

Négyzetfraktálok

Fábián János

Matematika BSc, tanári szakirány

Szakedolgozat

Témavezető:

Buczolich Zoltán

Egyetemi tanár

Analízis Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2016.

Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----------|
| 1. Fogalmak áttekintése | 1 |
| 2. Motiváció | 2 |
| 2.1. Cantor-halmaz | 2 |
| 2.2. Partvonal probléma | 3 |
| 2.2.1. A Richardson-Mandelbrot mérés matematikai háttere | 4 |
| 2.2.2. Box-dimenzió | 5 |
| 2.2.3. Az s meghatározása | 6 |
| 2.3. Koch-görbe | 6 |
| 2.3.1. A Koch görbe hossza | 6 |
| 3. Sierpinski-szőnyeg | 8 |
| 3.1. Dimenzió | 8 |
| 3.2. Iterált függvény rendszer (IFS) | 9 |
| 3.2.1. Koch görbe dimenziója | 11 |
| 3.2.2. Példák az IFS-re | 11 |
| 3.3. Összefüggőség | 12 |
| 4. Négyzetfraktálok | 13 |
| 4.1. $N_3\{2 \dots 9\}$ | 13 |
| 4.2. $N_3\{1 \dots 5, 6, 9\}$ | 15 |
| 4.2.1. Csúcsos érintkezés vizsgálata | 15 |
| 4.3. $N_3\{2 \dots 5, 6, 9\}$ | 15 |
| 4.4. $N_3\{4, 5, 6\}$ | 16 |
| 4.5. $N_3\{4, 6\}$ | 16 |
| 4.6. Összefüggőség meghatározása tetszőleges négyzetfraktálnál | 17 |
| Irodalomjegyzék | 22 |

Bevezetés

Szakedolgozatom célja az egyszerűbb négyzetfraktálok bemutatása. Rövid fogalmi áttekintés után bevezetjük a fraktálokat a Cantor-halmazzal kezdve, majd tekintjük a fraktálok használatának motivációját a Partvonal-problémán keresztül [1]. Ezután megismerkedünk a dimenzió-fogalom kialakításának problémájával, majd bevezetjük a jól használható Box-dimenziót. A második fejezetben tárgyaljuk a fraktálok további tulajdonságait, a fraktálok leírásának lehetőségeit, és bevezetjük az összefüggőség fogalmát. Az utolsó fejezetben pedig bevezetjük az forgatást nem tartalmazó négyzetfraktálok fogalmát, majd különböző négyzetfraktálokat vizsgálunk, kiemelt figyelmet fordítva ezek összefüggésére. Végül megoldást adunk az összefüggőség vizsgálatára négyzetfraktálokban.

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni Buczolic Zoltánnak a türelmét és segítségét, valamint az útmutatását a témában. Szeretném megköszönni Papp Gábor Sándornénak, amiért felkeltette érdeklődésem a téma iránt, végül családomnak és barátaimnak, akik támogatása nagyban hozzájárult a szakdolgozat elkészüléséhez.

1. fejezet

Fogalmak áttekintése

Ebben a fejezetben ismertetem a későbbiekben felhasznált fogalmakat és tételeket.

1.0.1. Tétel. [2] *Cauchy-kritérium:* Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan N_0 küszöb, amelyre minden $n, m > N_0$ -ra $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

1.0.2. Definíció. [3] Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ az $[a, b]$ intervallum egy Φ felosztása. Az f függvény grafikonjának az Φ felosztáshoz tartozó beírt poligonján az $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ pontokat összekötő poligont értjük. A graph f grafikon ívhossza az összes beírt poligon hosszaiból álló halmaz felső határa. (Ez lehet végtelen is.)

Az f grafikon ívhossza:

$$s(f; [a, b]) > \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |p_i - p_{i-1}| : a = x_0 < \dots < x_n = b, p_i = (x_i, f(x_i)) (i = 0 \dots n) \right\}.$$

1.0.3. Definíció. Legyen X és Y nem üres halmazok egy (M, d) metrikus térben. Ekkor az X és Y halmazok Hausdorff-távolsága:

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} (d(x, y)), \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} (d(x, y)) \right\}.$$

Ez a távolságfogalom kompakt halmazokon is értelmezett.

1.0.4. Definíció. Legyen f tetszőleges B halmazból B -be képező függvény, és B egy tetszőleges részhalmaza (M, d) metrikus térnek. f -et kontrakciónak nevezzük, ha tetszőleges $x, y \in B$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y), \text{ ahol } 0 \leq q < 1.$$

2. fejezet

Motiváció

2.1. Cantor-halmaz

A (triadikus) Cantor-halmaz: rekurzív konstrukció szerint vegyünk egy tetszőleges $[a_0, b_0]$ intervallumot nevezzük el a konstrukció nulladik lépésének, K_0 -nak:

- $K_0 = [a_0, b_0]$ szakaszt felosztjuk három egyenlő részre, majd a középső $(\frac{2a_0+b_0}{3}, \frac{a_0+2b_0}{3})$ részt elhagyjuk. Így keletkezik K_1 , és a két intervallum. $[a_{(1,1)}, b_{(1,1)}]$, $[a_{(1,2)}, b_{(1,2)}]$
- K_n -ik (rekurzív) lépés: a K_n tartalmaz 2^n egyforma hosszú szakaszt, az i -ik szakasz végpontjai az $[a_{(n,i)}, b_{(n,i)}]$, $(i = 1 \dots n)$. Minden ilyen intervallumot három egyenlő részre osztunk és elhagyjuk a középsőt, így előáll $K_{(n+1)}$.

Specifikusan, az $[a, b]$ tetszőleges, ezért a triadikus Cantor-halmaz esetén a -t nullának és b -t egynek szokás választani.

2.1.1. Tétel. *Vegyünk a C Cantor-halmazt, melynek tulajdonságai:*

1. *A C halmaz egydimenziós mértéke 0,*
2. *A C halmaz számossága megegyezik a $[0, 1]$ számosságával.*

Bizonyítás.

1. Mivel a, b -t tetszőlegesen választottuk, ezért bármilyen kis ε -ra megadható egy Φ_n felosztás, amire teljesül hogy C külső mértéke kisebb, mint ez az ε . A Φ_n felosztás a $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$ osztópontokat tartalmazza.

Ezután tekintsük az K_{3^n} -ekhez tartzó Φ_{3^n} felosztásokat. A külső mértékek $k(K_{3^n}) = \frac{2^n}{3^n}$ lesznek, ez monoton és tart nullához. Tehát minden ε -hoz található n , ami után minden $n < m$ értékre $k(K_{3^m}) < \varepsilon$, azaz a külső mértéke nulla lesz.

