$

ezért $a_1 \leq 1$, ha $p \geq \dfrac{1}{3}$. Másrészt $k \geq 2$ esetén mindegyik a_k tartalmazza az a_1 szorzatot, és emellett páros sok $\left(1 - \dfrac{1}{jp}\right)$ tényezőből áll, amelyek mindegyike 0 és 1 közé eső valós szám, ha $p \geq \dfrac{1}{3}$ és j legalább 2. Tehát minden $k \geq 2$ pozitív egész számra $a_k < 1$, így $\dfrac{f(w,p)}{g(w)} < 1$, ha $p \geq \dfrac{1}{3}$ és $0 < |w| < 1$. Vagyis $\dfrac{L(a,b)}{M_p(a,b)} < 1$, ha $p \geq \dfrac{1}{3}$ és $a \neq b$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

□

2.2.3. Tétel. *Ha* $p < \dfrac{1}{3}$, *akkor van olyan* $a,\ b > 0$, $a \neq b$, *hogy* $L(a,b) > M_p(a,b)$.

Bizonyítás. Az előző bizonyítás jelöléseit és eredményeit használva azt kell igazolnunk, hogy $p < \dfrac{1}{3}$ esetén van olyan $0 < |w| < 1$, amelyre $f(w,p) > g(w)$.

Az $f(w,p)$ és $g(w)$ függvények sorfejtése alapján

$$f(w,p) - g(w) = w^2\left(\frac{1}{3}(a_1 - 1) + \frac{1}{5}(a_2 - 1)w^2 + \frac{1}{7}(a_3 - 1)w^4 + \ldots\right).$$

Mivel $p < \dfrac{1}{3}$ esetén $a_1 > 1$, ezért ha $w \to 0$, akkor

$$\frac{f(w,p) - g(w)}{w^2} \longrightarrow \frac{1}{3}(a_1 - 1) > 0,$$

ami azt jelenti, hogy elég kicsi w esetén $f(w,p) - g(w) > 0$.

Ezzel igazoltuk a tételt.

□

2.2.4. Tétel. *Ha a, $b > 0$, $a \neq b$ és $q \leq 0$ akkor $M_q(a,b) < L(a,b)$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $q = 0$-ra teljesül az egyenlőtlenség, hiszen ez a 2.1.5. és a 2.2.1. Tételekből következik. Okoskodhatunk azonban Taylor-sorok segítségével is.

Tekintsük ismét az $\frac{L(a,b)}{M_q(a,b)}$ hányadost, erről látjuk be, hogy $a, b > 0$, $a \neq b$ és $q < 0$ esetén nagyobb 1-nél. Alakítsuk át a hányadost:

$$\frac{L(a,b)}{M_0(a,b)} = \frac{\frac{a-b}{\log a - \log b}}{\sqrt{ab}} = \frac{\frac{a}{b} - 1}{\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \log \frac{a}{b}}.$$

Legyen $w = \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} - 1}{\sqrt{\frac{a}{b}} + 1}$, ekkor $0 < |w| < 1$ és $\frac{a}{b} = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2$. Ezzel a helyettesítéssel

$$\frac{L(a,b)}{M_0(a,b)} = \frac{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 - 1}{\sqrt{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2} \cdot \log \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2}$$

adódik, ahonnan rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{L(a,b)}{M_0(a,b)} = \frac{\frac{2w}{1-w^2}}{\log(1+w) - \log(1-w)}.$$

Legyen

$$g(w) = \frac{\log(1+w) - \log(1-w)}{2w},$$

ekkor

$$\frac{L(a,b)}{M_0(a,b)} = \frac{\frac{1}{1-w^2}}{g(w)}.$$

A (2.1) összefüggés alapján

$$g(w) = 1 + \frac{1}{3}w^2 + \frac{1}{5}w^4 + \frac{1}{7}w^6 + \dots,$$

másrészt pedig Taylor-sorejtéssel adódik, hogy

$$\frac{1}{1-w^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(w^2\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} w^{2k} = 1 + w^2 + w^4 + w^6 + \dots.$$

Mindezek alapján

$$\frac{L(a,b)}{M_0(a,b)} = \frac{1 + w^2 + w^4 + w^6 + \dots}{1 + \frac{1}{3}w^2 + \frac{1}{5}w^4 + \frac{1}{7}w^6 + \dots},$$

amely minden $0 < |w| < 1$ esetén 1-nél nagyobb.

Ezzel a tétel bizonyítása kész.

