Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Szakdolgozat
Matematika BSc

Generátorfüggvények a kombinatorikában

írta
Basa Renáta

Témavezető: Szőnyi Tamás
Számítógéptudományi Tanszék

2016. május 27.

0.1. Bevezetés

Általános- és középiskolás koromban a kombinatorika volt a kedvencem, ehhez az egyetemen először a véges matematika, majd az analízis csatlakozott. Nagy lendület vitt előre a szakdolgozat megírásánál, csakúgy, mint az elmúlt években az egyetemen: szerettem csinálni.

Az előbbi témák megnevezésével fordultam Szőnyi Tamás tanár úrhoz, aki némi beszélgetés, egyeztetés után ajánlotta nekem a generátorfüggvényeket.

Szakdolgozatom első fejezetében egy összefoglaló található, az analízisből és véges matematikából szerzett tudás néhány eleme, illetve a generátorfüggvényekkel való műveletek, alkalmazhatóság bevezetése. Ezek ismeretét nélkülözhetetlennek tartom a további fejezetek tárgyalásához.

A második fejezetben ismert, nevezetes sorozatokat vizsgálunk: megnézzük, hogy milyen kombinatorikai probléma megoldásaként jutunk el a rekurzióig, majd az explicit alak meghatározásához segítségül hívjuk a generátorfüggvényeket.

A harmadik, alkalmazás címet viselő részben pedig a Snake-oil módszer részletes ismertetése következik. A módszer az én véleményem szerint egyszerű, de nagyszerű: elsőre talán bonyolultnak tűnő feladatokra képes érthető, átlátható megoldást adni.

Mindezért szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szőnyi Tamás tanár úrnak, aki végig nagyon hasznos tanácsokkal látott el, kedvesen terelte, inspirálta a munkámat. Köszönöm neki ezt a témaötletet is, örülök, hogy a több, számomra érdekes témakört össze tudtuk kapcsolni ebben a dolgozatban.
Szeretném kiemelni barátom, Ádám támogatását, aki nem csak lelkileg állt mellettem, hanem matematikailag is: sokszor hosszú estéket virrasztott velem, hogy átnézze az éppen befejezett fejezeteket.
Köszönöm családomnak, barátaimnak a kitartásukat és türelmüket, annak ellenére is, hogy időnként kevesebbet tudtunk találkozni. Szerencsésnek érzem magam, hogy ennyi kedves ember segítette e szakdolgozat elkészülését.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Generátorfüggvények és lineáris rekurziók

1.1. A generátorfüggvények

A fejezet célja, hogy felépítse a generátorfüggvény fogalmát, hogy az a későbbiekben segítségünkre legyen a feladatok megoldása során. Ennek további tárgyalása megtalálható az [1] és [2] könyvekben.

Alapfogalmak

1.1.1. Definíció (Generátorfüggvény). *Egy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatnak a formális hatványsora a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ összeg. Ezt a sorozat generátorfüggvényének is nevezzük.*

Látjuk, hogy egy sorozatnak a generátorfüggvénye így az a hatványsor, amiben az x^i-hez tartozó együttható éppen a sorozatunk a_i. tagja. Az összegzés itt $k \geq 0$-tól indul, ahol $k \in \mathbb{N}$, de néha szükségünk lesz az egész számokra való kiterjesztésre. Ezt a legegyszerűbben úgy tehetjük meg, hogy a sorozat $k < 0$ tagjait 0-nak definiáljuk.
Két formális hatványsor (generátorfüggvény), legyenek ezek rendre
$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ akkor és csak akkor egyenlőek, ha $\forall i = 1, 2, 3 \ldots$-re teljesül, hogy $a_i = b_i$.

A következő néhány definícióhoz feltesszük, hogy $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $G(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ generátorfüggvények.

1.1.2. Definíció (Összeadás). *Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$\alpha F(x) + \beta G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k$$

1.1.3. Definíció (Eltolás). *Tegyük fel, hogy az eredeti sorozatunkat szeretnénk m hellyel jobbra eltolni, azaz a $\underbrace{0, \ldots, 0}_{m\ db}, a_1, \ldots$ sorozat generátorfüggvényét ke-*

ressük. Ezt úgy kapjuk meg az $F(x)$-ből, hogy beszorozzuk x^m-nel:

$$x^m F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} x^k$$

A balra eltolás hasonlóan történik, ott osztanunk kell.

1.1.4. Definíció (Differenciálás és integrálás). *Az*

$$F'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

illetve,

$$\int F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k$$

Előfordul, hogy egy sorozatnak a generátorfüggvénye bonyolult, például $n \to \infty$ esetén gyorsan növő sorozatoknál. Ilyenkor érdemesebb a sorozat exponenciális generátorfüggvényét használni, mely a következő:

1.1.5. Definíció (Exponenciális generátorfüggvény). *Az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozat exponenciális generátorfüggvényének nevezzük a $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ hatványsort.*

Az exponenciális generátorfüggvényre vonatkozó műveletek áttekintéséhez legyen adott a következőekben $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ és $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$.

1.1.6. Definíció (Eltolás és differenciálás).

$$F(x)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^k}{k!}$$

Tehát a differenciálással az 1-gyel balra eltolt sorozat exponenciális generátorfüggvényét kapjuk.

1.1.7. Definíció (Eltolás és integrálás).

$$\int F(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^n}{n!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1} \frac{x^k}{k!}$$

Így az integrálással az 1-gyel jobbra eltolt sorozat exponenciális generátorfüggvényét kapjuk.

1.2. Analízis összefoglaló

Ebben a fejezetben néhány Analízis órákon tanult, a szakdolgozatban később felhasználásra kerülő tételeket, definíciókat foglalunk össze, melyek részletesebben megtalálhatóak a [3] és [4] könyvekben.

1.2.1. Definíció. *$c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor*

$$\binom{c}{k} = \frac{c(c-1)(c-2)\cdots(c-k+1)}{k!}$$

1.2.2. Definíció (Taylor-sor). *Tegyük fel, hogy az f függvény akárhányszor differenciálható az a pontban. Ekkor a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

végtelen sort az f függvény a ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük.

1.2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy f akárhányszor differenciálható egy I intervallumban és $\exists K > 0$, hogy $|f^{(n)}(x)| \leq K$ $\forall x \in I$ és $\forall n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor f-et minden $a \in I$ ponthoz tartozó Taylor-sora előállítja az I intevallumban, tehát*

$$\forall a, x \in I\text{-re } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Bizonyítás: Legyen $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ egy részletösszeg. Ekkor a Taylor-formula miatt (lásd [3], 305.o.), $f(x) = s_n(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$. Tehát

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{f^{(n)}(c)}{n!}|x-a|^n \leq K\frac{|x-a|^n}{n!}$$

Tudjuk, hogy tetszőleges a valós számra $\frac{a^n}{n!} \to 0$, ezért $\frac{|x-a|^n}{n!} \to 0$. Ebből következik, hogy $s_n(x) \to f(x)$, ha $n \to \infty$. Így a végtelen sorok konvergenciájának definíciója szerint ezzel be is láttuk a tételünket. $\square$

Most pedig írjuk fel a binomiális tételt az $(1+x)^c$ alakú hatványokra:

1.2.4. Tétel (Binomiális sor). *Legyen $c \in \mathbb{R}$ és $|x| < 1$. Ekkor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{c}{k} x^k = (1+x)^c$$

Bizonyítás: Írjuk fel a Taylor-sorát az $f(x) = (1+x)^c$-nek. Nézzük először a deriváltakat:

$$f^{(1)}(x) = ((1+x)^c)' = c(1+x)^{c-1}$$
$$f^{(2)}(x) = (c(1+x)^{c-1})' = c(c-1)(1+x)^{c-2}$$
$$f^{(3)}(x) = (c(c-1)(1+x)^{c-2})' = c(c-1)(c-2)(1+x)^{c-3}$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(x) = c(c-1)\ldots(c-k+1)(1+x)^{c-k}$$

Tehát az

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{c(c-1)\ldots(c-k+1)}{k!} = \binom{c}{k}$$

Így azt kaptuk, hogy az 1.2.2 és 1.2.3 szerint $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c}{k} x^k$. $\square$

1.2.5. Tétel.

$$\sum_n \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x})$$

Egy ehhez nagyon hasonló számolást a Catalan-számokról szóló részben fogunk mutatni, a 2.2.2-es tétel első bizonyításában. A tétel pedig megtalálható a [5] könyv 53. oldalán, a 2.5.10-es részében is.

