Blokkrendszerek és erősen reguláris gráfok

Varsányi Éva Andrea

Matematika BSc

Szakdolgozat

Témavezető:
Héger Tamás
Tudományos munkatárs
Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

1. fejezet

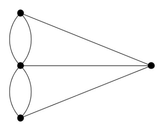
Bevezetés

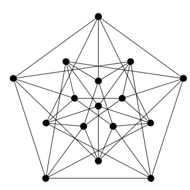
Szakdolgozatomban az erősen reguláris gráfokat, a blokkrendszereket és ezek kapcsolatát szeretném bemutatni. A dolgozat javarészt a [1], [9] -re épül, így amit külön nem említünk, az ebben a két alapműben megtalálható. A dolgozatban előforduló, önállóan megoldott feladatok egy része a [1] jegyzetben megtalálható feladatok, részben pedig a konzultációkon kapott, a témakör megértését segítő feladatok. A dolgozat során az ábrákat GeoGebra program segítségével készítettem. A bevezetőben következő történeti összefoglalás [6], [8], [5] alapján készült.

A gráfok története 1736-ban kezdődött, amikor Leonard Euler megoldotta a königsbergi hidak problémáját, ő használta először a mai gráfelméletben alapfogalomként ismert pontokat és éleket. Az erősen reguláris gráfokat pontosan 200 évvel később, 1936-ban mutatta be Raj Chandra Bose. A második fejezetben az erősen reguláris gráfok néhány alapvető kérdését tárgyaljuk, többek között nézünk konstrukciókat is, melyekkel erősen reguláris gráfokat lehet előállítani, bizonyos feltételek mellett. Ebben a fejezetben a véges matematika 1 kurzuson előforduló alapvető gráfelméleti fogalmakat alapismeretnek tekintjük.

A blokkrendszerek először W.S.B. Woolhouse által lettek közismertek, a „Lady's and Gentlemen's Diary" újságban közölt fejtörője révén, mely először 1844-ben jelent meg, a probléma megoldását pedig Thomas Kirkman mutatta meg 3 évvel később. Ma már ezek a speciális blokkrendszerek, melyekkel Kirkman akkor foglalkozott, Steiner hármasrendszerekként ismertek. Harmadik fejezetünkben a blokkrendszerek néhány alapvető tulajdonságait tárgyaljuk.

A negyedik fejezetben az erősen reguláris gráfok és blokkrendszerek közötti összefüggéseket tárgyaljuk. Nézünk példát arra, hogy hogyan lehet megfelelő paraméterű erősen reguláris gráfból blokkrendszert előállítani, illetve bizonyos blokkrendszerből erősen reguláris gráf konstruálásáról is lesz szó. Látni fogjuk, hogy az erősen reguláris gráfok nagyon hasznosnak bizonyulhatnak blokkrendszerekről szóló tételek bizonyításában, ilyen lesz a Hall-Connor tétel, melynek bizonyítása az erősen reguláris gráfokra épít.





1.1. ábra. Az első gráf Euler egyszerűsített modellje a königsbergi hidak problémájáról, a második gráf pedig egy erősen reguláris gráf.

Köszönetnyilvánitás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Héger Tamásnak, aki rengeteg időt fordított arra, hogy segítsen a szakdolgozatom elkészítésében. Hasznos tanácsaival és gondolkodtató feladatokkal segítette a fogalmak és tételek mélyebb megértését.

2. fejezet

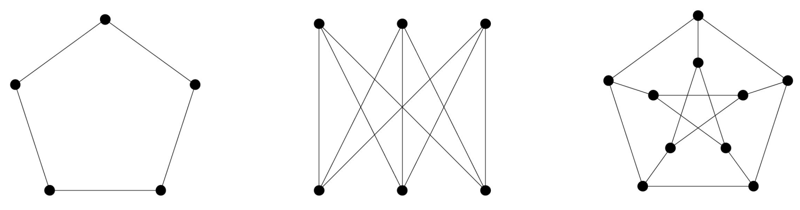
Erősen reguláris gráfok

A dolgozat során bizonyos gráfelméleti alapfogalmaknak a [3] könyv szerinti jelöléseit használjuk, úgy mint gráf (Γ), pontok halmaza ($V(\Gamma)$), élek halmaza ($E(\Gamma)$), szomszédos élek ($\{v, w\} \in E(\Gamma) \mid v, w \in V(\Gamma)$), n-pontú teljes gráf (K_n), páros gráf A, B csúcsosztályokkal ($\Gamma(A, B)$), teljes páros gráf ($K_{a,b}$). A [3] könyvtől eltérő jelöléseket, illetve abban nem előforduló fogalmak jelöléseit a [1] jegyzet szerint használjuk, mint pontok fokszámát, amit ($\deg(v) \mid v \in V(\Gamma)$)-vel jelölünk.

Egy Γ gráfot k-regulárisnak nevezünk, ha minden pontjának foka k. Ilyen gráfok például a körgráfok, teljes gráfok stb. Ebben a fejezetben erősen reguláris gráfokkal fogunk foglalkozni, amelyek ugyanúgy mint a k-reguláris gráfok rendelkeznek a regularitás tulajdonságával, de ezen felül további megkötéseknek is eleget tesznek. A gráfok amelyekkel foglalkozni fogunk nem tartalmaznak hurokélt, illetve többszörös éleket, tehát egyszerű (és irányítatlan) gráfokról lesz szó.

2.1. Definíció *A Γ irányítatlan, egyszerű gráfot (nem tartalmaz hurokélt vagy többszörös élt) egy (n, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráfnak nevezzük, ha nem teljes gráf vagy üres gráf, és a csúcsok száma n, a gráf k-reguláris, két szomszédos pont közös szomszédainak száma λ, két nemszomszédos pont közös szomszédainak száma pedig μ.*

A fenti definíció az erősen reguláris gráfok [2] könyvbeli definiálását követi, itt megjegyezzük, hogy azért érdemes kikötni, hogy Γ nem lehet üres gráf, mert lévén, hogy nincsenek élek a gráfban, nincs értelme szomszédos pontok közös szomszédjairól beszélni, hasonlóképpen a teljes gráfok esetében nincs értelme nemszomszédos pontokról beszélni, tehát a λ illetve μ paraméterek nem lennének jóldefiniáltak.
A következő 2.1. ábrán három példát láthatunk erősen reguláris gráfokra.



2.1. ábra. Az ábra balról jobbra haladva az ötszög gráfot, a Kuratowski gráfot ($K_{3,3}$), illetve a Petersen gráfot mutatja.

2.2. Feladat *Mely körgráfok (C_n) erősen regulárisak?*

Megoldás. Vizsgáljuk a körgráfokat pontjaik száma szerint.

- A legkisebb egyszerű körgráf a háromszög gráf ($n = 3$), de mivel ez teljes gráf ezért nem erősen reguláris gráf.
- A C_4 egy $(4, 2, 0, 2)$, a C_5 pedig egy $(5, 2, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráf.
- Ha $n \geq 6$ akkor C_n már nem lesz erősen reguláris, hiszen egy pontnak a másodszomszédjával mindig lesz egy közös szomszédja, viszont a tőle kettőnél nagyobb távolságra lévő pontokkal nem lesz közös szomszédja, így a nemszomszédos pontok közös szomszédainak száma 0 vagy 1, így a μ paraméter nem értelmezhető.

A 2.1. ábra balról első gráfja az ötszög gráfot mutatja. $\diamondsuit$

2.3. Feladat *Mely páros gráfok erősen regulárisak?*

Megoldás. Legyen $\Gamma(A, B)$ páros gráf, ahol Γ minden élének egyik végpontja A-ban, másik végpontja B-ben van.

- Az $K_{n,n}$ teljes páros gráfok $(2n, n, 0, n)$ paraméterű erősen reguláris gráfok. Ez esetben $n \geq 2$, különben teljes gráfot kapunk. A $K_{3,3}$, úgynevezett Kuratowski gráfot a 2.1. ábra középső gráfja szemlélteti.
- Tekintsünk egy $\Gamma(A, B)$ páros gráfot. Tegyük fel, hogy $\exists\, v \in A, u \in B$, amelyek nemszomszédosak. Ekkor közös szomszédaik száma 0, tehát mivel erősen reguláris gráfot szeretnénk kapni, az A halmazban, illetve a B halmazban lévő pontoknak nem lehetnek közös szomszédai. Ez akkor teljesül, ha bármely pontnak a foka kevesebb mint 2. Ha minden pont foka 0, akkor üres gráfról van szó, ami nem jó; vagy ha minden pont foka 1, akkor ez az úgynevezett létra gráf. Megjegyezzük, hogy itt $|A| = |B| \geq 2$, különben teljes gráfot kapunk. $\diamondsuit$

2.4. Példa Az 2.1. ábra jobb szélső gráfja a későbbiekben is előforduló gráf, az úgynevezett Petersen gráf, ami egy $(10, 3, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráf. $\diamondsuit$

Lássunk most egy állítást, mely az erősen reguláris gráfok paraméterei közti összefüggést mutatja, és ami a későbbiekben gyakran elő fog kerülni.

2.5. Állítás *Legyen Γ egy (n, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráf. Ekkor paramétereire igaz a következő:*

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu. \tag{2.1}$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy x pontot. Számoljuk meg kétféleképpen azon (y, z) párok számát, ahol $z \neq x$, $\{y, z\} \in E(\Gamma)$, $\{x, y\} \in E(\Gamma)$ és $\{x, z\} \notin E(\Gamma)$. Először számoljunk y szerint. Az x pontnak k darab szomszédja van, ezek mindegyikének $k - \lambda - 1$ olyan szomszédja van, amellyel nincs össze kötve x; tehát a keresett párok száma $k(k-\lambda-1)$. Most számoljunk z szerint. Pontosan $n - k - 1$ olyan pont van a Γ gráfban, amely nemszomszédos x ponttal. Ezen pontok és x közös szomszédainak száma pedig μ, tehát a keresett párok száma $(n - k - 1)\mu$. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

Az erősen reguláris gráfok témakörének egyik alapvető kérdése, hogy mely (n, k, λ, μ) paraméterekre létezik erősen reguláris gráf. A dolgozat során szükséges feltételt is fogunk látni adott paraméterű erősen reguláris gráfok létezésére, illetve olyan konstrukciókat is melyek segítségével erősen reguláris gráfokat kaphatunk. Tekintsünk rögtön egy példát olyan konstrukcióra, mellyel erősen reguláris gráfokból nyerhetünk erősen reguláris gráfokat.

2.6. Definíció *Egy Γ gráf komplementer gráfján azt a $\overline{\Gamma}$ gráfot értjük, ahol Γ és $\overline{\Gamma}$ csúcshalmaza azonos, és $\overline{\Gamma}$-ban pontosan azok a pontpárok szomszédosak, amelyek Γ-ban nemszomszédosak.*

2.7. Állítás *Legyen Γ egy (n, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráf. Ekkor $\overline{\Gamma}$ egy $(n, \overline{k}, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$ paraméterű erősen reguláris gráf, amelynek a paraméterei a következőek:*

$$\overline{k} = n - 1 - k,\ \overline{\lambda} = n - 2k + \mu - 2,\ \overline{\mu} = n - 2k + \lambda.$$

Bizonyítás. Nyilván $\overline{\Gamma}$-nak is n csúcsa van, regularitása pedig $\overline{k} = n - 1 - k$. Legyen $v, w \in V(\Gamma)$ és $\{v, w\} \notin E(\Gamma)$. Ekkor azon $x \in V(\Gamma)$ pontok száma, ahol $\{v, x\} \notin E(\Gamma)$ és $\{w, x\} \notin E(\Gamma)$ adja $\overline{\lambda}$-t. A v és w pontok közös szomszédainak száma μ. Azon $y \in V(\Gamma)$ pontok száma, ahol $\{v, y\} \in E(\Gamma)$ és $\{w, y\} \notin E(\Gamma)$ (vagy $\{w, y\} \in E(\Gamma)$ és $\{v, y\} \notin E(\Gamma)$), éppen $k - \mu$. Így azon pontok száma, amelyek sem v-vel, sem w-vel nincsenek összekötve $\overline{\lambda} = n-2-2(k-\mu)-\mu = n-2-2k+\mu$. Hasonlóan, ha $\{v, w\} \in E(\Gamma)$, akkor azon $x \in V(\Gamma)$ pontok száma, ahol $\{v, x\} \notin E(\Gamma)$ és $\{w, x\} \notin E(\Gamma)$, éppen $\overline{\mu} = n - 2 - 2(k - 1 - \lambda) - \lambda = n - 2k + \lambda$. □

Így rögtön láthatjuk, hogy amennyiben ismerünk egy erősen reguláris gráfot, máris tudunk a paraméterei alapján egy újabb erősen reguláris gráfot előállítani.

Erősen reguláris gráfok vizsgálata során másik alapvető kérdés, hogy vajon azonos paraméterekhez hány darab nemizomorf erősen reguláris gráf létezik, lehetséges-e, hogy vannak olyan gráfok, melyeket paramétereik egyértelműen meghatározzák. Könnyű látni, hogy a fent tárgyalt négyszöget, ötszöget illetve Petersen-gráfot paraméterei meghatározzák. Nézzünk most egy érdekesebb példát.

2.8. Példa Az $L_2(m)$ négyzetháló gráf csúcshalmaza az $\{1, ..., m\} \times \{1, ..., m\}$ halmaz, és két csúcsot akkor kötünk össze, ha valamely koordinátájukban megegyeznek. Ez úgy képzelhető el, hogy az $m \times m$-es „sakktábla” mezőit tekintjük a gráfunk pontjainak, és csak azokat a pontokat kötjük össze, amelyeknek megfelelő mezők között a bástya a sakk szabályainak megfelelően át tud lépni. Ezt a gráfot „bástyagráfnak” is szokták nevezni.