$\square$

2.2.5. Tétel. *Ha $q > 0$, akkor van olyan a, $b > 0$, $a \neq b$, hogy $M_q(a,b) > L(a,b)$.*

Bizonyítás. Tekintsük ismét az $\dfrac{L(a,b)}{M_q(a,b)}$ hányadost $a \neq b$ esetén:

$$\frac{L(a,b)}{M_q(a,b)} = \frac{\frac{a-b}{\log\frac{a}{b}}}{\left(\frac{a^q+b^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{2^{\frac{1}{q}}(z^{\frac{1}{q}}-1)}{\frac{1}{q}(z+1)^{\frac{1}{q}}\cdot\log z} = \frac{q\cdot 2^{\frac{1}{q}}\left(1-\frac{1}{z^{\frac{1}{q}}}\right)}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\log z},$$

ahol $z = \left(\dfrac{a}{b}\right)^q$. Mivel $q > 0$, ezért $\dfrac{L(a,b)}{M_q(a,b)} \to 0$, ha $z \to +\infty$, így elég nagy z esetén a hányados kisebb 1-nél.

Tehát a tételt igazoltuk.

□

A 2.2.2. – 2.2.5. Tételek alapján megválaszolhatjuk a szakasz elején feltett kérdést. A legnagyobb q, amelyre $M_q(a,b) < L(a,b)$ teljesül minden $a \neq b$ pozitív számok esetén, az a $q = 0$, és a legkisebb p, amelyre minden $a \neq b$ pozitív számok esetén $M_p(a,b) < L(a,b)$ teljesül, az a $p = \dfrac{1}{3}$.

3. fejezet

A logaritmikus közép három változóra

Ebben a fejezetben a logaritmikus közepet kiterjesztjük három változóra, majd belátjuk, hogy az így kapott közép a számtani és a mértani közepek közé esik. A fejezet az [1] könyv és a [4] feladatmegoldás felhasználásával készült.

3.1. Háromváltozós közepek

A háromváltozós számtani és mértani közepek jól ismertek a középiskolából.

3.1.1. Definíció. Legyenek a, b és c pozitív számok. Ekkor számtani (aritmetikai) közepük

$$A(a,b,c) := \frac{a+b+c}{3},$$

és mértani (geometriai) közepük

$$G(a,b,c) := \sqrt[3]{abc}.$$

A logaritmikus közép háromváltozós kiterjesztése első látásra nem világos, egy lehetséges értelmezése a következő.

3.1.2. Definíció. Legyenek a, b és c páronként különböző pozitív számok. Ekkor logaritmikus közepük

$$L(a,b,c) := 2\Bigg(\frac{a}{(\log a - \log b)(\log a - \log c)} + \frac{b}{(\log b - \log c)(\log b - \log a)} + \\ + \frac{c}{(\log c - \log a)(\log c - \log b)}\Bigg).$$

3.1.3. *Megjegyzés.* Egyelőre a háromváltozós logaritmikus közepet nem értelmezzük akkor, ha az a, b, c számok közül legalább kettő egyenlő. Később látni fogjuk, hogy az L függvény folytonosan kiterjed az egész $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ térnyolcadra.

A háromváltozós logaritmikus közép, a kétváltozós esethez hasonlóan szimmetrikus és pozitív homogén. Ezt látjuk be a következő állításban.

3.1.4. Állítás. *A háromváltozós logaritmikus közép az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.*

(i) Páronként különböző $a, b, c > 0$ számok esetén $L(a, b, c) = L(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c})$, ahol $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$ az a, b, c számok tetszőleges sorrendje.

(ii) Páronként különböző $a, b, c > 0$ számok és tetszőleges $\lambda > 0$ valós szám esetén

$$L(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda \cdot L(a, b, c),$$

vagyis $L(a, b, c)$ a változóiban pozitív homogén.

Bizonyítás. (i) Az a és b felcserélésével a háromváltozós $L(a, b, c)$ logaritmikus közép első és második tagja felcserélődik, így az összeg változatlan marad. Hasonlóan látható, hogy b és c, valamint a és c felcserélésével sem változik a logaritmikus közép. A felcserélésekkel a, b, c bármely sorrendjét megkaphatjuk, és eközben $L(a, b, c)$ nem változik.

(ii) Az $L(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ kifejezés első tagját megvizsgálva

$$\frac{\lambda a}{(\log(\lambda a) - \log(\lambda b))(\log(\lambda a) - \log(\lambda c))} = \lambda \left(\frac{a}{(\log a - \log b)(\log a - \log c)} \right)$$

adódik. Hasonlóan a másik két tagból is kiemelhető λ.

Ezzel beláttuk a tulajdonságokat.

□

3.2. Összehasonlítás a számtani és a mértani közepekkel

Ebben a részben megmutatjuk, hogy három, páronként különböző pozitív szám logaritmikus közepe a számtani és a mértani közepük között helyezkedik el.

