EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Focibajnokságok és véges geometriák

BSc MATEMATIKA SZAKDOLGOZAT

TANÁRI SZAKIRÁNY

Készítette:

Ujváry János

Témavezető:

Kiss György, egyetemi docens, Geometria Tanszék

BUDAPEST, 2015

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A dolgozat egyik célkitűzése, hogy körmérkőzéses focibajnokság lebonyolítására adjunk meg algoritmust. Célkitűzéseink, hogy minden résztvevő csapat mindenkivel pontosan egyszer játsszon, és minden fordulóban minden csapat pályára lépjen úgy, hogy egy adott forduló mérkőzései egy időpontban kezdődhessenek. Elsőre nem tűnik összetettnek a feladat, felmerül a kérdés, hogy mi okozhat nehézséget. Ennek megválaszolása helyett lássunk neki a bajnokság megszervezésének 6 csapat esetén, jelöljük a bajnokság csapatait az ABC első betűivel.

1.Forduló

$$A - B$$

$$C - D$$

$$E - F$$

2. Forduló

$$A - C$$

$$B - D$$

?

Akadályba ütköztünk, hiszen a 2. fordulóban E nem játszhat F ellen, hiszen ezt már az 1. fordulóban megtette, az összes többi csapat ellen pedig azért nem léphet pályára, mert ők már valamelyik másik csapat ellen játszanak a 2. fordulóban. Az elakadásból nem az következik, hogy 6 csapatos körmérkőzéses bajnokság nem szervezhető, hanem az, hogy így (első 5 mérkőzés a fent leírt módon adott) nem kezdhető el. Rövid, akár egy papíron elvégezhető próbálgatást követően megadható a 6 csapatos bajnokság lebonyolítása, azonban példánk arra mindenképpen alkalmas volt, hogy igazolja kérdésfelvetésünk létjogosultságát, hiszen sok csapat esetén a próbálgatás nem célravezető.

Egy lehetséges lebonyolítás 6 csapat esetén:

1. forduló: $A - B, C - D, E - F$
2. forduló: $A - C, B - E, D - F$
3. forduló: $A - D, B - F, C - E$
4. forduló: $A - E, B - D, C - F$
5. forduló: $A - F, B - C, D - E$

A másik célkitűzés, hogy megismerkedjünk egy új geometriával, a véges affin síkokkal. Utóbbi akár eszköznek is tekinthető, hiszen a véges affin sík egyeneseinek és parabolájának tulajdonságai lesznek segítségünkre a bajnokság megszervezésekor.

A dolgozat négy fejezetből áll, amelyek közül az elsőben az algebrai alapokat rakjuk le. Bevezetjük a test fogalmát, megismerkedünk a maradékosztályokkal, és belátjuk, hogy azon maradékosztályok, amelyek modulusa prím, véges testet alkotnak. A második fejezetben a véges affin síkot építjük föl, állításokat fogalmazunk meg, amelyeket igazolunk. Ebben a fejezetben erősen támaszkodtam Kiss György: Hogyan szervezzünk körmérkőzéses focibajnokságot? címmel, 2006-ban megjelent cikkére, hiszen azonos szerkezeti felépítést választottam, és a kimondott állítások is megegyeznek. A *véges affin sík p-edrendű parabolájának* tulajdonságait felhasználva a fejezet végén megadunk egy lehetséges lebonyolítást, amely minden olyan esetben működik, amikor a bajnokságban résztvevő csapatok száma eggyel nagyobb egy páratlan prímnél.

Az érettségi pillanatáig síkon mindig az euklidészi síkot értettük. Egyetemen tanultunk ennek kibővítéséről. Ennek során feltettük, hogy bármely két egyenes metszi egymást. Az euklidészi sík párhuzamos egyeneseinek metszéspontjait ideális pontoknak neveztük, és fölvettünk egy egyenest, ami az ideális pontokra illeszkedik (ideális egyenes). Így egy új geometriai rendszert kaptunk, amit az elejétől kellett fölépíteni, minden eddig igaz állításról meg kellett gondolni, hogy érvényben marad-e, illetve hogy mi a többlet, mik azok az állítások, amelyeket az új geometriában levezethetünk, a régiben azonban nem voltak igazak. Az így kapott új geometriai rendszert kétdimenziós projektív geometriának, a modellt (nem egyetlen lehetséges modell) kibővített euklidészi síknak neveztük. A dolgozat harmadik fejezetében ezt az utat járjuk be fordítva azzal, hogy a projektív sík axiomatikus felépítését követően a projektív síkból származtatjuk az affin síkot. Meggondolható, hogy az euklidészi sík az affin síkoknak egy speciális esete.

A negyedik fejezetben általános, tetszőleges számú résztvevő csapat esetén működő algoritmust adunk a bajnokság lebonyolítására. Ekkor az euklidészi sík páratlan sok csúcsú szabályos sokszöge lesz a modellünk alapja. A modellnek néhány további alkalmazását is felvillantjuk. Segítségünkre lesz akkor, amikor igazságosabb bajnokság kiírására törekszünk. Itt azt értjük igazságos bajnokságon, ha semelyik csapatnak sem kell egymás után sokszor idegenben pályára lépnie. Ugyanezt a modellt akkor is jól tudjuk használni, amikor azt tűzzük ki célul, hogy bizonyos csapatoknak pályaválasztás szempontjából páronként ellentétes sorsolást biztosítsunk.

1.Fejezet: Algebrai bevezetés

Ebben a fejezetben a dolgozat algebrai megalapozását végezzük el. Definíciók sorozatán keresztül jutunk el a test fogalmához, majd szót ejtünk az egészek maradékosztályok szerinti osztályozásáról.

Művelet: Egy nem üres A halmaz n-változós műveletének egy A-n értelmezett, A-ba képző n-változós függvényt nevezünk.

Csoport: Egy G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy kétváltozós * művelet a következő tulajdonságokkal:

1) A * művelet asszociatív.
   Asszociativitás: Az R halmazon értelmezett kétváltozós * művelet asszociatív, ha tetszőleges $x, y, z \in R$ esetén $(x * y) * z = x * (y * z)$
2) Van neutrális eleme.
   Neutrális elem: Legyen * kétváltozós művelet az R halmazon! Azt mondjuk, hogy az $e \in R$ neutrális elem, ha tetszőleges $x \in R$ esetén $e * x = x * e = x$. (Összeadás esetén nullelemről, szorzás esetén egységelemről beszélünk.)
3) G minden elemének van inverze.
   Inverz: Legyen e neutrális elem a * műveletre nézve! Ha $u * v = e$, akkor u balinverze v-nek, v pedig jobbinverze u-nak. Ha $v * u = e$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy u és v egymás inverzei. (Ha a művelet az összeadás, akkor az inverzet ellentettnek nevezzük.)

Kommutativitás: Az R halmazon értelmezett kétváltozós * művelet kommutatív, ha tetszőleges $x, y \in R$ esetén $x * y = y * x$

Kommutatív csoport (Abel-csoport): olyan csoport, aminek a művelete kommutatív

Gyűrű: Az R gyűrű, ha az R halmazon értelmezett egy összeadásnak nevezett + jelű művelet is, és egy szorzásnak nevezett, általában egymás mellé írással jelölt művelet is a következő tulajdonságokkal:

1) R az összeadásra nézve kommutatív csoport

2) a szorzás asszociatív (R a szorzásra nézve félcsoport)

3) érvényes a **disztributivitás**, azaz tetszőleges $x, y, z \in R$ esetén

$(x+y)z = xz + yz$ és $z(x+y) = zx + zy$

Test: kommutatív, egységelemes gyűrű, amelyben minden nem nulla elemnek létezik multiplikatív inverze

Egy testben tehát két művelet van, egy összeadás és egy szorzás. Mindkettő asszociatív és kommutatív, van nullelem, illetve egységelem és minden elemnek van ellentettje, illetve minden nullától különböző elemnek van multiplikatív inverze. A két műveletet a disztributív szabály kapcsolja össze.