A gráf csúcsainak száma egyértelműen $n = m^2$. Egy pont valamely koordinátáját az adott ponton kívül pontosan $m - 1$ másik pont tartalmazza, így minden pontnak $k = 2(m - 1)$ a foka. Tekintsünk két pontot, melyek szomszédosak, ekkor az előbbiek alapján $\lambda = m-2$ közös szomszédjuk lesz. Az (a, b) és (c, d), $a \neq c$ és $b \neq d$ koordinátájú pontok közös szomszédai (a, d) és (c, b) koordinátájú pontok, tehát $\mu = 2$. Így a gráf paraméterei:

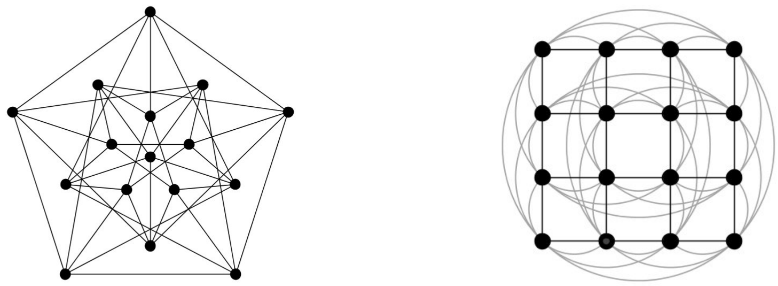
$$n = m^2,\ k = 2(m - 1),\ \lambda = m - 2,\ \mu = 2.$$

A 2.2. ábra jobb oldalán lévő gráf éppen az $L_2(4)$ négyzetháló gráf. ♢

Bizonyítható, hogy bármely $(m^2, 2(m - 1), m - 2, 2)$ paraméterű erősen reguláris gráf az $m = 4$ eset kivételével izomorf az $L_2(m)$ négyzetháló gráffal. Ezt most nem bizonyítjuk, ugyanis a későbbiekben egy hasonló eredményt fogunk belátni, az úgynevezett trianguláris gráfokról (4.8. tétel). Az $m = 4$ esetre ellenpélda az úgynevezett Shrikhande gráf, melyre később még visszatérünk.

Megemlítünk még egy példát, amelyre a negyedik fejezetben szükségünk lesz. Megjegyezzük, de nem bizonyítjuk, hogy ezt a gráfot paraméterei szintén meghatározzák.

2.9. Példa A 2.2 ábra bal oldalán szereplő gráfot Clebsch gráfnak nevezzük, ami egy $(16, 5, 0, 2)$ paraméterű erősen reguláris gráf, amelyet úgy kaphatunk, hogy vesszük az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz páros sok elemű részhalmazait és akkor kötünk össze két ilyen részhalmazt, ha szimmetrikus differenciájuk 4 elemű. $\diamondsuit$



2.2. ábra. Az ábra baloldali gráfja Clebsch gráf és a jobboldali gráfja az $L_2(4)$ négyzetháló gráf, ahol vastag vonal mentén úgy vesszük, hogy bármely két csúcs szomszédos, de vékonyabb vonalakkal ábrázoltuk részletesen is a szomszédsági viszonyokat.

2.10. Feladat ([1], 8.9. feladat) *Lássuk be, hogy a 2.9. példában megadott Clebsch gráf valóban egy* $(16, 5, 0, 2)$ *paraméterű erősen reguláris gráf.*

Megoldás. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz, amelynek a páros elemű részhalmazai adják a Clebsch gráf csúcsait, P pedig a csúcsok halmaza. A továbbiakban a, b, c, d, e jelölik az A halmaz elemeit valamilyen megfeleltetéssel.

- Lássuk be, hogy $n = 16$.

$$n = \binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 1 + 10 + 5 = 16$$

- Lássuk be, hogy $k = 5$.
  - $v = \{\emptyset\}$ szomszédai $\{a, b, c, d\}$ alakúak (4 elemű halmazok), így $\binom{5}{4} = 5$ darab szomszédja van.
  - $v = \{a, b\}$ (kételemű halmazok) szomszédai lehetnek kételeműek is és négyeleműek is, a következőképpen. Kételemű szomszédai $\{x, y\}$ alakúak, ahol $x, y \in \{c, d, e\}$ így $\binom{3}{2} = 3$ darab kételemű szomszédja van. Négyelemű szomszédai $\{x, c, d, e\}$ alakúak, ahol $x \in \{a, b\}$, így összesen $3 + \binom{2}{1} = 5$ szomszédja van v-nek.
  - $v = \{a, b, c, d\}$ szomszédai $\{x, e\}$ alakúak, ahol $x \in \{a, b, c, d\}$, illetve szomszédos az $\{\emptyset\}$-zal, így $\binom{4}{1} + 1 = 5$ darab szomszédja van.
- Lássuk be, hogy $\lambda = 0$.
  - $\{\emptyset\}$ és $\{a, b, c, d\}$ alakú pontoknak nincsenek közös szomszédaik, mivel az előbbinek 4 eleműek a szomszédai, míg az utóbbinak nem.
  - $B = \{a, b\}$ és $C = \{x, c, d, e\} \mid x \in B$ közös szomszédai csak kételeműek lehetnek (jelöljük D-vel), ahol $|B \cap D| = 0$ és $|C \cap D| = 1$. Ha $|B \cap D| = 0$ akkor $D \subset \{c, d, e\}$, tehát $|C \cap D| = 2$. Ezzel ellentmondásra jutottunk tehát B-nek és C-nek nincsenek közös szomszédaik.

– A $B = \{a, b\}$ alakú pontoknak a kételemű szomszédait jelöljük $C = \{x, y\} \mid x, y \in \{c, d, e\}$-vel. Az előző pontban láttuk, hogy szomszédos kettő- és négyelemű halmazoknak közös szomszédaik nem lehetnek kételeműek, tehát két szomszédos kételemű halmaz közös szomszédai sem lehetnek négyeleműek. Legyen D kételemű halmaz. A D akkor közös szomszédja B-nek és C-nek, ha $B \cap D = 0$ és $C \cap D = 0$. Ehhez az kéne, hogy legalább 6 pont álljon rendelkezésünkre, azonban $|A| = 5$, tehát kételemű halmazoknak nincsenek közös szomszédaik.

- Lássuk be, hogy $\mu = 2$.

  – A $\{\emptyset\}$ és $\{a, b\}$ alakú pontok közös szomszédai pontosan az $\{a, b\}$-nek a 4 elemű szomszédai, amiből (mint azt fentebb már láttuk) 2 darab van.

  – Legyen $B = \{a, b\}$ és $E = \{a, b, x, s\} \mid x, s \in \{c, d, e\}$. Közös szomszédaik $D = \{y, z\}$ két elemű halmazok. Kérdés, hogy y és z milyen értékeket vehetnek fel. Akkor lesz D az A és E közös szomszédja, ha $|B \cap D| = 0$ és $|E \cap D| = 1$. Tehát $y \in \{x, s\}$ és $z \in A \setminus \{a, b, x, s\}$. Így B-nek és E-nek pontosan $\binom{2}{1} = 2$ közös szomszédjuk van.

  – Az $F = \{a, b, c, d\}$ és $G = \{b, c, d, e\}$ közös szomszédja az $\{e, a\}$ alakú pont, illetve az $\{\emptyset\}$, így pontosan 2 közös szomszédjuk van. $\diamondsuit$

A következő példában szereplő gráfot szintén meghatározzák paraméterei, melynek bizonyítása a negyedik fejezetben fog szerepelni.

2.11. Példa Trianguláris gráfnak nevezzük azt a gráfot, amelynek a csúcsai egy $m \mid m \geq 4$ elemű halmaz 2 elemű részhalmazai és két ilyet összekötünk, ha nem diszjunktak. Ezt a gráfot $T(m)$-mel jelöljük. A 2.4.-ben említett Petersen gráf komplementere $T(5)$-nek, melyet a 2.3. ábra balról vett első gráfja szemléltet.
Lássuk be, hogy $T(m)$ erősen reguláris. Egy m elemű halmaz kételemű halmazainak száma $\binom{m}{2} = m(m-1)/2$, tehát $n = m(m-1)/2$. Az m elemű halmaz egy kételemű részhalmazának mindkét eleme pontosan $m - 2$ darab másik kételemű halmazban lesz benne, tehát a gráf egy csúcsa pontosan $2(m-2)$ darab csúccsal lesz összekötve. Legyen az m elemű halmazunk $A = \{a_1, a_2, ...a_m\}$. Legyen $B = \{a_1, a_2\}$ és $C = \{a_2, a_3\}$ két szomszédos csúcs. A B és C csúcsok közös szomszédai lehetnek $\{a_1, a_3\}$ alakúak, vagy $\{a_2, x\} \mid x \in A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ alakúak, ahol az utóbbiból éppen $m - 3$ van, így B-nek és C-nek összesen $\lambda = m - 2$ darab közös szomszédja van. Legyen $D = \{a_1, a_2\}$ és $E = \{a_3, a_4\}$ két nemszomszédos pont. Ekkor D és E közös szomszédai úgy fognak kinézni, hogy A és B elemei közül is pontosan egyet tartalmaznak. Ezt összesen négyféleképpen lehet megvalósítani, tehát $\mu = 4$. Ezek alapján a $T(m)$ gráf erősen reguláris a következő paraméterekkel:

$$n = m(m-1)/2,\ k = 2(m-2),\ \lambda = m - 2,\ \mu = 4. \qquad \diamondsuit$$

Egyik szépsége az erősen reguláris gráfoknak, hogy ha már ismerünk néhányat, akkor ezekből bizonyos esetekben elő tudunk állítani újabb erősen reguláris gráfokat. Fentebb említettük például a 2.7. állításban, hogy erősen reguláris gráfnak a komplementere is erősen reguláris. Most nézzünk egy switchingnek nevezett módszert, amely segítségével gráfokból gráfokat tudunk előállítani, bizonyos esetekben pedig éppen erősen reguláris gráfokból kaphatunk erősen reguláris gráfokat. A konstrukció a következőképpen néz ki. Egy Γ gráf csúcsainak halmazából válasszunk ki egy Y részhalmazt. Vegyünk két csúcsot, melyek mindketten Y halmazban vannak, vagy egyik sincs

Y-ban. Amennyiben az eredeti gráfban volt él ezen két csúcs között akkor hagyjuk meg, ha nem volt akkor switching során se kössük össze a két pontot. Ha két tetszőleges pont közül az egyik Y halmazban van, míg a másik nem, akkor ha eddig volt él köztük, akkor most ne legyen és ha eddig nem volt, akkor most húzzuk be.
Nézzünk először egy feladatot, ahol reguláris gráfok tulajdonságait vizsgáljuk a switching során. A feladat kifejtéséhez szükségünk lesz az alábbi deinícióra és jelölésre.

2.12. Definíció *Vegyük Γ gráf pontjainak egy A halmazát és kössünk össze benne két pontot pontosan akkor, ha Γ-ban szomszédosak voltak. Az így kapott H gráfot Γ-nak az A által feszített részgráfjának nevezzük.*

2.13. Jelölés ([1]) *Legyen x egy csúcsa Γ gráfnak. Ekkor $\Gamma(x)$-szel fogjuk jelölni az x-szel összekötött csúcsok halmazát (amely nem tartalmazza x-szet).*

2.14. Feladat *Legyen Γ egy reguláris gráf. Mely $Y \subset V(\Gamma)$-ra vonatkozó switchinggel kaphatunk reguláris gráfot?*

A feladat megoldását a következő állításban tárgyaljuk.

2.15. Állítás *Egy n pontú, k-reguláris Γ gráfban az $Y \subset V(\Gamma)$-ra vonatkozó switchinggel kapott gráf k'-reguláris pontosan akkor, ha az Y által feszített részgráf $\frac{k'+k+|Y|-n}{2}$-reguláris és minden $v \in V(\Gamma) \setminus Y$ pontnak pontosan $\frac{|Y|+k-k'}{2}$ szomszédja van Y-ban.*

Bizonyítás. Legyen $|Y| = x$, és legyen Γ-nak az Y által feszített részgráfja Y'. Ha $|Y| = x$, akkor $|V(\Gamma) \setminus Y| = n - x$. Legyen $v \in V(\Gamma)$. Jelölje Γ-ban $\deg'(v)$ a v-nek az Y-beli szomszédainak számát. Ebből következik, hogy v szomszédainak száma Y-on kívül $k - \deg'(v)$. Nézzük először az Y'-n belüli, majd az Y'-n kívüli csúcsok fokszámát a switching után.

