Az e számhoz tartó sorozatok vizsgálata elemi és analízisbeli módszerekkel

Varga Anita

Matematika BSc, tanári szakirány

Szakdolgozat

Témavezető:

Pfeil Tamás

Adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2015.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Sokat gondolkoztam azon, hogy pontosan miről is szóljon a szakdolgozatom. Abban az egyben biztos voltam, hogy a témámat az analízis témaköréből fogom választani.
Az Euler-féle e számmal a középiskolában találkoztam először mint a természetes logaritmus alapjával. Akkoriban nem foglalkoztunk vele, hiszen nem tartozott szorosan a tananyaghoz. Az e számhoz az egyetemen kerültem közelebb mint az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat határértékéhez. Felkeltette az érdeklődésemet, így amikor témavezetőm, Pfeil Tamás felhívta a figyelmemet, hogy van egy, az e számhoz kapcsolódó szakdolgozat témája, nagyon örültem neki. Ezáltal egy olyan témával foglalkozhattam a szakdolgozatom megírása során, melyet a későbbiekben akár egy szakkör vagy egy fakultáció keretein belül is tudok hasznosítani.
Szakdolgozatomban különböző sorozatokat vizsgálok elemi és analízisbeli eszközökkel, melyek szorosan kapcsolódnak az e számhoz. Az első fejezetben az egyetemen már jól ismert sorozatokat mutatom be, melyek az Euler-számhoz tartanak. A további fejezetekben paraméteres sorozatokat vizsgálok, hogy milyen paraméter esetén lesznek szigorúan monoton növekvő vagy csökkenő sorozatok. Mindkét ilyen sorozatnak a határértékét is meghatározom elemi eszközökkel. A negyedik fejezetben az e szám két közelítésének nagyságrendjével foglalkozom. Az utolsó fejezetben pedig két további érdekes sorozatot mutatok be.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megragadni az alkalmat és köszönetet mondani témavezetőmnek, Pfeil Tamásnak, aki felkeltette a téma iránti érdeklődésemet és hasznos tanácsaival segített szakdolgozatom elkészítésében.
Továbbá köszönettel tartozom a szüleimnek, akik nélkül nem juthattam volna idáig és akik mindig támogattak tanulmányaim során. Valamint köszönöm a barátaimnak, akik a szakdolgozatom elkészülése közben végig támogattak és mellettem álltak.

1. fejezet

Nevezetes e-hez tartó sorozatok

1.1. A három főbb sorozat

1.1.1. Tétel. *Az* $e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ *sorozat szigorúan monoton növekvő és korlátos, és ebből következően konvergens.*

Bizonyítás. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk 1 db 1-es és n db $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tényezőre:

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Ha mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emeljük, akkor a következő eredményt kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy szigorúan monoton növekvő sorozatról van szó.
A sorozat felülről korlátos, amit szintén a számtani és a mértani közép közti összefüggéssel tudunk bizonyítani 2 db $\frac{1}{2}$-es és n db $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ számra úgy, hogy:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}.$$

Ha mindkét oldalt $(n+2)$-edik hatványra emeljük, akkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+2}\right)^{n+2} = 1$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

Tehát 4 az (e_n) sorozat felső korlátja.
Mivel az (e_n) sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért a legnagyobb alsó korlát a sorozat első tagja lesz: $e_1 = 2$.
Ezt az alsó korlátot a Bernoulli egyenlőtlenséggel is megkaphatjuk.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Összegezve: $2 \leq e_n < 4$. $\square$

Kisebb felső korlátot is kaphatunk az (e_n) sorozatra az alábbi tétel segítségével.

1.1.2. Tétel. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$ *, ha $k, n \in \mathbb{N}^+$ és $k \leq n$ teljesül.*

Bizonyítás. Rögzített n mellett k szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

1. $k = 1$-re: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^1 \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.

2. Tegyük fel, hogy k-ra igaz az állítás. Megmutatjuk, hogy $(k+1)$-re is igaz. Az indukciós feltevés szerint:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right).$$

   Elég volna azt igazolni, hogy

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) &\leq 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} \\
1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} &\leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{1}{n} + \frac{k^2}{n^2} + \frac{2k}{n^2} + \frac{1}{n^2} \\
\frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} &\leq \frac{2k+1}{n^2} \\
kn + k^2 &\leq (2k+1)n \\
k^2 &\leq (k+1)n.
\end{aligned}$$

$\square$

1.1.1. Következmény. *$k = n$-re felső becslést kapunk az (e_n) sorozatra:*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3, n \in \mathbb{N}^+.$$

1.1.3. Definíció. $e := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1.1.4. Tétel. *Az $a_n := \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ szigorúan monoton növekvő és korlátos sorozat, és ebből következően konvergens.*

Bizonyítás. A határérték kiszámításához nem szükséges a monotonitás és a korlátosság ismerete. A következő azonosságot használjuk fel:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

innét

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Mivel $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 0$ és $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$, mert

$$1+n\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right) \le \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1,$$

és mivel az egyenlőtlenség jobb és bal oldala is 1-hez tart, ezért a rendőrszabály miatt $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ is 1-hez tart. Az előzőekből következik, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Ahhoz, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő a számtani és a mértani közép közötti összefüggést használjuk fel 1 db 1-es és n db $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ számra:

