GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK KORLÁTOZOTT ESZKÖZÖKKEL

BSc szakdolgozat

Készítette: **Gyalog Eszter** (Matematika BSc)
Témavezető: **Moussong Gábor** (adjunktus)

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar
Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatom témája a geometriai szerkesztések, ezen belül szerkesztések végrehajtása korlátozott eszközökkel.

A középiskolában, illetve már az általános iskolában a gyerekek az euklideszi szerkesztésekről tanulnak, melyek során körzőt és vonalzót használhatnak. Szakdolgozatom arról szól, hogy ha csak az egyik eszközt használhatjuk fel a szerkesztések során, akkor melyek azok a pontok, amik előállnak. Szakdolgozatom úgy készült, hogy egy tehetségesebb, érdeklődőbb középiskolás diák is meg tudja érteni ezeket a szerkesztési lépéseket.

Több, mint 2000 évvel ezelőtt a görög Eukleidész, az *Elemek* című híres ókori tankönyv szerzője, egyélű vonalzót és körzőt használt a szerkesztések során, s rögzítette ezek használatát. A szakdolgozat első része ezekről az euklideszi szerkesztésekről szól.

A következő részben Lorenzo Mascheroni olasz matematikus 1797-ben kimutatott tételéről lesz szó, mely a szerkesztési lépések során csak körzőt használ. Mindezt már 1672-ben a kevésbé ismert Georg Mohr is megalkotta Mascheroni tudomása nélkül.

A szakdolgozat másik fő része Jean-Victor Poncelet francia és Jacob Steiner svájci matematikusok nevéhez fűződik. A 19. század első felében a csak vonalzós szerkesztésekkel foglalkoztak.

2. Euklideszi szerkesztés

Euklideszi szerkesztésnek azt a körzővel és vonalzóval végzett szerkesztést nevezzük, melyek a következő öt, elemi lépésnek véges sokszori alkalmazásával jönnek létre:

1. Két már megszerkesztett ponton keresztül vonalzóval egyenest húzhatunk.
2. Egy már megszerkesztett pont körül két már megszerkesztett pont közötti távolsággal kört rajzolhatunk körző segítségével.
3. Két már megszerkesztett metsző egyenes metszéspontját kijelölhetjük.
4. Már megszerkesztett kör és egy azt metsző, már megszerkesztett egyenes mindkét metszéspontját kijelölhetjük.
5. Két egymást metsző, már megszerkesztett kör mindkét metszéspontját kijelölhetjük.

Egy alakzatot megszerkeszthetőnek tekintünk, ha előáll az euklideszi szerkesztési lépések véges sokszori egymásutánjaként. Ekkor feltesszük, hogy tetszőlegesen hosszú vonalzónk és tetszőlegesen nagy nyílású körzőnk van. A szerkesztések során felhasználjuk a feladatban megadott adatokat, illetve a már korábban előállt, megszerkesztett pontokat. Ismeretes, hogy léteznek olyan alakzatok, feladatok, melyek euklideszi szerkesztéssel nem megoldhatók. A következő példákra már az ókori matematikusok is kerestek euklideszi megoldást, de csak sokkal később, a 19. században tudták bebizonyítani, hogy ezeket valóban nem lehet euklideszi szerkesztéssel végrehajtani:

- egy olyan négyzet oldalának megszerkesztése, melynek területe megegyezik egy adott kör területével,
- egy olyan kocka élének megszerkesztése, melynek térfogata megegyezik egy adott kocka térfogatának kétszeresével,
- egy adott szög harmadának megszerkesztése.

Az ókorban a körzőt és vonalzót jelölték ki, mint szerkesztési eszközök, de gondoljuk végig, hogy milyen szerkesztéseket végezhetnénk el, ha eszközeinket korlátoznánk.

Tekintsük azt az esetet, mikor vonalzót nem használunk, csak körzőt. Első gondolatunk az lehet, hogy így kevesebb szerkesztést tudunk végrehajtani.

Gondoljunk az egyenesekre, melyeket ténylegesen természetesen nem tudjuk megrajzolni, azonban ismeretes, hogy két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, s ezt el tudjuk képzelni a szerkesztések során is, továbbá például három pont is egyértelműen kijelöl egy háromszöget.

Vajon ha ilyenformán el tudjuk képzelni az egyeneseket, akkor már minden euklideszi szerkesztéssel előállított pont megszerkeszthető csak körzővel?

3. Mohr-Mascheroni-féle szerkesztés

Tétel: Minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés csak körzővel is előállítható. Ez azt jelenti, hogy ha a feladat megadott adataiból valamely pont előáll euklideszi szerkesztéssel, akkor az a Mohr-Mascheroni-féle szerkesztéssel, azaz csak körzővel is előáll.

Bizonyítás: Azt kell bebizonyítanunk, hogy az euklideszi szerkesztési alaplépéseket el tudjuk végezni csak körzővel, hiszen ezek véges sokszori alkalmazásával minden euklideszi szerkesztés előáll. Ezen szerkesztési eljárás során az elemi szerkesztési lépéseink a következőképpen változnak meg:

1. Egy már megszerkesztett pont körül adott távolsággal kört rajzolhatunk körző segítségével.
2. Két egymást metsző, már megszerkesztett kör mindkét metszéspontját kijelölhetjük.

Megjegyzés: Két pont meghatároz egy egyenest, így két már megszerkesztett pontot egyenesnek tekinthetünk.

Mivel a szerkesztési alaplépéseinkből hiányzik, hogy

4. Két már megszerkesztett metsző egyenes metszéspontját kijelölhetjük, és hogy,
5. Már megszerkesztett kör és egy azt metsző, már megszerkesztett egyenes mindkét metszéspontját kijelölhetjük,

így az a célunk, hogy ezeket a pontokat elő tudjuk állítani csak körzővel. A bizonyítás során természetesen vannak olyan alakzatok, melyeket teljes egészében nem tudunk előállítani, de véges sok pontja által egyértelműen megszerkesztettnek tekintünk.

Inverzió

A tétel bizonyításának fő eszköze egy geometriai transzformáció, az inverzió.