Célunk a következőkben, hogy megismerkedjünk a **modulo** $\boldsymbol{p}$ (ahol p prím) **maradékosztályokkal**. Legyen tehát p egy rögzített prímszám. Az egész számokat soroljuk be osztályokba aszerint, hogy mennyi maradékot adnak a p-vel való osztáskor. Így p darab különböző osztályt kapunk, az azonos osztályban lévő számok felírhatók $np + m$ alakban, ahol n végigfut az egész számok halmazán, m pedig az osztályra jellemző maradék, amelyről tudjuk, hogy egész, és feltehetjük, hogy $0 \leq m \leq p-1$. Két egész szám pontosan akkor van egy osztályban, ha különbségük osztható p-vel. Legyen $Z_p = \{0,1,\ldots,p-1\}$. Ekkor a Z_p halmaz elemeit azonosíthatjuk a fenti osztályokkal. Z_p elemei közt definiáljuk az összeadást és a szorzást a következő módon: $a \oplus b = c$, illetve $a \odot b = c$, ha az egészek között elvégezve az összeadást, illetve a szorzást, az eredményül kapott szám abba az osztályba esik, amelyiket c reprezentálja. Vezessük be, hogy a maradékosztályokon értelmezett összeadást és szorzást az egészeken értelmezetthez hasonlóan jelöljük (+ jel, illetve * jel, vagy egymás mellé írás). Ahhoz, hogy a fent leírt módon definiálhassuk a műveleteket, az kell, hogy a műveletek eredménye csak az osztályoktól függjön, attól ne, hogy az egyes osztályoknak melyik elemét tekintjük. Ehhez pedig az kell, hogy ha a és a', valamint b és b' ugyanabba az osztályba tartozik, akkor $a+b$ és $a'+b'$ is, továbbá ab és $a'b'$ is ugyanabba az osztályba tartozzon. Tegyük fel tehát, hogy a és a', valamint b és b' ugyanabba az osztályba tartozik. Két szám pontosan akkor tartozik ugyanabba az osztályba, ha különbségük osztható p-vel.

Ha $p \mid a - a'$ **és** $p \mid b - b'$, **akkor**

$p \mid (a-a') + (b-b') = (a+b) - (a'+b')$ **és** $p \mid (a-a')b + (b-b')a' = ab - a'b'$.

Tétel:

A modulo p $(p > 2, prím)$ maradékosztályok a fent leírt műveletekkel véges testet (véges elemszámú testet) alkotnak.

Bizonyítás:

A bizonyítás során a modulusra az indexes jelölést használjuk, a maradékosztályok között definiált összeadást $\oplus$, az egész számok halmazán értelmezett összeadást + jellel jelöljük. A kivonást és az osztást az összeadás, illetve a szorzás inverz műveleteként definiáljuk.

A modulo m maradékostályok körében:

Az összeadás kommutatív:

$$a_m \oplus b_m = (a + b)_m = (b + a)_m = b_m \oplus a_m$$

Az összeadás asszociatív:

$$(a_m \oplus b_m) \oplus c_m = ((a + b) + c)_m = (a + (b + c))_m = a_m \oplus (b_m \oplus c_m)$$

A 0_m nullelem:

$$0_m \oplus a_m = (0 + a)_m = a_m = (a + 0)_m = a_m \oplus 0_m$$

Az a_m ellentettje $(-a)_m$ (egyértelműen létezik additív inverz):

$$(-a)_m \oplus a_m = (-a + a)_m = 0_m = \big(a + (-a)\big)_m = a_m \oplus (-a)_m$$

Additív inverz létezése:

x additív inverze $m - x$, hiszen $x \oplus (m - x) = (x + m - x)_m = (x - x + m)_m = 0 \oplus m = 0$ valamint $m - x$ –ről azt is tudjuk, hogy egész és hogy $0 \leq m - x < m$ (Itt föltettük, hogy $0 \leq x < m$, amit megtehetünk, a határokkal azért bánhatunk nagyvonalúan, mert számolási szabályaink szerint $m = 0$.)

A kommutativitást és az asszociativitást egyaránt felhasználtuk.

Vizsgáljuk most az egyértelműséget. Tegyük fel, hogy y és z is x inverzei.

$$x \oplus y = x \oplus z$$

$$[(m - x) \oplus x] \oplus y = [(m - x) \oplus x] \oplus z$$

$$0 \oplus y = 0 \oplus z$$

$$y = z$$

Ellentmondásra jutottunk.

Megjegyzések a bizonyításhoz: A bizonyítás során felhasználtuk például az asszociativitást, kommutativitást.

Szorzás esetén az összeadáshoz hasonlóan hangsúlyozzuk, hogy mikor értelmezzük a műveletet maradékosztályok között, erre a $\odot$ jelölést használjuk, és mikor beszélünk a megszokott, egészeken értelmezett szorzásról (*).

A szorzás kommutatív:

$$a_m \odot b_m = (a * b)_m = (b * a)_m = b_m \odot a_m$$

A szorzás asszociatív:

$$(a_m \odot b_m) \odot c_m = ((a * b) * c)_m = (a * (b * c))_m = a_m \odot (b_m \odot c_m)$$

Az 1_m egységelem:

$$1_m \odot a_m = (1 * a)_m = a_m = (a * 1)_m = a_m \odot 1_m$$

Az összeadás disztributív a szorzásra nézve:

$$(a \oplus b)_m \odot c_m = ((a + b) * c)_m = (a * c + b * c)_m = (a \odot c)_m \oplus (b \odot c)_m$$

Multiplikatív inverz:

Állítás:

A nullától különböző elemeknek egyértelműen létezik multiplikatív inverze, a nullával való osztást pedig az egészek köréhez hasonlóan itt sem engedjük meg.

Bizonyítás:

Tegyük fel először, hogy $n \neq 0$.

Mostantól tegyük fel, hogy $\boldsymbol{m}$ prím, és a továbbiakban jelöljük $\boldsymbol{p}$-vel (először használjuk ki a prímtulajdonságot, minden eddigi állításunk igaz volt tetszőleges m-re, amit emeljünk ki azzal, hogy innentől m-et p-nek nevezzük).

Az n-nel való szorzás Z_p elemeinek egy permutációját adja, mert ha $a \neq b$, akkor $n \odot a \neq n \odot b$, hiszen $n \odot a = n \odot b$ azt jelentené, hogy $m \mid na - nb = n(a - b)$.

$p \mid n$ vagy $p \mid (a - b)$

ami ellentmondás, mert $0 < n < p$ és $0 < |a - b| < p$. Ha viszont az n-nel való szorzás Z_p elemeinek egy permutációját adja, akkor pontosan egy olyan elem van Z_p-ben, amelyet n-nel szorozva 1-et kapunk.

A fentieket azzal kell kiegészíteni, hogy $n \odot 0 = 0$. Így kiderül, hogy az egyértelműség sem sérül.

Fogadjuk most el bizonyítás nélkül a következő állítást:

Valamely H véges halmazon pontosan akkor tudunk definiálni két darab kétváltozós műveletet úgy, hogy H elemei a két művelettel véges testet alkossanak, ha H elemszáma prímhatvány.