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Ha mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emeljük, akkor a következő eredményt kapjuk:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy szigorúan monoton növekvő sorozatról van szó.
A sorozat egyik felső korlátja a $\frac{4}{9}$, melyhez szintén a már többször alkalmazott számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk fel 2 db $\frac{3}{2}$-es és n db $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ tényezőre:

$$\sqrt[n+2]{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n+2}.$$

Ha mindkét oldalt $(n+2)$-edik hatványra emeljük, akkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{3+n-1}{n+2}\right)^{n+2} = 1$$

$$\frac{9}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{4}{9}.$$

Tehát a sorozatnak felső korlátja a $\frac{4}{9}$. □

1.1.5. Tétel. *Az* $f_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^+$ *sorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos, és ebből következően konvergens.*

Bizonyítás. A mértani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget használjuk fel 1 db 1-es és $(n+1)$ db $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tényezőre.

$$\sqrt[n+2]{1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} > \frac{n+2}{1+\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}}.$$

Ha mindkét oldalt $(n+2)$-edik hatványra emeljük, akkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}\right)^{n+2}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Tehát az (f_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő.
Az (f_n) sorozat pozitív tagú, ezért alulról korlátos is. A sorozat konvergens, és a határértéket az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

A monotonitás bizonyítása másképpen:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}.$$

Az előző bizonyításban az (a_n) sorozat szigorúan monoton növekedő sorozat, mint bármelyik részsorozata. Végül tudjuk, hogy pozitív tagú szigorúan monoton növekvő sorozat reciproka szigorúan monoton csökkenő. □

1.1.6. Tétel. $0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Bizonyítás.

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right] < \frac{e}{n}.$$

□

1.2. Az $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat

1.2.1. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Bizonyítás. Mértaniközép-sorozattal bizonyítjuk, amihez felhasználjuk az 1.1.1. Tételbeli (e_n) sorozatot. Tudjuk, hogy az (e_n) sorozat határértéke e, így a sorozatból képzett mértaniközép-sorozat is e-hez tart.

$$G_n := \sqrt[n]{e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \dots e_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdots \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}.$$

A kapott G_n-et szorozzuk meg $\frac{n}{n+1}$-gyel, ami 1-hez tart.

$$\frac{n}{n+1} \cdot G_n = \frac{n}{n+1} \cdot \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Így megkaptuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} G_n = 1 \cdot e = e.$$

Másik bizonyítás:
Teljes indukcióval belátjuk, hogy

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}^+.$$

Először az alsó becslést bizonyítjuk:

1. $n = 1$ esetén: $1 > \frac{1}{e}$, azaz $e > 1$.
2. Ha feltesszük, hogy igaz n-re, akkor igaz $(n+1)$-re is:
   Ekkor $(n+1)! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$ egyenlőtlenség bizonyításához elég azt megmutatni, hogy $(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$, ami ekvivalens az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ egyenlőtlenséggel. Mivel tudjuk, hogy az (e_n) sorozat szigorúan monoton növekvő és határértéke e, tehát minden tagja kisebb, mint e.

A felső becslés bizonyítása:

1. $n = 1$ esetén: $1 < \frac{4}{e}$, azaz $e < 4$.
2. Feltesszük, hogy igaz $n - 1 \geq 1$-re, és megmutatjuk n-re:

   $$(n-1)! < e\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
   $$n! < en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

   Elég volna azt igazolni, hogy

   $$en\left(\frac{n}{e}\right)^n < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

$$\frac{n^{n+1}}{e^n} < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$$
$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Tudjuk, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és határértéke e, tehát minden tagja nagyobb, mint e.
Ezzel bizonyítottuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. $\square$

1.3. A faktoriálisok reciprokának összege

1.3.1. Tétel. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $n \in \mathbb{N}^+$ *sorozat szigorúan monoton növekvő és határértéke* e.

Bizonyítás. A vizsgált sorozat nyilván szigorúan monoton növekvő.
A binomiális tétel szerint:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Az egyenlőtlenség határértékét véve a határérték és a rendezés közötti kapcsolatra tanultak szerint:

$$e \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Ha rögzítünk egy N indexet, akkor bármely $n \ge N$ indexre:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Az egyenlőtlenség határértékét véve, ha $N \to \infty$:

$$e \ge \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.$$

Tehát:

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Másik bizonyítás az utóbbi egyenlőtlenségre: Bármely n, N indexekre:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+N} = \sum_{k=0}^{n+N} \binom{n+N}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\cdot\frac{n+N}{n}\cdot\frac{n+N-k}{n}\cdots \ge \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.$$

Az egyenlőtlenség határértékét véve, ha $N \to \infty$:

$$e \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.$$

Ha egy sorozat minden tagja kisebb vagy egyenlő, mint e, akkor határértéke kisebb vagy egyenlő, mint e. $\square$

1.3.1. Következmény. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$

1.3.2. Tétel. *A* $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}$, $n \in \mathbb{N}^{+}$ *sorozat szigorúan monoton csökkenő és határértéke* e.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} &> \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} \\
\frac{1}{n \cdot n!} &> \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} \\
\frac{1}{n \cdot n!} &> \frac{n+2}{(n+1)\,(n+1)!} \\
(n+1)^2 &> n\,(n+2) \\
n^2 + 2n + 1 &> n^2 + 2n.
\end{aligned}$$

A határértéket az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n \cdot n!} = e + 0 = e.$$

$\square$

1.3.3. Tétel. $\left| \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - e \right| < \frac{1}{n \cdot n!}.$

Bizonyítás. Az előző két tétel szerint:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e &< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} \\
\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - e \right| &< \frac{1}{n \cdot n!}.
\end{aligned}$$

$\square$

1.3.4. Tétel. *Ha* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$*, akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Bizonyítás. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ezért egy indextől $a_n > 1$, és ilyen indexekre az $[a_n] \le a_n \le [a_n]+1$ becslést alkalmazva:

$$1+\frac{1}{[a_n]+1} < 1+\frac{1}{a_n} \le 1+\frac{1}{[a_n]}$$

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \le \left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$
$$\le \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}.$$

Az alsó becslés tagja az $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}^+$ sorozatnak, a felső becslés pedig tagja az $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}^+$ sorozatnak.
Mivel $a_n \to +\infty$, ezért $[a_n] \to +\infty$, így $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = e$. Ezek alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$. □

1.3.5. Tétel. *Ha* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$*,* $n \in \mathbb{N}^+$*, akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$.