Inverzió során pontoknak, egyeneseknek és köröknek kapjuk meg inverzképeit. Legyen P egy választott pont a síkon. Az inverzió során felhasználunk egy tetszőleges sugarú k alapkört és ennek O középpontját, vagyis az inverzió pólusát. A P pont k alapkörre vonatkozó inverzképe legyen az P' pont. Ekkor a P és P' pontok ugyanazon az O-ból induló félegyenesen helyezkednek el, s teljesül rájuk a következő összefüggés: $OP \cdot OP' = r^2$, ahol r a k alapkör sugara.

Egy inverzió kétszer alkalmazva az identitást adja, vagyis ez egy olyan eljárás, melyet, ha kétszer végzünk el, visszakapjuk az eredeti feladatunkat. Tehát, ha egy feladatot inverzió segítségével oldunk meg, az inverzióbeli megoldás visszainvertálásával az eredeti feladatunk megoldását kapjuk vissza.

Az inverzió tulajdonságai:

1. Ha e egyenes áthalad a póluson, akkor az inverze (e') saját maga, kivéve az O középpont. (lyukas egyenes)
2. Ha e egyenes nem halad át az O póluson, akkor inverze olyan O-n áthaladó, $(\backslash\{O\})$ kör lesz, melynek O-beli érintője párhuzamos az e egyenessel.
3. Ha az l kör áthalad az O középponton, akkor l inverze olyan O-n át nem haladó egyenes, mely párhuzamos az l kör O-beli érintőjével.
4. Ha az l kör nem megy át az O póluson, akkor l kör inverze egy O-n át nem haladó kör.

Megjegyzés: Alapkör inverze, illetve az alapkört merőlegesen metsző körök inverzei saját maguk.

Visszatérve a hiányzó euklideszi szerkesztési alaplépésekre, a következő alakzatokat kell tudnunk inverzió segítségével megszerkesztenünk:

1. két egyenes metszéspontjának szerkesztéséhez a pont és az egyenes inverzét, illetve két pontpár alkotta egyenesek metszéspontját kell tudnunk megszerkeszteni.
2. egy egyenes és kör metszéspontjának szerkesztéséhez kör inverzét kell ismernünk, illetve egy kör és egy pontpár által meghatározott egyenes metszéspontjait kell tudnunk kijelölni.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy az inverzió segítségével valóban megszerkeszthető minden euklideszi szerkesztés csak körző használatával, a következő hat feladatot kell meggondolnunk:

1. Pont inverzének megszerkesztése
2. Egyenes inverzének megszerkesztése
3. Három pontra illeszkedő kör megszerkesztése
4. Kör inverzének megszerkesztése
5. Két pontpár által meghatározott egyenesek metszéspontjainak megszerkesztése
6. Egy kör és két pont által meghatározott egyenes metszéspontainak megszerkesztése

Ha ezeket a szerkesztési lépéseket végre tudjuk hajtani csak körzővel, akkor minden euklideszi szerkesztés is összerakható, hiszen ezekre van szükségünk az elemi alapszerkesztésekhez.

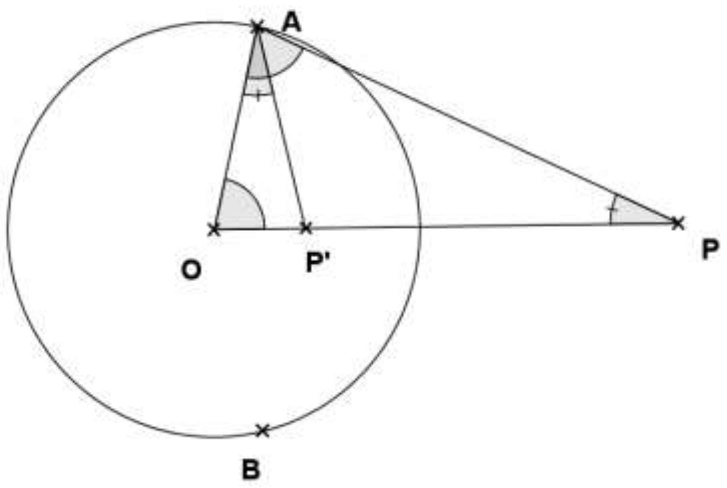
Az egyes szerkesztési feladatok során felhasználjuk a már korábban előállt pontokat és a már használt megoldási módszereket.

1. Szerkesszük meg pont inverzét csak körző segítségével!

A megoldás során az inverzió definícióját használjuk fel, miszerint $OP \cdot OP' = r^2$, ahol P egy adott pont, melynek inverze P' és r a k alapkör pólusa.

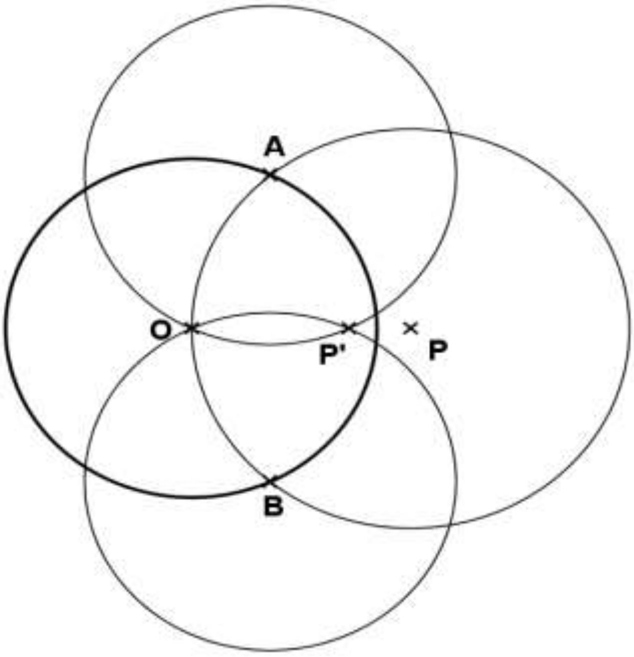
Vegyünk fel a síkon egy P pontot úgy, hogy P pontból OP távolságú kör rajzolása esetén ez a kör és az alapkör két pontban metsszék egymást. A metszéspontok legyenek A és B pontok. Ahhoz, hogy a definíció teljesüljön, P'-nek úgy kell elhelyezkednie az OP félegyenesen, hogy OAP háromszög hasonló legyen $OP'A$ háromszöghöz.