2.Fejezet: Véges affin síkok

$AG(2, q)$ (q-ad rendű affin sík):

*Jelölés: Mostantól a véges testbeli műveleteket jelöli +, illetve * (amit a rövidebb leírás kedvéért egymás után írással jelölünk).*

Legyen $q \geq 2$ prímhatvány és tekintsünk egy adott F_q véges testet. Értelmezzük ekkor a q-ad rendű affin sík **pontjait** rendezett a, b párokként, ahol $a, b \in F_q$, az **egyenesek** pedig a $[c, d]$ típusú rendezett párok, ahol $c, d \in F_q$ és az $[e]$ típusúak, ahol $e \in F_q$.

Illeszkedés: Az (a, b) pont akkor és csak akkor legyen rajta egy $[c, d]$ típusú egyenesen, ha $b = ac + d$, illetve pontosan akkor legyen rajta az $[e]$ típusú egyenesen, ha $a = e$.

Vezessük be az egyenesek egyenleteit a klasszikus esettel analóg módon. Azt mondjuk, hogy az $[c, d]$ egyenes egyenlete $Y = cX + d$, illetve az $[e]$ egyenes egyenlete $X = e$.

1.Állítás:

Az $AG(2, q)$ síkon a pontok száma q^2, az egyeneseké pedig $q^2 + q$.

Bizonyítás:

F_q-nak q eleme van, a pontok száma pedig az F_q elemeiből képezhető rendezett párok száma, tehát q^2 . Ugyanezért $[c, d]$ típusú egyenesből is q^2 van, ehhez jön a q darab $[e]$ típusú.

2. Állítás:

Bármely két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese.

Bizonyítás:

Legyen (a_1, b_1) és (a_2, b_2) két különböző pont. Ha a_1=a_2, akkor az $[e]$ típusú egyenesek közül mindkettőre illeszkedik az $e = a_1 = a_2$ egyenletű, más pedig egyikre sem. Ha $[c, d]$ típusúra illeszkedne (a_1, b_1) és (a_2, b_2), az azt jelentené, hogy

$$b_1 = ca_1 + d = ca_2 + d = b_2, \qquad \text{tehát a két pont nem különbözne.}$$

Ha$a_1 \neq a_2$, akkor $[e]$ típusú egyenes nyilván nem köti össze a pontokat. Ha $[c, d]$ típusú összeköti, az azt jelenti, hogy

① $b_1 = ca_1 + d$

② $b_2 = ca_2 + d.$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat! (Ezt megtehetjük, hiszen a két egyenlet minden tagja F_q véges test eleme, amelyre érvényesek a szokásos műveleti tulajdonságok (a kivonás az összeadás inverz-műveleteként értelmezhető és a kommutativitást is kihasználtuk).) Így:

$$b_1 - b_2 = c(a_1 - a_2)$$

Mivel $a_1 \neq a_2$, ezért $c = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$ $\quad d = b_1 - a_1 \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} = \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1 - a_2}$

Tehát $[c, d]$ típusú egyenesből legfeljebb egy mehet át mindkét ponton, kellene még, hogy a fenti c-re és d-re az egyenes egyenletét ki is elégítik a két pont koordinátái.

(a_1, b_1) -re: $\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} a_1 + \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1 - a_2} = \frac{b_1 a_1 - b_1 a_2}{a_1 - a_2} = \frac{b_1(a_1 - a_2)}{a_1 - a_2} = b_1$

(a_2, b_2) - re: $\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} a_2 + \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1 - a_2} = \frac{b_2 a_1 - b_2 a_2}{a_1 - a_2} = \frac{b_2(a_1 - a_2)}{a_1 - a_2} = b_2$

3. Állítás:

Az $AG(2, q)$ sík minden egyenesén q pont van.

Bizonyítás:

Az (a, b) pont akkor és csak akkor van rajta $[e]$ típusú egyenesen, ha $e = a$. Ekkor b tetszőleges, tehát q különböző értéket vehet föl, tehát az egyenesen q pont van. Egy $[c, d]$ típusú egyenesen ugyanígy definíció szerint pontosan akkor van rajta a pont, ha $b = ca + d$. Itt a tetszőlegesen választható q lehetőség közül, ez a választás azonban b-t már rögzíti, tehát bármely $[c, d]$ típusú egyenesen is q pont van.

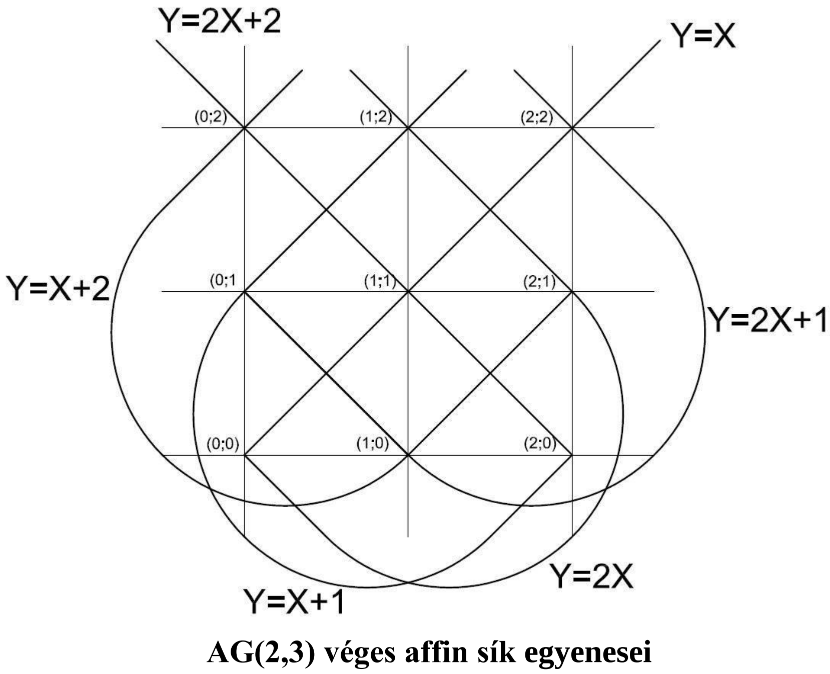
4. Állítás:

Minden ponton $q + 1$ egyenes megy át.

Bizonyítás:

Vegyünk föl egy tetszőleges P pontot a síkon. A 3. Állítás szerint a P-n átmenő egyenesek $q - 1$ P-től különböző pontot tartalmaznak. Ezek a pontok páronként különböznek a 2. Állítás szerint (az állítás két része közül az egyértelműséget használjuk ki). Tehát a P-n áthaladó egyenesek számát x-szel jelölve a P-n áthaladó egyenesek által tartalmazott összes pont mennyisége: $1 + (q - 1)x$. A 2. Állítás létezés része miatt nincs olyan pont a síkon, amelyet ne tartalmazna valamely P-n áthaladó egyenes, tehát a sík összes pontját felsoroltuk. Az 1. Állítás szerint ugyanakkor a síknak q^2 pontja van, tehát $q^2 = 1 + (q - 1)x$ amit átrendezve $q^2 - 1 = (q - 1)x$ amiből az $(a - b)(a + b)$ nevezetes azonosság ($q - 1 \neq 0$, tehát az azonosság bátran használható) segítségével adódik, hogy $x = q + 1$.

A továbbiakban szeretnénk az egyeneseket osztályozni, ehhez azonban először tisztázni kell, hogy mikor mondunk két egyenest párhuzamosnak. Két egyenes legyen **párhuzamos**, ha nincs közös pontjuk, vagy egybeesnek. Egy egyenest azért célszerű önmagával párhuzamosnak tekinteni, hogy teljesüljön a reflexivitás is, így a párhuzamosság ekvivalencia-reláció legyen, ezzel osztályozás alapjául szolgálhasson.