Bizonyítás. Legyen $a_n := -b_n$, $n \in \mathbb{N}^+$, ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1) = +\infty$, így az előző tétel szerint $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n-1}\right)^{a_n-1} = e$.
Egy indextől $b_n < -1$, akkor

$$\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = \left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{-a_n} = \left(1+\frac{1}{a_n-1}\right)^{a_n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{a_n-1}\right),$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n-1}\right)^{a_n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n-1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

□

2. fejezet

Az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat vizsgálata

2.1. A sorozat vizsgálata a differenciálszámítás eszközeivel

2.1.1. Tétel. *A $k_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$ esetén szigorúan monoton csökkenő és $\alpha < \frac{1}{2}$ esetén egy indextől szigorúan monoton növekvő, emellett mindkét esetben a határértéke e.*

Bizonyítás. Írjuk fel a (k_n) sorozat tagjait a következő alakban: $k_n := e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(n+\alpha)}$. Ekkor legyen

$$K(n) := \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot(n+\alpha)\ ,\ D(K) := \mathbb{R}^+.$$

$$K'(n) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)\cdot(n+\alpha)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1 = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{n+\alpha}{n^2+n},$$

ezért

$$\lim_{n\to+\infty} K'(n) = \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\alpha}{n^2+n} = 0.$$

Vizsgáljuk a második deriváltat!

$$\begin{aligned} K''(n) &= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1\cdot(n^2+n)-(n+\alpha)\cdot(2n+1)}{(n^2+n)^2} \\ &= \frac{-n+2n\alpha+\alpha}{n^2(n+1)^2} = \frac{(2\alpha-1)\cdot n+\alpha}{n^2(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Mivel a nevező pozitív, ezért ha $\alpha \geq \frac{1}{2}$, akkor $K'' > 0$, így K' növekvő, továbbá $\lim\limits_{n\to+\infty} K' = 0$, ezekből következik, hogy $K' < 0$, és ekkor K szigorúan monoton

csökkenő. Végül az exponenciális függvény szigorú monoton növekedése miatt a (k_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő.
Ha $\alpha < \frac{1}{2}$, akkor egy küszöbtől $K'' < 0$, így onnét K' szigorúan monoton csökkenő, valamint $\lim\limits_{n\to+\infty} K' = 0$. Ezekből következik, hogy attól a küszöbtől $K' > 0$, és onnét K szigorúan monoton növekvő. Végül a (k_n) sorozat szigorúan monoton növekvő egy indextől.
A határértéket az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = e\cdot 1 = e.$$

□

2.1.2. *Megjegyzés.* A (k_n) sorozat $\alpha \le 0$ esetén szigorúan monoton növekvő.

2.2. A határeset vizsgálata elemi módszerrel

2.2.1. Tétel. *A $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és határértéke e.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ekvivalens lépéseket hajtunk végre, amikor $n \ge 2$.

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &> b_n \\
\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}} &> \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \\
\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{n}} &> \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}} \\
\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n} &> \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \\
\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n-1} &> \frac{n^2-1}{n^2}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}} \\
\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n-1} &> \frac{n^2-1}{n^2}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

A bal oldali hatványt a binomiális tétel első három tagjával becsüljük alulról:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n-1} \ge 1+(n-1)\cdot\frac{1}{n^2-1}+\binom{n-1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n^2-1}\right)^2.$$

Elég volna bizonyítani azt, hogy:

$$\begin{aligned}
1+\frac{n-1}{n^2-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2\left(n^2-1\right)^2} &> \frac{n^2-1}{n^2}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \\
\frac{2(n+1)^2(n-1)+2(n+1)(n-1)+n-2}{2(n+1)^2(n-1)} &> \sqrt{\frac{\left(n^2-1\right)^2(n+1)}{n^4(n-1)}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\left(2\left(n+1\right)^2\left(n-1\right)+2\left(n+1\right)\left(n-1\right)+n-2\right)^2}{4\left(n+1\right)^4\left(n-1\right)^2} > \frac{\left(n^2-1\right)^2\left(n+1\right)}{n^4\left(n-1\right)}$$

$$\left(2\left(n+1\right)^2\left(n-1\right)+2\left(n+1\right)\left(n-1\right)+n-2\right)^2 n^4 > 4\left(n+1\right)^7\left(n-1\right)^3$$

$$9n^6+12n^5-20n^4-32n^3+12n^2+16n+4>0$$

$$n^4\left(9n^2-20\right)+n^3\left(12n^2-32\right)+12n^2+16n+4>0.$$

$9n^2-20>0$, ha $n>\sqrt{\frac{20}{9}}$ és $12n^2-32>0$, ha $n>\sqrt{\frac{8}{3}}$.
$\max\left\{\sqrt{\frac{20}{9}},\sqrt{\frac{8}{3}}\right\}=2$, amiből következik, hogy minden $n\geq 2$-re igaz a tétel. A határérték nyilvánvaló. $\square$