Ekkor felírható az az arányosság, hogy $OP'\!:\!OA = OA\!:\!OP$, melyből átrendezéssel következik az inverzió feltétele: $OP \cdot OP' = OA^2 = r^2$. (*1. ábra*)



1. ábra

A P pont P' inverzének előállítása a következőképpen történik:
A már ismert A és B pontokból AO, illetve BO ($AO = BO$) távolsággal kört rajzolunk, s ezek O-n kívüli metszéspontja adja a P' pontot. (*2. ábra*)



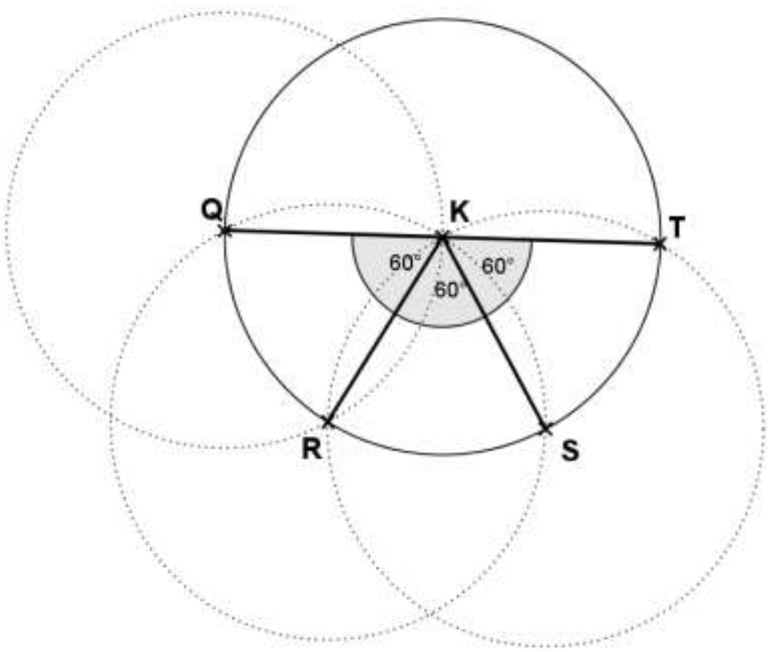
2. ábra

Az imént a P pont O-tól vett távolsága nagyobb, mint $\frac{r}{2}$, hisz csak így teljesülhet, hogy P pontból PO sugarú kör rajzolása esetén ez az alapkört két pontban metssze.

Meggondolandó az az eset, mikor $OP \leq \frac{r}{2}$, hisz ekkor P-ből OP távolsággal kört rajzolva csak egy metszéspontjuk lesz, vagy nem fogják metszeni egymást.

Az ilyen esetek megoldásának kulcsa az, hogy körző segítségével az OP távolságot a P ponton túl annyiszor kétszerezzük meg, hogy nagyobb legyen, mint $\frac{r}{2}$, s így adódik már két metszéspont, és a fent leírtakat tudjuk alkalmazni.

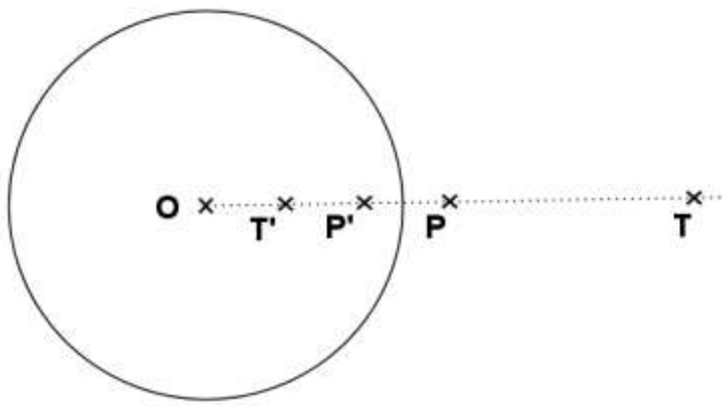
Vegyük észre, hogy két pont távolságát könnyű körzővel megkétszerezni: K pont legyen egy kör középpontja, Q pedig a kör egyik pontja. Ekkor Q pontból KQ sugarú kört rajzolunk, melynek az eredeti körrel vett egyik metszéspontja legyen $R,$ majd az R pontból indulva végezzük el az előző lépést. Ennek a körnek a Q-n kívüli metszéspontja az eredetivel legyen S, és ha S pontból kiindulva elvégezzük az előző lépéseket, a metszéspont a T pont lesz. Ezzel a módszerrel háromszor 60°-ot generáltunk, valójában a képzeletbeli QK egyenes körrel vett, Q-n kívüli metszéspontját kapjuk, s így a QT a kör egy átmérője, tehát a QK távolságot valóban megkétszereztük. (*3. ábra*)



3. ábra

Ezt tetszőlegesen sokszor (n-szer) végre tudjuk hajtani, egészen addig, míg nem kapunk két metszéspontot az alapkörrel.

Fontos észrevennünk, hogy Q pont Q' inverze kétszer akkora távolságra van az O pólustól, mint a T pont (mely kétszer akkora távolságra van O-tól, mint a P) T' inverze. Azaz $2 \cdot OP = OT$, de az inverzpontokra $2 \cdot OT' = OP'$, mivel $OT \cdot OT' = OP \cdot OP'$. (*4. ábra*)