1.2.6. Tétel.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ \textit{ha}\ |x|<1$$

Bizonyítás: Legyen egy részletösszege $s_n(x) = 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$. Így $s_n(x)x = x+x^2+\ldots+x^n$. A másodikból kivonva az elsőt kapjuk, hogy:

$$s_n(x)x - s_n(x) = 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}-x-x^2-\ldots-x^n = x^n-1$$

Ebből kifejezve $s_n(x)$-et látjuk, hogy

$$s_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Ez pedig éppen $\frac{1}{1-x}$, mert $x^n \to 0$, ha $|x|<1$.
Ha $x>1$ vagy $x \le -1$, akkor a sor divergens (előbbi esetben az összege ∞, utóbbiban pedig nincs összege). □

1.2.7. Tétel. *Legyen* $|x|<1$, *ekkor*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

Bizonyítás: Használjuk fel az 1.2.6-os tételben kapott eredményt, illetve az 1.1.4-es definícióban szereplő, differenciálásra vonatkozó felírást és nézzünk néhány deriváltat:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}x^{k-n} =$$

Ez utóbbiban pedig, ha $k-n=i$ helyettesítést alkalmazunk, akkor megkapjuk a keresett formánkat:

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+n}{i}x^i$$

$\square$

1.2.8. Tétel.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^k=\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},\ \textit{ahol } n\geq 0 \textit{ és } |x|<1$$

Bizonyítás: Ez az azonosság az 1.2.7-es összefüggés x^n-szerese, vagyis az 1.1.3 miatt az n-nel jobbra eltoltja. $\square$

1.2.9. Tétel. *$\forall x\in\mathbb{R}$-re*

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Bizonyítás: Itt is keressük az $f(x)=e^x$ Taylor-sorát. Tudjuk, hogy az e^x minden deriváltja e^x, tehát az $f^{(k)}(x)=e^x$ ami miatt $f^{(k)}(0)=1$. Így az 1.2.2 és 1.2.3 miatt $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. $\square$
Ha az $1,1,1,1\ldots$ sorozat exponenciális generátorfüggvényét nézzük az 1.1.5 szerint, akkor az $\sum_{k=0}^{\infty}1\cdot\frac{x^k}{k!}$, ami éppen az e^x függvény.

1.3. Lineáris rekurziók

1.3.1. Definíció. *Legyenek $z_1,z_2,z_3,\ldots,z_k$, $(z_k\neq 0)$, $z_i\in\mathbb{C}$ számok. Ha $a_n=z_1a_{n-1}+z_2a_{n-2}+z_3a_{n-3}+\ldots+z_ka_{n-k}$, ahol $n\geq k$, akkor az a_n sorozat egy lineáris rekurziót elégít ki. Ekkor a z_i számok a lineáris rekurzió együtthatói. A definícióhoz szükségünk van az első k tag ismeretére, ekkor a lineáris rekurzió egyértelműen meghatározza a sorozat tagjait.*

A szakdolgozat további részében a $k=2$ esettel foglalkozunk bővebben, vagyis az

$$a_n=z_1a_{n-1}+z_2a_{n-2}$$

alakú rekurziókkal, ahol a sorozat 2 tagja adott.

Véges matematika órákon tanultuk, hogy hogyan lehet megoldani ezeket a rekurziókat, mértani sorozatok segítségével: $a_n=a_1q^n$ amit behelyettesítve a rekurzióba és leosztva a_1q^{n-1}-gyel a következő másodfokú egyenletet kapjuk q-ra:

$$q^2-z_1q-z_2=0 \tag{1.1}$$

Ennek a karakterisztikus egyenletnek a gyökei q_1 és q_2. Ekkor a linearitás miatt tetszőleges α_1 és α_2 számokkal az $a_n=\alpha_1q_1^{n-1}+\alpha_2q_2^{n-1}$ alakú sorozatok is kielégítik a rekurziót.
Ha két különböző gyökünk van, akkor lényegében készen is vagyunk, mert az $a_1=\alpha_1+\alpha_2$ és $a_2=\alpha_1q_1+\alpha_2q_2$ egyenletrendszert megoldva minden kérdésünkre megkapjuk a választ.
Ha kétszeres gyökök vannak, azaz $q_1=q_2$, akkor az nq^{n-1} is eleget tesz a rekurziónak, így $a_n=\alpha_1q_1^{n-1}+\alpha_2nq_1^{n-1}$ alakban keresünk megoldást.

1.3.1. Példa. *Oldjuk meg az $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ rekurziót, ha $a_1 = 3$ és $a_2 = 8$*

Az $a_n = a_1 q^{n-1}$ helyettesítést használva:

$$a_1 q^{n+1} = 5a_1 q^n - 6a_1 q^{n-1}$$

$$q^2 - 5q + 6 = 0$$

Ennek gyökei: $q_1 = 3$ és $q_2 = 2$. Mivel két különböző gyökünk van, az $a_n = \alpha_1 q_1^{n-1} + \alpha_2 q_2^{n-1}$ alakú megoldást keressük. $3 = \alpha_1 + \alpha_2$ és $8 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ egyenletrendszer megoldása: $\alpha_1 = 2$ és $\alpha_2 = 3$. Ezért a megoldásunk:

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}$$

Ha egy sorozatról, problémáról még több információt szeretnénk megtudni, akkor hasznos lehet a generátorfüggvényük ismerete.

1.4. Rekurziók megoldása generátorfüggvényekkel

A generátorfüggvények nagy segítséget nyújtanak rekurziók bizonyos tulajdonságaira való következtetésekben, például zárt alakok, explicit képletek keresésénél. A rekurziók megoldása sok esetben elég mechanikusan történik, erre látunk majd konkrét példákat a 2. fejezetben is. Most azonban nézzük először azt a megoldásmenetet, amit Graham, Knuth és Patashnik([2],337.o.) foglalt össze néhány lépésben:

1. Tegyük fel, hogy adott egy sorozatunk, rekurzióval. (Vagy ha egy kombinatorikus problémánk adott, akkor először is keressünk rekurzív megoldást.) Ekkor a generátorfüggvénye az 1.1.1-es definíció szerint felírható ($G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$).

2. A generátorfüggvényt (az előbbi egyenlet jobb oldalát) a rekurzió felhasználásval alakítsuk át úgy, hogy valami másik kifejezést kapjunk $G(x)$-re. Itt több algebrai átalakítást tudunk végezni, a lényeg, hogy egy k-adfokú (a szakdolgozatban $k = 2$ esettel foglalkozunk, lásd részletesebben 1.3-ban) egyenletet kapjunk $G(x)$-re.