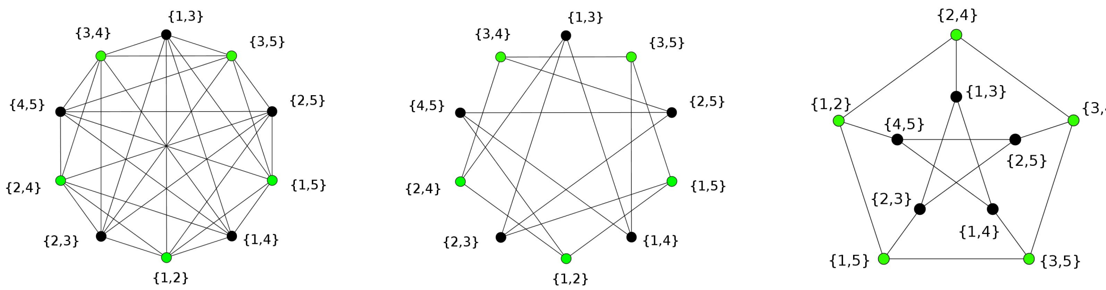
- Rögzítsünk egy $v \in Y$ pontot. A switching után v szomszédainak száma éppen $|\,(\Gamma(v) \cap Y)\,| + |\,(V(\Gamma) \setminus (Y \cup \Gamma(v)))\,| = k'$, tehát $\deg'(v) + n - x - (k - \deg'(v)) = 2\deg'(v) + n - x - k = k'$, így mivel $\frac{k'+k+x-n}{2}$ konstans, ezért adódik, hogy Y' egy $\frac{k'+k+x-n}{2}$-reguláris gráf.
- Rögzítsünk egy $w \in V(\Gamma) \setminus Y$ pontot. A switching után w szomszédainak száma $|(\Gamma(w) \setminus (\Gamma(w) \cap Y))| + |(Y \setminus (\Gamma(w) \cap Y))|$, tehát $k - \deg'(w) + x - \deg'(w) = k'$, így mivel $\frac{x+k-k'}{2}$ konstans, ezért adódik, hogy bármely $w \in V(\Gamma) \setminus Y$ pontnak pontosan $\frac{x+k-k'}{2}$ szomszédja kell, hogy legyen Y-ban. □

2.16. Feladat ([1], 8.32 feladat) *Keressünk olyan Y halmazt a $(10, 6, 3, 4)$ paraméterű $T(5)$ trianguláris gráfban, amelyre vonatkozó switching átviszi $T(5)$-öt a (10,3,0,1) Petersen gráfba.*

Megoldás. Jelöljük $T(5)$ paramétereit szokásosan n, k, λ, μ betűkkel, a Petersen gráf paramétereit pedig n, k_p, λ_p, μ_p betűkkel.
Az előző (2.14.) feladat megoldásában szereplő egyenletek (és jelölések) alapján az Y'-beli pontok fokszáma $\deg'(v) = \frac{k'+k+x-n}{2} = \frac{x-1}{2}$, a $V(\Gamma) \setminus Y$-beli pontok foka pedig $\frac{x+k-k'}{2} = \frac{x+3}{2}$. A switching során Y'-n belül megmaradnak az élek, így $\deg'(v) \leq 3$, tehát 4 esetet kell vizsgálnunk.

- Ha $\deg'(v) = 0$ akkor $x = 1$, továbbá $\deg'(w) = 2$ ami ellentmondás.

- Ha $\deg'(v) = 1$ akkor $x = 3$, tehát az Y' gráfunk egy 3 pontú 1 reguláris gráf, így az élek száma $\frac{3}{2}$ kéne, hogy legyen, ami nem lehetséges.
- Ha $\deg'(v) = 3$ akkor $x = 7$, ekkor az élek száma $\frac{21}{2}$ kéne, hogy legyen, ami nem lehetséges.
- Ha $\deg'(v) = 2$, akkor $x = 5$. Ez valóban jónak bizonyul, ilyen Y'-t találunk $T(5)$-ben. $\diamondsuit$



2.3. ábra. Az ábra jobbról az első gráfja mutatja $T(5)$-öt, ahol zölddel jelöltem egy lehetséges Y halmaz pontjait (ugyanúgy mint az ábrán szereplő másik két gráfnál). A második gráf mutatja a switching után kapott eredményt, mely a Petrsen gráf, a pontok megfelelő elhelyezésével pedig megkapjuk az ábrán szereplő harmadik gráfot, ami éppen a Petersen gráf a közismert elrendezésben.

2.17. Példa A Shrikhande gráf egy erősen reguláris gráf, amelyet switching segítségével kaphatunk a 2.8. példában említett $L_2(4)$ négyzetháló gráfból. A switching során tekintsük Y-nak a négy diagonális pontot. A Shrikhande gráf paraméterei megegyeznek az $L_2(4)$ paramétereivel, tehát: $n = 16$, $k = 6$, $\lambda = 2$, $\mu = 2$. $\diamondsuit$

Nézzünk még néhány példát erősen reguláris gráfokra.

2.18. Példa Az r darab diszjunkt K_m uniója erősen reguláris gráf, jelölése rK_m, paraméterei pedig a következőek:

$$n = rm,\ k = m-1, \lambda = m-2,\ \mu = 0.$$

Megjegyezzük, hogy $\mu = 0$-ra minden erősen reguláris gráf ilyen, alkalmas r, m paraméterekkel. Legyen $x \in V(\Gamma)$, ahol Γ egy $(v, k, \lambda, 0)$ paraméterű erősen reguláris gráf. Mivel $\mu = 0$, amennyiben egy pont 2 hosszú úton elérhető x-ből, akkor 1 hosszú úton is. Ezt végignézve a pontokra kapjuk, hogy x szomszédai mind össze vannak kötve, továbbá minden összefüggőségi komponens egy ($k+1$ csúcsú) teljes gráf. Ezen gráfok egy speciális esete a létrának nevezett rK_2, melynek komplementere a koktél parti gráfnak nevezett erősen reguláris gráf, melyet $CP(r)$-rel jelöljük. Általánosan az rK_m gráfok komplementere nyilván (2.7. állítás alapján) erősen reguláris, ezek az r osztályú teljes Turán gráfok, ahol az osztályok mérete m. $\diamondsuit$

Gráfok sok érdekes tulajdonsága könnyebben kezelhető mátrixok segítségével, sőt maga a gráf is kódolható mátrixok formájában. Vizsgáljuk meg közelebbről a gráfok, majd speciálisan az erősen reguláris gráfok szomszédsági mátrixát, illetve azoknak a tulajdonságait.

2.19. Definíció *Az n pontú Γ gráf $n \times n$-es $A(\Gamma)$ szomszédsági mátrixát az alábbi módon definiáljuk:*

$$A(\Gamma)_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{ha az } i\text{-edik és } j\text{-edik pont nemszomszédos,} \\ 1, & \text{ha az } i\text{-edik és } j\text{-edik pont szomszédos,} \end{cases}$$

ahol $i = 1...n$ és $j = 1...n$.

Tehát a mátrix $A(\Gamma)_{i,j}$ eleme megmutatja, hogy az i illetve j pontok szomszédosak-e vagy sem. Érdemes megjegyezni, hogy azért áll csupa 0-ból illetve 1-esből a mátrix mert felhasználtuk, hogy Γ egyszerű, ha ez nem lenne megkötés, a mátrix nem lenne bináris, továbbá Γ irányítatlan gráf, ezért A szimmetrikus. Mivel A szimmetrikus, ezért rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy lehet hatványozni.
Tekintsünk egy (v, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráfot (Γ)-t, és szomszédsági mátrixának négyzetét, A^2-t. Mivel $A^2 = AA^T$, így $(A^2)_{i,j}$ éppen az i és j pontok közös szomszédainak száma. Ezek alapján A^2 szerkezetéről a következők mondhatóak el: a főátlóban k-k vannak, míg a mátrix többi eleme λ vagy μ attól függően, hogy az adott pontok szomszédosak voltak-e, vagy nem. Ezen meggondolások alapján A^2-re igaz a következő:

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu (J - I - A), \tag{2.2}$$

ahol I az $n \times n$-es egységmátrix, J pedig a csupa egyesből álló $n \times n$-es mátrix. A gráf regularitása mátrixosan felírva:

$$AJ = JA = kJ. \tag{2.3}$$

2.20. Megjegyzés Amennyiben egy Γ gráf A szomszédsági mátrixa eleget tesz a (2.2), (2.3) egyenleteknek, Γ egy (n, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráf. $\diamondsuit$

A következő tétel, mely szükséges feltételt ad erősen reguláris gráfok létezésére, igen fontos, és sokféleképpen alkalmazható erősen reguláris gráfok vizsgálata során. A tétel itt nem bemutatott bizonyítása a gráf szomszédsági mátrixának segítségével algebrai úton történik, melynek során sok értékes információt nyerhetünk a gráf paraméterei és az őt leíró mátrixok sajátértékei közötti összefüggésekről.

2.21. Tétel *(Integralitási feltétel)*
Legyen Γ egy (n, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráf. Ekkor paramétereire igaz, hogy a

$$\frac{1}{2}\left(n - 1 - \frac{(n-1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)}}\right) \tag{2.4}$$

szám nemnegatív egész.

Az integralitási feltétel alapján felírhatunk néhány igen hasznos összefüggést a paraméterek között. Mivel tudjuk, hogy a (2.4)-beli szám nem negatív egész, rögtön adódik, hogy az előbbi benne szereplő törtnek vagy a számlálója 0, vagy a gyökjel alatt négyzetszám áll. Az első esetben $(n-1)(\mu - \lambda) = 2k$. Nyilvánvaló, hogy $n > k + 1$, tehát az előző egyenletet felhasználva: $n = \frac{2k}{(\mu - \lambda)} + 1 > k + 1$, tehát $\mu - \lambda = 1$ és $n = 2k + 1$. A 2.5. állítás alapján tehát $k(k - \mu) = k\mu$, vagyis

$$k = 2\mu, \; n = 2k + 1 = 4\mu + 1. \tag{2.5}$$

Ezeket a gráfokat nevezzük konferencia gráfoknak. Nézzünk erre az esetre egy szükséges feltételt, melyet nem bizonyítunk.

2.22. Tétel ([1], 8.1.16 tétel) *(van Lint, Seidel)*
Egy (n, k, λ, μ) paraméterű konferencia gráfban, azaz egy $(n-1)(\mu-\lambda) = 2k$-nek eleget tevő erősen reguláris gráfban, n-nek két négyzetszám összegének kell lennie.

A második esetben a gyökjel alatt négyzetszám áll, amit nevezzünk el u^2-nek, így azt kapjuk, hogy

$$(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu) = u^2. \tag{2.6}$$

Ezen felül u osztja $(n-1)(\mu-\lambda)-2k$-t, továbbá a hányados azonos paritású az $(n-1)$-gyel. Könnyen látható továbbá, hogy $(\lambda - \mu)$ és a gyökjel alatt álló $(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)$ kifejezés azonos paritású.

Az extremális gráfok témakörének egy jelentős témája a fokszám/átmérő probléma, amely azt kérdezi, hogy egy $\Delta \leq k$ maximális fokszámú, maximum d átmérőjű Γ gráf pontjainak mennyi a legnagyobb lehetséges száma ($|V(\Gamma)|$). Erre ismert egy könnyű fölső becslés [7]:

$$|V(\Gamma)| \leq \begin{cases} \frac{k(k-1)^d-2}{k-2} & \text{ha } k \neq 2 \\ 2d+1 & \text{ha } k = 2. \end{cases}$$

Számunkra a $d = 2$ eset lesz érdekes, ekkor az előzőek alapján $n \leq k^2 + 1$.
Most tekintsük egy másik extremális problémát: az 5-bőségű (legrövidebb köre 5 hosszú), k-reguláris gráfokat. Nézzük meg, ezeknek a gráfoknak minimum hány csúccsal kell rendelkezniük. Kezdjük el egy pontból felépíteni a gráfot a kritériumoknak megfelelően. Egy pontnak k darab szomszédja van, mivel k-reguláris a gráfunk. A szomszédainak a foka szintén k, viszont mivel a legkisebb megengedett kör 5 hosszú, ezért az első pont minden szomszédjához további $k - 1$ csúcsot kell felvenni. Ekkor éppen $1 + k + k\,(k - 1) = 1 + k^2$ csúcsunk van, ennyi mint láttuk mindenképpen szükséges a megadott kritériumok teljesítéséhez, így a csúcsok száma $n \geq k^2 + 1$.
Felmerül a kérdés, hogy elérhető-e egyenlőség a fenti két becslésben. Egyenlőség esetén mindkét problémának a megoldása ugyanazt adja, méghozzá egy $(k^2 + 1, k, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráfot.

2.23. Feladat *Lássuk be, hogy egy 5-bőségű, k reguláris, $n = k^2 + 1$ csúcsú gráf $(k^2 + 1, k, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráf.*

Megoldás. Mint azt fentebb láttuk, rögzített v pontnak k darab szomszédja van, melyeknek mind $k-1$ darab további szomszédjuk van. Amennyiben két pont össze van kötve nem lehet közös szomszédjuk, hiszen nem lehet 3 hosszú kör a gráfban. Rögzített v pontnak van k darab szomszédja, amelyeknek mind $k - 1$ szomszédjuk van, amelyek nincsenek összekötve v-vel. Így v-nek és egy vele nemszomszédos pontnak pontosan 1 darab közös szomszédja van, ez pedig minden pontra igaz a gráfban, hiszen mindegy melyik pontot rögzítjük. Ezek alapján beláttuk, hogy gráfunk egy $(k^2 + 1, k, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráf. $\diamondsuit$

Tehát kétféle megközelítésből is megkaptuk ugyanazt az eredményt. Felmerül a kérdés, hogy vajon k mely értékeire léteznek $(k^2 + 1,\ k,\ 0,\ 1)$ erősen reguláris gráfok.

2.24. Tétel *(Hoffman–Singleton)*
Legyen Γ egy $(k^2 + 1, k, 0, 1)$ paraméterű erősen reguláris gráf. Ekkor k lehetséges értékei: $k = 2,\ 3,\ 7$ és 57.