3. fejezet

Az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{cn}\right)$, $n\in\mathbb{N}^+$ sorozat vizsgálata

3.1. A sorozat vizsgálata analízisbeli módszerrel

3.1.1. Tétel. *A $c_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{cn}\right)$, $n\in\mathbb{N}^+$ sorozat $0<c\le 2$-re szigorúan monoton csökkenő, $c>2$-re pedig szigorúan monoton növekvő, és a határértéke e.*

Bizonyítás. Legyen

$$
\begin{aligned}
K(n) &:= e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n}\cdot\left(1+\frac{1}{cn}\right),\ D(K):=\mathbb{R}^+.\\
K'(n) &= \left[e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n}\cdot\left(-\tfrac{1}{n+1}+\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right)\right]\cdot\left(1+\tfrac{1}{cn}\right)+e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n}\cdot\left(-\tfrac{1}{cn^2}\right)\\
&= e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n}\cdot\frac{cn+1}{cn}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(cn+1)}\right).
\end{aligned}
$$

Legyen $K'(n)$ utolsó tényezője:

$$
M(n) := \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{cn^2+2n+1}{n(n+1)(cn+1)},\ D(M):=\mathbb{R}^+.
$$

$$
\lim_{n\to+\infty}M(n)=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\lim_{n\to+\infty}\frac{cn^2+2n+1}{n(n+1)(cn+1)}=0.
$$

$$
\begin{aligned}
M'(n) &= \tfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(-\tfrac{1}{n^2}\right)-\tfrac{(2cn+2)n(n+1)(cn+1)-(cn^2+2n+1)(3cn^2+2cn+2n+1)}{n^2(n+1)^2(cn+1)^2}\\
&= -\frac{-2cn^3-n^2+c^2n^3-2cn^2-n-2cn-1}{n^2(n+1)^2(cn+1)^2}\\
&= \frac{cn^3(2-c)+n^2(1+2c)+n(1+2c)+1}{n^2(n+1)^2(cn+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Ha $0 < c \leq 2$, akkor $M' > 0$, ezért $M < 0$, amiből következik, hogy $K' < 0$, így K szigorúan monoton csökkenő. Ebből következik, hogy a vizsgált sorozat is szigorúan monoton csökkenő.
Ha $c > 2$, akkor egy küszöbtől $M' < 0$, ezért attól a küszöbtől $M > 0$, és onnét K szigorúan monoton növekvő. Ebből következik, hogy a vizsgált sorozat is szigorúan monoton növekvő.
A határértéket az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{cn}\right) = e\cdot 1 = e.$$

□

3.1.2. *Megjegyzés.* Ha $c < 0$, akkor $\left(1+\frac{1}{cn}\right)$ szigorúan monoton növekvő és $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ szigorúan monoton növekvő, tehát a (c_n) sorozat szigorúan monoton növekvő.

A (c_n) sorozat $0 < c \leq 2$ esetén szigorúan monoton csökkenése más módon is belátható.
Legyen $s := \frac{1}{c}$, akkor $s \geq \frac{1}{2}$.

3.1.3. Tétel. *Az $s_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{s}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha $s \geq \frac{1}{2}$.*

Bizonyítás. Írjuk fel az (s_n) sorozatot a következő alakban:

$$s_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(1+\frac{s}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Tudjuk, hogy az első tényező szigorúan monoton csökkenő, ezért vizsgáljuk a pozitív második tényezőt. Annak szigorúan monoton csökkenése ekvivalens a négyzetének szigorúan monoton csökkenésével.
A második tényező négyzete:

$$1+\frac{2s-1}{n+1}+\frac{s^2}{n(n+1)},$$

ami nyilvánvalóan szigorúan monoton csökkenő, ha $s \geq \frac{1}{2}$. □

3.2. A határeset vizsgálata elemi módszerrel

3.2.1. Tétel. *A $d_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és határértéke e.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ekvivalens lépéseket hajtunk végre, amikor $n \geq 2$.

$$
\begin{aligned}
d_{n-1} &> d_n \\
\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2(n-1)}\right) &> \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \\
\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n-2} &> \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{2n+1}{2n} \\
\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n} &> \frac{2n+1}{2n-1}.
\end{aligned}
$$

A bal oldali hatványt a binomiális tétel első három tagjával becsüljük alulról:

$$
\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n} \geq 1+n\cdot\frac{1}{n^2-1}+\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n^2-1}\right)^{2}.
$$

Elég volna azt bizonyítani, hogy:

$$
\begin{aligned}
1+\frac{n}{n^2-1}+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\cdot\frac{1}{\left(n^2-1\right)^2} &> \frac{2n+1}{2n-1} \\
\frac{2\left(n^2-1\right)^2+2\left(n^2-1\right)n+n\left(n-1\right)}{2\left(n^2-1\right)^2} &> \frac{2n+1}{2n-1} \\
\left(2n^4+2n^3-3n^2-3n+2\right)\left(2n-1\right) &> \left(2n+1\right)\left(2n^4-4n^2+2\right) \\
n^2+3n-4 &> 0.
\end{aligned}
$$

Tehát a (d_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő.
A határérték nyilvánvaló. $\square$

3.3. Az e szám elhelyezkedése

A következő sorozat az 1996/97. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóversenyen szerepelt feladatként.