2. Ahhoz, hogy belássuk, hogy a két halmaz számossága megegyezik, elegendő az elemeiket párba állítani. A C halmazbeli elemeket írjuk fel hármas számrendszerbeli alakjukban. Ekkor elhagyunk minden olyan számot, melynek felírásában az 1 szerepel. Tehát minden olyan szám eleme lesz a C halmaznak, melynek van olyan hármas számrendszerbeli alakja, amit a 0 és 2 számjegyek sorozata alkotja.

Ezt felhasználva egy jó párosítást kapunk ha vesszük az $a \in [0, 1]$ elemnek a kettes számrendszerbeli alakját és hozzárendeljük azt a $b \in [0, 1]$ hármas számrendszerbeli számot, melynek felírásában végtelen sok nulla vagy kettes szerepel, úgy, hogy ahol az a felírásában egy 2^{-n} , ($n \in \mathbb{N}$) helyi érték előtt 1-es szorzó szerepel, ott a b szám felírásában $2 \cdot 3^{-n}$ szerepel, különben az adott helyi értéken 0 lesz. Jól látszik, hogy a b eleme lesz a C halmaznak, mivel csak nulla és kettes lesz a hármas számrendszerbeli alakjában és így minden $[0, 1]$ -beli számhoz hozzárendeltünk legalább egy hármas számrendszerbeli számot C -ben.

Tehát a Cantor-halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint $[0, 1]$ számossága. Hasonlóan eljárva, minden Cantor-halmazbeli elemet átváltva hármas számrendszerbelibe, hozzárendelhető egy kettes számrendszerbeli elem, ami eleme lesz $[0, 1]$ -nek. Így $[0, 1]$ számossága nagyobb vagy egyenlő lesz, mint a C halmazé, tehát a számosságuk megegyezik. \square

2.2. Partvonal probléma

Lewis Fry Richardson a 20. század első felének polihisztora volt, aki az első világháború után összefüggést keresett az ország határvonalának hossza és az országok közti konfliktus kirobbanásának valószínűsége között. Kutatásai alatt viszont érdekes tényre bukkant, ugyanis a különböző országokban a határvonalak különböző hosszúsággal voltak bejegyezve. Például a portugál-spanyol határvonal az egyik ország földhivatalában 978 kilométer, míg a másikban 1214 kilométer volt. Ezen eltérés viszont csak a nagyon egyenetlen határvonalak esetén feltűnő, például az Egyesült Államok-Kanada határvonala (amely nagyrészt egyenes), mindkét ország földhivatalában megegyezik.

Mandelbrot, a fraktálelmélet névadója, 1967-ben emelte ki Richardson észrevételét a "How long is the Coast of Britain" c. írásában.

A partvonal-mérés általánosan az *ív*hossz definíciójára épül. Ez a mérés úgy történik, hogy osztópontokat jelölnek ki a partvonalon, és ezen pontok távolságösszegével becsülik a partvonal hosszát. Jelöljük az i -edik és az $(i + 1)$ -edik jelölőpont távolságát $L(i)$ -vel, valamint tegyük fel, hogy a partvonalat k darab ilyen jelölőponttal határozzuk meg. Ekkor mérésünk szerint a partvonal hossza a

$$\sum_{i=1}^{k-1} L(i)$$

összeg lesz. Ez összhangban van az ívhossz definíciójával, és egy újabb pontot felvéve az értéke olyan kis mértékben változik, hogy ez egy konstanshoz tart. Ez szemléletesen megegyezik a beírt poligon hosszával.

A partvonalak esetén viszont, ha újabb pontokat veszünk fel, akkor a partvonal bármely $[a, b]$, $(a \neq b)$ ívhosszának finomításával a hossz tart a végtelenbe, tehát nem lesz korlátos.

Richardson javaslata az volt, hogy a fent említett módszer helyett a

$$\sum_{i=1}^{k-1} L(i)^s$$

értéket használják, ahol a legkisebb olyan $s > 1$ értékkel adják meg a partvonal méretét, hogy újabb pontok felvétele esetén a hossz korlátos maradjon.

2.2.1. A Richardson-Mandelbrot mérés matematikai háttere

Léteznek görbék, melyek nem rektifikálhatók. Az ívhossz definíciója alapján minden M számhoz található M -nél hosszabb beírt poligon, ilyen esetekben elmondható, hogy ha veszünk egy rögzített r távolságot, majd rögzített kiindulóponttól elindulva, felveszünk r távolságonként újabb pontokat, majd ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg eljutunk odáig, hogy már nem tudunk újabb pontot felvenni, mivel a végpont közelebb van a kiinduló ponthoz, mint r . Ekkor összekötjük a töröttvonal utolsó és első pontját, ennek az utolsó szakasznak a neve legyen m . A poligon hossza $L(r) + m$, ahol $L(r)$ a töröttvonal hossza, és az oldalak számát jelölje $N_1(r) = \lfloor \frac{L(r)}{r} \rfloor$. Mivel m nulla és r közé eső érték lesz, a beírt poligon hossza pedig $(N_1(r)r + m)$, mi az m értéket elhagyjuk a továbbiakban, mivel $N_1(r)r \leq L(r) \leq (N_1(r) + 1)r$ lesz. Ekkor

$$\lim_{r \rightarrow 0+0} N_1(r)r = \infty.$$

Ha a poligon oldalainak hosszát csökkentjük, és így a szükséges beírt oldalak száma nő, akkor a poligon oldalhosszainak összege tart a végtelenhez.

Tehát ha $r \rightarrow 0 + 0$ akkor az ívhossz tart a végtelenhez. Tekintsük az $N_1(r)r^s$ értéket. Ha $1 > r$ és $1 \leq s' < s''$, akkor

$$N_1(r)r^{s'} > N_1(r)r^{s''}.$$

Ezt felhasználva gyakran meg tudunk adni olyan $s > 1$ értéket, hogy a határérték korlátos legyen.

$$\lim_{r \rightarrow 0+0} N_1(r)r^s < \infty.$$

Ekkor a s értékek infimumát nevezzük a görbe *dimenziójának*.

A későbbiekben tekintett alakzatoknál ellenőrizzük, hogy létezik-e ez a limesz.

2.2.2. Box-dimenzió

Az előző gondolathoz hasonlóan definiáljuk a box-dimenziót. Az $N(r)$ ebben az esetben nem a közelítő r hosszú egyenesekből álló görbét, hanem az alakzatot fedő $r \times r$ négyzeteket jelöli.