4. ábra

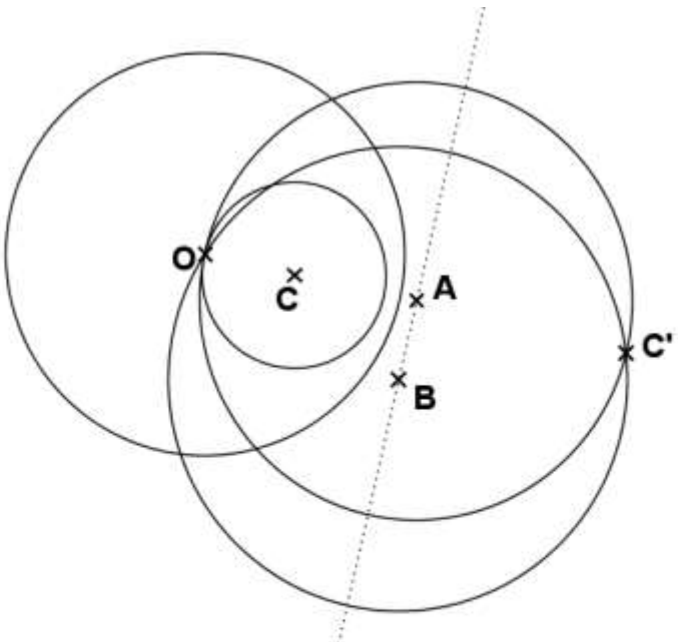
Szerkesszük meg a $2^n \cdot OP > \frac{r}{2}$ szakaszt, melynek O-n kívüli végpontjára, L pontra végezzük el az inverziót. Az előző észrevétel alapján, mivel az inverzképekre fordított arányosság teljesül, az inverzpont és O távolságát is meg kell szorozni 2^n-nel ahhoz, hogy az eredeti feladat megoldását kapjuk.

2. Szerkesszük meg egyenes inverzét csak körző segítségével!

Abban az esetben, ha az egyenes áthalad az O póluson, akkor inverze önmaga lesz, kivéve az O pontot.

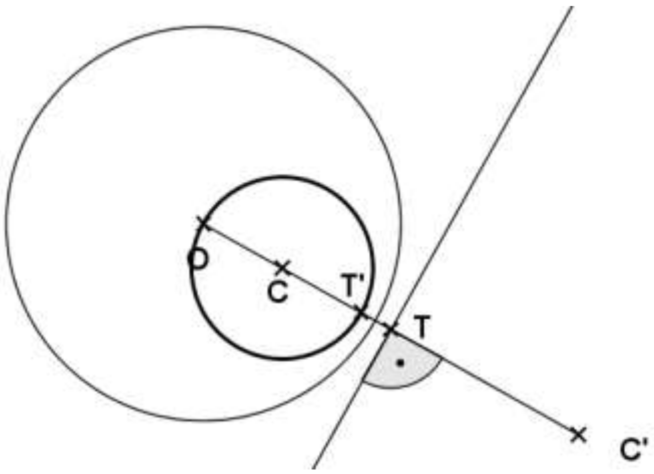
Azonban, ha az egyenes nem halad át az alapkör középpontján, akkor az inverzió szerkesztési tulajdonságaiból már ismert, hogy az inverze egy O ponton áthaladó kör lesz, ennek a körnek a középpontja pedig az O pont képzeletbeli egyenesre vett tükörképének az inverze lesz. Ezt a következőképpen tudjuk megszerkeszteni:

Az egyenes két adott pontjából, A -ból és B -ből kört rajzolunk AO és BO távolságokkal, így a két kör O ponton kívüli metszéspontja éppen az O pont egyenesre vett tükörképe lesz, C' pont. Ekkor ezt a már ismert módon invertáljuk az alapkörre, s megkapjuk a C pontot, mely a képzelt egyenes inverzképének középpontja, CO pedig a sugara. Az egyenes inverze tehát a C középpontú, O ponton áthaladó kör. (*5. ábra*)



5. ábra

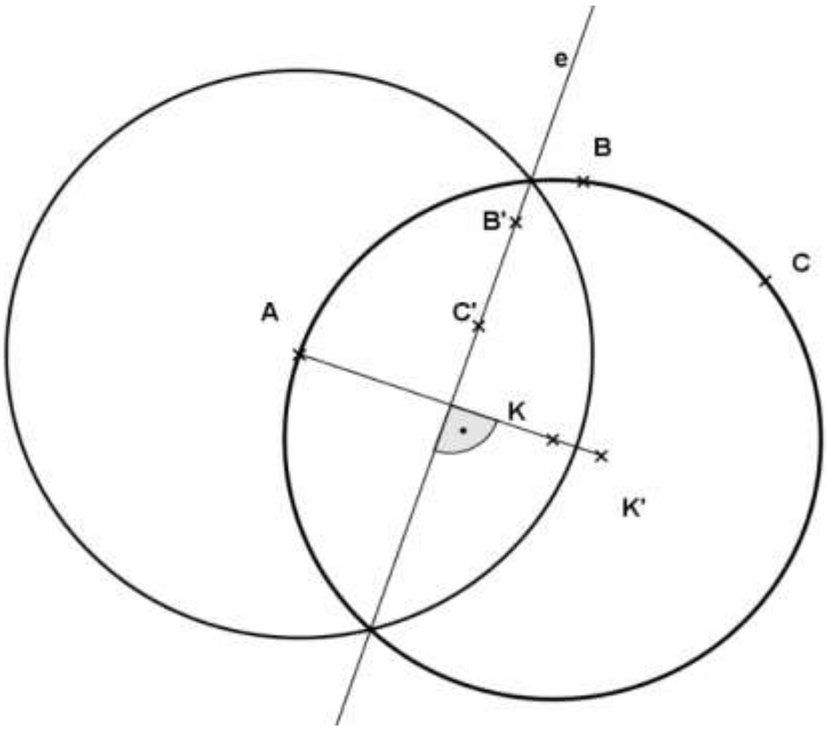
Az előző feladat során már ismertettük, hogy pontok és inverzeik fordított arányossági kapcsolatban állnak egymással. Ha elképzeljük ténylegesen az egyenest, melyet invertálni szeretnénk és az O-t, illetve az egyenesre vonatkozó C' tükörképét összekötő egyenes metszéspontját, T-t, akkor láthatjuk, hogy T pont T' képe kétszer akkora távolságra van az O ponttól, mint C' pont C képe. (*6. ábra*)