AG(2,3) véges affin sík egyenesei

AG(2,3) egyeneseit ábrázolva jól kivehető a négy párhuzamossági osztály, látványos, hogy minden osztályhoz hozzárendelhető egy-egy irány, azonban meg kell szokni, hogy az euklidészi fogalmaink szerint három nem kollineáris pont illeszkedhet egy véges affin síkbeli egyenesre.

5.Állítás:

Ha az $AG\ (2, q)$ sík P pontja nincs rajta a sík f egyenesén, akkor P-n át pontosan egy f-fel párhuzamos egyenes megy.

Bizonyítás:

P-n át $q+1$ egyenes megy (4. Állítás), f egyenesen q különböző pont van (3. Állítás), ezeket P-vel összekötve megkapjuk a P-n átmenő, f-et metsző egyeneseket (q db). Vagyis $(q+1)-q=1$ P-n átmenő, f-et nem metsző egyenes van.

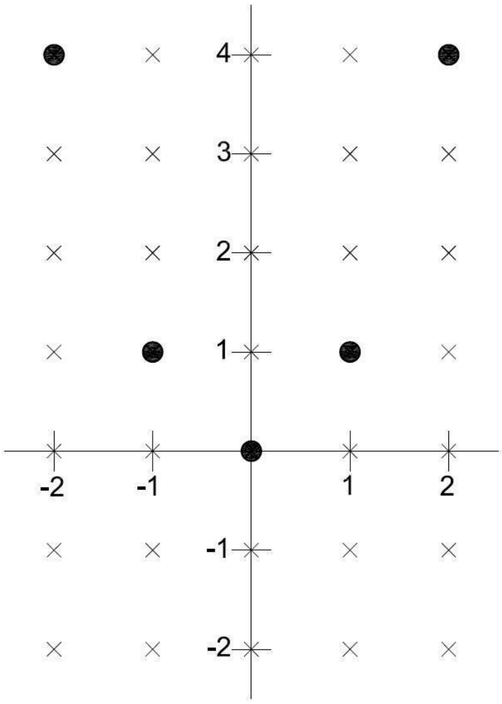
6.Állítás:

A sík egyenesei párhuzamossági osztályokba sorolhatók úgy, hogy két egyenes akkor legyen egy osztályban, ha párhuzamosak. Így minden osztályba q egyenes kerül és a sík minden pontján át minden osztályból pontosan egy egyenes megy.

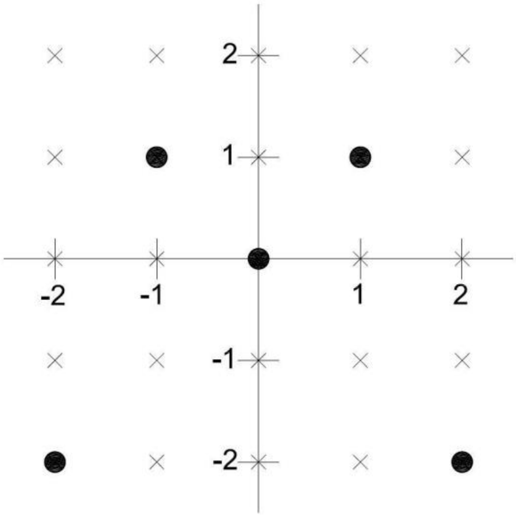
Bizonyítás:

Legyen f és g két különböző, egymást metsző egyenes, metszéspontjukat nevezzük el M-nek. A g egyenesnek $q-1$ M-től különböző pontja van (3. Állítás), és mindegyikben egyértelműen húzható f-fel párhuzamos (5. Állítás). Ebből a $q-1$ egyenesből bármelyik kettő páronként párhuzamos egymással is, hiszen ha lenne kettő, amelyik metszené egymást, akkor a metszéspontot N-nel jelölve lenne két N-en átmenő, f-fel párhuzamos egyenes, ami ellentmond az 5. Állításnak. Így beláttuk, hogy f osztályában q egyenes van, és f-ről csak annyit tettünk fel, hogy létezik olyan egyenes, amit metsz. Ezt megtehetjük, hiszen ha fölveszünk egy pontot f-en, és ezt összekötjük egy olyan ponttal, ami nincs f-en (ilyen létezik, hiszen korábban láttuk, hogy q^2 pont van és csak q pont van egy egyenesen), akkor már elő is állítottuk a keresett egyenest. Az állítás második felének bizonyításához azt kell belátnunk, hogy e osztályából a sík minden pontján át pont egy egyenes megy. Tegyük fel, hogy van olyan pont, amin átmegy e osztályából legalább két egyenes. Ekkor az 5. Állítással jutunk ellentmondásra. Most tegyük fel azt, hogy van olyan pont, amin nem megy át e osztályából egy egyenes sem. Egy egyenes q ponton megy át, (3. Állítás) és q egyenes van minden osztályban az állításunk első (már bizonyított) fele szerint. Tehát q^2 olyan pont van, amin átmegy valamelyik egyenes e osztályából, meg egy további pont, amiről feltettük, hogy nem, és ez már eggyel több, mint ahány pontja van a síknak.

Mostantól p egy tetszőleges páratlan prím. Az $AG(2,p)$ síkon azt a ponthalmazt, aminek elemei pontosan azok az (a,b) pontok, amelyekre teljesül, hogy $b=\mathrm{a}^2$, ***p*-edrendű parabolának** nevezzük.



Az egészeken ismert parabola egy részlete



A modulo 5 parabola

7. Állítás:

A p-edrendű parabolának p pontja van.

Bizonyítás:

A sík (a, b) pontja pontosan akkor van rajta egy p-edrendű parabolán, ha $b = a^2$. A pont első koordinátája tehát tetszőlegesen választható F_q elemei közül (q lehetőség), a másodikat azonban az első már egyértelműen meghatározza.

8. Állítás:

A sík bármely egyenese egy p-edrendű parabolának legfeljebb két pontját tartalmazza.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy az egyenes $[e]$ típusú. Ahhoz, hogy egy $P(a, b)$ adott pont közös legyen, pontosan az kell, hogy $e = a$ és $b = a^2$ teljesüljön. Tehát ha létezik közös pont, akkor egyértelmű (e, e^2), legfeljebb egy metszéspont van. Ahhoz, hogy mindig létezzen közös pont, az kell, hogy bármely e-re, amely F_q-nak eleme, e^2 is F_q eleme legyen.