3. Így az egyenletet rendezve, megoldva zárt alakkal tudjuk kifejezni a $G(x)$ generátorfüggvényt.

4. Ezután már csak sorba kell fejtetnünk a generátorfüggvényt, (például Taylor-sorbafejtés segítségével, parciális törtekre bontással, vagy bármilyen módszerrel, amit ismerünk), mert ekkor az x^k együtthatója megadja nekünk az explicit alakját az eredeti sorozatunknak.

Ennek gyakorlati alkalmazását a Fibonacci-számokon keresztül mutatjuk be a 2. fejezetben.

2. fejezet

Néhány nevezetes sorozat explicit képletének megadása generátorfüggvény segítségével

2.1. A Fibonacci-számok

A Fibonacci-sorozatot[1] több feladat megoldásaként is ismerjük, például a nyulak szaporodása, az aranymetszés közelítése[6], stb. Tudjuk, hogy a rekurzív definíciója a következő:

2.1.1. Definíció.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ } \textit{és} \text{ } F_0 = 0, \ F_1 = 1$$

Tehát az első néhány Fibonacci-szám: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

2.1.2. Tétel (Explicit képlet a Fibonacci számokra).

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] \tag{2.1}$$

Bizonyítás: Először is, tekintsük a Fibonacci számok generátorfüggvényét: $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$. Ekkor $F(x) = F_0 + F_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k$ amiben a 2.1.1-es rekurziót kihasználva a következőt kapjuk:

$$F(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k$$

Ebbe az $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$ összefüggést beírva az jön ki, hogy:

$$F(x) = x + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-2}x^k + F_{k-1}x^k) = x + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2}x^{k-2} + x \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}x^{k-1}$$

[1] Leonardo Fibonacci, (kb. 1170 - kb. 1240) itáliai matematikus, http://www.britannica.com/biography/Leonardo-Pisano

Megjegyzés: $\sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2}x^{k-2} = F(x)$ illetve, $\sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}x^{k-1} = F(x) - F_0 = F(x)$. Azaz:
$F(x) = x + x^2F(x) + xF(x)$ amit átrendezve, kiemelve $F(x)$-et adódik, hogy:

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \tag{2.2}$$

Innen a nevező gyöktényezős alakja a következő: $1 - x - x^2 = -(x^2 + x - 1) = -(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$
Ezek után a parciális törtekre bontást alkalmazzuk:

$$F(x) = \frac{-x}{\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{c_1}{\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} + \frac{c_2}{\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$-x = c_1 \cdot \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \cdot \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$-x = (c_1 + c_2)x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot c_1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot c_2$$

Amiből azt kapjuk, hogy: $-1 = c_1 + c_2$ illetve $0 = -\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot c_1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot c_2$
Az egyenletrendszer megoldása, $c_1 = -1 - c_2$ helyettesítéssel:

$$0 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot c_2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot c_2$$

$$-\frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{-1-\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}\right) c_2$$

$$-\frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-2\sqrt{5}}{2} c_2$$

$$1 + \sqrt{5} = -2\sqrt{5}c_2$$

Tehát

$$c_2 = \frac{-5-\sqrt{5}}{10} \text{ és } c_1 = -1 - \frac{-5-\sqrt{5}}{10} = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{-5+\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{-5-\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

Alakítsuk át a nevezőt:

$$F(x) = \frac{-5+\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2x}{-1+\sqrt{5}} - 1\right)} + \frac{-5-\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2x}{-1-\sqrt{5}} - 1\right)}$$

A következő algebrai átalakítások végezhetőek el: $\frac{-5+\sqrt{5}}{10} : \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ illetve $\frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, az összeg másik tagjánál hasonlóan.

$$F(x) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x - 1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x - 1}$$

Kiemelünk $\frac{1}{\sqrt{5}}$-öt és -1-gyel szorozzuk a számlálókat és nevezőket is:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{-1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{-1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right)$$

Megjegyzés: A mértani sorozatokról tanultakat fogjuk kihasználni (1.2.6). Legyen $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$ és tudjuk, hogy a sorozat első tagja $F_1 = 1$. Így az $\frac{1}{1-q}$ mértani sor végtelen összege: $\sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot q^i$. Azaz azt kapjuk, hogy

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i x^i - \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i x^i\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right) x^i\right]$$

Ebből pedig már látszik, hogy megkaptuk a keresett (2.1)-et. □

Ismerünk még olyan feladatokat, amiknek a Fibonacci-számok valamilyen irányba való eltoltjai a megoldásuk. Tekintsük példának az alábbi feladatot: Hányféleképp mehetünk fel egy n lépcsőfokból álló lépcsőn, ha egyszerre csak 1 vagy 2 lépést tudunk megtenni? Elsőként keressünk rekurziót a feladat megoldására. Legyen L_n a lehetőségek száma. Ekkor biztosan tudjuk, hogy $L_1 = 1$, illetve hogy $L_2 = 2$, hiszen a 2. lépcsőfokra úgy jutunk el, hogy vagy kétszer lépünk egyet vagy egyszer lépjük meg azt a két fokot. Ha L_0-t 1-nek definiáljuk, mert ha nincs előttünk lépcső, akkor a helyben maradás az egyetlen lehetőségünk a feladat szempontjából, akkor már sejtjük, hogy ezek a Fibonacci-számok lesznek. Számoljuk még ki L_3-at is, hogy a rekurziók egyezését is megértsük. 3 lépcsőfokot megtehetünk $1+1+1$, vagy $1+2$, illetve $2+1$ lépésből is. Így $L_3 = 3$, és a rekurziónk:

$$L_0 = 1,\ L_1 = 1 \text{ továbbá } L_n = L_{n-2} + L_{n-1}$$

Ebben az esetben a generátorfüggvényünk a következőképp alakul, az előző számítások mechanikájára: Legyen $L(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k x^k$ a generátorfüggvény. Ebben a rekurziót kihasználva kapjuk, hogy:

$$L(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} L_k x^k = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty}(L_{k-2}x^k + L_{k-1}x^k) =$$
$$= 1 + x + x^2\sum_{k=2}^{\infty} L_{k-2}x^{k-2} + x\sum_{k=2}^{\infty} L_{k-1}x^{k-1}$$

Továbbra is igaz, hogy $\sum_{k=2}^{\infty} L_{k-2}x^{k-2} = L(x)$ és $\sum_{k=2}^{\infty} L_{k-1}x^{k-1} = L(x) - L_0 = L(x) - 1$, azaz $L(x) = 1 + x + x^2L(x) + x(L(x) - 1)$. Ezt átrendezve, kiemelve $L(x)$-et kapjuk eredményül, hogy:

$$L(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} \tag{2.3}$$

Az a sejtésünk, hogy a Fibonacci típusú sorozatok generátorfüggvényei nagyon hasonlóak, a következőekben két lépésben általánosítunk: először az $A_n = A_{n-2} + A_{n-1}$ rekurzió megoldásait keressük, majd a $B_{n+2} = z_1B_{n+1} + z_2B_n$ alakúakét nézzük meg, ahol rendre adottak A_0 és A_1, illetve B_0 és B_1.

2.1.3. Állítás.
$$A(x) = \frac{A_0 + (A_1 - A_0)x}{1 - x - x^2}$$
ahol $A(x)$ egy Fibonacci-rekurzióval megadott sorozat generátorfüggvénye.