2.2.1. Definíció. Legyen A korlátos halmaz, továbbá legyen $N_2(r)$ az a szám, ahány r oldalhosszú négyzetre van szükség A befedéséhez. Legyen

$$\underline{\dim}_B(A) = \lim_{r \rightarrow 0+0} \inf \frac{\log N_2(r)}{-\log(r)},$$

$$\overline{\dim}_B(A) = \lim_{r \rightarrow 0+0} \sup \frac{\log N_2(r)}{-\log(r)}$$

rendre A halmaz alsó és felső box-dimenziója. Amennyiben az A halmaz alsó- és felső box-dimenziója megegyezik, a közös értéket az A halmaz box-dimenziójának nevezzük, és $\dim A$ -val jelöljük. $\dim_B(A) = \overline{\dim}_B(A) = \underline{\dim}_B(A)$.

Ezzel ekvivalens definíciót kapunk, ha egy r oldalhosszúságú négyzethálót feszítünk ki a síkon és nézzük, hogy a négyzetek közül mennyi szükséges ahhoz, hogy lefedjük az alakzatot.

Ez a dimenzió-definíció megegyezik közismert alakzatok esetén a topológiai dimenzióval, például a négyzet, téglalap esetén. Valamint a négyzetfraktálok esetén ez egy igazán jól alkalmazható dimenzió-fogalom.

2.2.3. Az s meghatározása

Legyen $L(r, s) = N_2(r)r^s$. Ekkor $\log L(r, s) = \log N_2(r) + s \log r$ és ha $\lim_{r \rightarrow 0+0} N_2(r)r^s = c$, ahol $0 < c < \infty$, és $s > 1$ létezik, akkor

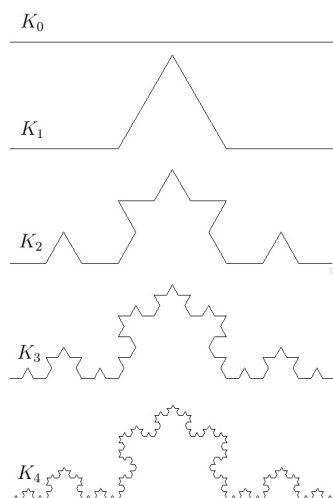
$$s = \lim_{r \rightarrow 0+0} \frac{\log N_2(r)}{-\log r}.$$

Ezzel megadtuk az s meghatározásának egy módját.

2.3. Koch-görbe

A Koch-görbe egy olyan görbe, melynek iterációja során, a szakaszokat minden lépésben három részre osztjuk és a középső darabot kicseréljük a rá állítható egyenlő oldalú háromszög másik két oldalára.

A Koch-görbe egy érdekes tulajdonsága, hogy bármilyen két pontját vesszük, köztük az ívhossz végtelen.



2.1. ábra. Koch görbe

2.3.1. A Koch görbe hossza

Jelölje K_0 az induló alakzatot és K_{i+1} a K_i -ből iterációval kapott görbét.

A K_0 görbe legyen egy 1 hosszú egyenes.

Ekkor K_1 hossza

$$K_1 = \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3},$$

$$K_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$

$$K_3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^3,$$

⋮

$$K_i = \frac{1}{3} \cdot K_{i-1} \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} \cdot 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^i.$$

Mivel a Koch görbe önhasonló, ezért bármilyen kis részét nézve ugyanezt a mintázatot tapasztaljuk. Továbbá bármilyen nagy M határt megadva meghatározható hozzá egy i , amire a görbe hossza a K_i -edik lépéstől kezdve nagyobb, mint M .

A Koch görbével jól modellezhető az előző fejezetben említett partvonal-probléma, mely során a partvonalat vége egy tetszőleges kezdőpontot és r hosszt meghatározva felosztjuk a partvonalat. Ezután pedig az így kapott szakaszokra elvégezzük a Koch göbe iterációs lépését, annyi különbséggel, hogy ebben az esetben a görbe "csúcsai" véletlenszerűen állnak befelé és kifelé.

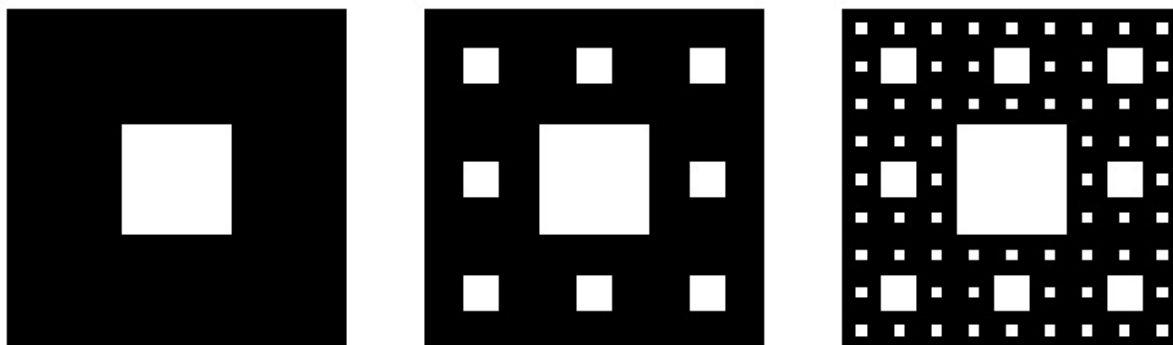
3. fejezet

Sierpinski-szőnyeg

A Sierpinski-szőnyeg a Cantor-halmaz ötletét viszi át kétdimenzióba. Itt első lépésben veszünk egy egységnégyzetet, majd kilenc egyenlő részre osztjuk (az oldalakkal párhuzamos három-három egyenessel), így kilenc négyzetet kapunk. Ezekből pedig elhagyjuk a középsőt, majd a megmaradt nyolc ($\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ oldalhosszú) négyzetre ismételjük az eljárást és így egy egyre "lyukacsosabb" négyzetet kapunk, ezzel előállítjuk a Sierpinski szőnyeget.

3.1. Dimenzió

A Cantor-halmaz esetén megfigyelhettük, hogy minden lépésben a szakaszok száma a kétszeresére, míg a kicsinyítés aránya háromszoros lesz.



3.1. ábra. Sierpinski szőnyeg

Létezik-e ez az $s = \lim_{r \rightarrow 0+0} \frac{\log N_1(r)}{-\log r}$ az eddig említett példánál?