3.3.1. Tétel. *A* $g_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{4n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^+$ *sorozat szigorúan monoton növekvő és határértéke* e*.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. Ehhez ekvivalens képéseket hajtunk végre, amikor $n \geq 2$.

$$
\begin{aligned}
g_{n-1} &< g_n \\
\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{4(n-1)}\right) &< \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{4n}\right) \\
\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{4n-3}{4n-4} &< \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{4n+1}{4n} \\
\frac{4n-3}{4n+1} &< \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n} \\
\sqrt[n]{\frac{4n-3}{4n+1}} &< \frac{n^2-1}{n^2}.
\end{aligned}
$$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk $(n-2)$ db 1-es és 2 db $\sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}}$ tényezőre:

$$\sqrt[n]{\frac{4n-3}{4n+1}} \leq \frac{1}{n}\left[2 \cdot \sqrt{\frac{4n-3}{4n+1}} + (n-2) \cdot 1\right].$$

Elég volna azt igazolni, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{16n-12}{4n+1}} + n - 2\right) &< \frac{n^2-1}{n^2} \\
\sqrt{\frac{16n-12}{4n+1}} + n - 2 &< \frac{n^2-1}{n} \\
\sqrt{\frac{16n-12}{4n+1}} &< \frac{2n-1}{n} \\
\frac{16n-12}{4n+1} &< \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2 \\
n^2(16n-12) &< (4n+1)\left(4n^2-4n+1\right) \\
16n^3 - 12n^2 &< 16n^3 - 12n^2 + 1.
\end{aligned}$$

Tehát a (g_n) sorozat szigorúan monoton növekvő.
A határérték triviális. $\square$

3.3.2. Tétel. *Az e szám a* $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$ *zárt intervallum nyílt második negyedébe esik.*

Bizonyítás. Az intervallum felezőpontja

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

ami a (d_n) szigorúan monoton csökkenő sorozat n-edik tagja. E sorozat határértéke e, ezért $e < d_n$ minden n indexre.
Az intervallum első negyedelőpontja

$$\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{4n}\right),$$

ami az utóbbi (g_n) szigorúan monoton növekvő sorozat n-edik tagja. A sorozat határértéke e, ezért $e > g_n$, minden n indexre. $\square$

3.3.1. Következmény. *A tétel alapján kétoldali becslést adhatunk* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ *sorozat e-től való eltérésére.*

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{4n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n}, n \in \mathbb{N}^+.$$

4. fejezet

Az e szám két közelítésének nagyságrendje

4.0.3. Tétel. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \frac{e}{2}$.

Bizonyítás. Legyen $f(x) := \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ függvény $D(f) := \mathbb{R}^+$.

$$\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right).$$

A $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}}$ határértékre alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt, mert a számláló és a nevező is 0-hoz tart.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}.\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, és a szorzat másik tényezőjére ismét alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt, hiszen a számláló és a nevező is 0-hoz tart.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2\left(x+1\right)^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Tehát a keresett határérték:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} = e \cdot \frac{1}{2} = \frac{e}{2}.$$

□

4.0.4. Tétel. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\right) = -\frac{e}{2}$.

Bizonyítás. A $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}}{\frac{1}{x}}$ határértékre alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt, mivel a számláló és a nevező is 0-hoz tart.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-e^{(x+1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left[1\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + (x+1)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}.$$

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = e$, és a szorzat másik tényezőjére ismét alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt, hiszen a számláló és a nevező is 0-hoz tart.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2\,(x+1)} - \frac{x}{2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Tehát

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = e\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}.$$

□

Az előbbi két határérték sorozatokra vonatkozó következményét elemi módszerekkel is be lehet bizonyítani. Ehhez szükségünk van a következő sorozat vizsgálatára.

4.0.5. Tétel. *Az* $m_n := \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2n}}$*,* $n \in \mathbb{N}^+$ *sorozat szigorúan monoton növekvő és határértéke* e*.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. Ekvivalens lépéseket hajtunk végre, amikor $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
m_{n-1} &< m_n \\
\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{1+\frac{1}{2(n-1)}} &< \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2n}} \\
\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\cdot\frac{2n-2}{2n-1} &< \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1} \\
\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\cdot\frac{2n+1}{2n} &< \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n-1}{2n-2} \\
\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n &> \frac{(n-1)(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Felírjuk a binomiális tételt:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^{2k}}=1-n\cdot\frac{1}{n^2}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^4}-\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^6}+\dots+(-1)^n\frac{1}{n^{2n}}.$$

Az első két tag különbsége pozitív, mert

$$1-n\cdot\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{n}\geq 0.$$

Ha $n\geq 3$, akkor a harmadik és a negyedik tag különbsége is pozitív, mert ekvivalens lépésekkel:

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^4}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\frac{1}{n^6}&\geq 0\\ n^2-\frac{n-2}{3}&\geq 0\\ 3n^2&\geq n-2.\end{aligned}$$

Kettesével csoportosítva a tagokat:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^{2k}}=\left(1-n\cdot\frac{1}{n^2}\right)+\left(\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^4}-\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^6}\right)+\cdots$$

A k-adik zárójelben szereplő kifejezés is nemnegatív:

$$\binom{n}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{n^{4(k-1)}}-\binom{n}{2k-1}\cdot\frac{1}{n^{4k-2}}\geq 0$$

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(2k-2)!(n-2k+2)!}\cdot n^2-\frac{n!}{(2k-1)!(n-2k+1)!}&\geq 0\\ \frac{1}{n-2k+2}\cdot n^2-\frac{1}{2k-1}&\geq 0\\ n^2(2k-1)&\geq n-2k+2\\ n\left[n(2k-1)-1\right]+2(k-1)&\geq 0.\end{aligned}$$

Mivel $n\geq 2$ és $k\geq 1$, ezért a bal oldal mindkét tagja nemnegatív.