Bizonyítás: Legyen adva a rekurziónk, $A_n = A_{n-2} + A_{n-1}$ és adottak valamilyen A_0 és A_1 kezdőértékek attól függően, hogy honnan indul a számolásunk. Ekkor a generátorfüggvény $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$. Használjuk ismét a rekurziónkat, alakítsuk $A(x)$-et az előzőek mintájára:

$$A(x) = A_0 + A_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} A_k x^k = A_0 + A_1 x + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} A_{k-2} x^k + x \sum_{k=2}^{\infty} A_{k-1} x^{k-1}$$

Azaz:
$$A(x) = A_0 + A_1 x + x^2 A(x) + x(A(x) - A_0)$$
Ebből pedig már látjuk, hogy ha átrendezünk a szokásos módon, megkapjuk a keresett állításunkat: $A(x) = \frac{A_0 + (A_1 - A_0)x}{1 - x - x^2}$ $\square$

Nézzük meg tovább általánosítva, a Fibonacci-típusú sorozatok megoldását: Legyen adott a $B_{n+2} = z_1 B_{n+1} + z_2 B_n$ sorozat és a B_0, illetve B_1. Ekkor a generátorfüggvény $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k$. Használjuk ki a rekurziónkat:

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{k+2} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} z_1 B_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} z_2 B_k x^k.$$

Alakítsuk át az egyenlet két oldalát, hogy ki tudjuk fejezni $B(x)$-et.

$$\frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} B_{k+2} x^{k+2} = \frac{z_1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} B_{k+1} x^{k+1} + z_2 \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k$$

Ebben ellenőrizhető, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} B_{k+2} x^{k+2} = B(x) - B_1 x - B_0$, hasonlóan $\sum_{k=0}^{\infty} B_{k+1} x^{k+1} = B(x) - B_0$, illetve hogy $\sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k = B(x)$. Így ezeket alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{B(x) - B_1 x - B_0}{x^2} = \frac{z_1(B(x) - B_0)}{x} + z_2 B(x).$$

A cél, hogy $B(x)$-et kifejezzük, ezért néhány algebrai átalakítás következik, szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát x^2-tel:

$$B(x) - B_1 x - B_0 = x z_1 B(x) - x z_1 B_0 + x^2 z_2 B(x)$$

Ezt átrendezve, kiemelve $B(x)$-et azt kapjuk, hogy:

$$B(x) = \frac{(B_1 - z_1 B_0)x + B_0}{1 - z_1 x - z_2 x^2} = \frac{(z_1 B_0 - B_1)x - B_0}{z_2 x^2 + z_1 x - 1}$$

Az így kapott nevező hasonlít a 1.1-ben kapot karakterisztikus egyenletre, csak annak úgynevezett „reciprokegyenlete”, azaz ha itt az x helyére $\frac{1}{x}$-et írunk és szorunk (-1)-gyel, akkor kapjuk a lineáris rekurziók megoldásánál használt, $q^2 - z_1 q - z_2 = 0$ karakterisztikus egyenletet. Ezért, ha annak q_1 és q_2 voltak a gyökei, akkor az itteni nevezőnek $\frac{1}{q_1}$ és $\frac{1}{q_2}$ lesznek a gyökei, tehát a nevező

$(x-\frac{1}{q_1})(x-\frac{1}{q_2})$ alakba írható. Ha ezek ismeretében elkezdjük a parciális törtekre bontást, az alábbi eredményre jutunk:

$$B(x) = \frac{c_1}{x-\frac{1}{q_1}} + \frac{c_2}{x-\frac{1}{q_2}} = \frac{-c_1q_1}{1-xq_1} + \frac{-c_2q_2}{1-xq_2}$$

valamely $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$-re. Ezt pedig a 1.2.6 szerint a következőképp tudjuk felírni:

$$B(x) = -c_1q_1\sum_{k=0}^{\infty}(q_1x)^k - c_2q_2\sum_{k=0}^{\infty}(q_2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-c_1q_1^{k+1} - c_2q_2^{k+1})x^k.$$

Így az x^n együtthatója kielégíti a rekurziót, azaz $a_{n+2} = -c_1q_1^{k+1} - c_2q_2^{k+1}$, ami pedig éppen a lineáris rekurziónál felírt alakkal egyezik meg.
Felmerülhet a kérdés, hogy mi történik akkor, ha $q_1 = q_2 = q$? Az 1.3-as részben azt mondtuk, hogy ekkor a megoldást $a_n = \alpha_1q^{n-1} + \alpha_2nq^{n-1}$ alakban keressük. Nézzük most meg, hogy miért!
Ekkor a parciális törtekre bontásnál

$$B(x) = \frac{c_1}{\left(x-\frac{1}{q}\right)} + \frac{c_2}{\left(x-\frac{1}{q}\right)^2} = \frac{-c_1q}{1-qx} + \frac{c_2q^2}{(1-qx)^2}$$

eredményt kapjuk. Tudjuk, hogy $\frac{1}{(1-qx)^2} = \left(\frac{1}{1-qx}\right)' \cdot \frac{1}{q}$, amiben az 1.2.6-os tételt felhasználva $\left(\frac{1}{1-qx}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^kx^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} kq^kx^{k-1}$. Ebből az következik, hogy

$$B(x) = -c_1q\sum_{k=0}^{\infty}q^kx^k + c_2q^2\sum_{k=0}^{\infty}kq^{k-1}x^{k-1}$$

Vagyis látjuk, hogy kétszeres gyök esetében kq^{k-1} típusú megoldás is lesz. Azt is észrevehetjük, hogy ha például 4-szeres gyöke van a karakterisztikus egyenletnek, akkor a parciális törtekre bontás után

$$\frac{1}{1-qx}, \frac{1}{(1-qx)^2}, \frac{1}{(1-qx)^3}, \frac{1}{(1-qx)^4}$$

tagok lesznek, amikből rendre

$$q^n, nq^n, n(n-1)q^n, n(n-1)(n-2)q^n$$

típusú megoldásait kapjuk a lineáris rekurziónak.

2.2. A Catalan-számok

A Catalan-számoknak[2] is ismerjük a rekurzív formáját (ld. 2.2.1) illetve, hogy mely feladatokra ad megoldást a számsorozat (pl. C_n a helyes zárójelezések száma egy n hosszú szorzatban, vagy szintén C_n a $2n$ hosszú, ± 1 számokból álló sorozatok száma, ahol az összeg 0 és $\forall$ részletösszeg nem negatív, stb). Ha a Catalan-számokat 1-gyel eltolva indexeljük, azaz legyen $C_{n+1} = A_n$, akkor

[2]Eugène Charles Catalan (1814-1894), belga matematikus, http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb12392053w

is hasonló megoldásokat kaphatunk mind a rekurzív, mind az explicit alakokra, értelemszerűen, minden elcsúsztatva 1-gyel. Például látni fogjuk, hogy a 2.4-ben ha n helyére $n+1$-et írunk, akkor $A_n = C_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Ez azért érdekes, mert A_n is más-más feladatokra ad megoldást, ilyen az, hogy ha van n nyitó és n csukó zárójelünk, azt éppen A_n-féleképp tehetjük le helyesen, vagy hogy hányféleképp lehet visszaadni két különböző bankjegy használatával, ha $2n$ fő ugyan azt a terméket vásárolja, stb.
A továbbiakban mi a C_n jelöléssel dolgozunk, keressük az explicit képletet a generátorfüggvény segítségével.
Az első néhány Catalan-szám: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$

2.2.1. Állítás (Catalan-számok rekurzív megadása).