Ha az egyenes $[c, d]$ típusú, akkor a közös (a, b) pontok a $b = ca + d$ és a $b = a^2$egyenletet is kielégítik, vagyis az $a^2 = ca + d$ egyenlet is igaz. Próbáljuk megoldani ezt a másodfokú egyenletet. A másodfokú egyenletek ismert megoldó képlete nem alkalmazható, hiszen abban négyzetgyökvonás szerepel, amit véges test elemein eddig nem értelmeztünk. Vigyük az ismeretlent tartalmazó tagokat az egyenlet bal oldalára és egészítsük ki az ott szereplő kifejezést teljes négyzetté (az $(a-b)^2$=$a^2-2ab+b^2$ azonosság véges testekben is igaz, ha a 2-vel jelölt elem az $1+1$ összeadás eredménye). Mivel p páratlan, azért $1+1=2\neq 0$ és $2*2=4\neq 0$, ($p=3$ esetén $2*2=1\neq 0$) ezért ezekkel az elemekkel oszthatunk. Az egyenlet így az $a^2-ca+\frac{c^2}{4}=d+\frac{c^2}{4}$ alakra hozható, amit pedig tovább lehet alakítani a nevezetes azonosság segítségével: $\left(a-\frac{c}{2}\right)^2=d+\frac{c^2}{4}$. A négyzetgyökvonáshoz további előkészületre is szükségünk van. Ha Z_p elemeit négyzetre emeljük, akkor $(p+1)/2$ különböző elemet kapunk. A szorzás asszociativitása és kommutativitása miatt ugyanis $(-a)^2=(-1)^2a^2=a^2$, tehát a 0-tól különböző elemek párokba állíthatók úgy, hogy az egyes párokban lévő elemek négyzete megegyezik. Különböző párokhoz tartozó elemek négyzete viszont különböző, mert ha $a^2=b^2$, akkor $a^2=b^2=(a-b)(a+b)=0$, vagyis a nullosztómentesség miatt vagy $a=b$ vagy $a=-b$. A párok száma $(p-1)/2$, ehhez jön még a 0, így kapunk $(p+1)/2$ különböző elemet. Mindezt összegezve egy elem van, amelynek a négyzete 0, a nemnulla elemek fele nem áll elő Z_p-beli elem négyzeteként -ezeket a továbbiakban nevezzük nemnégyzet elemeknek-, másik fele viszont pontosan két Z_p-beli elem négyzete, ezeket a továbbiakban nevezzük négyzetelemeknek. Egyenletünknek tehát nincs megoldása, ha $d+\frac{c^2}{4}$ nemnégyzet elem, 1 megoldása van, ha $d+\frac{c^2}{4}=0$, és két megoldása van, ha $d+\frac{c^2}{4}$ négyzetelem.

9. Állítás:

A p-edrendű parabola tetszőleges T pontján át $p-1$ olyan egyenes megy, amelyik két pontban metszi a parabolát és két olyan, amelyik csak T-ben.

Bizonyítás:

Az $AG(2,p)$ síkon minden ponton, így T-n is $p+1$ egyenes megy át (4. Állítás). A 7. Állítás szerint a parabolának $p-1$ T-től különböző pontja van, amelyeket T-vel összekötve páronként különböző egyeneseket kapunk, mert a 8. Állítás szerint egyetlen egyenes sem metszheti kettőnél több pontban a parabolát. Tehát T-n át $p-1$ darab két pontban metsző egyenes megy, a maradék 2 egyenes pedig csak T-ben metszi a parabolát.

10. Állítás:

Az $[e]$ típusú egyenesek mindegyike egy pontban metszi a parabolát, a többi párhuzamossági osztály mindegyikében pontosan egy olyan egyenes van, amelyik egy pontot tartalmaz a paraboláról.

Bizonyítás:

A 8. Állítás bizonyításának elején már beláttuk, hogy az $[e]$ típusú egyenesek mindig egy pontban metszik a parabolát. Ugyancsak ebben a bizonyításban azt is láttuk, hogy az $Y = cX + d$ egyenesnek pontosan akkor van egy közös pontja a parabolával, ha $d + \frac{c^2}{4} = 0$. Tehát c-t rögzítve, azaz egy párhuzamossági osztály egyeneseit tekintve pontosan egy egyenesnek, a $b = ca - \frac{c^2}{4}$ egyenletűnek lesz egy közös pontja a parabolával.

Megjegyzés: Onnan látható, hogy c rögzítésével épp egy párhuzamossági osztály egyeneseit kaptam, hogy a $b = ca + d_1$ és a $b = ca + d_2$ egyenletekből álló egyenletrendszernek nincs megoldása, tehát a segítségükkel leírt egyeneseknek nincs metszéspontja, ha $d_1 \neq d_2$ ($d_1 = d_2$ esetén megegyezik a két egyenes). Itt c az egyenesek meredekségeinek felel meg.

Elnevezés: Azokat a $[c, d]$ típusú egyeneseket, amelyeknek egy közös pontja van a parabolával, a **parabola érintőjének** nevezzük.

Ennyi előkészületet követően hozzáláthatunk a bajnokság megszervezéséhez, amiben segítségünkre lesznek a véges affin sík egyeneseinek, illetve parabolájának tulajdonságai.

Bajnokság szervezése $p + 1$ csapattal, ahol p páratlan prím

Tekintsük az $AG(2, p)$ síkon a p-edrendű parabolát. Legyenek ennek pontjai $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$, (a 7. Állítás szerint p pontja van a parabolának) ahol az indexeket úgy választjuk, hogy a parabola A_i-beli érintője párhuzamos legyen a sík $Y = iX$ egyenletű egyenesével minden $i \in Z_p$ esetén. A bajnokságban szereplő csapatok közül p darabot feleltessünk meg a parabola pontjainak, egy csapatot pedig egy (∞) jelnek. A fordulókat feleltessük meg a sík párhuzamos egyenesei által alkotott osztályoknak úgy, hogy az [e] típusú egyenesek osztálya ne feleljen meg fordulónak. A többi párhuzamossági osztály mindegyike egyértelműen jellemezhető azzal a $c \in Z_p$ értékkel, amelyik az adott osztályba tartozó egyenesek egyenletében X együtthatója. Tehát beszélhetünk a c meredekséghez tartozó fordulóról.

Ebben az F_c-vel jelölt fordulóban a csapatok párosítása legyen a következő: $A_c - (\infty)$ és $A_i - A_j$ pontosan akkor, ha az A_iA_j egyenes egyenlete $Y = cX + d$ alakú.

Mutassuk meg, hogy jó lebonyolítást adtunk meg. A fordulók száma eggyel kisebb, mint a csapatok száma. Minden $c \in Z_p$ esetén igaz, hogy az F_c fordulóban minden csapat pontosan egy meccset játszik, mert a parabola tetszőleges A_i pontján át pontosan egy c meredekségű egyenes megy, hiszen a $(p+1)$ darab A_i-n átmenő egyenes közül $(p-1)$-nek két közös pontja van a parabolával (9. Állítás), egy pedig $[e]$ típusú. Ha ez (a c meredekségű egyenes) az érintő, akkor $i = c$ és A_i ellenfele (∞) ha pedig $i \neq c$, akkor az A_i-n átmenő c meredekségű egyenes a parabolának még pontosan egy $A_j \neq A_i$ pontját tartalmazza (8 Állítást is használtuk), s az ennek megfelelő csapattal játszik A_i az F_c fordulóban. Az is látszik, hogy bármely két csapat pontosan egyszer találkozik a bajnokság során. Ez (∞) esetén abból következik, hogy az $[e]$ típusú egyenesek osztályát kivéve a parabolának minden párhuzamossági osztályban pontosan egy érintője van. (Bármely egyenes legfeljebb két pontban metszi a parabolát. Onnan tudjuk, hogy bármely c-hez van olyan egyenes, ami egy pontban metszi a parabolát, hogy p páratlan. Azt, hogy semelyik c-re nincs két olyan egyenes, ami egy pontban metszené a parabolát, úgy láthatjuk, hogy ha az $Y = cX + d$ egyenletben rögzítjük c-t, és akkor csak a $d + \frac{c^2}{4} = 0$, azaz a $d = -\frac{c^2}{4}$ esetben lesz egy közös pont.) A_i és A_j esetén könnyítsünk a helyzetünkön annyit, hogy észrevesszük, elég annyit belátnunk, hogy A_i és A_j nem játszhat kétszer egymással. Mivel az A_iA_j egyenes egyenlete $Y = cX + d$ alakú, ha kétszer játszanának egymással, az azt jelentené, hogy két különböző c-re ugyanazt az egyenest kapom meg, korábban viszont láttuk, hogy a meredekség egyértelműen meghatározza a párhuzamossági osztályokat.