Ennek megvizsgálásához vegyük a Cauchy-kritériumot, vagyis egy N_0 küszöb-től minden $N_0 < n, m \in \mathbb{N}$ -re teljesül, hogy

$$\left| \frac{\log N_2(r_n)}{-\log r_n} - \frac{\log 2 \cdot N_1(r_m)}{-\log \frac{1}{3} \cdot r_m} \right| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0$ esetén, ahol $N_2(r_n)$ az oldalak száma, r_n pedig az oldalak hossza, vagyis minden a -ik lépésben az $r = (\frac{1}{3})^a$ és $N_2(r) = 2^a$, ahol $a \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\log 2^n}{-\log (\frac{1}{3})^n} - \frac{\log 2^m}{-\log (\frac{1}{3})^m} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{n \cdot \log 2}{-n \cdot \log (\frac{1}{3})} - \frac{m \cdot \log 2}{-m \cdot \log (\frac{1}{3})} \right| < \varepsilon.$$

Vagyis minden lépésben az arány állandó, és $\forall \varepsilon > 0$ esetén bármely $N = 0$ jó küszöb lesz. A képlet alapján a Cantor-halmaz box-dimenziója:

$$s = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_2(r)}{-\log r},$$

$$s = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63.$$

A 3.1-es ábrán látható Sierpinski-szőnyeg minden lépésben az elemek számának a nyolcszorosa lesz, az oldalak mérete pedig harmadakkora. A határérték létezése hasonlóan belátható, mint az előző esetekben, dimenziója pedig:

$$s = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,89.$$

3.2. Iterált függvény rendszer (IFS)

Iterációnak nevezzük, amikor egy függvényt ismételten alkalmazunk.

Legyen a függvény f és jelöljük a második iterációs lépést f^2 -tel. Az f függvény n -ik iterációs lépését jelölje f^n .

A korábban bevezetett jelöléseket felhasználva $K_1 = f([a, b])$, $K_n = f^n([a, b])$.

3.2.1. Definíció. Ha B egy halmaz és $f : B \rightarrow B$, vagyis ha f egy olyan függvény amely a B halmazt önmagába képezi le, akkor

$$f^0(x) = x, f^n(x) = f \circ f^{n-1}(x); \quad x \in B, n = 1, 2, \dots$$

Akkor beszélünk iterált függvényrendszeréről (Iterated Function System), ha több függvényt iterálunk egyszerre, tehát $F = \{F_i | i = 1, 2, \dots, N\}$, $F : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ kontrakciók és B korlátos és zárt halmaz. Ekkor

$$F_i(B) = \{F_i(x); x \in B\},$$

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N F_n(B), B \subset \mathbb{R}^2.$$

Egy nem triviális felső becslést kapunk a B halmaz Box-dimenziójára ha tekintjük a hasonlósági dimenzióját, B halmaz IFS-beli függvényei a λ_i arányú hasonlóságok, ekkor a hasonlósági dimenzió a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^s = 1$$

egyenlet egyértelmű megoldásai.

3.2.2. Tétel. Nyílt halmaz feltétel (Open Set Condition): Létezik olyan U nyílt korlátos halmaz melyre $F_i(U) \subset U$ minden i -re és $F_i(U) \cap F_j(U) = \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén. [4]

3.2.3. Tétel. Ha az OSC teljesül egy halmazra, akkor ott a Hasonlósági- és Box-dimenzió megegyezik.

Attraktor

3.2.4. Definíció. IFS *attraktorának* nevezzük azt az alakzatot melyre ismételten végrehajtva a W iterációt, az alakzat önmagát adja:

$$W(B) = B.$$

Ezek a pontok lesznek az IFS fixpontjai.

Tehát azt az alakzatot, melyre ha végrehajtjuk az F függvényrendszer minden függvényét, akkor önmaga lesz a képe.

3.2.5. Tétel. Hutchinson tétel: Az $\{F_l\}_{l=1}^L$ iterált függvényrendszer által a C kompakt halmazon értelmezett (C, d_H) téren indukált halmazértékű F leképezésnek egyetlen $S^* \in C$ fixponthalmaza van, és tetszőleges $S \in C$ halmazból indulva $F^n(S) \rightarrow S^*$, ha $n \rightarrow \infty$.

3.2.1. Koch görbe dimenziója

Mivel az elemszám mindig a négyszeresére nő, a hossz pedig a harmadára csökken, ezért a Koch görbe dimenziója kiszámolható a hasonlósági-dimenzió segítségével, és teljesül rá a nyílt halmaz feltétel, ezért a dimenziója:

$$s = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26.$$

3.2.2. Példák az IFS-re

Tekintsük a korábban felhasznált függvényeket, ám ez alkalommal IFS segítségével hozzuk létre őket.

Cantor halmaz

Alapként vegyük a $B = [0, 1]$ szakaszt.

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3},$$

$$F_2(x) = \frac{1}{3}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

A kiinduló szakaszt nevezzük el K_0 -nak és minden iterációs lépés után keletkezett alakzat neve legyen $W(K_n) = K_{n+1}$. A $W(C) = C$ lesz a Cantor-halmaz.

Sierpinski szőnyeg

Induljunk ki a $B = [0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzetből

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad F_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$F_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad F_4(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$F_5(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad F_6(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_7(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_8(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

A Sierpinski szőnyeg hasonlóképpen adódik, mint a Cantor-halmaz korábban, megegyezik a $W(S) = S$ -el.

3.3. Összefüggőség

A fraktálokat még érdemes megvizsgálni összefüggőségük szempontjából is. Szemléletesen egy halmaz akkor összefüggő ha egy darabból áll.

3.3.1. Definíció. Egy H halmaz *nem összefüggő*, ha találhatók A és B diszjunkt nyílt halmazok úgy, hogy ezek lefedik H -t. *Ívszerűen összefüggő*, ha bármely két pontja között van folytonos görbe, melynek minden pontja eleme H -nak.

3.3.2. Definíció. A halmazok *távolsága* a halmazok pontjai, távolságai infimuma. Az A, B halmazokra jelöljük a távolságukat $dist(A, B)$ -vel.

Többféle távolságot is be lehet vezetni, kompakt halmazoknál erre szükség is van, ezért néha a Hausdorff-távolságot használjuk.

Nyilván, ha egy alakzatot felbontunk két valódi részhalmazának uniójára, és ha a részhalmazok távolsága nagyobb, mint nulla, akkor a kiinduló alakzat nem összefüggő.

Az eddigi példákat tekintve vegyük először a Cantor-halmazt. Ez porszerű szerkezetéből adódóan nem összefüggő. A $[0, 1]$ -ben definiált Cantor-halmazt osszuk két halmazra. Az egyik $C \cap [0, \frac{1}{3}]$, a másik $C \cap [\frac{2}{3}, 1]$ halmaz. Ekkor a halmazok távolsága $\frac{1}{3} \neq 0$.

4. fejezet

Négyzetfraktálok

A fejezetben a Sierpinski-szőnyeghez hasonló konstrukcióval rendelkező négyzetfraktálokat tekintjük, melyek IFS-e nem tartalmaz forogást, csak eltolást és zsugorítást. Bevezetjük az $N_k\{b_i\}$ jelölést, ahol a k jelzi, hogy az egység-négyzet oldalát hány egyenlő részre osztottuk, majd b_i , hogy mely négyzetek pozíciójába toljuk el, a zsugorított négyzeteket, rendre bal felülről kezdve a számozást. Például a Sierpinski-szőnyeget $N_3\{1 \dots 4, 6 \dots 9\}$ jelöli.