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k} \text{ és } C_1 = 1$$

Bizonyítás: Tekintsük a Catalan által megoldott problémát, hogy egy n tényezős szorzatot hányféleképp lehet helyesen zárójelezni. Legyen C_n a megoldás, ahol $C_1 = 1$. Könnyű látni, hogy $C_2 = 1$, mert egy ab tényezőkből álló szorzatot csak egyféleképp oldhatunk meg. C_3 esetében a lehetőségek száma 2, hiszen a 2 szorzás közül vagy az egyikkel, vagy a másikkal kezdjük a számolást. C_4 esetében pedig megpróbáljuk visszavezetni a problémát egy már ismert feladatra, azaz: legyen a szorzatunk $abcd$. Ekkor ha először $a(bcd)$ zárójelezünk, akkor a bcd 3 tagú rész megoldását már ismerjük, ez C_3. Ugyan így járunk el $(abc)d$ esetében is. Kimaradt a $(ab)(cd)$ lehetőség, ez összesen $C_4 = 5$. Észrevehetjük, hogy a rekurziós lépésben mindig "leválasztjuk" az összes lehetséges $1 \leq k < n$ tagot, ezzel visszavezetve a problémát C_k és C_{n-k}-ra, azaz $C_k \cdot C_{n-k}$ lehetőségünk van adott k esetén. Ezeket a végén összegezve megkapjuk a keresett rekurzív definíciót. □

2.2.2. Tétel (Explicit képlet a Catalan-számokra).

$$C_n = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \tag{2.4}$$

Erre a tételre két, hasonló bizonyítást is mutatunk majd.

Bizonyítás: Úgy, mint a Fibonacci-számoknál, itt is nézzük először a Catalan-számok generátorfüggvényét: $c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \Rightarrow$

$$c(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

Emeljük négyzetre mindkét oldalt:

$$[c(x)]^2 = C_1 C_1 x^2 + C_2 C_2 x^4 + \cdots + 2C_1 C_2 x^3 + 2C_1 C_3 x^4 + \cdots$$

$$[c(x)]^2 = C_1 C_1 x^2 + 2C_1 C_2 x^3 + (C_2 C_2 + 2C_1 C_3) x^4 + \cdots$$

Amiből a 2.2.1-es állítást kihasználva kapjuk, hogy:

$$[c(x)]^2 = 1x^2 + 2x^3 + 5x^4 + \cdots \Rightarrow [c(x)]^2 = c(x) - x \Rightarrow [c(x)]^2 - c(x) + x = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldása: $c(x)_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}$ (Nekünk az a megoldás kell, ahol $c(0) = 0$ ez pedig a $\pm$ esetekből csak a $c(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ esetben teljesül.)

$$c(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4x}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Ebben pedig az $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ a 1.2.4-os tételt használva átalakítható a következőképp:

$$c(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\cdot(-4x)^k\right]$$

A $k = 0$-ás tagra az $\binom{1/2}{0}(-4\cdot x)^0 = 1$, ezt emeljük most ki az összegből:

$$c(x) = \frac{1}{2}\left[1 - 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{k}\cdot(-4x)^k\right] = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{k}\cdot(-4x)^k \tag{2.5}$$

Ezek után foglalkozzunk kicsit a binomiális együtthatóval, elsőként használjuk az 1.2.1-es definíciót:

$$\binom{1/2}{k} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} =$$

Algebrai átalakítások után, melyben a számlálóban lévő minden tagot beszorzunk 2-vel, majd azt kiemelve le is osztunk vele, a következőt kapjuk:

$$= \frac{\frac{1}{2^k}(1-2)(1-4)(1-6)\cdots(3-2k)}{k!} =$$

Kiemelünk $(-1)^{k-1}$-et és az egyszerűbb alakra hozás érdekében szorzunk 1-gyel, a következőképp:

$$= \frac{(-1)^{k-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{(2k-2)!}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2k-2)} = \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-2)!}{2^k\cdot k!\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k-2)}$$

Ha minden tagból kiemelünk 2-t, könnyen ellenőrizhető, hogy $2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k-2) = 2^{k-1}\cdot(k-1)!$. Így az eredmény:

$$= \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-2)!}{2^k\cdot k!\cdot 2^{k-1}\cdot(k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-2)!}{2^{2k-1}\cdot k\cdot(k-1)!\cdot(k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}\cdot\binom{2k-2}{k-1} =$$

A szorzat első tagját tovább alakítva jutunk addig, hogy:

$$= \frac{(-1)^k}{-1}\cdot\frac{1}{\frac{k\cdot 2^{2k}}{2}}\cdot\binom{2k-2}{k-1} = \frac{(-1)^k}{-1}\cdot\frac{2}{k\cdot 4^k}\cdot\binom{2k-2}{k-1}$$

Amiből már következik, hogy:

$$\binom{1/2}{k} = \frac{-2}{k}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^k\cdot\binom{2k-2}{k-1}$$

A kérdésre, hogy erre miért volt szükségünk, a következő választ tudjuk adni: Térjünk vissza a (2.5)-höz és alkalmazzuk a binomális együttható átalakított formáját:

$$c(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{k}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^k\cdot\binom{2k-2}{k-1}\cdot(-4x)^k$$

Ebből pedig az egyszerűsítés után már látszik, hogy a keresett alak így néz ki, azaz megkaptuk a (2.4)-est:

$$c(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\binom{2k-2}{k-1}\cdot x^k$$

□

Ez utóbbi számolást ha a C_n helyett $C_{n+1} = A_n$-nel vezetnénk végig, akkor eredményül az 1.2.5-ös tételhez jutnánk, mint ahogy erre már ott is hivatkoztunk

Bizonyítás2: Most mutatunk egy olyan megoldást, ahol az elején a rekurzió kihasználása még ugyan úgy történik, azaz eljutunk a $[c(x)]^2 - c(x) + x = 0$ következtetésig, amiből a $c(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}$ következik. Mivel a keresett megoldásunkra $c(0) = C_0 = 0$ kell, hogy teljesüljön, ezért a $\pm$-ból továbbа is csak a minuszos alakkal folytatjuk számolásainkat. Innen viszont nem a binomiális tétel általános alakját használva megyünk tovább, hanem az analízisből szintén ismert Taylor-sorbafejtéssel (1.2.2), Watkins[7] gondolatmenetét követve:

$$c(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n, \text{ illetve } c(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

Amiből következik, hogy

$$C_n = \frac{c^{(n)}(0)}{n!} \tag{2.6}$$

Nézzük tehát a deriváltakat:

$$c^{(1)}(x) = \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)' = -\left(\frac{\frac{1}{2}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4)\cdot 2}{4}\right) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$c^{(2)}(x) = \left((1-4x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = 2(1-4x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$c^{(3)}(x) = \left(2(1-4x)^{-\frac{3}{2}}\right)' = 3\cdot 2^2(1-4x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$c^{(4)}(x) = \left(3\cdot 2^2(1-4x)^{-\frac{5}{2}}\right)' = 3\cdot 5\cdot 2^3(1-4x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$\vdots$$

$$c^{(n)}(x) = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot 2^{n-1}(1-4x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

Így a 0 körüli sorbafejtés a következő:

$$c^{(n)}(0) = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)\cdot 2^{n-1}(1-0)^{-\frac{2n-1}{2}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-2)\cdot 2^{n-1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}$$

Ha a nevező ∀ tagjából kiemelünk 2-t, akkor összesen $n-1$ darabot emeltünk ki és maradt még $(n-1)!$.

$$c^{(n)}(0) = \frac{(2n-2)! \cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}$$

Tehát ha visszatérünk (2.6)-hoz, a

$$C_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{(2n-2)!}{n(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