Bizonyítás. Használjuk a 2.4 -es integralitási tételt. Ha gráfunk konferencia gráf, akkor tudjuk, hogy $(n-1)(\mu-\lambda) = 2k$, ez alapján pedig a megfelelő paraméterek behelyettesítésével:

$$(k^2+1-1)(1-0) = 2k,$$

tehát $k = 2$. Ez éppen az 5 hosszú kör. Ezután feltesszük, hogy $k \geq 3$. Ha a gráfunk nem konferenciagráf, akkor a (2.6) egyenlet alapján azt kapjuk, hogy:

$$(1-0)^2 + 4\,(k-1) = u^2,$$

tehát

$$4k - 3 = u^2.$$

Ezen kívül említettük, hogy ahhoz, hogy a tört egész legyen, u-nak osztania kell $(n-1)(\mu-\lambda) - 2k$-t. Tehát felírhatjuk a következőt:

$$x\sqrt{(1-0)^2 + 4\,(k-1)} = \left(k^2+1-1\right)(1-0) - 2k,$$

ahol $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Az egyenletet rendezve és behelyettesítve $\left(k = \frac{u^2+3}{4}\right)$-t azt kapjuk, hogy:

$$u^4 - 2u^2 - 16xu = 15,$$

Mivel $x, u \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, így $u^3 - 2u - 16x$ egész, tehát u osztja 15-öt. Ebből következik, hogy u (és ezzel együtt k) lehetséges értékei:

$$\begin{aligned} u_1 = 1 &\quad\longrightarrow\quad k_1 = 1 \\ u_2 = 3 &\quad\longrightarrow\quad k_2 = 3 \\ u_3 = 5 &\quad\longrightarrow\quad k_3 = 7 \\ u_4 = 1 &\quad\longrightarrow\quad k_1 = 57 \end{aligned}$$

Mivel kikötöttük, hogy ez esetben $k \geq 3$, így az eredményeinkhez hozzávéve a korában kapott $k = 2$-t, megkapjuk k lehetséges értékeiként a 2, 3, 7 és 57-t. □

Az egyes esetekre rögtön mondunk példát is. Azt már említettük, hogy $r = 2$ az pontosan az 5 hosszú kör. Az $r = 3$ éppen a Petersen gráf, míg $r = 7$ az úgynevezett Hoffmann-Singleton gráf. Az $r = 57$ esetet nem zárjuk ki, de még nem bizonyított egy ilyen paraméterű erősen reguláris gráf létezése.

Az integralitási tételt fogjuk alkalmazni a következő tétel bizonyításában is.

2.25. Tétel *Rögzített λ-ra csak végesen sok $\lambda = \mu$ feltételnek eleget tevő (n, k, λ, λ) paraméterű erősen reguláris Γ gráf létezik.*

Bizonyítás. A tételben szereplő Γ erősen reguláris gráf nem lehet konferencia gráf, hiszen azokról tudjuk, hogy $(n-1)(\mu-\lambda) = 2k$, így $(n-1)(0) = 2k = 0$ lenne, ami nem lehetséges. Így arra jutottunk, hogy a 2.4. integralitási tétel számlálója nem lehet 0. Ekkor a második lehetőségünk az volt, hogy a gyökjel alatti kifejezés legyen egy u^2 négyzetszám. Ekkor (2.6.) alapján a paraméterek behelyettesítésével:

$$(\lambda - \lambda)^2 + 4(k - \lambda) = u^2,$$

$$(k - \lambda) = \left(\frac{u}{2}\right)^2,$$

mivel k és λ egészek, ezekből következik, hogy u páros. Rendezve k-ra pedig azt kapjuk, hogy:

$$k = \lambda + \left(\frac{u}{2}\right)^2,$$

Emellett tudjuk, hogy u osztja $(n-1)(\mu-\lambda) - 2k$-t, tehát

$$u \mid (n-1)(\lambda - \lambda) - 2k,$$

$$u \mid 2k,$$

$$u \mid 2\left(\lambda + \left(\frac{u}{2}\right)^2\right),$$

mivel tudjuk, hogy u páros,

$$\frac{u}{2} \mid \lambda.$$

Legyen $\frac{u}{2} = u'$, ekkor

$$u' \leq \lambda,$$

$$k = \lambda + u'^2 \leq \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda + 1). \tag{2.7}$$

A 2.5. állítás és $\mu = \lambda$ alapján:

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\lambda,$$

$$\frac{1}{\lambda}\left(k^2 - k + \lambda\right) = n.$$

A (2.7) egyenlet alapján:

$$\frac{1}{\lambda}\left((\lambda(\lambda+1))^2 - \lambda(\lambda+1) + \lambda\right) \geq n,$$

$$\lambda^2(\lambda + 2) \geq n.$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

3. fejezet

Blokkrendszerek

Ebben a fejezet speciális halmazrendszerekkel, úgynevezett blokkrendszerekkel fogunk foglalkozni, melyek hasonlóan a gráfokhoz, nagyon hasznosak különböző szervezési feladatok matematikai leírásában, például csoportmunka szervezése, ahol adott létszámú csoportot kell csapatokra osztani, speciális feltételek mellett. Kezdjük a blokkrendszerek egy általánosításával.

3.1. Definíció *Legyen $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B})$ rendezett pár, ahol $\boldsymbol{P}$ egy nemüres halmaz, a $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{P}$ részhalmazainak egy halmaza, ahol $\boldsymbol{P}$ elemeit pontoknak, $\boldsymbol{B}$ elemeit blokkoknak nevezzük. A $\boldsymbol{D}$ rendezett párt t-$(v,\ k,\ \lambda)$ rendszernek nevezzük, ha igazak az alábbiak:*

- $|P| = v$,
- $\forall B \in \boldsymbol{B} : |B| = k$,
- *bármely t különböző pont pontosan λ blokkban van benne.*

3.2. Példa Ha vesszük egy v elemű $\mathbf{P}$ halmaz összes k elemű részhalmazát (mint blokkokat), akkor $\forall t \leq k$-ra egy t-$(v,\ k,\ \binom{v-t}{k-t})$ rendszert kapunk. $\diamondsuit$

3.3. Definíció *A t-rendszer $t = 2$ speciális esete a blokkrendszer.*

Egy $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B})$ blokkrendszer estében nem mindig fogjuk megemlíteni, hogy az adott elem, amelyről beszélünk pont vagy blokk éppen, ugyanis ez a szövegkörnyezetből kiderül, továbbá a pontokat kis betűkkel (pl.: p, q, r...), míg a blokkokat nagy betűkkel (pl.: B, C, ...) fogjuk jelölni. Az illeszkedő pont-blokk párokat zászlónak fogjuk nevezni. Ha egy pont eleme egy blokknak, akkor a geometriából ismert megnevezéseket is használunk, mint „p pont rajta van a B blokkon", „p pont illeszkedik B blokkra", „B blokk átmegy a p ponton", stb.

3.4. Példa A Fano sík egy 2-$(7, 3, 1)$ blokkrendszer, amit a 3.1. ábra első képe mutat. $\diamondsuit$

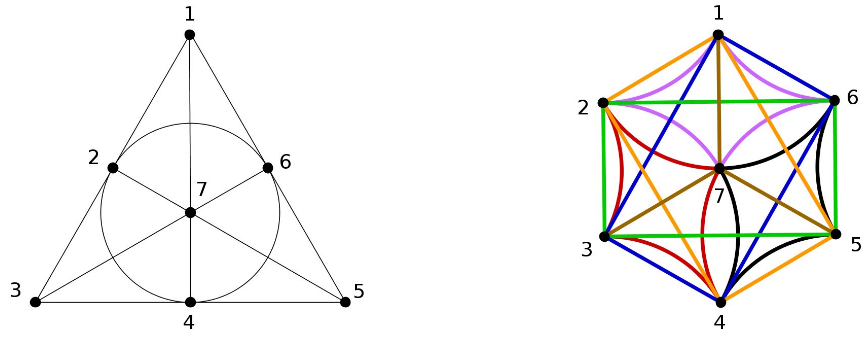
3.5. Definíció *Legyen $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B})$ blokkrendszer, ahol $p \in \boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{D}$ egy pontja. A p pont foka a p-n átmenő blokkok száma, amit $\deg(v)$-vel jelölünk.*

3.6. Állítás *Egy 2-(v, k, λ)-blokkrendszerben a blokkok száma b és minden pont foka r, ahol*

$$r = \lambda\,(v-1)\,/\,(k-1)\,, \tag{3.1}$$

$$vr = bk, \tag{3.2}$$

$$b = \lambda v\,(v-1)\,/k\,(k-1)\,. \tag{3.3}$$



3.1. ábra. Az ábra első gráfja a Fano síkot mutatja, míg a második gráf a Fano sík komplementerét. A Fano-sík pontjait fekete pontok jelölik, a blokkjait pedig a szakaszok illetve a kör reprezentálják, komplementerénél hasonlóképpen a fekete pontok jelölik a blokkrendszer pontjait, a vonalak pedig a blokkokat.

Bizonyítás. Haladjunk sorba a fenti egyenletek bizonyításával.

- Rögzítsünk egy $p \in \mathbf{P}$ pontot, amely $\deg(p)$ blokkra illeszkedik. Számoljuk meg kétféleképpen azon (q, L) zászlókat, ahol $p \in L$ és $p \neq q$. Egy L blokkban, amelyben p benne van, rajta kívül éppen $k-1$ pont van. Mivel p pont $\deg(p)$ darab blokkra illeszkedik a $\mathbf{D}$ blokkrendszerben összesen $\deg(p)(k-1)$ darab (q, L) zászló található. Másrészről két pont pontosan λ darab blokkban van benne és mivel p-n kívül $(v-1)$ pont van $\mathbf{D}$-ben, így a (q, L) zászlók száma $\lambda(v-1)$. Ebből $\deg(p)$-t kifejezve rögtön látható, hogy $\deg(p)$ konstans, tehát $\mathbf{D}$ blokkrendszer minden pontjának foka azonos, amit r-rel jelölünk, továbbá ezzel együtt a (3.1) egyenletet is beláttuk.

- Számoljuk meg kétféleképpen a pont-blokk párokat (zászlókat). Egy $p \in \mathbf{P}$ pontra r blokk illeszkedik, tehát r zászló tartozik egy ponthoz. Mivel v darab pontunk van a zászlók száma vr. Másképpen számolva, egy blokk k darab pontot tartalmaz, így k darab zászló tartozik hozzá. Mivel b darab blokkunk van a zászlók száma bk, tehát beláttuk a (3.2.)-et.

- A (3.1) és (3.2) egyenletbe való behelyettesítésével megkapjuk a (3.3) egyenlet.□

3.7. Korollárium *A 2-(v, k, λ)-rendszerek létezéséhez szükséges, hogy*

1. $\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$;
2. $\lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$;

Ezen feltételek teljesülése még nem elégséges egy megfelelő paraméterű blokkrendszer létezéséhez. Hasonlóan az erősen reguláris gráfokhoz, a blokkrendszerek komplementerével újabb blokkrendszereket állíthatunk elő, ezt fogalmazza meg a következő definíció.

3.8. Definíció *Egy blokkrendszer komplementerét úgy definiáljuk, hogy a pontok halmaza változatlan, a blokkok pedig az eredeti blokkok komplementerei. A továbbiakban egy $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B})$ blokkrendszer komplementerét $\overline{\boldsymbol{D}}$-vel jelöljük.*

Nézzük milyen paraméterekkel rendelkezik egy 2-(v, k, λ) blokkrendszer komplementere. Mivel a ponthalmaz változatlan, $\overline{v} = v$. Egy blokk eddig k pontot tartalmazott, most $\overline{k} = v - k$ pontot fog tartalmazni. Legyen adott $p, q \in \mathbf{P}$ és $L \in \mathbf{B}$. Ha $p, q \notin L$ akkor $p, q \in \overline{L}$. Ilyen L blokk pedig éppen $b - 2r + \lambda$ darab van, hiszen a blokkok számából levonjuk az adott pontok fokszámát, de így azokat a blokkokat melyek mindkét pontot tartalmazzák kétszer vontuk le, így λ-át hozzá kell még adnunk, így pedig $\overline{\lambda} = b - 2r + \lambda$. Ezek alapján egy 2-$(v, k, \lambda)$ blokkrendszer komplementere egy 2-$(v, v - k, b - 2r + \lambda)$ blokkrendszer.

3.9. Példa A fentiekben említett Fano-sík komplementere (3.1. ábra) 7 pontú, 7 blokkú rendszer, ahol minden blokk 4 pontot tartalmat és minden pont 4 blokkra illeszkedik.$\diamondsuit$

3.10. Definíció *Egy* 2-(v, k, λ) *blokkrendszert szimmetrikusnak (vagy négyzetesnek) nevezünk, ha bármely két blokkja pontosan* λ *pontban metszi egymást.*

3.11. Példa A 3.4. példában leírt Fano sík egy szimmetrikus blokkrendszer (3.1.ábra).$\diamondsuit$

A Következő tételek segítségével azt látjuk be, hogy amennyiben egy tetszőleges $\mathbf{D}$ blokkrendszer bármely két blokkja λ pontban metszik egymást (tehát $\mathbf{D}$ szimmetrikus), akkor $k = r$, illetve $b = v$ (ami 3.6. állítás (3.2) egyenlete alapján ekvivalens), továbbá ugyanez fordítva is igaz, ha $k = r$, $b = v$, akkor $\mathbf{D}$ bármely két blokkja λ pontban metszik egymást, tehát $\mathbf{D}$ szimmetrikus. (Megjegyezzük, hogy a következő tétel a [1] jegyzetben sajtóhibásan szerepel.)