3.Fejezet: A projektív sík axiomatikus felépítése és az affin sík származtatása projektív síkból

Projektív síknak egy (P, E, I) hármast nevezünk, ahol P és E két nem üres diszjunkt halmaz, (a klasszikus projektív síkon pontok illetve egyenesek) $I \subset (P \times E)$ pedig egy illeszkedésnek nevezett reláció, ahol teljesülnek az alábbiak:

P1) P bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van E-nek, amely mindkettővel relációban áll.

P2) E bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van P-nek, amely mindkettővel relációban áll.

P3) E minden eleme legalább három különböző P-beli elemmel áll relációban

P4) P minden eleme legalább három különböző E-beli elemmel áll relációban

Észrevétel: $P1$ és $P2$ illetve $P3$ és $P4$ egymás duálisai, ezért ha egy tétel levezethető az axiómákból, akkor annak duálisa is igaz.

Az első két axióma már megragadja a lényegét az új konstrukciónak, azonban ha csak a $P1$ és $P2$ axiómákkal definiálnánk a projektív síkot, akkor például egy olyan konstrukciót, amely két pontból, és egy rajtuk átmenő egyenesből áll, projektív síknak kellene tekintenünk. Ez kényelmetlen lenne, hiszen semmilyen értelmes állítást nem tudnánk megfogalmazni általánosan, sokat kellene diszkutálnunk. $P3$ és $P4$ axiómákra tehát valamilyen módon szükség van, de helyettesíthetőek a $P5$ vagy a $P6$ állítás egyikével is. Ennek előnye, hogy így három axiómával dolgoznánk négy helyett, hátránya, hogy nem emeli ki a duális viszonyt. Az állítások kimondását követően bizonyítjuk is az ekvivalenciát.

P5) Létezik négy általános helyzetű pont, azaz négy olyan pont, melyek közül semelyik három nem kollineáris.

P6) A sík bármely két egyeneséhez létezik olyan pont, amelyik a két egyenes egyikén sincs rajta.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy egy adott (P, E, I) hármas kielégíti az első négy axiómát. Egy tetszőleges X ponton át létezik 3 különböző egyenes $(P4)$, ezek legyenek e, f, g. Ekkor léteznek $E_1 \in e, E_2 \in e, G \in g, F \in f$, X-től és egymástól páronként különböző pontok (P3). FG egyenesen az E_1 és E_2 közül legalább az egyik nincs rajta (különben F és G eleme lenne e-nek, ami ellentmondás $(P2)$. Feltehető, hogy E_1 nincs FG egyenesen. Ekkor X, F, G, E_1 négy általános helyzetű pont.

Most tegyük fel, hogy egy adott (P, E, I) hármas kielégíti $P1, P2, P5$ axiómákat, de nem elégíti ki $P6$-ot. Ha az e és f egyenesek a sík összes pontját tartalmazzák, akkor léteznek $E_1 \in e$, $E_2 \in e$, $F_1 \in f$, $F_2 \in f$ pontok, amelyek mind különböznek e és f metszéspontjától $(P5)$. Léteznek E_1F_1és E_2F_2 egyenesek $(P1)$, és ezeknek egy metszéspontja is $(P2)$, ami sem e, sem f egyenesen nem lehet rajta.

Tegyük fel, hogy egy adott (P, E, I) hármas kielégíti $P1, P2, P6$ axiómákat. Ha e tetszőleges egyenes, akkor $P6$ miatt létezik rajta nem lévő X pont. X-en legalább három egyenes megy, ezek $P2$ miatt metszik e-t, tehát e egyenesen legalább három különböző pont van, vagyis $P3$-at is kielégíti.

Definíció: A (P', E', I') hármast, ahol P' és E' két diszjunkt halmaz, $I' \subset (P' \times E')$ pedig egy illeszkedésnek nevezett reláció, **affin síknak** nevezzük, ha kielégíti az $A1 - A4$ axiómákat.

A1) P' bármely két különböző eleméhez pontosan egy olyan eleme van E'-nek, amely mindkettővel relációban áll.

A2) Ha $P \in P'$ nem áll relációban az $e \in E'$elemmel, akkor E'-nek pontosan egy olyan eleme van, amely relációban áll P-vel, de nem áll relációban egyetlen olyan P'-beli elemmel sem, amely e-vel relációban áll.

A3) E' minden eleme legalább két különböző P'-beli elemmel áll relációban.

A4) P' minden eleme legalább három különböző E'-beli elemmel áll relációban.

Tétel:

Ha egy (P, E, I) projektív sík egyik egyenesét és az összes rajta lévő pontot elhagyjuk, akkor a megmaradt pontok és egyenesek P', E' halmazai az $I' = I \cap P' \times E'$ relációval affin síkot alkotnak.

Bizonyítás:

Vegyük sorra az axiómákat, vizsgáljuk egyesével, hogy mindegyiknek megfelel-e a konstrukció!

A1) A projektív sík pontjaira igaz volt az állítás (axióma volt). Nem vettünk fel sem újabb pontot, sem újabb egyenest, így az egyértelműség nem sérülhetett. Azt kell megvizsgálni, hogy lehet-e, hogy a projektív síkból konstruált sík két pontján olyan egyenes ment át, amit töröltünk? A válasz nem, hiszen a törölt egyenes minden pontját töröltük.

A2) Azt kell belátni, hogy ha adott egy e egyenes és egy rajta kívül fekvő P pont, akkor P-n át pontosan egy olyan egyenes húzható, aminek nincs közös pontja e-vel (nem metszi e-t). Az ilyen egyeneseket fogjuk e-vel párhuzamosoknak hívni. Minden megmaradó egyenesnek, így e-nek is egy pontját hagytuk el, hiszen minden egyenes pontosan egy pontban metszette az elhagyott egyenest. Az e-ből elhagyott pontot nevezzük X-nek. Eredetileg egyértelműen létezett PX egyenes, ami X pont elhagyásával már nem metszi e-t (ha más pontban is metszette volna, akkor PX lenne az elhagyott egyenes, P-ről azonban tudjuk, hogy megmarad), viszont egyenes marad, hiszen eredetileg minden egyenesnek legalább három pontja volt, $(A1)$ miatt bármely két ponton át megy pontosan egy egyenes. A létezést tehát már látjuk, az egyértelműség azonban bizonyítandó még. Eredetileg minden egyenes (Így minden P-n átmenő egyenes is) metszette az e-ből és egy elhagyott pontból álló egyenest. Ha egy egyenes e-ben metszette, akkor az továbbra is metszeni fogja, két egyenes pedig nem metszhette az elhagyott pontban $(A1)$ miatt.

A3) A projektív síkon axióma volt, hogy minden egyenesnek legalább három pontja van. Azt kellene látni, hogy a kapott síkon minden egyenesnek legalább két pontja van. Mivel nem vettünk fel új egyenest, akkor lehet baj, ha egy tetszőleges e megmaradó egyenesnek legalább két pontját töröltük. Tegyük fel, hogy ez történt! Projektív síkon két ponton át viszont csak egy egyenes mehet, a két törölt ponttal rendelkező egyenes pedig a törölt egyenes.

A4) A projektív sík pontjaira igaz volt ez az állítás, miszerint, minden ponton át legalább három egyenes megy (axióma volt). Mivel nem vettünk fel újabb pontot, baj csak akkor lehet, ha a kapott sík valamely pontján át az az egyenes is átment a projektív síkon, amit töröltünk. Ilyen pont azonban nincs, hiszen a törölt egyenes minden pontját töröltük.