3.2.1. Tétel. *Minden a, b és c páronként különböző pozitív számra*

$$G(a, b, c) \le L(a, b, c) \le A(a, b, c),$$

vagyis

$$\sqrt[3]{abc} \leq L(a,b,c) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

A 3.2.1. Tétel bizonyításához szükségünk van a súlyozott számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségre, valamint a Jensen-egyenlőtlenség integrál alakjára.

3.2.2. Definíció. Legyenek a, b és c pozitív számok, valamint x, y és z nemnegatív számok (súlyok), melyekre $x + y + z = 1$. Ekkor az a, b, c számok az x, y, z súlyokkal vett súlyozott számtani közepe

$$xa + yb + zc,$$

súlyozott mértani közepe pedig

$$a^x b^y c^z.$$

3.2.3. Tétel. *Legyenek a, b és c pozitív számok, valamint x, y és z olyan nemnegatív számok (súlyok), amelyekre $x + y + z = 1$. Ekkor az a, b és c számoknak az x, y és z számokkal vett súlyozott számtani és mértani közepei között érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$a^x b^y c^z \leq xa + yb + zc,$$

vagyis

$$a^x b^y c^{1-x-y} \leq xa + yb + (1-x-y)c.$$

Bizonyítás. A tételt a Jensen-egyenlőtlenség segítségével fogjuk belátni. Legyen $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, amely konvex függvény. Alkalmazzuk a 2.1.6. Tételt az $a_1 = \log a, a_2 = \log b, a_3 = \log c$ és a $p_1 = x, p_2 = y, p_3 = z$ szereposztással, ahol $x + y + z = 1$. Ekkor

$$e^{x \log a + y \log b + z \log c} \leq x \cdot e^{\log a} + y \cdot e^{\log b} + z \cdot e^{\log c},$$

ami a logaritmus azonosságai alapján éppen a 3.2.3. Tétel egyenlőtlensége.

□

A Jensen-egyenlőtlenség egy másik alakjára is szükségünk lesz a későbbiekben.

3.2.4. Tétel (Jensen-egyenlőtlenség integrál alakja)**.** *Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $H \subset \mathbb{R}^2$ pozitív területű (Jordan-mértékű) halmaz, és jelölje $T(H)$ a H halmaz területét. Ekkor tetszőleges $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvényre*

$$\varphi\left(\frac{\int_H f}{T(H)}\right) \leq \frac{\int_H \varphi \circ f}{T(H)}.$$

Bizonyítás. Az $\int\limits_H f$ integrál egy közelítő összege $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)T(H_i)$, ahol $H_i \subset H$ egymásba nem nyúló, mérhető halmazok, melyekre $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = H$, továbbá $x_i \in H_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ekkor φ konvexitása miatt a Jensen-egyenlőtlenség alapján

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot T(H_i)}{T(H)}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{T(H_i)}{T(H)}\right) \le \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(f(x_i)\right)\frac{T(H_i)}{T(H)}.$$

A jobb oldalon $\frac{1}{T(H)} \cdot \int\limits_H \varphi \circ f$ egy közelítő összege áll, így elvégezve a határátmenetet éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

$\square$

Ezek után térjünk rá a 3.2.1. Tétel bizonyítására.

A 3.2.1. *Tétel bizonyítása.* Először megmutatjuk, hogy

$$L(a,b,c) = 2\iint\limits_H a^x b^y c^{1-x-y} dxdy, \tag{3.1}$$

ahol

$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0 \text{ és } x + y \le 1\}, \tag{3.2}$$

vagyis H a $(0,0), (1,0), (0,1)$ pontok által meghatározott háromszöglap a síkon.

Egyrészt a háromváltozós logaritmikus közép pozitív homogenitása alapján $L(a,b,c) = c \cdot L\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right)$, másrészt

$$\iint\limits_H a^x b^y c^{1-x-y} dxdy = c \cdot \iint\limits_H \left(\frac{a}{c}\right)^x \left(\frac{b}{c}\right)^y dxdy,$$

ezért elegendő belátni, hogy

$$L\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right) = 2\iint\limits_H \left(\frac{a}{c}\right)^x \left(\frac{b}{c}\right)^y dxdy, \tag{3.3}$$

ahol nyilván $\frac{a}{c}$ és $\frac{b}{c}$ helyett a és b írható.