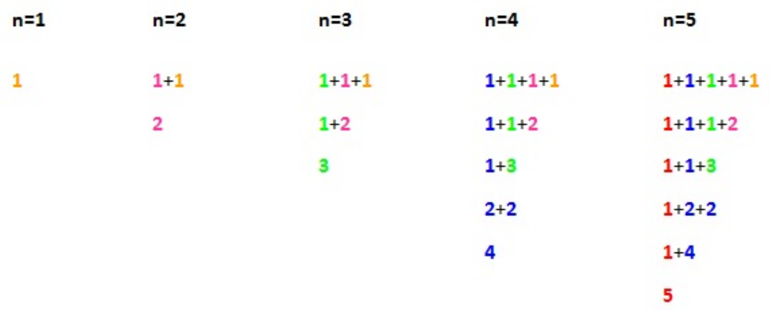
eredményt kapjuk, ami éppen a bizonyítani akart tétel. □

2.3. A Bell-számok

A Bell-számokkal[3] lehet megadni, hogy n különböző tárgyat összesen hányféleképp lehet csoportba rendezni.
Nézzünk néhány konkrét példát! $B_0 = 1$, illetve $B_1 = 1$ mert 0, vagy 1 különböző tárgyat ugyanúgy 1-féleképpen tudunk particionálni. $B_2 = 2$, mert vagy 2 db egy elemű halmazba tesszük őket, vagy mindkét elemet egy nagy dobozba pakolom bele. Tehát ha van egy denevérünk és egy biciklink, akkor ezek lehetséges rendezése a következő:

1. 🦇 | 🚲
2. 🦇🚲

B_3-nál kezd érdekesebb lenni a feladat. Ehhez már szükségünk lesz arra, hogy n elemet hogyan tudunk partíciókra bontani. Ezt szemléletesen, néhány kisebb n értékre a 2.1-es ábra mutatja.



2.1. ábra. Partíciók

Ebben látjuk, hogy B_3, azaz $n = 3$ esetén a maximum 3, minimum 1 dobozra lesz szükségünk. A harmadik Bell-számhoz legyen most a dobozba pakoláshoz adott egy denevér, egy bicaj és egy telefon. Ekkor a lehetőségek száma az alábbi módon sorolható fel:

1. 🦇 | 🚲 | ☎
2. 🦇 | 🚲☎
3. 🚲 | 🦇☎
4. ☎ | 🦇🚲
5. 🦇🚲☎

[3]Eric Temple Bell (1883-1960), skót matematikus, http://www.britannica.com/biography/Eric-Temple-Bell

Így azt kaptuk, hogy $B_3 = 5$.

Hasonlóan próbáljuk megoldani $n = 4$-re is, az előzőekhez vegyünk még hozzá egy csillagot.

1.	🦇	🚲	☎	★
2.	🦇	🚲	☎★	
3.	🦇	☎	🚲★	
4.	🦇	★	🚲☎	
5.	★	☎	🚲🦇	
6.	★	🚲	☎🦇	
7.	☎	🚲	★🦇	
8.	🦇	🚲☎★		
9.	🚲	🦇☎★		
10.	☎	🚲🦇★		
11.	★	🚲☎🦇		
12.	🦇🚲	☎★		
13.	🦇☎	🚲★		
14.	🦇★	🚲☎		
15.	🦇🚲☎★			

Látjuk, hogy $B_4 = 15$.

Ezek után már fel tudjuk írni a rekurziónkat:

2.3.1. Állítás (Rekurzív forma a Bell-számokra).

$$B_0 := 1, \textit{ továbbá } B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy összesen van n elemünk, vegyünk ebből egyet, legyen ez x. Számoljuk meg, hogy hány olyan $1 \le k \le n$ elemű részhalmaz képezhető, amiben ez az x szerepel. Ehhez, mivel az x már adott, szükségünk van még $k-1$ elemre. Ezt a maradék $n-1$-ből kiválasztva $\binom{n-1}{k-1}$-féleképp tehetjük meg. Ekkor maradt még $n-k$ elemünk, ami nincs csoportba rendezve, ezeket éppen B_{n-k}-féleképp rendezhetjük a dobozainkba. Tehát egy fix k mellett a megoldásunk $\binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$, így az összes k lehetőségre: $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{n-k} B_{n-k}$. Ebben pedig ha $n-k$ helyére l-t helyettesítünk, akkor kapjuk a fenti állításunkat: $\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} B_l$. $\square$

Tehát az első néhány Bell-szám az $1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, \ldots$

2.3.2. Tétel (Bell-számok exponenciális generátorfüggvénye).

$$b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1} \tag{2.7}$$

Bizonyítás: Mivel a Bell-számok $n \to \infty$ esetén gyorsan növekednek, így érdemesebb az exponenciális generátorfüggvénnyel dolgoznunk. Először használjuk a 2.3.1-es állítást.

$$b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k \right)$$

Az alábbi módon fejtsük ki a binomiális együtthatót: $\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k-1)!}$, illetve $n!$-sal egyszerűsítve kapjuk, hogy:

$$b(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^n}{n} \cdot \frac{1}{k!(n-k-1)!} B_k$$

A két szumma felcserélése: egy konkrét k szám előfordul $\forall n = k+1, k+2, k+3, \ldots$-ra. Így k 'bármi' lehet és a hozzá tartozó n pedig $k+1$-től indul.

$$b(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot \frac{1}{k!(n-k-1)!} B_k$$

Most pedig csoportosítjuk a k-tól illetve n-től függő tagokat:

$$b(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n-k-1)!}$$

A megoldáshoz szükségünk van a deriváltra (1.1.6).

$$b'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}(n-k-1)! - 0)}{(n(n-k-1)!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-k-1)!}$$

Azt tudjuk, hogy $x^{n-1} = x^{k+n-1-k} = x^k \cdot x^{n-1-k}$, amiből így az x^k kihozható a külső szummába. Vezessük be az $r = n-k-1$ jelölést!

$$b'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^{n-k-1}}{(n-k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

Az első, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$ éppen a $b(x)$-szel egyenlő, míg a $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$-ről analízisből tudjuk (1.2.9), hogy az e^x-szel egyezik meg. Tehát a

$$b'(x) = b(x) \cdot e^x$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk. Ehhez a következő ötletet használjuk: $(\log b(x))' = \frac{1}{b(x)} \cdot b'(x) = \frac{1}{b(x)} \cdot e^x \cdot b(x) = e^x$ Ha ez utóbbit integráljuk, azt kapjuk, hogy $\log b(x) = \int e^x dx = e^x + c$, valamilyen $c \in \mathbb{Z}$-re. Ebből következik az alábbi megoldás:

$$e^{\log b(x)} = e^{e^x + c} \Rightarrow b(x) = e^{e^x + c}$$

A 2.3.1-es állítás szerint

$$b(0) = e^{e^0 + c} = 1$$
$$\log\left(e^{1+c}\right) = \log(1)$$
$$1 + c = 0$$

Tehát

$$c = -1$$

Azaz megkaptuk a keresett 2.3.2-beli formát. □

A generátorfüggvény ismeretében meghatározhatjuk a Bell-számokat. Ez azonban nem „zárt alak", hanem végtelen összeg formájában adódik. Ennek belátásához a [8] könyvben található feladatok megoldásával jutunk el.