4.Fejezet: Bajnokságszervezés euklidészi modell segítségével, és a modell további alkalmazásai

Bajnokságok szervezése

Az affin sík p-edrendű parabolájának tulajdonságait felhasználva meg tudtunk adni egy bajnokságszervezést $p + 1$ csapatra abban az esetben, ha p páratlan prím, így például a 20 csapatos bajnokságokra, mint amilyen az angol, spanyol, olasz pontvadászat, vagy a 18 csapatos kiírásokra (német, holland élvonal) van megoldásunk. Ritkább, de előfordul, hogy 10 csapat esetén is körmérkőzéses rendszerben kívánják lebonyolítani a bajnokságot, erre legjobb példa talán a 2018-as világbajnokság dél-amerikai selejtezője, de a svájci első osztályban is 10 csapat szerepel. Ebben a dolgozatban nem tárgyaltuk, de ha q egy páratlan prím hatványa, akkor az $AG(2, q)$ sík paraboláinak tulajdonságait felhasználva hasonlóan megadható lebonyolítás. Érdekes kérdés viszont, hogy mi a helyzet a magyar első osztállyal, ahol jelenleg 16 csapat verseng, illetve hogy tudunk-e általános lebonyolítást adni, amely nem használja ki a résztvevő csapatok számának semmilyen speciális tulajdonságát.

Bajnokság k= $\mathbf{2^n}$ csapattal:

Az első fordulóban írjunk fel egy tetszőleges párosítást! Ezt követően (ha a mérkőzéseket egymás alá írtuk) a bal oldali oszlopot hagyjuk fixen, a jobb oldalit pedig fordulónként toljuk el lefelé, a legalsó csapatot legfölülre írva, egészen addig, amíg épphogy nem értünk körbe! Ekkor eltelt $\frac{k}{2}$ forduló, és minden csapat a másik oszlop csapataival játszott, még a saját oszlopában szereplők elleni meccsek vannak hátra, tehát a problémát visszavezettük a $\frac{k}{2}$ csapatos bajnokság lebonyolítására. 2^n csapat esetén ezt a lépést n-szer megtéve előáll a lebonyolítás.

Bajnokság szervezése tetszőleges csapatszám esetén (általános megoldás):

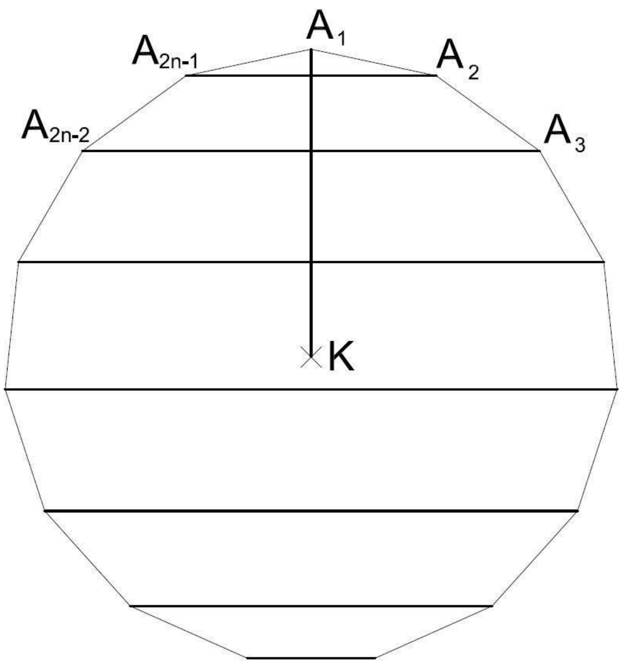
Elég, ha $2k$ (ahol, illetve a dolgozatban innentől végig k pozitív egész) csapatra adunk lebonyolítási algoritmust, hiszen a $2k - 1$ csapatszámú bajnokság a $2k$ csapatszámúra vezethető vissza Szabadnapos FC bevezetésével. Mivel az bajnokságban, amelyre visszavezettük, Szabadnapos FC nem megkülönböztetett csapat, mindenkivel egyszer játszik, ami pont azt jelenti, hogy a páratlan résztvevővel rendelkező bajnokságban minden csapat egyszer pihen, egyébként pedig ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint a páros résztvevőjű bajnokságban, amire visszavezettük a lebonyolítást.

Bajnokság szervezése $2k$ csapattal:

Vegyünk az euklidészi síkon egy szabályos $2k-1$ szöget. Ezt megtehetjük, ha $k > 1$; $k = 1$ esetén egy mérkőzésből áll a bajnokság. Legyenek ennek csúcspontjai A_1,A_2,...,A_{2k-1}. A bajnokságban szereplő csapatok közül $2k-1$ darabot feleltessünk meg a sokszög csúcspontjainak, egy csapatot pedig a sokszög köré írható kör K középpontjának. A fordulókat feleltessük meg a KA_m irányoknak, ahol $m = 1,2,\ldots,2k-1$. Ekkor beszélhetünk az m indexhez tartozó fordulóról. Ebben az F_m-mel jelölt fordulóban a csapatok párosítása legyen a következő:

$$\boldsymbol{A_m - K}$$

A_i- A_j pontosan akkor, ha az A_iA_j egyenes merőleges az A_mK egyenesre.

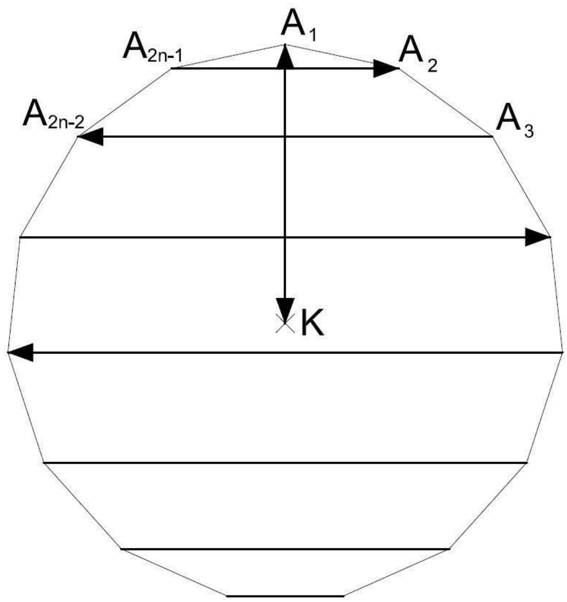


Megmutatjuk, hogy így egy jó lebonyolítást kapunk. A fordulók száma eggyel kisebb, mint a csapatok száma. Minden $m = 1,2,\ldots,2k-1$ esetén igaz, hogy az F_m fordulóban minden csapat pontosan egy meccset játszik, mert A_m ellenfele K, ha pedig $i \neq m$, akkor az A_i pont A_mK egyenesre vonatkozó tükörképe a sokszög egy $A_j \neq A_i$ csúcsa (itt használjuk ki, hogy a sokszögnek páratlan sok csúcsa van), s az ennek megfelelő csapattal játszik A_i. Az is látszik, hogy bármely két csapat pontosan egyszer találkozik a bajnokság során. Ez K esetén nyilvánvaló, A_i és A_j esetén pedig abból következik, hogy az A_iA_j szakasz felezőmerőlegese átmegy K-n (hiszen K-tól egyenlő távolságra van minden csúcs) és a sokszögnek pontosan egy A_m csúcsát tartalmazza (ha kettőt tartalmazna, az azt jelentené, hogy páros sok csúcsa van a szabályos sokszögnek), a meccsre az ennek megfelelő F_m fordulóban kerül sor.