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

4.1. ábra. N_5 -ben a jelölés

4.0.1. Definíció. Komponens:

n -ik lépésben a *komponensek* a $(n-1)$ -ik lépésbeli alakzat IFS által kicsinyített másai.

4.1. $N_3\{2 \dots 9\}$

Először tekintsünk a szőnyeghez igen hasonló konstrukciót, de ez alkalommal a bal felső négyzetet hagyjuk el minden lépésben.

Ennek dimenziója azonosan adódik, mint a Sierpinski-szőnyegé, mivel a box-dimenzió definíciójából adódó lefedő négyzetek száma nem változik lépésenként. Továbbá az összefüggőség szempontjából sem változik, vagyis összefüggő. Elmondható hogy az N_3 -ből egy négyzet elhagyásával nem változnak a fent említett tulajdonságok.

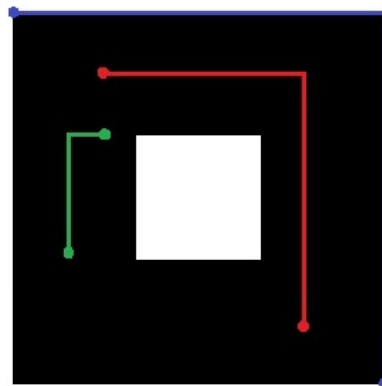
Sierpinski szőnyeg összefüggőségének bizonyítása

Bizonyítjuk a $[0, 1] \times [0, 1]$ -ben fekvő Sierpinski-szőnyeg ívszerű összefüggését. A konstrukció első lépésében jól láthatóan bármely két pont összeköthető végtelen sok görbével.

Tekintsük azt a két egyenesből álló görbét, ahol az első egyenes párhuzamos az x tengellyel, a második pedig párhuzamos az y tengellyel. Legyen $t = [0, 1]$ paraméterintervallum, a görbék végpontja legyen $a = (x_a, y_a)$, $b = (x_b, y_b)$. A görbe pedig legyen az $S_1 = (x = |-\frac{t}{2} - \frac{1}{2}| + \frac{t}{2}, y = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}| + \frac{t}{2})$, vagy ha csak egy egyenesből áll a görbe, akkor az őket összekötő egyenes legyen a görbe.

A második lépésben felhasználjuk az első lépésben előállított görbéket. Vegyünk két tetszőleges pontot és az őket összekötő tetszőleges komponenssort. Mivel az első lépésben beláttuk, hogy komponensen belül bármely két pont között létezik összekötő görbe, ezért létezik ilyen görbe a komponenssoron keresztül is, amiből végtelen sok van, válasszunk egyet tetszőlegesen. A görbe legyen az 1. lépésbeli görbék kicsinyített másaiból összefűzött görbe. A t paraméterintervallumot osszuk fel annyi egyenlő intervallumra, ahány komponensen keresztülhalad a görbe, eltekintve azoktól, melyeket csak egyetlen pontban érint, valamint, ha két oldal határán halad, akkor tetszőlegesen válasszuk az egyiket, és minden intervallum feleljen meg az első lépésbeli intervallum kicsinyítéseként.

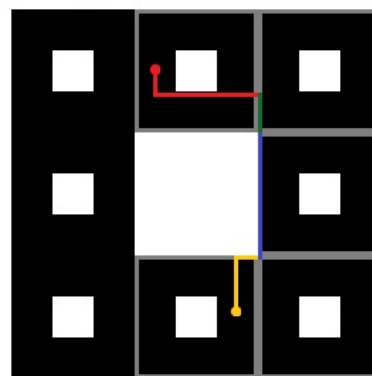
Tegyük fel hogy az n -ik lépésben találtunk görbét bármely két pont között. Tekintsük az $(n + 1)$ -ik lépést. Ha tekintünk két $(n + 1)$ -ik lépésbeli pontot, akkor nézzük az őket összekötő komponens sort. A komponenseken belül bármely két pont között van görbe, és a komponensek oldalának van közös pontja, és ezen



Példák két pontot összekötő görbére

$$S_1 = (|-\frac{t}{2} - \frac{1}{2}| + \frac{t}{2})$$

t



t

4.2. ábra. Első két lépés

pontok közt felírható görbe, mivel az n -ik lépésben volt köztük görbe. A paraméterintervallumot osszuk fel annyi részre, ahány komponensen keresztülhalad a görbe, azoktól eltekintve, amelyekben csak egyetlen pontot érint. Ezen intervallumok legyenek az n -ik lépésbeli görbék paraméterintervallumainak kicsinyített másai.

4.2. $N_3\{1 \dots 5, 6, 9\}$

Ez alkalommal már két négyzetet hagyunk el. A fraktál dimenziója emiatt csökken, és értéke

$$s = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1,77.$$

Az összefüggőség kérdése valamivel izgalmasabb. Kérdés, hogy összefüggő-e az 5-ös és 9-es négyzet. A kérdés valójában az, hogy ha egy négyzetfraktálban a csúcsok érintkeznek, akkor az összefüggő-e.

4.2.1. Csúcsos érintkezés vizsgálata

Tekintsük a $[0; 0, 5] \times [0; 0, 5]$ és $[0, 5; 1] \times [0, 5; 1]$ csúcsuknál összeérő négyzeteket. Az összefüggőségénél egy erősebb állítást bizonyítunk, mégpedig hogy ívszerűen összefüggő, amiből már következik hogy összefüggő.

Vegyük a tetszőleges $s = \lim_{r \rightarrow 0+0} \frac{\log N_1(r)}{-\log r}$ és a $b(x_2, y_2) \in [0, 5; 1] \times [0, 5; 1]$. Megadható görbe A és B közt az alábbi tengelypárhuzamos egyenes szakaszokból, melyek végpontjai sorra S_1, S_2, S_3, S_4 .

$$A = S_1(x_1; y_1), S_2(x_1; 0, 5), S_3(x_2; 0, 5), S_4(x_2; y_2) = B.$$

Mivel A és B pontokat tetszőlegesen választottuk, ezért a csúcsuknál érintkező négyzetek ívszerűen összefüggnek, vagyis ez az alakzat összefüggő.

4.3. $N_3\{2 \dots 5, 6, 9\}$

Most nézzük az első példánkat, mely esetén a konstrukció második lépésében látszik, hogy nem összefüggő. Az attraktorban két komponens pontos távolságát nehéz meghatározni, de tekintsük a konstrukció második lépését, ahol a 9-es négyzet helyén lévő alakzat és az alakzat többi része közti távolság $\frac{\sqrt{2}}{9}$, ami több, mint nulla, tehát nem lehet összefüggő.