A Fubini-tétel alapján számolva a kettős integrált

$$\iint\limits_H a^x b^y dxdy = \int\limits_0^1 a^x \left(\int\limits_0^{1-x} b^y dy\right) dx = \int\limits_0^1 a^x \left[b^y \cdot \frac{1}{\log b}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{\log b} \cdot \int\limits_0^1 a^x (b^{1-x} - 1) dx = \frac{1}{\log b}\left(b\left[\frac{(\frac{a}{b})^x}{\log \frac{a}{b}}\right]_0^1 - \left[\frac{a^x}{\log a}\right]_0^1\right)$$

adódik. A jobb oldalt kifejtve kapjuk, hogy

$$\iint\limits_H a^x b^y dxdy = \frac{1}{\log b}\left(\frac{a-b}{\log\frac{a}{b}} - \frac{a-1}{\log a}\right) =$$

$$= \frac{a}{\log b}\left(\frac{1}{\log\frac{a}{b}} - \frac{1}{\log a}\right) - \frac{b}{\log b\cdot\log\frac{a}{b}} + \frac{1}{\log b\cdot\log a} =$$

$$= \frac{a}{\log\frac{a}{b}\cdot\log a} + \frac{b}{\log b\cdot\log\frac{b}{a}} + \frac{1}{\log\frac{1}{b}\cdot\log\frac{1}{a}} = \frac{1}{2}L(a,b,1).$$

Ezzel a (3.3) azonosságot beláttuk, ami ekvivalens a (3.1) azonossággal.

Szükségünk lesz még a következő azonosságra is:

$$\frac{a+b+c}{3} = 2\iint\limits_H (xa+yb+(1-x-y)c)dxdy, \tag{3.4}$$

ahol H a korábban definiált (3.2) halmaz. Az integrált ismét a Fubini-tétel szerint számoljuk:

$$\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(xa+yb+(1-x-y)c)\,dy\right)dx = \int_0^1\left(xa(1-x)+(1-x)^2\cdot\frac{b+c}{2}\right)dx.$$

A jobb oldalon elvégezve az integrálást kapjuk, hogy

$$\iint\limits_H (xa+yb+(1-x-y)c)dxdy = \frac{a+b+c}{6},$$

ami éppen a (3.4) azonosság $\frac{1}{2}$-szerese.

Alkalmazzuk most a súlyozott számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget a (3.1) és a (3.4) integrálokban szereplő integrandusokra. Ekkor

$$2\iint\limits_H a^x b^y c^{1-x-y}dxdy \le 2\iint\limits_H (xa+yb+(1-x-y)c)dxdy = \frac{a+b+c}{3},$$

vagyis

$$L(a,b,c) \le \frac{a+b+c}{3}.$$

Ezzel a tételben szereplő jobb oldali egyenlőtlenséget beláttuk.

Most lássuk be a bal oldali egyenlőtlenséget. Ehhez írjuk fel a (3.1) egyenlőség jobb oldalát más alakba:

$$L(a,b,c) = 2\iint\limits_H a^x b^y c^{1-x-y}dxdy = 2\iint\limits_H \exp\left(\log(a^x b^y c^{1-x-y})\right)dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_H \exp\left(\log a^x + \log b^y + \log c^{1-x-y}\right)dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_H \exp(x\log a + y\log b + (1-x-y)\log c)dxdy.$$

Helyettesítsünk a (3.4) azonosságban a helyébe $\log a$-t, b helyébe $\log b$-t és c helyébe $\log c$-t, valamint vegyük a kifejezés exponenciálisát. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\exp\left(2\iint\limits_H (x\log a + y\log b + (1-x-y)\log c)\,dxdy\right) = \\
&= \exp\left(\frac{\log a + \log b + \log c}{3}\right) = \exp\left(\frac{1}{3}\log(abc)\right) = \\
&= \exp\left(\log\,(abc)^{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt[3]{abc}.
\end{aligned}$$

Az exponenciális függvény konvex, így alkalmazható az integrálokra a Jensen-egyenlőtlenség. Mivel $T(H) = \dfrac{1}{2}$, ezért

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{abc} &= \exp\left(2\iint\limits_H (x\log a + y\log b + (1-x-y)\log c)\,dxdy\right) \le \\
&\le 2\iint\limits_H \exp\left(x\log a + y\log b + (1-x-y)\log c\right) dxdy = L(a,b,c).
\end{aligned}$$

Ezzel a tétel bizonyítása kész.

$\square$

3.2.5. *Megjegyzés.* A (3.1) azonosság segítségével a logaritmikus közép értelmezési tartományát könnyen kiterjeszthetjük $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$-ra, hiszen a jobb oldali integrál értelmes tetszőleges $a, b, c > 0$ számok esetén.

Irodalomjegyzék

[1] Ábrahám Gábor: *Nevezetes egyenlőtlenségek*, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1995.

[2] B. C. Carlson: *The Logarithmic Mean*, The American Mathematical Monthly, Vol. 79, No. 6, Jun. – Jul., 1972.

[3] Kovács Veronika – Petz Dénes: *Számtani közép, mértani közép, meg ilyenek*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2006/3.

[4] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok: *A – 623. feladat*, 2014/10.

[5] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: *Analízis I*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.

[6] Pataki János: *Közepek*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2006/4.

[7] Tung – Po Lin: *The Power Mean and the Logarithmic Mean*, The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 8, Oct., 1974.