3.12. Állítás *Legyen* $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B})$ *egy* 2-(v, k, λ) *blokkrendszer. Tetszőleges* $B \in \boldsymbol{B}$*-től diszjunkt blokkok száma legfeljebb:*

$$b - 1 - \frac{k(r-1)^2}{(k-1)(\lambda-1) + (r-1)}. \tag{3.4}$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha a B*-t metsző blokkok mindegyike*

$$1 + \frac{(k-1)(\lambda-1)}{r-1} \tag{3.5}$$

pontban metszi B*-t.*

Bizonyítás. Bizonyítsuk az úgynevezett variancia-trükk (négyzetes leszámlálás) segítségével a fenti állítást. Legyen a B-t metsző, de tőle különböző blokkok száma d, továbbá a B-t i pontban metsző blokkok száma legyen n_i. A bizonyítás során végig $i > 0$ (hiszen csak a B-t metsző blokkokkal foglalkozunk). Ekkor a következőt írhatjuk fel:

$$\sum_i n_i = d.$$

Számoljuk meg azokat (p, L) zászlókat, ahol $p \in B, L$, $L \neq B$ és $L \in \mathbf{B}$. Egy a B blokkot i pontban metsző blokk i darab (p, L) zászlót ad és mivel n_i darab ilyen blokk van, ezért az összes illeszkedő pont-blokk párok száma $\sum_i i n_i$. Másképpen végiggondolva, B blokkra k pont illeszkedik, amelyek mindegyike további $r - 1$ blokkra illeszkedik, tehát:

$$\sum_i i n_i = k(r-1).$$

Számoljuk meg azokat (p,q,L) pontpár-blokk párokat, ahol $p,q \in \mathbf{P}$, $L \neq B$, $L \in \mathbf{B}$ és $p,q \in B, L$. Egy a B blokkot i pontban metsző blokk $i(i-1)$ darab (p,q,L) pontpár-blokk párt ad, és mivel n_i darab ilyen blokk van, ezért az összes illeszkedő pontpár-blokk párok száma $\sum_i i(i-1)n_i$. Másképpen végiggondolva, a B blokkra k pont illeszkedik, amely B-ben $(k-1)$ ponttal fog pontpárt alkotni, és mivel definíció szerint bármely két pont λ blokkban van benne, de a B blokkot nem számítjuk, azt kapjuk, hogy:

$$\sum_i i(i-1) = k(k-1)(\lambda-1).$$

Vegyük a következő kifejezéseket:

$$\sum_i i^2 n_i = \sum i(i-1)n_i + \sum_i in_i = k(k-1)(\lambda-1) + k(r-1),$$

$$\sum_i 2in_i = 2\sum_i in_i = 2k(r-1).$$

Ezek alapján:

$$\sum_i (i-x)^2 n_i = dx^2 - 2k(r-1)x + k((k-1)(\lambda-1) + (r-1)). \tag{3.6}$$

Ez a kifejezés x tetszőleges valós értéke mellett nemnegatív (amint azt a bal oldali forma mutatja), tehát a jobboldali, x-ben másodfokú kifejezésnek nem lehet két valós gyöke, azaz diszkriminánsa nempozitív. Így azt kapjuk, hogy:

$$0 \geq (2k(r-1))^2 - 4dk((k-1)(\lambda-1) + (r-1)).$$

Ebből pedig d-re azt kapjuk, hogy:

$$d \leq \frac{k(r-1)^2}{(k-1)(\lambda-1) + (r-1)}.$$

A blokkok számából levonva a B-t metsző blokkok számát illetve B-t, megkapjuk a B-től diszjunkt blokkok számát, melyek száma az előzőek alapján legfeljebb:

$$b - 1 - \frac{k(r-1)^2}{(k-1)(\lambda-1) + (r-1)}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a diszkrimináns 0. Legyen ekkor x a fenti másodfokú egyenletnek az egyetlen gyöke:

$$x = \frac{2k(r-1)}{2d} = \frac{(k-1)(\lambda-1)}{r-1} + 1.$$

Ezt behelyettesítve a (3.6) egyenletbe:

$$\sum_i \left(i - \left(\frac{(k-1)(\lambda-1)}{r-1} + 1\right)\right)^2 n_i = 0.$$

Mivel az összeg minden tagja nemnegatív, így minden $i \neq \frac{(k-1)(\lambda-1)}{r-1} + 1$-re $n_i = 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy amennyiben a B-től diszjunkt blokkok száma pontosan

$$b - 1 - \frac{k(r-1)^2}{(k-1)(\lambda-1) + (r-1)},$$

akkor a B blokkot metsző blokkok ugyanannyi, mégpedig pontosan $\frac{(k-1)(\lambda-1)}{r-1} + 1$ pontban metszik B blokkot. □

3.13. Megjegyzés Szimmetrikus blokkrendszerek esetén a fenti 3.12. állítás szerint:

$$\lambda = \frac{(k-1)(\lambda-1)}{r-1} + 1,$$

amiből

$$r = k. \tag{3.7}$$

A fenti egyenletből pedig (3.2) egyenlet alapján következik, hogy

$$b = v. \tag{3.8}$$

$\diamondsuit$

3.14. Tétel *Legyen* $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B})$ *egy* 2-(v, k, λ) *paraméterű blokkrendszer, ahol* $k < v$ *és* $k = r$ *vagy* $b = v$*. Ekkor* $\boldsymbol{D}$ *egy négyzetes blokkrendszer.*

Bizonyítás. A 3.6. állításnak, a (3.2) egyenlete alapján nyilván egyenértékű, hogy $k = r$ vagy $b = v$. Ugyanennek az állításnak (3.3) egyenlete alapján, felhasználva, hogy $b = v$, azt kapjuk, hogy:

$$b = v = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)},$$

rendezve pedig:

$$\frac{k(k-1)}{\lambda} = v - 1 \tag{3.9}$$

Ekkor a 3.12. állítás szerint tetszőleges $B \in \mathbf{B}$ blokktól legfeljebb

$$b - 1 - \frac{k(r-1)^2}{(k-1)(\lambda-1) + (r-1)}$$

diszjunkt blokk van. A $k = r$, $b = v$ és (3.9) egyenlet felhasználásával:

$$v - 1 - \frac{k(k-1)^2}{(k-1)(\lambda-1) + (k-1)} = v - 1 - (v-1) = 0$$

Tehát bármely két blokk metszi egymást. Mivel a becslésben egyenlőség áll fönn (bármely blokkra), a 3.12. állítás szerint bármely két blokk pontosan

$$1 + \frac{(k-1)(\lambda-1)}{r-1} = 1 + \frac{(k-1)(\lambda-1)}{k-1} = \lambda$$

pontban metszik egymást. Tehát $\mathbf{D}$ valóban négyzetes. $\square$

3.15. Definíció *Egy négyzetes,* 2-$(v, k, 2)$ *blokkrendszert bisíknak nevezünk.*

Egy bisík n-edrendű bisík blokkjai $k + 2$ pontot tartalmaznak. Mivel a bisík négyzetes blokkrendszer, ezért 3.13. megjegyzés alapján $r = k$. Ezt a (3.1) egyenletbe behelyettesítve, megkapjuk a pontok számát $v = \frac{k(k-1)}{2} + 1$, ami megegyezik a blokkok számával is. A bisíkokról nem tudunk túl sokat például, hogy van-e végtelen sok. A triviális $k = 2$-n kívül $k = 3, 4, 5$-re pontosan egy, $k = 6$-ra három, $k = 9$-re négy bisík van. A $k = 11$ esetben [4] alapján pontosan 5 nem-izomorf bisíkot, $k = 13$-ra pedig csak két nem-izomorf bisíkot ismerünk. A bisíkok néhány konkrétabb példájára a negyedik fejezetben visszatérünk.

3.16. Példa A $k = 4$ bisík a Fano-sík komplementere (3.1. ábra). $\diamondsuit$

3.17. Definíció *Egy* 2-$(n^2+n+1, n+1, 1)$ *blokkrendszer egy* n*-edrendű projektív sík.*

3.18. Példa A Fano-sík (3.1.ábra) egy másodrendű projektív sík. $\diamondsuit$

3.19. Megjegyzés Nézzük a projektív sík tulajdonságait a 3.17. definíció szerint. A projektív síknak

- pontosan $v = n^2 + n + 1$ pontja van,
- a 3.6. állítás felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$b = \frac{1(n^2+n+1)(n^2+n+1-1)}{(n+1)n} = n^2+n+1,$$

  tehát $n^2 + n + 1$ darab egyenese van és 3.13. megjegyzés alapján szimmetrikus,
- egy egyenesre $k = n + 1$ darab pont illeszkedik,
- a 3.6. állítás szerint

$$r = \frac{n^2+n}{n} = n+1,$$

  tehát egy pontot $r = \frac{n^2+n}{n} = n + 1$ darab egyenes tartalmaz,
- $\lambda = 1$ miatt bármely két pontjához pontosan egy olyan egyenes található amely mindkét pontot tartalmazza
- mivel szimmetrikus, két egyeneshez pontosan $\lambda = 1$ pont létezik, amelyet mindkét egyenes tartalmaz. $\diamondsuit$

A szimmetrikus blokkrendszerek általánosítása az úgynevezett kváziszimmetrikus blokkrendszer, melyet a következőképpen definiálunk.

3.20. Definíció *Kváziszimmetrikusnak nevezzük azon blokkrendszereket, ahol létezik két paraméter:* μ_1 *illetve* μ_2*, hogy bármely két különböző blokk metszete* μ_1 *vagy* μ_2 *darab pontot tartalmaz.(*μ_1*-t és* μ_2*-t a blokkrendszer metszési számainak nevezzük.)*

3.21. Megjegyzés Minden 2-$(v, k, 1)$ blokkrendszer kváziszimmetrikus, hiszen ez esetben bármely B_1, $B_2 \in \mathbf{B}$ blokkokra $|B_1 \cap B_2| = 0$ vagy 1. $\diamondsuit$

Most nézzünk egy eljárást, mellyel négyzetes blokkrendszerekből új blokkrendszert lehet előállítani.

3.22. Definíció *Legyen* $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B})$ *egy szimmetrikus blokkrendszer, ekkor a* $\boldsymbol{D}$*-nek a* B *blokkra vonatkozó blokkreziduális rendszere* ${}^B\boldsymbol{D} = ({}^B\boldsymbol{P}, {}^B\boldsymbol{B}, \in)$*, ahol*

$${}^B\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} \setminus B;$$

$${}^B\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \setminus \{B\}.$$

3.23. Állítás *Ha* $\boldsymbol{D}$ *szimmetrikus* 2-(v, k, λ) *paraméterű blokkrendszer, akkor* ${}^B\boldsymbol{D}$ *is* 2-(v', k', λ) *blokkrendszer lesz, ahol* $v' = v - k$*,* $k' = k - \lambda$*,* $r' = r$*,* $b' = b - 1$*.*

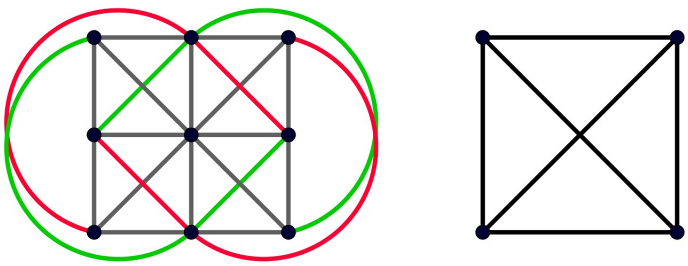
Bizonyítás. Mivel **D** minden blokkja k pontot tartalmaz, így egy pont elvételével $v' = v - k$ pontot kapunk. Szimmetrikus blokkrendszerek bármely két blokkja definíció szerint λ pontban metszik egymást, így egy blokk elvételével a maradék blokk éppen λ-val kevesebb pontot fog tartalmazni, tehát $k' = k - \lambda$. A λ paraméter nyilván nem változik. Az $r' = r$ mivel azon pontok, melyeknek a fokát csökkentette volna egyel az adott blokk elvétele, azokat a blokkal együtt elvettük. A blokkok száma nyilván $b-1$.□

Megjegyezzük, hogy az előbbiekből adódik, hogy blokkreziduálisként előálló blokkok paramétereire teljesül, hogy $k + \lambda - r = 0$. Erre még a későbbiek során visszatérünk.

3.24. Definíció *Egy* 2-$(n^2, n, 1)$ *blokkrendszer egy* n*-edrendű affin sík.*

Megjegyezzük, hogy a fenti definíció és a 3.6. állítás alapján n-edrendű affin síkra, a blokkok száma $b = n^2 + n$, a pontok foka pedig $r = n + 1$.

3.25. Példa A 3.2. ábra első blokkrendszere a másodrendű affin síkot mutatja, míg a második blokkrendszer a harmadrendű affin síkot mutatja. ♢



3.2. ábra. Az első blokkrendszer a harmadrendű affin síkot mutatja, ahol a blokkrendszer pontjait a fekete pontok mutatják, míg a blokkokat vonalak ábrázolják. A második blokkrendszer a másodrendű affin síkot mutatja reprezentálja, ahol a fekete pontok a blokkrendszer pontjai, a szakaszok pedig a blokkokat ábrázolják.

3.26. Állítás *A projektív síkból elhagyva egy blokkot és az arra illeszkedő pontokat affin síkot kapunk.*

Bizonyítás. Hagyjunk el a projektív síkból egy tetszőleges pontot, ekkor a következőket kapjuk.