Ez példa arra is, hogy egy négyzetfraktál esetén, attól függetlenül is, hogy a kiinduló alakzat összefüggő volt lehet, hogy az attraktor már nem lesz az. Viszont ha be tudjuk látni valamelyik lépésben a nem összefüggőséget, akkor kijelenthető az attraktorról is, hogy nem összefüggő.

4.4. $N_3\{4, 5, 6\}$

A vizsgált fraktál ez esetben az lesz, melynek a felosztás után minden lépésben a középső három négyzetét hagyjuk meg.

Mikor a kiinduló egységnyezetet felosztjuk és végrehajtjuk az első néhány lépést észrevehetjük hogy az alakzat hossza nem változik, viszont magassága mindig a harmadára csökken. Így az alakzat tartani fogy az egy hosszú nulla magas "téglalaphoz".

Következő lépésként vizsgáljuk az alakzat dimenzióját:

$$s = \frac{\log 3}{\log 3} = 1.$$

Összefüggőség tekintetében az alakzat összefüggő. Mivel tudjuk hogy a konstrukció során mindig a középső harmad marad meg, ezért az $A = [0; 0, 5]$ pont biztosan eleme lesz. Továbbá, mivel a magassága nulla, ezért az x tengely 0 pontjában csak ez az egy érték lesz eleme. Ez minden $b \in [0, 1]$ pontról elmondható. Minden $A(x_1; 0, 5), B(x_2; 0, 5), x_1, x_2 \in [0, 1]$ ponthoz pedig létezik az AB összekötő egyenes ennek minden pontja $N_3\{4, 5, 6\}$ -nak is pontja.

A fraktál attraktora tehát egy szakasz lesz, és ennek minden tulajdonsága is megegyezik a szakaszéval. Bármely olyan N_3 esetén, ahol hat négyzetet hagyunk el az attraktor 1 dimenziós lesz.

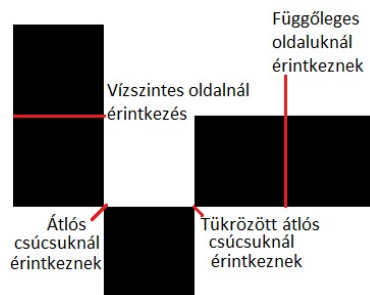
További szakaszt kapunk az $N_3\{1, 2, 3\}, N_3\{7, 8, 9\}$ ezek az x tengellyel párhuzamos valamint az $N_3\{1, 4, 7\}, N_3\{2, 5, 8\}, N_3\{3, 6, 9\}$ esetén is ekkor az y tengellyel lesz párhuzamos, valamint átlós szakaszok lesznek az $N_3\{1, 5, 9\}, N_3\{3, 5, 7\}$ fraktálok. Bármely más esetben az alakzat nem lesz összefüggő.

4.5. $N_3\{4, 6\}$

Ennél már csak lépésenként két négyzetet tartunk meg. Induljunk ki az előző példa attraktorából és azt iteráljuk. Így jó alakzatot kapunk ugyanis ezen feladat attraktora részhalmaza lesz az előző attraktorának. Ha az egyenes középső harmadát minden lépésben elhagyjuk, akkor a már korábban vizsgált Cantor-halmazt

kapjuk meg. Ellenőrzésként tekintsük a dimenzióját, ami $s = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63$ lesz, ez pedig megegyezik a korábban vizsgált dimenzióval.

4.6. Összefüggőség meghatározása tetszőleges négyzetfraktálnál



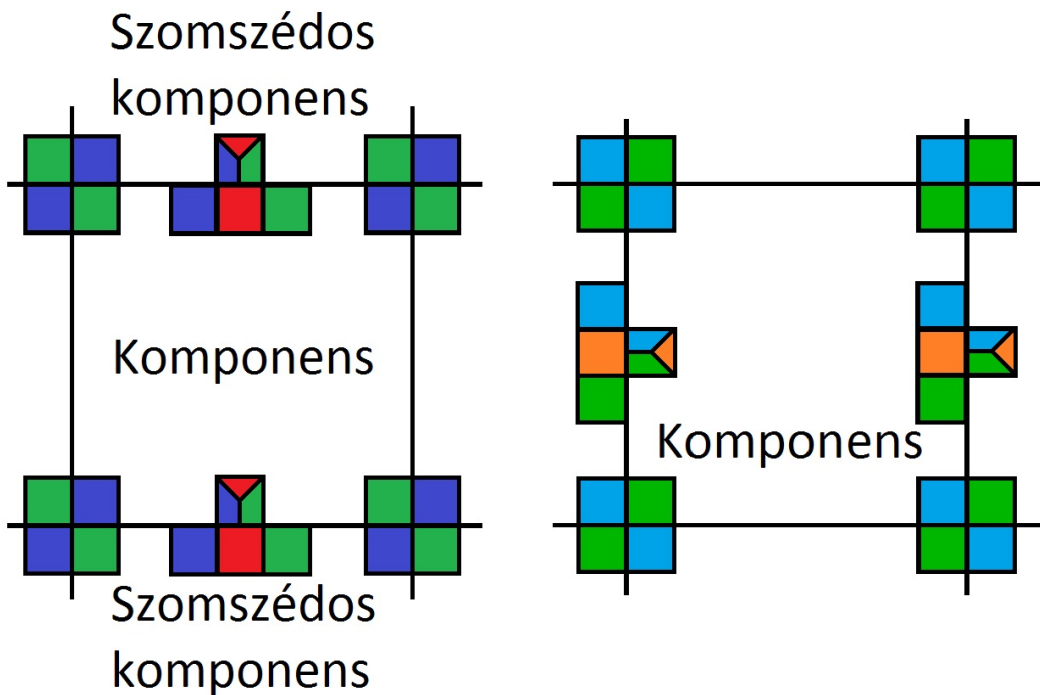
4.3. ábra. A 4.6.1. Definíció érintkezései