Pályaválasztás kérdése: Miután megadtunk egy modellt, amely tetszőleges csapatszám esetén lehetőséget biztosít a körmérkőzéses rendszerű bajnokság olyan lebonyolítására, ahol bármely fordulóban egy időben kezdődhetnek a mérkőzések, minden fordulóban minden csapat pályára lép (kivéve a már tárgyalt páratlan csapatszámú esetet, amikor ennek a követelménynek nem lehet eleget tenni), felvetődik a kérdés, hogy mennyire lehet igazságos a bajnokság. Lehetséges-e olyan lebonyolítás, hogy semelyik csapatnak se kelljen kétszer egymást követően idegenben pályára lépnie? Ha ilyen lebonyolítás nem létezik, akkor a feltételen enyhítsünk kézenfekvő módon és csak annyit követeljünk meg, hogy semelyik csapatnak ne kelljen három egymást követő alkalommal idegenben pályára lépnie. Így már létezik jó lebonyolítás? Ha nem, akkor hol a határ, meddig kell enyhítenünk a követelményen? Látszólag ez egy gráfelméleti kérdés, azonban amikor nekilátunk a megválaszolásához, újabb problémába ütközünk. Ha gráfelméleti módszerekkel adunk egy lebonyolítást, honnan tudjuk, hogy a kapott algoritmus az eddigi követelménynek – tudniillik, hogy a fordulók mérkőzései egy időpontban kezdődhessenek – is megfelel? Világos tehát, hogy akkor járunk legjobban, ha az általános csapatszámra működő modellünkből kiindulva találunk választ erre a kérdésre is.

Mivel a bajnokságok rendszere oda-visszavágós, tehát két kört játszanak (őszi és tavaszi) megegyező lebonyolítással, csak ellentétes pályaválasztással, ezért abból a követelményből, hogy a bajnokságban semelyik csapat ne játsszon egymást követően kétszer idegenben, következik, hogy csak a bajnokság első felét vizsgálva olyan csapat sem lehet, aki egymást követően kétszer játszik hazai pályán. Vegyünk két olyan csapatot, amely az első fordulóban egyaránt idegenben játszik. (Ezt már négy csapat esetén megtehetjük.) Könnyen adódik, hogy mindkét csapatnak felváltva kell idegenben, illetve otthon szerepelnie, ami viszont az egymás elleni mérkőzésük alkalmával biztosan nem teljesíthető.

Vizsgáljuk most meg az enyhített követelményt. Tekintsük az alábbi ábra jelölésrendszerét!



A behúzott szakaszok legyenek a mérkőzések, csakhogy ezúttal irányítsuk is őket a következő módon: $A_1 - K$ iránya minden fordulóban változzon az ellenkezőjére, egyébként pedig $A_{2n-x} \rightarrow A_{x+1}$ ha x páratlan;

$A_{x+1} \rightarrow A_{2n-x}$ ha x páros

Megjegyzés: Hallgatólagosan föltettük, hogy $x \leq n - 1$.

A csapatokat oly módon feleltessük meg a csúcsoknak, hogy a középpontnak megfeleltetett csapat a bajnokság során fixen marad, egyébként pedig minden fordulóban minden csapat változtatja az ábrán elfoglalt helyét. Az A_{2n-1}csúcsban tartózkodó csapat A_1csúcsba vándorol, az összes többi pedig az eddigi helyéhez képest egyel nagyobb számú csúcsba, tehát minden külső csúcsban lévő csapat minden körben az óramutató járásával megegyező irányban lévő szomszédos csúcsba megy. Mielőtt a pályaválasztást vizsgálnánk, nézzük meg, hogy továbbra is jó-e a bajnokság lebonyolítása. Ez nem magától értetődő, hiszen az eddigiekkel ellentétben a csapatok változtatják az ábrán elfoglalt helyüket a fordulók között. Támaszkodhatunk azonban a szabályos sokszög forgásszimmetriájára, aminek segítségével láthatjuk, hogy a bajnokság továbbra is megfelel a korábban támasztott követelményeknek. Be kell látnunk, hogy az így megadott lebonyolítás eleget tesz azon követelménynek, hogy semelyik csapat ne játsszon három egymást követő alkalommal idegenben. A K csúcsban rögzített csapat egymást követő két alkalommal sem teszi. Vizsgáljuk meg egy külső pontokon mozgó csapat útját! Könnyen látszik, hogy A_2-től A_n-ig és A_{n+1}-től A_{2n-1}-ig felváltva játszik otthon, illetve idegenben. Mivel A_n mindig A_{n+1} ellen játszik, ezért függetlenül az $A_n - A_{n+1}$ párosítás irányától (azaz attól, hogy néggyel osztható-e a bajnokság csapatainak száma) itt sem törik meg a sorminta. Amit érdemes megvizsgálni, az az, hogy mi történik A_1 környékén. Mivel azonban az A_1-et megelőző és az azt követő fordulóban egymással ellentétes a pályaválasztás, nem sérül a lebonyolítással szemben támasztott követelményünk függetlenül attól, hogy A_1-ben mi történik.

Ellentétes sorsolások készítése: A modell további alkalmazásaként nézzünk egy az eddigieknél is aktuálisabb, gyakorlati problémát. Az idei (2014-15-ös) NB 1-es kiírás megszervezésekor három-három csapatnak páronként ellentétes sorsolást kellett biztosítani. Ez azt jelenti, hogy éppen azokban a fordulókban kellett, hogy hazai környezetben lépjen pályára egyikük, amikor a másik idegenben teszi. Erre Ferencváros - Újpest páros esetében rendőrségi kérés vonatkozott, a két szurkolótábor balhéit szerették volna megelőzni, két esetben (Honvéd - MTK; Videoton - Puskás Akadémia) pedig az indokolta, hogy stadionépítés miatt ugyanott játszották hazai mérkőzéseiket. Érdemes feltenni azt a kérdést is, hogy hány páros adható meg úgy (feltéve, hogy minden csapat csak egyikben szerepel), hogy ellentétes sorsolást kaphassanak.

Azt állítjuk, hogy (amennyiben a csapatok száma páros) létezik minden csapatot érintő párosítás. Tekintsük azt a lebonyolítást, amelyet az idegenbeli-hazai kérdés megválaszolásakor adtunk. Itt meg kell adnunk, hogy az első fordulóban a K-ban rögzített csapat idegenben, vagy hazai pályán játszik-e. Legyen a K-ban rögzített csapat első mérkőzése idegenbeli! A könnyebb hivatkozás érdekében azonosítsuk a csapatokat azzal a ponttal, ahol az első fordulóban tartózkodnak! Azt állítjuk, hogy az így kapott lebonyolításban van minden csapatot érintő párosítás. K párja A_1, a többi páros indexű pont párja pedig a nála egyel nagyobb indexű csúcs. Az, hogy K és A_1 jó párt alkotnak, könnyen látszik, mint ahogy az is, hogy bármely páros indexű pont ellentétes sorsolással bír a tőle egyel nagyobb indexűhöz képest mindaddig, amíg a két érintett pont egyike sem kerül abba a csúcsba, ahol épp K ellen játszik. Mivel K idegenben kezdett, ezért pontosan akkor fog idegenben játszani, amikor páratlan csúcs az ellenfele. Tehát a páratlan csúcsok játszanak K ellen hazai pályán, esetükben úgy szakad meg a sorminta, hogy két hazai mérkőzés követi egymást, a páros csúcsoknál pedig két idegenbeli, ez azonban éppen a kívánt eredményre vezet, hiszen a két sorozatot egymáshoz képest eltoltuk eggyel.

Irodalomjegyzék

[1] Kiss György: Hogyan szervezzünk körmérkőzéses focibajnokságot?, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2006/december, 514-525. oldal

[2] Kiss György - Szőnyi Tamás: Véges geometriák, SZTE Bolyai Intézet, Szeged, 2001.

[3] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, Typotex kiadó, 2007.

[4] Freud Róbert - Gyarmati Edit: Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000, 2006.