- $v' = n^2 + n + 1 - k = n^2 + n + 1 - (n + 1) = n^2$,
- $k' = k - \lambda = n + 1 - 1 = n$,
- $\lambda' = 1 = \lambda$,
- $b' = \frac{\lambda' v'(v'-1)}{k'(k'-1)} = n^2 + n \Longrightarrow b' = b - 1$,
- $r' = \frac{\lambda'(v'-1)}{k'-1} = n + 1 \Longrightarrow r' = 1$. □

3.27. Példa A Fano síkból 2-$(7, 3, 1)$ egy blokk és annak pontjainak elhagyásával kapott 2-$(4, 2, 1)$ blokkrendszer a Fano sík reziduálisa, melyet a 3.2.ábra mutat.

A reziduális blokkrendszerek általánosítása az úgynevezett kvázireziduális blokkrendszer, melyet a következőképpen definiálunk.

3.28. Definíció *A 2-(v,k,λ) paraméterű blokkrendszereket melyek paramétereire teljesül, hogy $k+\lambda-r=0$ kvázireziduálisnak mondjuk. (Ekkor ez a blokkrendszer keletkezhet egy másik blokkrendszer blokkreziduálisaként.)*

3.29. Állítás *Minden affin sík kvázireziduális, sőt reziduális: egy alkalmas projektív sík blokkreziduálisa.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{D}=(\mathbf{P},\mathbf{B})$ egy n-edrendű affin sík. Az affin sík paraméterei alapján egyértelműen láthatjuk, hogy $k+\lambda-r=n+1-(n+1)=0$, így $\mathbf{D}$ kvázireziduális. A továbbiakban azt kell belátnunk, hogy $\mathbf{D}$ egy projektív sík blokkreziduálisa. A bizonyítás során $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$ blokkokat párhuzamosnak nevezzük, ha $B_1 = B_2$ vagy $|B_1 \cap B_2| = 0$. Első lépésben vezessük le a geometriából ismert párhuzamossági axióma megfelelőjét, miszerint: ha adott egy $B \in \mathbf{B}$ blokk és egy $p \in \mathbf{P}$, $p \notin B$ pont, akkor pontosan egy olyan $C \in \mathbf{B}$ blokk létezik, amelyre $p \in C$ és $|B \cap C| = 0$. Mivel az affin síkon bármely két pont pontosan egy blokkban van benne, így a B blokk tetszőleges q pontjához létezik pontosan egy $E(q)$ blokk, melyre $p, q \in E(q)$. Ha $q_1 \neq q_2 \mid q_1, q_2 \in B$ és $E(q_1) = E(q_2)$ akkor $q_1, q_2 \in E(q_1) \cap B$, ez viszont nem lehetséges, mivel $\lambda = 1$. Ebből következik, hogy $E(q) \mid q \in B$ alakú blokkból pontosan n darab megy át a p ponton. Mivel $r = n+1$, az előbbiek alapján pontosan egy olyan blokk lesz p-n keresztül, ami nem metszi B-t. Most lássuk be, hogy a párhuzamosság a blokkokon ekvivalenciareláció. A reflexivitás és szimmetrikusság triviális, így a tranzitivitást kell még belátnunk. Legyen $|B_1 \cap B_2| = 0$, $|B_2 \cap B_3| = 0$, és indirekten tegyük fel, hogy $\exists\, p \in (B_1 \cap B_3)$. Ekkor viszont a B_1 és B_3 is tartalmazza p-t, ami ellentmond a párhuzamossági axiómának. Innentől kezdve az euklideszi geometriánál megszokott módon kiegészíthetjük az affin síkunkat egy projektív síkká, melynek az ideális egyenesre (blokkra) vonatkozó blokkreziduálisa nyilván a $\mathbf{D}$ affin sík. □

A blokkrendszereket mátrixokkal is reprezentálhatjuk. Ilyen az illeszkedési mátrix, amelyet a következő képen definiálunk:

3.30. Definíció *Vegyük a 2-(v,k,λ) blokkrendszert. Soroljuk fel a pontjait: $p_1, ..., p_v$ valamint blokkjait B_1,...,B_b. A 2-(v,k,λ) blokkrendszer M illeszkedési mátrixát a következőképpen definiáljuk:*

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } p_i \in B_j, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $i = 1, ..., v$; $j = 1, ..., b$.
Ezt hívjuk $\boldsymbol{D}$ blokkrendszer egy $(0,1)$-illeszkedési mátrixának.

A fenti blokkrendszer szomszédsági mátrixa $A = MM^T$ mátrix, amely természetesen szimmetrikus. A blokkrendszer szomszédsági mátrixa az i-edik sorának j-edik eleme esetén azt számolja, hogy hány olyan blokk van, amelyre p_i illetve p_j is illeszkednek, így könnyen látható, hogy a főátlóban az egyes pontok fokai szerepelnek.

3.31. Lemma *Egy 2-(v,k,λ) paraméterű blokkrendszer szomszédsági mátrixát a következőképpen írhatjuk fel:*

$$A = MM^T = (r-\lambda)I + \lambda J. \tag{3.10}$$

3.32. Példa Nézzünk példát illeszkedési mátrixra, méghozzá a fentebb említett (3.1.ábra) Fano-sík példáján.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

Ha M egy egy $\mathbf{D}$ blokkrendszer illeszkedési mátrixa, akkor ezen blokkrendszer $\overline{\mathbf{D}}$ komplementerének illeszkedési mátrixa úgy állítható elő, hogy a 0-kat 1-esre, az 1-eseket pedig 0-ra cseréljük az eredeti mátrixban.

Nézzük meg néhány példa erejéig a Steiner rendszereket.

3.33. Definíció *Egy* 2-$(v,k,1)$ *blokkrendszert Steiner rendszernek nevezünk. Ennek speciális esetei, a* 2-$(v,3,1)$ *blokkrendszerek, melyeket Steiner hármasrendszereknek nevezünk.*

3.34. Példa A Fano sík egy 2-$(7,3,1)$ paraméterű Steiner hármasrendszer, amely egy 2-odrendű projektív sík. $\diamondsuit$

3.35. Példa A 3-adrendű affin sík (3.2. ábra) egy 2-$(9,3,1)$ paraméterű Steiner hármasrendszer. $\diamondsuit$

4. fejezet

Erősen reguláris gráfok és blokkrendszerek kapcsolata

Ebben a fejezetben az erősen reguláris gráfok és a blokkrendszerek kapcsolatát fogjuk vizsgálni és felfedezzük többek között a bisíkok, kváziszimmetrikus blokkrendszerek és az erősen reguláris gráfok közötti kapcsolatot, illetve a kvázireziduális és reziduális tulajdonságok közötti összefüggéseket bizonyos paraméterekre.

4.1. Tétel *Legyen Γ egy (v, k, λ, λ), $(\lambda = \mu)$ paraméterű erősen reguláris gráf és legyen a szomszédsági mátrixa A. Ekkor ez a mátrix ekvivalens egy négyzetes 2-(n, k, λ) blokkrendszer M illeszkedési mátrixával, azaz $A = M$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy erősen reguláris gráf szimmetrikus mátrixa szimmetrikus ($A = A^T$). (2.2.) alapján tehát a $\lambda = \mu$ behelyettesítésével felírhatjuk a következőt:

$$A^2 = AA^T = kI + \lambda A + \lambda(J - I - A) = (k - \lambda)\, I + \lambda J.$$

(3.13.) megjegyzés alapján tudjuk, hogy $r = k$. Így a 3.31. lemma alapján tudjuk, hogy az előbb kihozott egyenlet pontosan azt jelenti, hogy $A = M$ négyzetes blokkrendszer illeszkedési mátrixa. $\square$

Megjegyezzük, hogy a második fejezetben láttuk a 2.25. tételben, hogy csak csak végesen sok (v, k, λ, λ) paraméterű erősen reguláris gráf létezik.

Fogalmazzuk meg a fenti bizonyítást szemléletesen. Egy (v, k, λ, λ) paraméterű erősen reguláris gráfból (Γ), a következőképpen állíthatunk elő szimmetrikus blokkrendszert. Legyen $\mathbf{P} = V(\Gamma)$ és $\mathbf{B} = \{\Gamma(x) \mid x \in V(\Gamma)\}$. Így nyilván $|\mathbf{P}| = |\mathbf{B}|$, továbbá bármely $x, y \in V(\Gamma)$-ra $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \lambda$, mivel $\lambda = \mu$, tehát a blokkrendszerben két tetszőleges blokk metszete λ.

4.2. Tétel *Legyen Γ egy $(v, k, \lambda, \lambda{+}2)$, $(\mu = \lambda{+}2)$ paraméterű erősen reguláris gráf és legyen a szomszédsági mátrixa A. Ekkor az $M = A + I$ egy négyzetes 2-$(n, k+1, \lambda+2)$ blokkrendszer illeszkedési mátrixa.*

Bizonyítás. Mivel tudjuk, hogy erősen reguláris gráf szomszédsági mátrixa szimmetrikus és $M = A + I$, így M is szimmetrikus, tehát $M = M^T$. Ezek alapján, a megfelelő paraméterek alkalmazásával, az előzőekhez hasonlóan felírhatjuk a következőket:

$$MM^T = (A + I)^2 = kI + \lambda A + (\lambda + 2)\,(J - I - A) = (k - \lambda - 1)\, I + (\lambda + 2)\, J.$$

Ezek alapján pedig az állítás adódik. $\square$

Fogalmazzuk meg a fenti bizonyítást szemléletesen. Egy $(v, k, \lambda, \lambda+2)$ paraméterű erősen reguláris gráfból (Γ), a következőképpen állíthatunk elő szimmetrikus blokkrendszert. Legyen $\mathbf{P} = V(\Gamma)$ és $\mathbf{B} = \{\Gamma(x) \cup \{x\} \mid x \in V(\Gamma)\}$. Ekkor nyilván $|\mathbf{P}| = |\mathbf{B}|$. Tekintsük az $x, y \in V(\Gamma)$ pontokat melyek legyenek szomszédosak és legyen $B_1 = \{\Gamma(x) \cup \{x\}\}$ és $B_2 = \{\Gamma(y) \cup \{y\}\}$. Ekkor $|B_1 \cap B_2| = \lambda + 2$. Legyen $v \in V(\Gamma)$ és $\{x, v\} \notin E(\Gamma)$, továbbá $B_3 = \{\Gamma(v) \cup \{v\}\}$. Ekkor $|B_1 \cap B_3| = \mu = \lambda + 2$.

Nézzünk néhány példát az előbbi két tételre, ahol rögtön az erősen reguláris gráfok és a bisíkok kapcsolatát is tárgyaljuk. A bisík mint említettük $\lambda = 2$ paraméterű négyzetes blokkrendszer. Arról is beszéltünk, hogy csak korlátozott számú bisíkot ismerünk. Ezek közül most a negyedrendű bisíkokat tekintjük, és a fenti tételek alapján hozzárendelhető erősen reguláris gráfokat. Arról is volt szó korábban, hogy pontosan három darab negyedrendű bisík van. Nézzük először a $\lambda = \mu$ esetet. Korábban említettük $L_2(4)$ négyzetháló gráfot (2.8. példa) illetve Shrikhande-gráfot (2.17. példa), melyek azonos, $(16, 6, 2, 2)$ parmaéterű nem-izomorf erősen reguláris gráfok. Ezekből állíthatunk elő nekik megfelelő, két darab 2-$(16, 6, 2)$, nem-izomorf negyedrendű bisíkot. A $\mu = \lambda + 2$ esetben az szintén már korábban bevezetett Clebsch-gráf (2.9. példa) lesz az a gráf, melyből 2-$(16, 6, 2)$ negyedrendű bisíkot állíthatunk elő.

A harmadik fejezetben megismerkedtünk reziduális blokkrendszerek témakörével, ahol egy négyzetes blokkrendszerből egy blokk és annak pontjai elhagyásával egy új blokkrendszert kaptunk, ezt nevezetük egy adott (négyzetes) blokkrendszer blokkreziduálisának, illetve akkor neveztünk egy blokkrendszert kvázireziduális blokkrendszernek, ha paramétereire teljesül a $k + \lambda - r = 0$ összefüggés. Ennek a témakörnek a fő kérdése az volt, hogy mikor igaz egy kvázireziduális blokkrendszerre, hogy valamely négyzetes blokkrendszernek blokkreziduálisa. Most ezt a kérdést a λ paraméter néhány értékeire nézzük meg. Bizonyítható (de a dolgozatban nem bizonyítjuk), hogy a $\lambda = 1$ esetben csak az affin síkra igaz, hogy kvázireziduális és egy négyzetes blokkrendszernek (projektív síknak, mint azt korábban láttuk) a blokkreziduálisa. A $\lambda = 2$ esetben minden kvázireziduális blokkrendszer reziduális, ezt fogja kimondani a Hall-Connor tétel, melyet ebben a fejezetben bizonyítani fogunk. A következő példában azt mutatjuk meg, hogy $\lambda = 3$ esetben ismerünk olyan blokkrendszert, amely kvázireziduális, de nem reziduális.