4.6.1. Definíció. Két komponens *összefüggés szempontjából rektifikálhatónak* nevezünk, ha:

1. Átlósan érintkeznek a csúcsaiknál és a kiinduló alakzatnak eleme az első és az n^2 -ik négyzet, valamint a kiinduló alakzatban összefügg az első és n^2 -ik négyzet.
2. Tükrözött átlósan érintkeznek a csúcsaiknál és a kiinduló alakzatnak eleme az n -ik és az $n(n-1)+1$ -ik négyzet, valamint a kiinduló alakzatban összefügg az n -ik és az $n(n-1)+1$ -ik négyzet.
3. Függőleges oldaluknál érintkeznek. Valamint az $(1; n)$, vagy $((n+1)+1; 2n)$, \dots , vagy $(n(n-1)+1; n^2)$ négyzetek a kiinduló alakzatnak elemei és összefüggnek a kiinduló alakzatban.
4. Függőleges oldaluknál érintkeznek, és a kiinduló alakzatban teljesül az átlós érintkezés. Továbbá legalább egy, a következő négyzet párokból is eleme a kiinduló alakzatnak $(1; 2n)$ vagy $(n+1; 3n)$ vagy \dots $(n(n-1)+1; n^2)$. Az oldalas érintkezés sarkos érintkezéssé alakul.
5. Függőleges oldaluknál érintkeznek, és a kiinduló alakzatban teljesül a tükrözött átlós érintkezés és legalább egy, a következő négyzet párokból is eleme

a kiinduló alakzatnak $(1; 2n)$ vagy $(n + 1; 3n)$ vagy $\dots (n(n - 1) + 1; n^2)$. Az oldalas érintkezés sarkos érintkezéssé alakul.

6. Vízszintes oldaluknál érintkeznek. Valamint az $(1; n(n-1)+1)$, vagy $(2; n(n-1) + 2)$, vagy \dots , vagy $(n; n^2)$ négyzetek a kiinduló alakzatnak elemei és, összefüggnek a kiinduló alakzatban.
7. Vízszintes oldaluknál érintkeznek, és a kiinduló alakzatban teljesül az átlós érintkezés és legalább egy, a következő négyzet párokból is eleme a kiinduló alakzatnak $(2; n(n - 1) + 1)$ vagy $(3; n(n - 1) + 2)$ vagy $\dots (n; n^2 - 1)$. Az oldalas érintkezés sarkos érintkezéssé alakul.
8. Vízszintes oldaluknál érintkeznek, és a kiinduló alakzatban teljesül a tükrözött átlós érintkezés és legalább egy, a következő négyzet párokból is eleme a kiinduló alakzatnak $(1; n(n - 1) + 2)$ vagy $(2; n(n - 1) + 3)$ vagy $\dots (n - 1; n^2)$. Az oldalas érintkezés sarkos érintkezéssé alakul.



4.4. ábra. Komponensek közti érintkezés Függőleges és Vízszintes esetben

A definíció szemléltetéséhez tekintsük a 4.4-es ábrát, melyen az látható, hogy két komponens mikor lesz összefüggő és miért. A piros eset amikor szemközti négyzetek vannak, a kék és zöld pedig az elcsúsztatott eset, figyelve rá hogy az átlós vagy tükrözött átlós érintkezés is teljesül.

4.6.2. Definíció. *Redukált görbe a k -ik szinten:* az a görbe, amely minden négyzetet maximum egyszer érint, és minden korábbi szinten is redukált görbe volt

4.6.1. Lemma. *Minden összefüggő négyzetfraktálban a k -ik szinten van redukált görbe.*

Bizonyítás. A k -ik szinten véges sok négyzet van, tehát két pontot összekötő görbét tartalmazó négyzet is véges sok van, ha kikötjük, hogy egy négyzetet egyszer érinthet.

Az első szinten nyilvánvalóan van redukált görbe. A második szinten nézzük azokat a görbéket, amelyek komponensen belül az előző lépésbeli egyik redukált görbe kicsinyítései. Tekintsük ezek közül az összefűzhető első szinten redukált görbéket, majd alkossunk meg egy második szinten redukált görbét. A harmadik szinten ez hasonlóképpen elmondható, és így eljutunk k -ig. \square

4.6.3. Tétel. *Ha egy N_n négyzetfraktál, melynek az IFS-e nem tartalmaz forgatást összefüggő, akkor ívszerűen is összefüggő.*

Bizonyítás.

Ívszerűen összefüggő \Rightarrow összefüggő, ez következik az ívszerűen összefüggőség definíciójából.

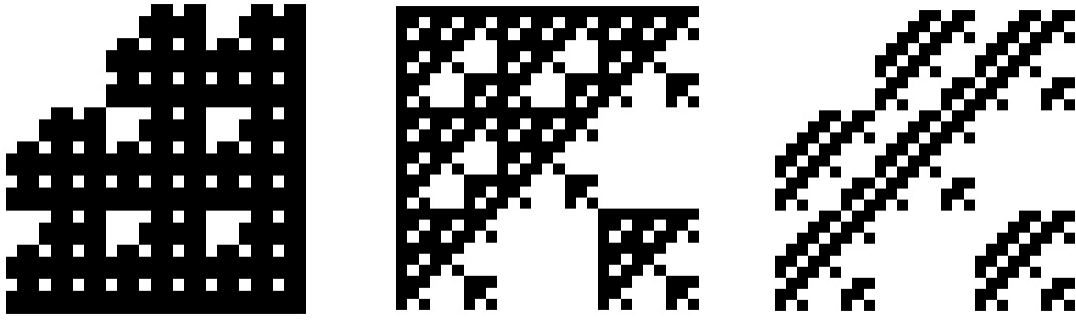
Tekintsük az N_n összefüggő négyzetfraktál két pontját. Vegyük az első lépésben az összes redukált görbét a két pont között. Hagyjuk el azokat, amelyek már nem elemei a második lépésnek, így továbbra is redukált görbéket kapunk.

A lemma alapján a k -ik lépésben létezik redukált görbe a két pont között, mivel N_n összefüggő minden iterációs lépésben. Tekintsük a $(k + 1)$ -ik lépést, és hagyjuk el a k -ik lépésben talált redukált görbesereg azon tagjait, amik már nem elemei a $(k + 1)$ -ik lépésnek.

Ezzel beláttuk hogy bármely két pont között megadható redukált görbe, vagyis ívszerűen összefüggő. \square

4.6.4. Tétel. *Az N_n tetszőleges négyzetfraktál ívszerűen összefüggő, ha a kiinduló alakzat összefüggő úgy, hogy két komponens közt akkor van összefüggőség, ha azok összefüggés szempontjából rektifikálhatóak.*

Bizonyítás. Ha N_n kiinduló alakzata összefüggő volt, akkor az önhasonlóság miatt a zsugorítás során a keletkező komponensek is összefüggőek lesznek. Ha két komponensnél az összefüggőség amiatt nem változik, hogy teljesen



4.5. ábra. $N_3\{2 \dots 9\}$, $N_3\{1 \dots 5, 6, 9\}$, $N_3\{2 \dots 5, 6, 9\}$ harmadik iterációja