6. ábra

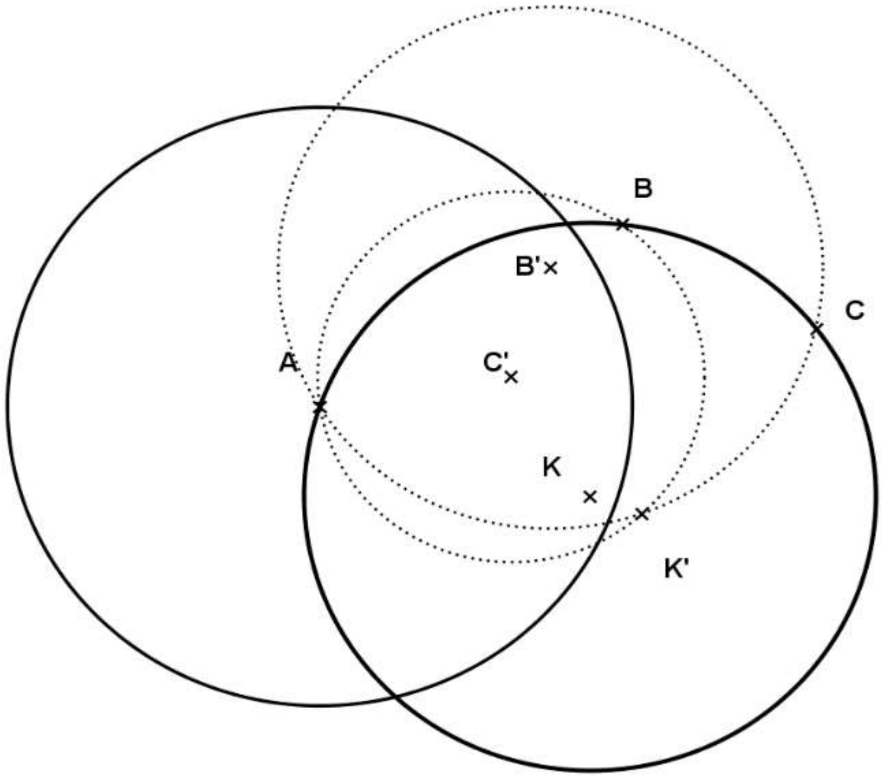
3. Adottak a síkban az A, B és C pontok. Szerkesszük meg az erre a három pontra illeszkedő kör középpontját!

A feladat során az egyik adott pontot, A-t tekintsük az inverzió pólusának, s e pont köré tetszőleges sugarú kört rajzoljunk, az inverzió alapkörét. Ha a másik két, B és C pontokat invertájuk az A középpontú alapkörre, akkor ezek inverzein, B'-n és C'-n keresztül képzeljük el az e egyenest. A továbbiakban az e egyenes A középpontú alapkörre vonatkozó inverzióját kell végrehajtani, s az e egyenes inverze éppen az a kör lesz, mely áthalad az A, B és C pontokon. (*7. ábra*)



7. ábra

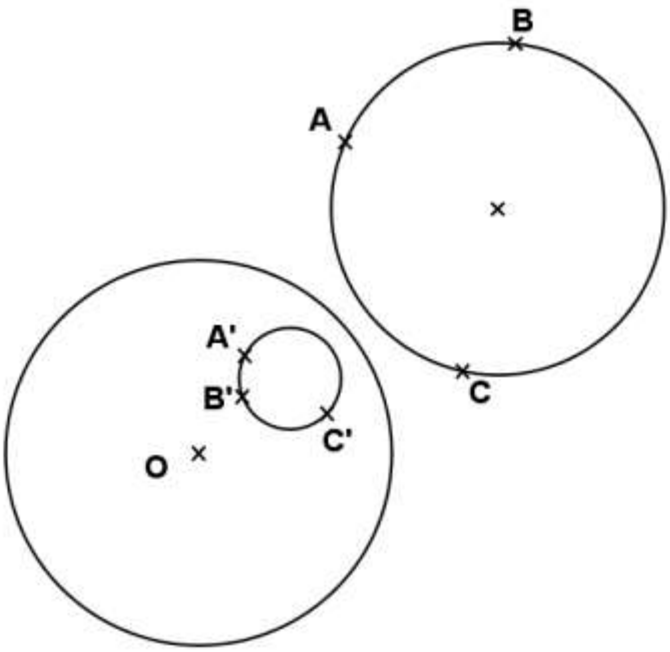
A már megszerkesztett B' és C' pontok köré $B'A$ és $C'A$ sugarú köröket rajzoljunk, melyek A ponton kívüli metszéspontja K'. Ennek a pontnak az A középpontú körre vonatkozó inverzképe a K pont, mely az A, B és C pontokon áthaladó kör középpontja. (*8.ábra*)



8. ábra

4. Szerkesszük meg egy kör inverzét csak körzővel!

Ha a megadott kör nem halad át a póluson, akkor három pontját invertáljuk az O középpontú alapkörre, s végrehajtjuk a fent leírt, három ponton áthaladó kör megszerkesztését, s ez lesz az inverzkörünk. (*9. ábra*)

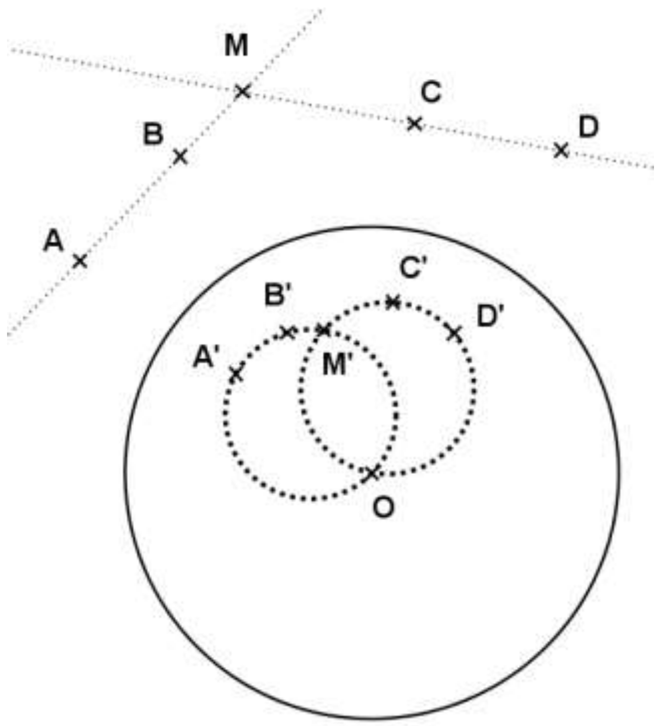


9. ábra

5. Adottak a síkban az A, B és a C, D pontpárok. Az ezeket a pontokat összekötő egyenesek metszéspontját szerkesszük meg csak körző használatával!