4.3. Példa A [1] jegyzetben megtalálható, Bhattacharya-tól származó példa a következő. Legyen $\mathbf{D} = (\mathbf{P}, \mathbf{B})$ blokkrendszer, ahol $\mathbf{P} = \{1, 2, ...16\}$, a blokkok pedig felsorolva a következőek:

$B_1 = \{1, 2, 7, 8, 14, 15\}$	$B_9 = \{4, 5, 7, 8, 12, 15\}$	$B_{17} = \{1, 2, 3, 11, 12, 15\}$
$B_2 = \{3, 5, 7, 8, 11, 13\}$	$B_{10} = \{2, 4, 9, 10, 11, 13\}$	$B_{18} = \{2, 6, 7, 9, 14, 16\}$
$B_3 = \{2, 3, 8, 9, 13, 16\}$	$B_{11} = \{3, 6, 7, 10, 11, 14\}$	$B_{19} = \{1, 4, 5, 13, 14, 16\}$
$B_4 = \{3, 5, 8, 9, 12, 14\}$	$B_{12} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$B_{20} = \{2, 5, 6, 11, 12, 16\}$
$B_5 = \{1, 6, 7, 9, 12, 13\}$	$B_{13} = \{1, 4, 7, 8, 11, 16\}$	$B_{21} = \{1, 3, 9, 10, 15, 16\}$
$B_6 = \{2, 5, 7, 10, 13, 15\}$	$B_{14} = \{2, 4, 8, 10, 12, 14\}$	$B_{22} = \{4, 6, 8, 9, 11, 15\}$
$B_7 = \{3, 4, 7, 10, 12, 16\}$	$B_{15} = \{5, 6, 8, 10, 15, 16\}$	$B_{23} = \{1, 5, 9, 10, 11, 14\}$
$B_8 = \{3, 4, 6, 13, 14, 15\}$	$B_{16} = \{1, 6, 8, 10, 12, 13\}$	$B_{24} = \{11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

A fenti blokkok egy 2-$(16, 6, 3)$ blokkrendszert alkotnak, a 3.6. állítás alapján az is könnyen látható, hogy $\mathbf{D}$ kvázireziduális blokkrendszer, mivel $r = 9 = 6 + 3$. A $\mathbf{D}$

blokkrendszernek van olyan blokkpárja, amelyek egymást több mint λ pontban metszik; ilyenek a B_5 és B_{16}, melyek 4 pontban metszik egymást. Így mivel nem igaz, hogy bármely két blokk λ pontban metszi egymást, **D** nem lehet reziduális blokkrendszer.$\diamondsuit$

A dolgozatban a $\lambda = 2$ esetet vizsgáljuk meg közelebbről, amely során végső célunk a Hall-Connor tétel kimondása és bizonyítása, melyhez először a következő tételek kimondása és értelmezése nyújt segítséget.

4.4. Tétel *Legyen* $\boldsymbol{D}$ *egy* 2-$(v, k, 2)$ *paraméterű kvázireziduális blokkrendszer. Ekkor* $\boldsymbol{D}$ *paraméterei az alábbiak:*

$$v = \frac{k(k+1)}{2},\ r = k+2,\ \lambda = 2,\ b = \frac{(k+1)(k+2)}{2}\ ,\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2,$$

ahol $\mu_1 = 1$*, illetve* $\mu_2 = 2$ *azt jelöli, hogy* $\boldsymbol{D}$*-ben bármely két blokk egy vagy két pontban metszi egymást. Továbbá a* $\boldsymbol{D}$ *blokkrendszer egy tetszőleges blokkját pontosan* $2k$ *darab blokk metsz* 1 *pontban és pontosan* $\frac{1}{2}k(k-1)$ *darab blokk metsz* 2 *pontban.*

Bizonyítás. Először lássuk röviden a paraméterekre vonatkozó állítás bizonyítását. A kvázireziduális blokkrendszer definíciójából (3.28. definíció) adódik, hogy $r = k+2$, ahol $\lambda = 2$. A 3.6. állítás egyenleteibe való behelyettesítéssel (felhasználva az eddigieket) azonnal megkapjuk a többi paramétert. Az állítás második részének bizonyításához az úgynevezett variancia trükköt (négyzetes leszámlálást) fogjuk használni, melyet már fentebb láttunk. Rögzítsünk egy B blokkot. Legyen n_i azon blokkok száma, amelyek pontosan i pontban metszik a B blokkot ($i = 0,\ 1,\ ...k$). Első lépésben a **D** blokkrendszer blokkjait számoljuk meg. Adjuk össze a blokkokat azon tulajdonságuk alapján, hogy hány darab pontban metszik B blokkot. Másrészről tudjuk, hogy B rögzített blokkon kívül $b-1$ blokk található **D**-ben. Ezek alapján felírhatjuk a következőt:

$$\sum_i n_i = b - 1 = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) - 1. \tag{4.1}$$

A következő lépésben számoljuk össze a (p, L) zászlókat, ahol $p \in B$ és $L \neq B$, B blokk pontjai szerint.

$$\sum_i i n_i = k(r-1) = k(k+1). \tag{4.2}$$

Most számoljuk meg kétféleképpen a $(p,\ q\ ,L)$ pontpár-blokk párokat, ahol $p, q \in L \cap B$ és $L \neq B$.

$$\sum_i i(i-1)n_i = k(k-1)(\lambda - 1) = k(k-1) \tag{4.3}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\sum_i i^2 n_i = \sum i(i-1)n_i + \sum_i n_i = k(k-1) + k(k+1) = 2k^2,$$

azt kapjuk, hogy

$$\sum_i (i-1)(i-2)n_i = \sum_i i^2 n_i - 3\sum_i i n_i + 2\sum n_i =$$

$$2k^2 - 3k(k+1) + 2\left(\frac{1}{2}(k+1)(k+2) - 1\right) = 0.$$

A (4.3) egyenlet alapján:

$$n_2 = \frac{1}{2}k(k-1)$$

amit a (4.2) egyenletbe behelyettesítve, megkapjuk n_1-et:

$$n_1 = 2k.$$

□

4.5. Megjegyzés A fenti tételben direkt használtuk a μ_1 illetve μ_2 megnevezéseket, hiszen nyilvánvaló a tétel alapján, hogy 2-$(v, k, 2)$ kvázireziduális blokkrendszer kváziszimmetrikus az 1 illetve 2 metszési számokkal ♢

A következő tétel egy olyan konstrukciót mutat, melynek segítségével kváziszimmetrikus blokkrendszerből erősen reguláris gráfot lehet előállítani.

4.6. Tétel *Legyen* $\boldsymbol{D}$ *egy* 2-(v, k, λ) *paraméterű kváziszimmetrikus blokkrendszer* μ_1 *illetve* μ_2 *metszési számokkal. Legyen* Γ *gráf csúcsainak halmaza* $\boldsymbol{D}$ *blokkjainak halmaza és két csúcsot pontosan akkor kötünk össze, ha megfelelő blokkok éppen* μ_2 *pontban metszik egymást. Ekkor* Γ *egy* $\left(\frac{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha-1)}{\gamma} + \beta + \gamma + 1, \beta + \gamma, \alpha + \gamma, \gamma\right)$ *paraméterű erősen reguláris gráf, ahol*

$$\alpha = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\left[(r-\lambda) - 2\left(k - \mu_1\right)\right],$$

$$\beta = \frac{1}{\left(\mu_2 - \mu_1\right)^2}\left[(r-\lambda)\left(k-\mu_1\right) - \left(k-\mu_1\right)^2\right],$$

$$\gamma = \frac{1}{\left(\mu_2 - \mu_1\right)^2}\left((r-\lambda)\mu_1 + \lambda k^2 - 2\mu_1 r k + \mu_1^2 b\right).$$

Bizonyítás. Legyen a $\boldsymbol{D}$ blokkrendszer illeszkedési mátrixa M, Γ gráf szomszédsági mátrixa pedig A. 2.20. megjegyzés alapján azt szeretnénk belátni, hogy A^2 előáll A, I, J kombinációjaként. Tegyük fel, hogy $\mu_2 > \mu_1$ (ellenkező esetben áttérhetünk a komplementerre). Gondoljuk először végig, hogyan áll elő az A szomszédsági mátrix. $M^T M$ mátrix az a mátrix, amelynek az $m_{i,j}$ eleme azt számolja, hogy B_i és B_j blokkok hány pontban metszik egymást, így nyilván $M^T M$ főátlójában k-k szerepelnek, azon kívül pedig μ_1 vagy μ_2 attól függően, hogy az adott két blokkoknak hány közös pontjuk van. Ez a mátrix jó lesz nekünk, hiszen ebből megkaphatjuk az A szomszédsági mátrixot, ha a k-k és a μ_1-ek helyére 0-kat, a μ_2-k helyére pedig 1-eket írunk. Ezt mátrixok segítségével a következőképpen írhatjuk fel:

$$A = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\left(M^T M - \mu_1 - \left(k - \mu_1\right) I\right),$$

ahol $M^T M$, I és J $b \times b$-es mátrixok.

A 3.31. lemma alapján tudjuk, hogy $MM^T = (r-\lambda) I + \lambda J$, továbbá könnyen látható, hogy $M^T J = kJ$ és $JM = kJ$, így

$$\left(M^T M\right)^2 = M^T\left((r-\lambda)I + \lambda J\right)M = (r-\lambda)M^T M + \lambda k^2 J.$$

Ezek alapján:

$$\left(\mu_2-\mu_1\right)^2 A^2 =$$

$$= \left(M^TM\right)^2 + \mu_1^2 bJ + \left(k-\mu_1\right)^2 I - \mu_1\left(M^TMJ + JM^TM\right) - 2\left(k-\mu_1\right)M^TM + 2\mu_1\left(k-\mu_1\right)J.$$

Mivel

$$M^TMJ = M^TrJ = rM^TJ = rkJ \text{ és } JM^TM = rJM = rkJ \implies M^TMJ = rkJ = JM^TM,$$

$$\left(M^TM\right) = (r-\lambda)M^TM + \lambda k^2 J,$$

$$\text{és } M^TM = \left(\mu_2-\mu_1\right)A + \mu_1 J + \left(k-\mu_1\right)I,$$

ezért megállapíthatjuk, hogy A^2 előáll A, I és J kombinációjából.

$$A^2 = \alpha A + \beta I + \gamma J,$$

ahol

$$\alpha = \frac{1}{\mu_2-\mu_1}\left[(r-\lambda) - 2\left(k-\mu_1\right)\right],$$

$$\beta = \frac{1}{\left(\mu_2-\mu_1\right)^2}\left[(r-\lambda)\left(k-\mu_1\right) - \left(k-\mu_1\right)^2\right],$$

$$\gamma = \frac{1}{\left(\mu_2-\mu_1\right)^2}\left((r-\lambda)\mu_1 + \lambda k^2 - 2\mu_1 rk + \mu_1^2 b\right).$$

A (2.2) egyenlet alapján a következőt írhatjuk fel:

$$A^2 = k'I + \lambda' A + \mu'\left(J-I-A\right) = \left(\lambda'-\mu'\right)A + \left(k'-\mu'\right)I + \mu' J,$$

ahol a blokkrendszerek paramétereitől való könnyebb megkülönböztethetőség végett a Γ paramétereit k', λ' és μ'-vel jelöltük.

Tehát ezek alapján:

$$\mu' = \gamma,$$

$$k' = \beta + \gamma,$$

$$\lambda' = \alpha + \gamma.$$

Ezeket behelyettesítve a 2.5. állításba megkapjuk, hogy Γ pontjainak száma (n):

$$n = \frac{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha-1)}{\gamma} + \beta + \gamma + 1.$$

Ezzel beláttuk, hogy Γ egy $\left(\frac{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha-1)}{\gamma} + \beta + \gamma + 1, \beta + \gamma, \alpha + \gamma, \gamma\right)$ paraméterű erősen reguláris gráf. □

Megjegyezzük, hogy a fenti tételben leírt Γ gráfot nevezzük a blokkrendszer blokkgráfjának.

4.7. Korollárium ([1], 8.3.10.) *A Steiner-rendszer blokkgráfja erősen reguláris.*

Mielőtt rátérnék a Hall-Connor tételre, először tekintsük a következő trianguláris gráfokra vonatkozó tételt, melyre a Hall-Connor tétel bizonyítása során szükségünk lesz, és amely azt mondja ki, hogy a $T(m)$ trianguláris gráfot $m > 8$ esetén paraméterei meghatározzák.

4.8. Tétel ([1], 8.3.12. tétel) *Legyen Γ egy*

$$\left(\binom{m}{2},\, 2(m-2),\, m-2,\, 4\right)$$

paraméterű erősen reguláris gráf. Ekkor $m > 8$ estén Γ izomorf a trianguláris gráffal.

Bizonyítás. Rögzítsünk Γ gráfban egy x pontot. Vegyük $\Gamma(x)$-et. Ekkor kapunk egy $2(m-2)$ csúcsú, $m-2$ reguláris gráfot. Első lépésben azt szeretnénk meghatározni, hogy két nemszomszédos pontnak hány közös szomszédja van. Legyen $y, z \in \Gamma(x)$ és $\{x, y\} \notin E(\Gamma(x))$. Közös szomszédaik számát jelöljük f-fel. Mivel x közös szomszédjuk, de nincs benne $\Gamma(x)$-ben ezért $f \leq 3$. Azon csúcsok száma, melyek y-nal össze vannak kötve, de z-vel nincsenek $m-2-f$. Ugyanez igaz fordítva is. Így összesen $(2(m-2)-2-f-2(m-2-f)) = f-2$ olyan csúcs van amelyeknek sem y sem z nemszomszédos. Tehát $f \geq 2$, így f csak 2 vagy 3 lehet $\Gamma(x)$-ben. Nézzük az $f = 3$ esetet. Vegyünk egy $w \in \Gamma(x)$ pontot amelynek sem y sem z nem szomszédja. Mivel $f = 3$, ezért w-nek az összes szomszédja össze lesz kötve y-nal vagy z-vel. A fentiek alapján w-nek is $m-2$ szomszédja van, tehát $m-2 \leq 3+3$ ami viszont $m > 8$ miatt ellentmondás. Tehát $\Gamma(x)$-ben $f = 2$. Mivel $f = 2$ és két nemszomszédos pont közös szomszédainak száma $\Gamma(x)$-ben pontosan $f-2$, ezért nyilván két nemszomszédos pontnak nincs közös szomszédja $\Gamma(x)$-ben. Ebből következik, hogy $\overline{\Gamma}(x)$ gráf nem tartalmaz háromszöget. Lássuk be, hogy $\overline{\Gamma}(x) = \Delta$ páros gráf. Tudjuk Δ gráfról, hogy $2(m-2)$ csúcsú, $m-3$ reguláris és háromszögmentes gráf. Vizsgáljuk Δ-át $\alpha(\Delta)$ (adott gráfban található maximális független pontok halmaza) szerint.