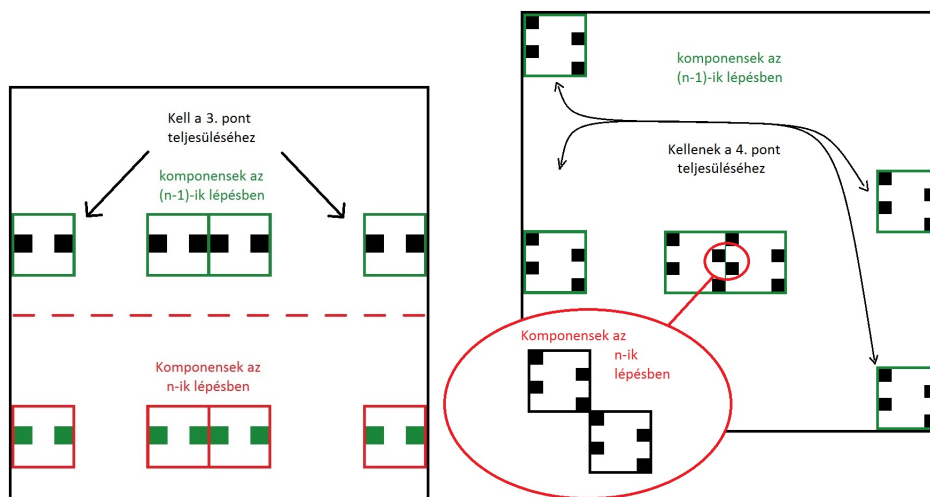
1. az átlós érintkezés, akkor a két keletkező komponens bal felső és jobb alsó sarka érintkezik, ezt pedig korábban beláttuk, hogy elegendő az összefüggőséghez, és mivel a komponensen belül volt görbe bármely két pont között, ezért a két komponens közt is lesz út bármely két pont között.
2. a tükrözött átlós érintkezés, akkor az 1.-es eset itt is elmondható azzal a különbséggel hogy ebben esetben a jobb felső és bal alsó négyzeteken keresztül vezet a görbe.
3. a vízszintes vagy függőleges oldalnál érintkezés, akkor a két komponens közt lesz út, mivel keletkezik két oldalasan érintkező komponens.

Ezzel lefedtük az összes lehetséges esetet, és elégséges feltételt biztosítottunk a forgatást nem tartalmazó négyzetfraktál összefüggőségéhez. \square

4.6.2. Lemma. *Bármely N_n kiinduló alakzatából három megfelelő négyzetet elhagyva nem összefüggő alakzatot kapunk.*

Bizonyítás. Tetszőleges N_n -et véve, ha a kiinduló alakzatban nem szerepelnek az $n^2 - 1, n(n - 1), n(n - 2)$ négyzetek, de szerepel az n^2 -en kívül legalább egy négyzet, akkor az alakzat nem lesz összefüggő, mivel az n^2 négyzet izolált lesz. Érdeemes megemlíteni, hogy akkor sem lesz összefüggő az alakzat, hogyha az egyik sarok négyzetet és a vele szemközti sarokban lévő négyzetet oldalasan határoló négyzeteket hagyjuk el. Ilyenkor ugyanis nem teljesül az átlós vagy a tükrözött átlós összefüggőség. \square

4.6.5. Tétel. *Egy nem összefüggő IFS-ű négyzetfraktál az iteráció harmadik lépésétől kezdve nem összefüggő.*



4.6. ábra. 3. és 4. pont teljesülése

Bizonyítás. Tegyük fel hogy az alakzat összefüggősége az n -ik lépésben szűnik meg, és $n > 2$. Tekintsük azt az esetet, hogy vizsgáljuk a következő két esetet:

1. eset: két komponens sarkai közt szűnik meg az összefüggőség.

Mivel az $(n - 1)$ -ik lépésben még összefüggő volt, tehát a komponenseken belül összefüggő. Ez azt jelenti, hogy egy csúcs érintkezés szűnt meg két komponens között, tehát egyik, vagy mindkét négyzet hiányzik a komponensek sarkaiból, ahol korábban érintkeztek. Ez akkor lehetséges, ha a megfelelő átlós, sarokban lévő négyzetek nem részei a kiinduló alakzatnak. Ez nem lehetséges, ha ugyanazt a két komponens tekintjük, akkor az érintkező sarok négyzetek nem lehettek értelmezve, ezek ugyanis nem voltak részei a kiinduló alakzatnak sem, és feltettük hogy az n -ik lépésben szűnt meg. Ez viszont hamis, ugyanis a második lépéstől ez nem lehetett összefüggő.

2. eset: két komponens oldala mentén szűnik meg az összefüggőség. Mivel az $(n - 1)$ -ik lépésben még összefüggő volt ezért a két komponensen belül a négyzetek vagy sarkosan, vagy oldalasan érintkeztek. A sarkos érintkezés úgy állhat elő, ha nem teljesül a 3. vagy 6. oldalas érintkezés feltétel, viszont mivel feltettük hogy nem összefüggők az n -ik lépésben, ezért a 4.,5.,7.,8. feltételek valamelyikéből a megfelelő átlós, vagy tükrözött átlós érintkezés sem teljesül.

Tekintsük az $(n - 1)$ -ik lépésben a komponensek között oldalasan érintkező négyzetek esetét, vagyis az 3. vagy 6. pontja teljesült a definíciónak. Ha viszont teljesül akkor értelmezve van a komponensek közti összeköttetés az

n -ik lépésben is, ha pedig nem tesz eleget az 3. vagy 6. pontnak akkor az $(n - 1)$ -ik lépésben sem lehetett összefüggő, tehát a feltevés hamis volt.

Tekintsük a másik esetet amikor a komponensek közti érintkezést bennük két sarkosan érintkező négyzet adja. Ez úgy állhatott elő, hogy a 4.,5.,7.,8. közül teljesül valamelyik és az 3., 6. nem. Mivel az n -ik lépésben ez az összefüggés megszűnt, vagyis az átlós érintkezés feltétele (1.,2.) nem teljesül. Ez viszont a 2. lépésben meg kellett hogy történjen, mivel az első lépésben az oldalas érintkezés a komponensek közt sarkossá "alakul", majd mivel ez nem teljesül a második lépésben meg is szűnik.

Tehát nem szűnhetett meg az $n > 2$ -ik lépésben. Ezzel beláttuk az állítást.

□

Irodalomjegyzék

- [1] László Máté Budapest, 2015. Július
<https://www.researchgate.net/publications/280533047>
- [2] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: *Valós analízis I.*, Typotex, Budapest 2012.
- [3] Maga Péter Budapest, 2009. <http://www.renyi.hu/~magap/publications/dissertations/diploma.pdf>
- [4] Bárány Balázs Budapest, 2012. https://repozitorium.omikk.bme.hu/bitstream/handle/10890/1140/tezis_hun.pdf