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}\left[\binom{n}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{n^{4(k-1)}}-\binom{n}{2k-1}\cdot\frac{1}{n^{4k-2}}\right], \text{ ha n páratlan.}\\ \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left[\binom{n}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{n^{4(k-1)}}-\binom{n}{2k-1}\cdot\frac{1}{n^{4k-2}}\right]+\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^{2n}}, \text{ ha n páros.}\end{cases}$$

Ezért $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$-nek alsó becslése, ha csak az első négy tagot vesszük a binomiális tételből:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\geq 1-n\cdot\frac{1}{n^2}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^4}-\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^6}.$$

Tehát elég volna azt bizonyítani (4.1)-hez, hogy

$$
\begin{aligned}
1 - n \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{1}{n^6} &> \frac{(n-1)(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} \\
\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3} - \frac{n-2}{6n^5} &> \frac{2n+1}{(n+1)(2n-1)} \\
n^3 + 3n - 2 &> 0.
\end{aligned}
$$

Mivel $n \geq 2$, ezért az egyenlőtlenség teljesül. Tehát az (m_n) sorozat szigorúan monoton növekvő.
A határértéket az alábbi módon számítjuk ki:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \frac{e}{1} = e.
$$

□

4.0.6. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén*

$$
\frac{e}{2n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e < \frac{e}{2n},
$$

$$
\frac{e}{2n+2} < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \frac{e}{2n+1}.
$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy az (m_n) sorozat szigorúan monoton növekvő és határértéke e. Ekkor

$$
\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2n}} < e,
$$

majd ekvivalens átalakításokkal

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e\left(1+\frac{1}{2n}\right)
$$

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e < \frac{e}{2n} \tag{4.2}
$$

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - e \cdot \frac{n}{n+1} < \frac{e}{2\,(n+1)}
$$

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - e < -\frac{e}{2\,(n+1)}
$$

$$
e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > \frac{e}{2n+2}. \tag{4.3}
$$

Másrészt tudjuk, hogy a (d_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő és határértéke e, ekkor

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{2n}\right) > e.
$$

Innen ekvivalens lépésekkel:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} &> e\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
\frac{e}{2n+1} &> e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \qquad (4.4)\\
\frac{e}{2n+1}\cdot\frac{n+1}{n} &> e\cdot\frac{n+1}{n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\\
\frac{e}{2n+1} &< \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

(4.2)-ből és (4.5)-ből következik, hogy:

$$\frac{e}{2n+1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e<\frac{e}{2n}.$$

(4.3)-ból és (4.4)-ből következik, hogy:

$$\frac{e}{2n+2}<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\frac{e}{2n+1}.$$

□

4.0.2. Következmény.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)=\frac{e}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)=\frac{e}{2}.$$

Bizonyítás.
Legyen $i_n := n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^+$.

$$\begin{aligned}
\frac{e}{2n+2} &< e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \frac{e}{2n+1}\\
\frac{ne}{2n+2} &< n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) < \frac{ne}{2n+1}\\
\frac{e}{2+\frac{2}{n}} &< i_n < \frac{e}{2+\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Mivel a jobb oldali és a bal oldali sorozat határértéke is $\frac{e}{2}$, ezért a rendőrszabály alapján: $\lim\limits_{n\to\infty} i_n=\frac{e}{2}$.
A (h_n) sorozat határértéke:

$$\begin{aligned}
\frac{e}{2n+1} &< \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e<\frac{e}{2n}\\
\frac{en}{2n+1} &< n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)<\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség jobb és bal oldala is $\frac{e}{2}$-höz tart. A rendőrszabály miatt: $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \frac{e}{2}$. $\square$

4.0.7. Tétel. *$0 < n\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) < e$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.*

Bizonyítás.

$$0 < n\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) < n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) =$$

$$= n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

$\square$

4.0.8. Tétel. *Az (i_n) sorozat szigorúan monoton növekvő.*

Bizonyítás. Ekvivalens lépéseket hajtunk végre, amikor $n \geq 2$.

$$i_{n-1} < i_n$$

$$(n-1)\left(e - \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right) < n\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$(n-1)e - (n-1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < ne - n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - (n-1)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < e$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\left[\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^{2n}}{(n+1)^{n+1}(n-1)^{n-2}}\right] < e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left[\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^{2n}}{(n+1)^{n+1}(n-1)^{n-2}}\right] < e.$$

Tudjuk, hogy az $m_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat szigorúan monoton növekvő és határértéke e, tehát minden tagja kisebb, mint e.
Ezért elég lenne azt bizonyítani, hogy

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left[\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^{2n}}{(n+1)^{n+1}(n-1)^{n-2}}\right] < 1.$$

Majd ekvivalens lépésekkel folytatva:

$$\frac{(2n+1)n^2}{2n} - n - 1 < \left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right)^n (n-1)^2 \cdot \frac{2n+1}{2n}$$

$$\frac{2n^3+n^2-2n^2-2n}{2n} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n (n-1)^2 \cdot \frac{2n+1}{2n}$$

$$\frac{2n^3-n^2-2n}{(2n+1)(n-1)^2} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n$$

$$1 + \frac{2n^2-2n-1}{2n^3-3n^2+1} < \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n. \tag{4.6}$$