- Mivel Δ háromszögmentes és $m-3$ reguláris, tudjuk, hogy $\alpha(\Delta) \geq m-3$.

- Tegyük fel, hogy $\alpha(\Delta) \geq m-1$. Vegyünk Δ-ban $m-1$ darab független pontot, melyek ponthalmazát nevezzük A-nak, és rögzítsünk egy $p \in A$ pontot. Mivel A pontjai között a Δ-ban nem halad él, ezért p szomszédai A-n kívül találhatóak. Mivel Δ gráf $m-3$ reguláris, így A ponthalmaz minden pontja ugyanazokkal a pontokkal van összekötve, mint p (hiszen $(m-1)+(m-3) = 2(m-2)$). Ekkor viszont p bármely szomszédjának fokszáma $m-1$ lenne, ami ellentmondás, tehát beláttuk, hogy $\alpha(\Delta) < m-1$.

- Tegyük fel, hogy $\alpha(\Delta) = m-3$. Legyen u és v két szomszédos csúcs Δ-ban, és legyen A az u, B pedig a v szomszédainak halmaza. Ekkor $|A| = |B| = m-3$, és A és B is független ponthalmazok, a háromszögmentesség miatt. Δ-ban még két pont van, w és y. Mivel $\alpha(\Delta) = m-3$, a w és y pontoknak kell, hogy legyen szomszédja A-ban is, meg B-ben is. Tekintsük w-nek és u-nak egy közös szomszédját, z-t ($\{u, w\} \notin E(\Delta)$). Ekkor z-nek legalább $m-3-2 = m-5$ szomszédja van B-ben (hiszen $\{v, u\} \notin E(\Delta)$). A háromszögmentesség miatt ezek w-nek nem szomszédai. Így w-nek legfeljebb 2 szomszédja lehet B-ben.

Hasonlóképpen meggondolva w-nek 2 szomszédja lehet A-ban. Így $\deg(w) \leq 5$, viszont $\deg(w) = m - 3 > 5$, hiszen $m > 8$, így ellentmondásra jutottunk, tehát $\alpha(\Delta) \neq m - 3$.

Tehát, mivel $m - 3 < \alpha(\Delta) < m - 1$, így $\alpha(\Delta) = m - 2$. Legyen A egy $m - 2$ elemű független csúcshalmaz Δ-ban. Vegyünk egy $p \in A$ pontot. A $\Delta(p)$ pontok nyilván függetlenek mivel a gráf háromszögmentes. Tekintsük a $q \in V(\Delta) \setminus (A \cup \Delta(p))$ pontot. A q pontnak kell, hogy legyen szomszédja A-ban, különben $\alpha(\Delta) = m - 1$, illetve ha $\Delta(q) \subset A$, akkor Δ páros gráf. Indirekten tegyük fel, hogy $\exists\, v \in \Delta(p) \mid \{q, v\} \in E(\Delta)$, és legyen $w \in A$, szomszédos q-val. Ekkor $\Delta(w) \subset \Delta(p) \setminus \{v\}$, a háromszögmentesség miatt. Ebből következik, hogy q-nak v-n kívül nem lehet szomszédja $\Delta(p)$-ben, különben háromszögünk lenne az Δ-ban, tehát q-nak van w-n kívül $m-4$ szomszédja A-ban. Ekkor egyértelműen lesznek q-nak és v-nek közös szomszédai A-ban, így nem teljesül a háromszögmentesség, tehát ellentmondásra jutottunk. Ezzel beláttuk, hogy Δ páros gráf. Ebből következik, hogy $\Gamma(x)$ tartalmaz 2 darab $m - 2$ méretű klikket (olyan részgráf, hogy bármely két pontja szomszédos). Vegyük hozzá $\Gamma(x)$-hez x-et is, így minden pont benne lesz két darab $m - 1$ méretű klikkben, továbbá minden él benne lesz egy $m - 1$ méretű klikkben. Számoljuk meg, hány darab $m - 1$ méretű klikk van Γ-ban. Minden ponthoz tartozik két darab $m - 1$ méretű klikk, $|V(\Gamma)| = \binom{m}{2}$, tehát az $m - 1$ méretű klikkek száma $2\binom{m}{2}/(m - 1) = m$, hiszen minden $m - 1$ méretű klikket $m - 1$-szer számoltunk, így még le kellett osztani $m - 1$-gyel. Nézzük meg, hogy két tetszőleges $m - 1$ méretű klikk hány pontban metszik egymást. Vegyünk egy tetszőleges x pontot és jelöljük az egyik $m - 1$ nagyságú klikkjét K-val, és vegyünk egy $s \in K_1$ pontot, melynek két $m - 1$ nagyságú klikkje legyen K_2 és K_3, ahol $x \in K_2$, tehát nyilván $K_1 = K_2$, így $K_1 \cap K_3 = 1$. Legyen $s \notin K_1 \cup K_2$ és jelöljük az s-hez tartozó két $m - 1$ nagyságú klikket K_4-gyel és K_5-tel. Tudjuk, hogy x-nek és s-nek 4 közös szomszédja van. Tekintsünk ezek közül egy t közös szomszédot. Nyilván $t \in K_1$ és $t \in K_4$ (vagy $t \in K_2$ és $t \in K_5$). Mivel $\{x, s\} \notin E(\Gamma)$, ezért azt is látjuk, hogy x és s a t két külön klikkjében szerepelnek, tehát rögtön adódik, hogy K_1 és K_4 (vagy K_2 és K_5) éppen a t-hez tartozó két darab klikk, így $K_1 \cap K_4 = 1$ (vagy $K_2 \cap K_5 = 1$). Ezzel beláttuk, hogy Γ bármely két $m - 1$ nagyságú klikkje pontosan egy pontban metszik egymást.
Ha az $m - 1$ méretű klikkeket vesszük pontoknak és minden csúcshoz hozzárendeljük az őt tartalmazó két klikket mint blokkot, akkor egy 2-$(m, 2, 1)$ blokkrendszert kapunk. Ekkor éppen pontpárok alkotják a blokkrendszert, így a 2-$(m, 2, 1)$ blokkrendszer megadja az izomorfizmust Γ gráf és trianguláris gráf között. □

4.9. Megjegyzés Bár itt nem bizonyítjuk, fontos megjegyezni, hogy a trianguláris gráfokat $m < 8$-ra is meghatározzák paraméterei, tehát csak $m = 8$ esetben nem határozzák meg paraméterei a trianguláris gráfot. ♢

Most pedig térjünk rá már többször említett Hall-Connor tételre.

4.10. Tétel *(Hall-Connor) Tetszőleges $\boldsymbol{D}$ 2-$(v, k, 2)$ paraméterű kvázireziduális blokkrendszer reziduális, ha $k \neq 6$.*

Bizonyítás. A 4.4. tétel alapján a szóban forgó **D** blokkrendszer paraméterei:

$$v = \frac{k(k + 1)}{2},\ r = k + 2,\ \lambda = 2,\ b = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

A blokkok a 4.4. tétel alapján 1 vagy 2 pontban metszik egymást,tehát a 4.6. tétel szerint ennek a **D** kvázireziduális blokkrendszernek a Γ blokkgráfja egy erősen reguláris gráf. A Γ gráf paramétereit jelöljük a blokkrendszer paramétereitől való könnyebb megkülönböztetés kedvéért n-nel, k'-vel, λ'-vel és μ'-vel. Ekkor a gráf paraméterei:

$$\mu' = \gamma = \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)^2}\left((r-\lambda)\mu_1 + \lambda k^2 - 2\mu_1 rk + \mu_1^2 b\right) =$$

$$= \frac{1}{1}\left((r-2)2 + \lambda(r-2)^2 - 2\cdot 2r(r-2) + 2^2\frac{1}{2}r(r-1)\right) = 4,$$

$$\lambda' = \alpha + \gamma = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\left[(r-\lambda) - 2(k-\mu_1)\right] = \frac{1}{-1}\left[(r-2) - 2(r-2-2)\right] + 4 = r-2,$$

$$k' = \beta + \gamma = \frac{1}{-1}\left[(r-\lambda)(k-\mu_1) - (k-\mu_1)^2\right] + 4 = 2(r-2),$$

$$n = \frac{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha-1)}{\gamma} + \beta + \gamma + 1 = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Tehát Γ egy $(\frac{r(r-1)}{2}, 2(r-2), r-2, 4)$ paraméterű erősen reguláris gráf. A 4.8. tétel és a 4.9. megjegyzés alapján $r \neq 8$ a $T(r)$ trianguláris gráfot paraméterei meghatározzák, így $r \neq 8$ esetén következik, hogy Γ izomorf $T(r)$ trianguláris gráffal. Ezek alapján elnevezhetjük $\mathbf{D}$ blokkjait az $S = \{1, 2, ...r\}$ két elemű részhalmazainak úgy, hogy két blokk pontosan akkor metszi egymást 1 pontban, ha a nekik megfelelő halmazok is 1 pontban metszik egymást. Bővítsük ezt a $\mathbf{D}$-t. Vegyük hozzá $\mathbf{D}$-hez S elmeit, mint új pontokat, ahol a blokkok pontjaihoz vegyük hozzá a blokkot indexelő két elemű halmaz elemeit, a blokkokhoz pedig S-t mint blokkot. Nézzük meg, hogy mit kapunk. Az új blokkok $k' = k+2$ pontot tartalmaznak, továbbá $v' = v + r = v + k'$, $b' = b + 1 = v'$, $r' = r = k+2$, illetve bármely két blokk pontosan 2 pontban metszi egymást (hiszen ha eredetileg egy pontban metszették egymást akkor a nekik megfelelő halmazok is metszették egymást egy adott pontban, és éppen ennek az elemnek megfelelő pont kerül hozzá a két halmazhoz a bővítés során). Ezt a kibővített halmazrendszert nevezzük $\mathbf{D}' = (\mathbf{P}', \mathbf{B}')$-nek. Azt akarjuk belátni, hogy ez is blokkrendszer. Az egyetlen kérdés itt az, hogy vajon bármely két pont pontosan két blokkban szerepel-e. Egy $p \in \mathbf{P}'$ pontra jelölje $B'(p)$ a p-re illeszkedő $\mathbf{B}'$-beli pontok halmazát. Tekintsük azt a $\mathbf{D}^* = (\mathbf{P}^*, \mathbf{B}^*)$ halmazrendszert, melyre $\mathbf{P}^* = \mathbf{B}'$ (azaz pontjai a $\mathbf{D}'$ blokkjai), és $\mathbf{B}^* = \{B'(p) \mid p \in \mathbf{P}'\}$ (azaz $\mathbf{D}'$ pontjaiból készítünk blokkokat). Mivel $\mathbf{D}'$-ben bármely két blokk pontosan két pontban metszette egymást, adódik, hogy $\mathbf{D}^*$-ban bármely két pont pontosan két blokkban van benne. Nyilván $\mathbf{B}^*$ minden blokkja azonos méretű (éppen r), tehát $\mathbf{D}^*$ egy blokkrendszer. Mivel $|\mathbf{P}^*| = |\mathbf{B}^*| = v'$, a 3.14. tétel alapján $\mathbf{D}^*$ egy négyzetes blokkrendszer, tehát bármely két blokk éppen $\lambda'' = 2$ pontban metszik egymást. Ekkor nyilván $\lambda' = 2$, ebből pedig nyilvánvaló, hogy a $\mathbf{D}$ bővítésével egy négyzetes blokkrendszert kaptunk, amelynek 3.22. definíció alapján $\mathbf{D}$ az S-re vonatkozó blokk-reziduálisa. Ezzel az tételt beláttuk. □

4.11. Megjegyzés Mivel $r = 8$ esetén a $T(r)$ trianguláris gráfot paraméterei nem határozzák meg ezért a Hall Connor tételben kizártuk a $k = 6$ esetet. Connor megmutatta, hogy nem létezik 2-$(21, 6, 2)$ paraméterű blokkrendszer, így nem szükséges a $k \neq 6$ feltétel. ♢

Irodalomjegyzék

[1] Szőnyi Tamás, *Szimmetrius struktúrák.* jegyzet, 2013.

[2] Andries E. Brouwer, Willem H. Haemers, *Spectra of graphs* springer, 2011.

[3] Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba, *A számítástudomány alapjai* Typotex, Budapest, 2006.

[4] Petteri Kaski, Patric R. J. Östergård, "There are exactly five biplanes with k = 11". *Journal of Combinatorial Designs, Volume 16, Issue 2, Pages 117–127.* Wiley Periodicals, Inc., 2008.

[5] Robin Wilson *The Early History of Block Designs* Kiadó, 2007.

[6] Elizabeth Lane-Harvard *New Constructions of Strongly Regular Graphs* Dissertation, 2014.

[7] http://mathworld.wolfram.com/Degree-DiameterProblem.html
(letöltés: 2014. december)

[8] http://www.bethlen.hu/matek/mathist/forras/Graf_fogalma.htm
(letöltés: 2014. december)

[9] F. De Clerck, Gy. Károlyi, M.J. de Resmini *Combinatorial structures* Eötvös Loránd University, Budapest, 1993.