Mind a négy adott pontot invertáljuk. Az egyik egyenes inverze az a kör, mely az A', B', O pontokon, másik, mely a C', D', O pontokon halad át. Az előző feladatok alapján ezeket a köröket meg tudjuk szerkeszteni.

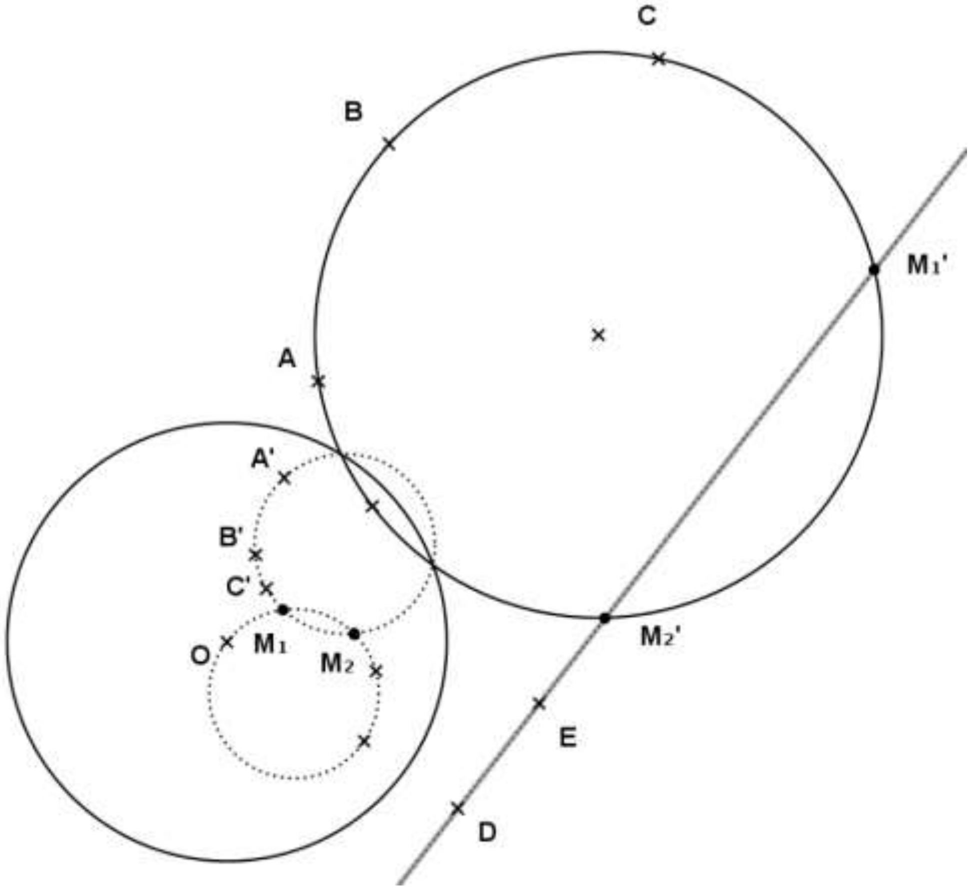
A körök O-n kívüli metszéspontja lesz a keresett M metszéspont inverze, így ha invertáljuk ezt az M' pontot, megkapjuk a keresett M metszéspontot.



10. ábra

6. Adott a síkban egy kör és két pont, A és B. Szerkesszük meg az adott kör és az A és B pontokat összekötő egyenes metszéspontját csak körző használatával!

Ha sem a kör, sem pedig az A és B pontokat összekötő egyenes nem halad át az inverzió O pólusán, akkor mindkét alakzat inverze kör lesz. Ezeknek a köröknek a metszéspontjai (M_1 és M_2) adják az eredeti kör és egyenes metszéspontjainak inverzeit, tehát ezeket már csak invertálnunk kell és megkapjuk a keresett metszéspontokat, $M_1{}'$-t és $M_2{}'$-t. (*11. ábra*)



11. ábra

Ezzel a fejezet elején kimondott Mohr-Mascheroni-tételt beláttuk, hiszen minden euklideszi szerkesztési alaplépéssel előállítható pontot megszerkesztettünk csak körzővel.