Becsüljük alulról (4.6)-ot a binomiális tétel szerinti kifejtés első három tagjával:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n^2-1}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{(n^2-1)^2}.$$

(4.6) igazolásához elég volna azt bizonyítani, hogy

$$1+\frac{n}{n^2-1}+\frac{n(n-1)}{2(n-1)^2(n+1)^2}>1+\frac{2n^2-2n-1}{2n^3-3n^2+1}.$$

Ekvivalens lépésekkel:

$$\begin{aligned} \frac{2n(n+1)+n}{2(n-1)(n+1)^2} &> \frac{2n^2-2n-1}{2n^3-3n^2+1} \\ (2n^2+3n)(2n^3-3n^2+1) &> (2n^2-2n-1)(2n^3+2n^2-2n-2) \\ n^3+4n^2-3n-2 &> 0, \end{aligned}$$

Ami teljesül, ha $n \geq 2$, így az (i_n) sorozat szigorúan monoton növekvő. $\square$

4.0.9. *Megjegyzés.* A 4.0.2. Következményből azt is megkaphatjuk, hogy az (i_n), $n \in \mathbb{N}^+$ sorozatnak $\frac{e}{2}$ is felső korlátja, nem csak a 4.0.7. Tételbeli e felső korlát.

4.0.10. Tétel. *Az* $r_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{4}{8n+3}\right)$, $n \in \mathbb{N}^+$ *sorozat szigorúan monoton csökkenő és határértéke e.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. Ekvivalens lépéseket hajtunk végre, amikor $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} r_{n-1} &> r_n \\ \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{4}{8(n-1)+3}\right) &> \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{4}{8n+3}\right) \\ \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{8n-1}{8n-5} &> \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{8n+7}{8n+3} \\ \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n &> \frac{8n+7}{8n+3}\cdot\frac{8n-5}{8n-1}\cdot\frac{n}{n-1} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Becsüljük alulról (4.7)-et a binomiális tétel szerinti kifejtés első négy tagjával:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n^2-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{(n^2-1)^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\frac{1}{(n^2-1)^3}.$$

Elég volna azt igazolni, hogy

$$\begin{aligned} 1+\frac{n}{n^2-1}+\frac{n}{2(n-1)(n+1)^2}+\frac{n(n-2)}{6(n-1)^2(n+1)^3} &> 1+\frac{64n^2-16n-3}{64n^3-48n^2-19n+3} \\ \frac{6n(n+1)^2(n-1)+3n(n+1)(n-1)+n(n-2)}{6(n+1)^3(n-1)^2} &> \frac{64n^2-16n-3}{64n^3-48n^2-19n+3} \end{aligned}$$

$$-866n^5-617n^4+650n^3+194n^2-33n > -882n^5-594n^4+612n^3+324n^2-114n-18$$
$$16n^5-23n^4+38n^3-130n^2+81n+18>0$$
$$16n^4\left(n-\frac{23}{16}\right)+n\left(38n^2-130n+81\right)+81n+18>0.$$

Ez az egyenlőtlenség igaz, mert $n \geq 2$. Tehát az (r_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő.
A határérték nyilvánvaló. $\square$

4.0.11. Tétel. *A* $h_n := n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)$, $n \in \mathbb{N}^+$ *sorozat szigorúan monoton növekvő.*

Bizonyítás. Ekvivalens lépéseket hajtunk végre, amikor $n \geq 2$.

$$h_{n-1} < h_n$$
$$(n-1)\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n-e\right) < n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)$$
$$(n-1)\left(\frac{n}{n-1}\right)^n+e < n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$
$$e < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}-\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}.$$

A jobb oldalt átalakítva a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{4}{8n+3}\right)\left[\frac{8n+3}{8n+7}\left(n+1-(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\right)\right]$$

Tudjuk, hogy az (r_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő és határértéke e, ezért a sorozat minden tagja nagyobb, mint e.
Ezért elég volna azt bizonyítani, hogy

$$\frac{8n+3}{8n+7}\left(n+1-(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\right)>1$$
$$n+1-(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{8n+7}{8n+3}=1+\frac{4}{8n+3}$$
$$n-(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{4}{8n+3}$$
$$(n-1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n < \frac{8n^2+3n-4}{8n+3}$$
$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n < \frac{8n^2+3n-4}{8n^2-5n-3}$$
$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > 1+\frac{-8n+1}{8n^2+3n-4} \tag{4.8}$$

Becsüljük alulról (4.8) bal oldalát a binomiális tétel szerinti kifejtés első négy tagjával:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-n\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^4}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\frac{1}{n^6}.$$

(4.8) igazolásához elég volna azt bizonyítani, hogy

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{n}+\frac{n-1}{2n^3}-\frac{(n-1)(n-2)}{6n^5} &> 1+\frac{-8n+1}{8n^2+3n-4}\\ \frac{n-1}{2n^3}-\frac{(n-1)(n-2)}{6n^5} &> \frac{4(n-1)}{n(8n^2+3n-4)}\\ 3n^2\left(8n^2+3n-4\right)-(n-2)\left(8n^2+3n-4\right) &> 24n^4\\ n^3+n^2+10n-8 &> 0.\end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség igaz, mert $n \geq 2$. Tehát a (h_n) sorozat szigorúan monoton növekvő. $\square$

5. fejezet

Két további sorozat vizsgálata

5.0.12. Tétel. *A* $q_n := \left(1+\frac{q}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ *sorozat minden pozitív valós* q*-ra szigorúan monoton növekvő.*

Bizonyítás. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk 1 db 1-es és n db $\left(1+\frac{q}{n}\right)$ tényezőre:

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1+\frac{q}{n}\right)^n} < \frac{1+n\left(1+\frac{q}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+1+q}{n+1} = 1+\frac{q}{n+1}.$$

Ha mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emeljük, akkor a következő eredményt kapjuk:

$$\left(1+\frac{q}{n}\right)^n < \left(1+\frac{q}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy a (q_n) sorozat szigorúan monoton növekvő. □

5.0.13. *Megjegyzés.* $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = e^q$.