2.3.3. Tétel.

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$$

Bizonyítás: Az előző, 2.3.2-es tételt fogjuk elsőként felhasználni.

$$e^{e^x-1} = \frac{e^{e^x}}{e} \Rightarrow e^{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} e\frac{B_n}{n!}x^n \tag{2.8}$$

Másrészt viszont, ismét az analízisből ismert 1.2.9-es forma miatt:

$$e^{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^x)^k}{k!}$$

Amiben az $e^{xk} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xk)^n}{n!}$ szintén tovább alakítható:

$$e^{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xk)^n}{n!}$$

A szummák felcserélése következik:

$$e^{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{k^n}{k!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}x^n \tag{2.9}$$

Így 2.8 és 2.9 miatt mondhatjuk, hogy:

$$e\frac{B_n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$$

$$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$$

Mi pedig éppen ezt a tétel szerettük volna megkapni. □

3. fejezet

Alkalmazás

Ebben a fejezetben szeretnék néhány példát adni arra, hogy hogyan alkalmazhatóak a generátorfüggvények a kombinatorikában. Ehhez tekintsük a Herbert S. Wilf [5] könyvében leírt módszert és példákat, melyekből néhánynak a fordítását a saját feldolgozásomban mutatok be.

3.1. Snake-oil módszer

A Snake-oil módszer[1] a generátorfüggvények segítségével ad lehetőséget kombinatorikus összegek kiszámolására. A módszer a binomiális együtthatók nagy választékát képes kezelni. A saját határain belül gyönyörűen működik, lényege a következő: nem az előttünk lévő (végtelen) összeget szeretnénk kiszámolni, hanem ehelyett tekintjük a generátorfüggvényét, amiről a sorbafejtés után le tudjuk olvasni az együtthatót, a keresett megoldásunkat.
Most pedig nézzük magát a megoldásmenetet, melyet:

1. Tekintsük a szabad változót az adott szummában, ez most legyen n és nevezzük el az összegünket például egy k-tól függő $f(n)$-nek.

2. Legyen $F(x)$ a generátorfüggvényünk, amiben az x^n együtthatójának $f(n)$-t feleltetjük meg.

3. Így már fel tudjuk írni $F(x)$-et: szorozzuk be az összeget x^n-nel és szummázzuk n szerint, tehát $F(x) = \sum_{n \geq 0} x^n f(n)$-t kapjuk. Ezt a generátorfüggvényt dupla szummával (n és k futóindexekkel) fejeztük ki.

4. Cseréljük fel a két szummánkat és hozzuk zárt alakra a belső formulánkat. Ehhez hasznos lehet néhány 1.2-ben összegyűjtött ismeret.

5. Keressük meg az együtthatókat a generátorfüggvényben, hisz ezek adják meg a választ a kérdésünkre.

Nézzünk meg néhány konkrét példát!

[1] Az elnevezés a 18. századból ered, magyarul talán az Ezerjófű lehetne szinonímája. Egy kicsit irónikusan, de Csodagyógyszer, ami mindent képes meggyógyítani, minden problémát orvosol.

3.1.1. Példa.

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1},\ \textit{ahol}\ m,n \geq 0$$

Próbáljuk ki a Snake-oil módszert! Jelöljük a fenti összeget $f(n)$-nel és legyen $F(x)$ a generátorfüggvénye, azaz szorzunk x^n-nel és összegzünk $n \geq 0$ szerint.

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

A (4)-es pont következik, felcseréljük az összegeket, majd rendezzük az n-től, illetve k-tól függő tagokat.

$$F(x) = \sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\cdot x^{-k}\sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{m+2k}x^{n+k} =$$

Vezessük be az $n+k=r$ jelölést. (Így $0 \leq n+k=r \Rightarrow k \leq r$).

$$= \sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\cdot x^{-k}\sum_{r\geq k}\binom{r}{m+2k}x^{r} =$$

Így már alkalmas helyettesítéssel használni tudjuk a belső összegre az 1.2.8-as tételt.

$$= \sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}\cdot x^{-k}\frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}} =$$

Emeljük ki a k-tól nem függő tagokat, a következőket felhasználva: $x^{-k}x^{m+2k} = x^{m+k} = x^m x^k$ és $(-1)^k x^k = (-x)^k$, illetve tudjuk azt is, hogy $(1-x)^{m+2k+1} = (1-x)^{m+1}(1-x)^{2k}$. Ezek után azt kapjuk, hogy:

$$= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}\sum_k \binom{2k}{k}\frac{1}{k+1}\left(\frac{-x}{(1-x)^2}\right)^k =$$

Ebben pedig a szummán belüli rész már hasonlít az 1.2.5-ös tételünkre, ezt alkalmazzuk most:

$$= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}\left[\frac{1}{\frac{-2x}{(1-x)^2}}\left(1-\sqrt{1+\frac{4x}{(1-x)^2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{x^m}{-2x}\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-x)^{m+1}}\left(1-\sqrt{1+\frac{4x}{(1-x)^2}}\right) =$$

A kitevőben $2-(m+1) = 1-m$ és x-szel való egyszerűsítés, valamint a gyök alatti kifejezésben a $1+\frac{4x}{(1-x)^2} = \frac{1-2x+x^2+4x}{(1-x)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$ átírása után a következő eredménynél tartunk:

$$= \frac{-x^{m-1}}{2}(1-x)^{1-m}\left(1-\sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}}\right) = \frac{-x^{m-1}}{2}(1-x)^{1-m}\left(1-\frac{1-x}{1-x}\right) =$$

Itt az $\left(1-\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{-2x}{1-x}$ után lehet még egyszerűsíteni:

$$=\frac{-x^{m-1}(1-x)^{1-m}}{2}\left(\frac{-2x}{1-x}\right)=x^{m-1}\cdot x\cdot(1-x)^{-m}=\frac{x^m}{(1-x)^m}$$

Tehát megkaptuk az $f(n)$ generátorfüggvényét, $F(x)$-et. Ezek után, ha a generátorfüggvényt sorba fejtjük, használjuk hozzá a 1.2.8-as tételt, akkor az x^k együtthatója megadja, hogy mivel egyenlő az eredeti $f(n)$.

$$\frac{x^m}{(1-x)^m}=x\cdot\frac{x^{m-1}}{(1-x)^m}$$

Így már látjuk, hogy ez hasonlít az 1.2.8-as egyenlőség jobb oldalán lévő alakhoz, használjuk az $m=k+1$ helyettesítést és alkalmazzuk a tételt.

$$x\cdot\frac{x^{m-1}}{(1-x)^m}=x\cdot\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{r\geq 0}\binom{r}{k}x^{r+1}=\sum_{r\geq 0}\binom{r}{m-1}x^{r+1}$$

Ebből, ha az x^n együtthatóját keressük, akkor legyen $n=r+1$, azaz $r=n-1$. Tehát a keresett megoldásunk:

$$f(n)=\binom{n-1}{m-1}$$

3.1.2. Példa. *Tekintsünk a következő összeget, ahol n a szabad változó, így legyen ez $f(n)$:*

$$f(n)=\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k},\ \textit{ahol}\ n\geq 0$$

Ezt az összeget szeretnénk zárt alakra hozni, próbáljuk a Snake-oil módszert alkalmazni! Ha $F(x)$ a generátorfüggvény, akkor

$$F(x)=\sum_n x^n\sum_{k\geq 0}\binom{n}{n-k}$$

A következő pont a (4), cseréljük fel a szummákat.

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}\sum_n\binom{k}{n-k}x^n$$

Szeretnénk valami összefüggést, amivel a belső szummánkat „el tudjuk tüntetni". Erre éppen alkalmas lenne az 1.2.4, ha az x^n kitevőjén tudnánk változtatni. A jó hír az, hogy tudunk: szorozuk be a belső x^n részt x^{-k}-val, a szummán kívül pedig x^k-val, így az értéken nem változtatunk, mégis átalakíthatóvá tesszük a belső összeget.