4. Poncelet-Steiner szerkesztés

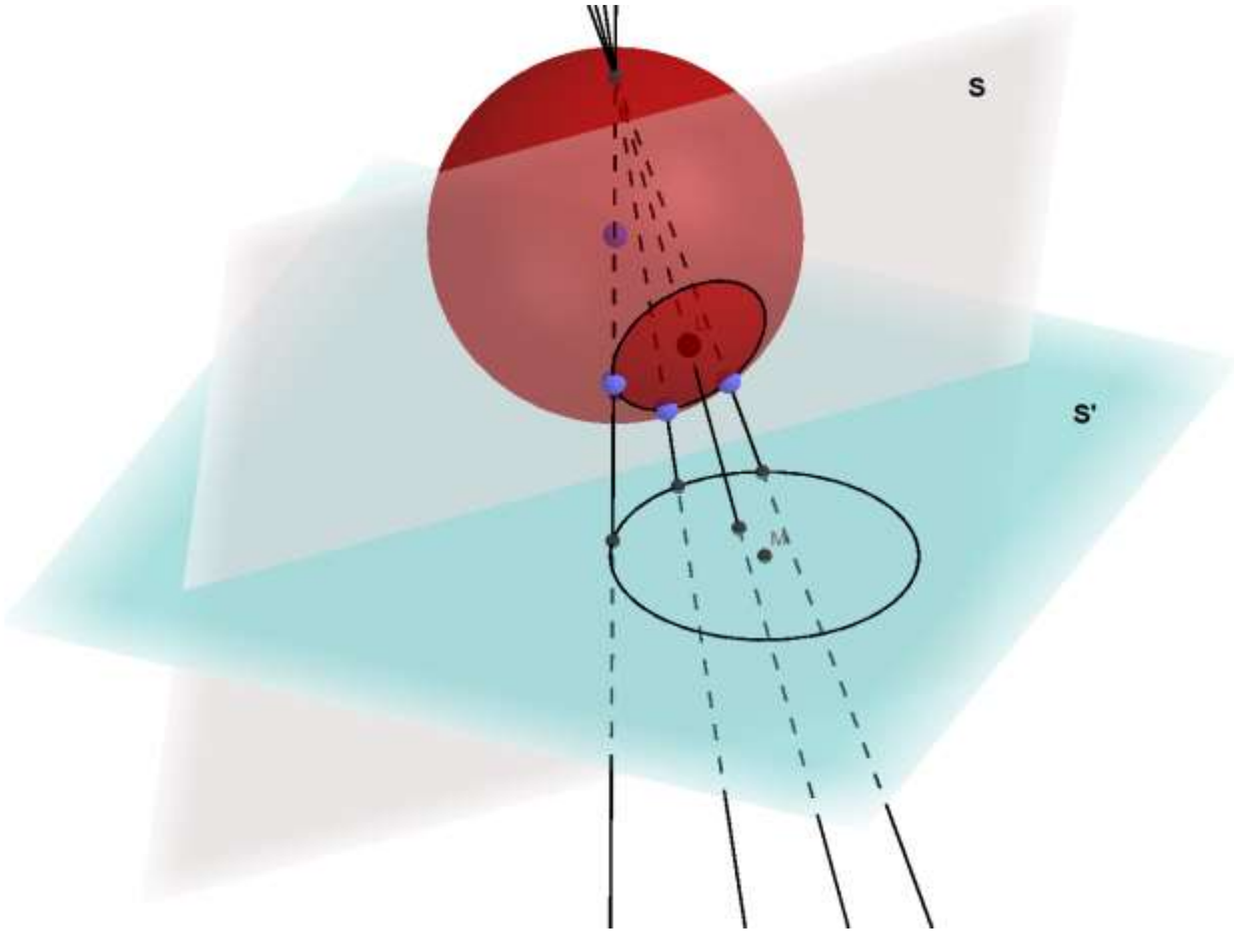
Olyan szerkesztések esetén, melyeket körző nélkül, csak vonalzó segítségével szeretnénk végrehajtani, elsőre azt gondolnánk, hogy mind előáll úgy, mint körző és vonalzó használata esetén, hisz láthattuk, hogy csak körzővel is minden euklideszi szerkesztési alaplépés végrehajtható. A következő állítás viszont éppen ennek ellenkezőjét mondja ki:

Állítás: Nincs olyan csak vonalzós szerkesztési eljárás, mely bármely kör középpontját előállítaná.

Bizonyítás: Tekintsünk egy síkot, S'-t, s egy gömböt, melyet egy pontban érint S' sík. Az érintési pont átellenes pontja legyen a vetítés középpontja. A gömbön tekintsünk egy kört, s ennek a körnek a síkját, S-et, mely nem párhuzamos az első síkkal. A gömbből kimetszett kört vetítsük a vetítés középpontjából a másik síkra, mely eljárás a sztereografikus vetítés, ahol kör vetülete is kör lesz. Ez egy középpontos vetítés, mely egyeneseket egyenesekbe visz, így a szerkesztési lépéseket is lépésről lépésre átvetíti.

Tegyük fel, hogy egy vonalzós szerkesztési eljárás az S síkban a kör középpontját adja. Ekkor a szerkesztési lépéseket levetítve az S' síkban ugyanannak a szerkesztésnek a végrehajtását kapjuk, tehát annak is a kör középpontját kellene szolgáltatnia. Azonban a vetítés során az S' síkban a levetített szerkesztés eredménye az S síkon elhelyezkedő középpontnak a vetülete, ami nem a középpont, így ellentmondásra jutottunk. (A vetített kör középpontja M pont.)

Megjegyzés: Vigyáznunk kell, hogy a szerkesztési lépések metszéspontjai az S síkban ne legyenek egy magasságban a vetítés középpontjával, vagyis a vetítés során a vetítési középpontot és a szerkesztés metszéspontját összekötő egyenes ne legyen párhuzamos az S' síkkal, hisz ekkor a szerkesztési metszéspontok vetületei ideális pontba mennek. Ahhoz, hogy ezt kiküszöböljük, a gömböt alkalmasan méretezni (nagyítani) kell úgy, hogy a gömbből kimetszett kör ugyanaz maradjon, és hogy az összes szerkesztési pont közönséges pontba vetítődjön. (*12. ábra*)



12. ábra

A Poncelet-Steiner szerkesztés alatt olyan szerkesztéseket értünk, melyek során rögzítve van egy kör a középpontjával, de csak vonalzót használhatunk. A rögzített kört a szerkesztések során úgy használhatjuk, hogy akárhányszor elmetszhetjük azt egyenesekkel.

A Poncelet-Steiner féle szerkesztési lépések a következőképpen alakulnak:

1. Két már megszerkesztett ponton keresztül vonalzóval egyenest húzhatunk.
2. Két már megszerkesztett metsző egyenes metszéspontját kijelölhetjük.
3. A rögzített segédkör és már megszerkesztett egyenesek metszéspontjait kijelölhetjük.

A Poncelet-Steiner-tétel kimondja, hogy:

Tétel: Minden olyan pont és egyenes, mely euklideszi szerkesztéssel előállítható, az Poncelet-Steiner-féle szerkesztéssel is előállítható.

Bizonyítás: A Mohr-Mascheroni-féle szerkesztések esetén az egyeneseket már két pontjuk által egyérteműen meghatározottnak tekintettük. A Ponclet-Steiner-féle szerkesztések során pedig a köröket elég megadnunk a középpontjukkal és egy rajtuk lévő ponttal, hiszen ez már egyértelműen meghatározza őket. Látható, hogy a hiányzó szerkesztési lépéseink ezen szerkesztési eljárás során a következők:

1. Egy kör, mely középpontjával és egy pontjával van megadva és egy azt metsző, már megszerkesztett egyenes mindkét metszéspontját kijelölhetjük.
2. Két egymást metsző kör, melyek középpontjuk és egy pontjuk által adottak, mindkét metszéspontját kijelölhetjük.