5.0.14. Tétel. *Az* $f(x) := \left(1+\frac{p}{x}\right)^{x+1}$, $D(f) := \mathbb{R}^+$ *függvény* $0 < p \leq 2$ *esetén szigorúan monoton csökkenő,* $p > 2$ *esetén pedig szigorúan monoton növekvő egy küszöbtől.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk a deriváltat!

$$f'(x) = \left(1+\frac{p}{x}\right)^{x+1} \cdot \left[1 \cdot \ln\left(1+\frac{p}{x}\right) + (x+1) \cdot \frac{1}{1+\frac{p}{x}} \cdot \left(-\frac{p}{x^2}\right)\right]$$

$$= \left(1+\frac{p}{x}\right)^{x+1} \cdot \left[\ln\left(1+\frac{p}{x}\right) - \frac{p(x+1)}{x(x+p)}\right]$$

Legyen $g(x) := \ln\left(1+\frac{p}{x}\right) - \frac{p(x+1)}{x(x+p)}$, $D(g) := \mathbb{R}^+$ akkor $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Elég volna az f függvény szigorú monoton csökkenéséhez, hogy $g' > 0$, mert akkor $\lim\limits_{x \to +\infty} g = 0$ miatt $g < 0$ teljesülne.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{1+\frac{p}{x}} \cdot \left(-\frac{p}{x^2}\right) - \frac{px(x+p) - p(x+1)(2x+p)}{x^2(x+p)^2} \\
&= -\frac{px(x+p) + px(x+p) - p(x+1)(2x+p)}{x^2(x+p)^2} \\
&= -\frac{2px^2 + 2p^2x - 2px^2 - p^2x - 2px - p^2}{x^2(x+p)^2} = -\frac{p^2x - 2px - p^2}{x^2(x+p)^2}.
\end{aligned}$$

g' pozitivitásához az kell, hogy

$$\begin{aligned}
-\frac{p^2x - 2px - p^2}{x^2(x+p)^2} &> 0 \\
p^2x - 2px - p^2 &< 0 \\
p(p-2)x - p^2 &< 0.
\end{aligned}$$

Tehát, ha $0 < p \leq 2$, akkor az f függvény szigorúan monoton csökkenő, és ha $p > 2$, akkor hasonlóan igazolható, hogy az f függvény egy küszöbtől szigorúan monoton növekvő. $\square$

A $p = 2$ határesetet elemi módon is meg lehet mutatni.

5.0.15. Tétel. *A* $j_n := \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^+$ *sorozat szigorúan monoton csökkenő és határértéke* e^2.

Bizonyítás. Először bizonyítjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ekvivalens lépéseket hajtunk végre, amikor $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
j_{n-1} &> j_n \\
\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^n &> \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+1} \\
\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n &> \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1} \\
\frac{(n+1)^n n^n}{(n-1)^n (n+2)^n} &> \frac{n+2}{n} \\
\left(\frac{n^2+n}{n^2+n-2}\right)^n &> \frac{n+2}{n} \\
\left(1 + \frac{2}{n^2+n-2}\right)^n &> 1 + \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

A bal oldali hatványt a binomiális tétel első három tagjával becsüljük alulról:

$$\left(1 + \frac{2}{n^2+n-2}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{2}{n^2+n-2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \left(\frac{2}{n^2+n-2}\right)^2.$$

Elég volna azt bizonyítani, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{2n}{n^2+n-2}+\frac{2n(n-1)}{\left(n^2+n-2\right)^2} &> \frac{2}{n}\\
\frac{n(n^2+n-2)+n(n-1)}{(n^2+n-2)^2} &> \frac{1}{n}\\
(n^3+2n^2-3n)n &> (n^2+n-2)^2\\
4(n-1) &> 0.
\end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség igaz, mert $n \geq 2$.
A határérték bizonyítása:
A $t_n := \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat szigorúan monoton növekvő az 5.0.12. Tétel szerint.
A sorozat páros indexű részsorozata e^2-hez tart:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2.$$

Mivel a (t_n) sorozat monoton és létezik határértéke, minden részsorozatának van határértéke és ez a határérték az eredeti sorozat határértéke.
Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) = e^2 \cdot 1 = e^2.$$

□

Irodalomjegyzék

[1] Csuka Anita szakdolgozata, Budapest, 2012.
http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_matelem/2012/csuka_anita.pdf

[2] Pirka Ágnes szakdolgozata, Budapest, 2014.
http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_matelem/2014/pirka_agnes.pdf

[3] Dr. Berkes Jenő–Dr. Pintér Lajos: *Az e szám*, *Nevezetes sorozatok és alkalmazások*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[4] Laczkovich Miklós–T. Sós Vera: *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[5] Pfeil Tamás: Az e számhoz tartó monoton sorozatokról (kézirat), Budapest, 1997.

[6] Urbán János: *Határérték-számítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.

[7] Pólya György: *Feladatok és tételek az analízis köréből I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[8] P.P. Korovkin: *Egyenlőtlenségek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.