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}x^k\sum_n\binom{k}{n-k}x^{n-k}$$

Most már használni tudjuk az említett tételt, ha az r helyére $n-k$-t írunk.

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}x^k(1+x)^k=\sum_{k\geq 0}(x+x^2)^k$$

Ez pedig az 1.2.6 miatt tovább alakítható a következőképp:

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Itt pedig kedves ismerősünk, Fibonacci juthat eszünkbe, hiszen ez az $F(x)$ megegyezik a Lépcsőmászás feladatának generátorfüggvényével, ahogy azt a (2.3)-ban láttuk. Ez azt jelenti, hogy az $f(n) = \sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k} = L_n = F_{n+1}$, vagyis a Fibonacci-számok 1-gyel jobbra eltoltja.

3.1.3. Példa.

$$f(n) = \sum_k \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}, \textit{ ahol } n \geq 0$$

Kezdjük megint a szokásossal: írjuk fel a generátorfüggvényt, majd cseréljük meg a szummákat!

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_k \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} = \sum_k \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} x^n =$$

Rendezzünk a futóindexek szerint:

$$= \sum_k 2^{-k} \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{2k} 2^n x^n = \sum_k 2^{-k}(2x)^{-k} \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{2k} (2x)^{n+k} =$$

Ez az átalakítás azért volt kedvező, mert így tudjuk alkalmazni a belső összegre az 1.2.8-as tételt, az k helyére most $n+k$-t és x helyére $2x$-et írva:

$$= \sum_{k\geq 0} 2^{-k}(2x)^{-k} \frac{(2x)^{2k}}{(1-x)^{2k+1}}$$

Egyszerűsítsünk a számlálón: $2^{-k}(2x)^{-k}(2x)^{2k} = 2^{-k}(2x)^k = \frac{(2x)^k}{2^k} = x^k$ Tehát:

$$F(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(1-2x)^{2k}(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{x}{(1-2x)^2}\right)^k =$$

Alkalmazzuk az 1.2.6-os összefüggést, majd hozzuk egyszerűbb alakra a kapott törtet.

$$= \frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{(1-2x)^2}} = \frac{1}{(1-2x)\frac{1-4x+4x^2-x}{(1-2x)^2}} = \frac{1-2x}{1-5x+4x^2} =$$

$$= \frac{1-2x}{4(x-\frac{1}{4})(x-1)} = \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)}$$

Bontsunk parciális törtekre:

$$F(x) = \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)} = \frac{A}{1-4x} + \frac{B}{1-x}$$

$$1-2x = A - Ax + B - 4Bx$$

$$1-2x = (-A-B)x + A + B$$

Tehát az $1 = A + B$ és $-2 = -A - 4B$ egyenletrendszert megoldva: $A = \frac{2}{3}$ és $B = \frac{1}{3}$, azaz

$$F(x) = \frac{2}{3(1-4x)} + \frac{1}{3(1-x)}$$

Az összeadás két tagjából a konstansokat kiemelve tudjuk alkalmazni az 1.2.6-os tételt, a következőképp:

$$F(x) = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3}2^{2n} + \frac{1}{3})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}+1}{3} x^n$$

Ebből következik a feladat megoldása:

$$f(n) = \frac{2^{2n+1}+1}{3}$$

3.1.4. Példa. *Ebben a példában két olyan összegünk van, amik látszólag különbözőek, de most megmutatjuk, hogy valójában megegyeznek.*

$$\sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k, \text{ ahol } m, n \geq 0$$

Jelöljük az összeg bal oldalát $f(n)$-nel, jobb oldalát pedig $g(n)$-nel és legyen a generátorfüggvényük rendre $F(x)$ és $G(x)$.
Az előző ismereteink alapján végiggondolható, hogy nincs szükségünk rá, hogy a két összeg zárt alakját kiszámoljuk, elegendő, ha azt meg tudjuk mutatni, hogy a két összeg generátorfüggvénye megegyezik - hiszen ebből már következik, hogy akkor a Taylor-sorfejtésük is egyenlő, így az x^n együtthatója is ugyan az lesz.

Nézzük először a bal oldali összeget, írjuk fel a Snake-oil módszer segítségével a generátorfüggvényét! Szokásosan, beszorzunk x^n-nel és összegzünk n szerint, majd a szummák felcserélése következik:

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_k \sum_{n\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} x^{n+k-k} =$$
$$= \sum_k \binom{m}{k} x^{-k} \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{m} x^{n+k}$$

Így a belső szummára ismét a jól ismert 1.2.8-as tétel alkalmazható, a megfelelő helyettesítéssel:

$$F(x) = \sum_k \binom{m}{k} x^{-k} \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$$

Ez után pedig a $\sum_k \binom{m}{k}(\frac{1}{x})^k$ részre az 1.2.4-es tétel írható fel, majd algebrai átalakítások után kapjuk az eredményt.

$$F(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^m \cdot \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^m \frac{1}{1-x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^m = \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}}$$

Hasonló módon járunk el a jobb oldali összeggel, $g(n)$-nel is.

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k = \sum_k \binom{m}{k}2^k \sum_{n\geq 0}\binom{n}{k}x^n$$

A belső szummára itt is alkalmazhatjuk az 1.2.8-as tételt:

$$G(x) = \sum_k \binom{m}{k} 2^k \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{1-x} \sum_k \binom{m}{k} \left(\frac{2x}{1-x}\right)^k$$

Most használjuk az 1.2.4-es tételt az $x := \frac{2x}{1-x}$ helyettesítéssel:

$$G(x) = \frac{1}{1-x} \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^m = \frac{1}{1-x} \left(\frac{1-x+2x}{1-x}\right)^m = \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}}$$

Így azt kaptuk, hogy $F(x) = G(x)$, ami azt jelenti, hogy $f(n) = g(n)$.

Irodalomjegyzék

[1] Hajnal Péter: „Összeszámlálási problémák", *Polygon jegyzettár,* (1997). 7-8, 21, 103.

[2] Graham, Ronald L.; Knuth, Donald E.; Patashnik, Oren: „Konkrét matematika", *Műszaki könyvkiadó,* (1998), 195-200, 331-337, 363.

[3] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: „Valós analízis I.", *Typotex*, (2012), 114, 305, 307.

[4] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: „Valós analízis II.", *Typotex*, (2013), 277.

[5] Wilf, Herbert S.: „generatingfunctionology", https://www.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf, 53, 118-122, 125, 127. (Utolsó letöltés ideje: 2016.04.21.)

[6] Vincent Van Der Noort: „Számtalan szám Egy kocka vallomásai", *Libri kiadó,* (2013), 49-53.

[7] Watkins, William: „Generating Functions", *The College Mathematics Journal* **18.3** (1987), 195-211. (A mű online elérhető: http://www.jstor.org/stable/2686379 Utolsó letöltés ideje: 2016.03.17.)

[8] Lovász László: „Kombinatorikai problémák és feladatok", *Typotex,* (1999), 15, 172-173, 175.

[9] Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba: „A számítástudomány alapjai", *Typotex,* (2006). 163-164, 168-170, 173-175.

[10] Gerőcs László, Vancsó Ödön: „Matematika", *Akadémia kiadó,* (2010).

[11] Szőnyi Tamás: „Catalan-számok", http://www.cs.elte.hu/~szonyi/catalan.pdf (Utolsó letöltés ideje: 2016.04.04.)

[12] Szőnyi Tamás: „Állandó együtthatós lineáris rekurziók", http://www.cs.elte.hu/~szonyi/linrekuj.pdf (Utolsó letöltés ideje:2016.04.04.)