Tehát a tétel bizonyításához ezt a két euklideszi szerkesztési lépést kell végrehajtanunk csak vonalzó használatával természetesen úgy, hogy a síkon adott egy rögzített kör, a segédkör a középpontjával. Ehhez a következő hét feladatot kell végiggondolnunk, s a későbbiekben ismertetett lemmát:

1. Adott ponton át párhuzamos szerkesztése egy adott egyenessel
2. Adott szakasz felezőpontjának megszerkesztése
3. Adott pontra illeszkedő, adott egyenesre merőleges egyenes szerkesztése
4. Adott távolság felmérése egy adott félegyenesre
5. Adott a, b és c szakaszok ismeretében olyan x szakasz szerkesztése, hogy teljesüljön a következő: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.
6. Két pontja által adott egyenes és a középpontja és egy pontja által adott kör metszéspontjainak megszerkesztése
7. Két olyan kör metszéspontjainak megszerkesztése, melyek középpontjuk és egy pontjuk által vannak meghatározva

$\boldsymbol{Lemma_1}$:

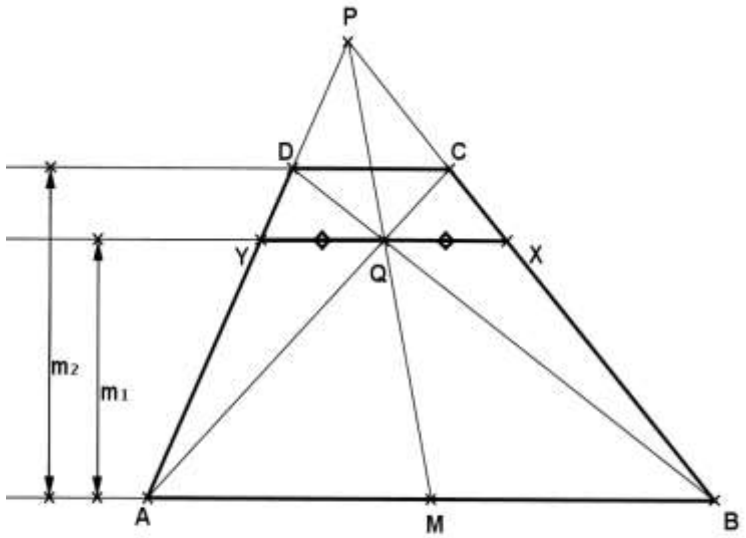
Ha egy $ABCD$ négyszög trapéz és szárai a P, átlói a Q pontban metszik egymást, akkor a PQ egyenes felezi az alapokat.

$\boldsymbol{Bizonyítás}$ ($\boldsymbol{Lemma_1}$):

Rajzoljunk párhuzamost a Q ponton át az alapokkal, melynek metszéspontjai a szárakkal legyenek az X és Y pontok

Az ABQ háromszög AB oldalhoz tartozó magassága legyen m_1, a trapéz magassága pedig m_2. Az ABC háromszög C-re vonatkozó középpontos hasonlósága - ahol a hasonlóság aránya $\frac{m_1}{m_2}$ – a QXC háromszöget adja, s ugyanígy ABD háromszög D pontra vonatkozó ugyanilyen arányú középpontos kicsinyítése során adódik a YQD háromszög.

Mivel $YQ = QX$, vagyis az XY szakaszt a Q pont felezi, így az AB szakaszt is feleznie kell annak az egyenesnek, mely a Q és P pontokon átmegy (XYP háromszög hasonló az ABC háromszöghöz). (*13. ábra*)



13. ábra

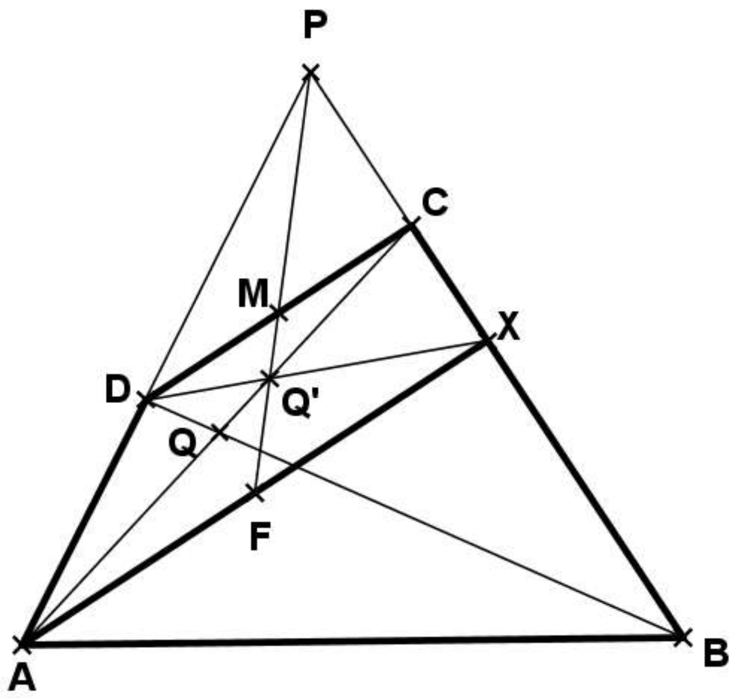
$\boldsymbol{Lemma_2}$ **(mely lényegében az előző lemma megfordítása):**

Ha egy $ABCD$ négyszög CD oldalát felező M pont rajta van az AD és BC egyenesek meghosszabbításának metszéspontját, P-t, és az AC és BD átlók Q metszéspontját összekötő egyenesen, akkor a négyszög trapéz, mivel az AB és CD egyenesek párhuzamosak.

$\boldsymbol{Bizony}$ít$\boldsymbol{}$á$\boldsymbol{s}$ $(\boldsymbol{Lemma_2})$:

Indirekt módon tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis van olyan $ABCD$ négyszög, hogy az AD és BC oldalegyenesek metszéspontja P, az átlók metszéspontja Q, és a CD oldal felezőpontja M, egy egyenesre esnek, azonban az AB és CD oldalak nem párhuzamosak.

Az ábra szerint rajzoljunk párhuzamost a CD oldallal az A ponton keresztül, mely a BC egyenest X pontban metssze. Az AX szakasz felezőpontja legyen F. Ekkor az $AXCD$ trapézra alkalmazhatjuk az első lemmát és így P, M és F pontok kollineárisak, továbbá az egyenesük áthalad az AC és DX egyenesek metszéspontján, Q'-n, mely különbözik Q-tól. Tehát a PM egyenes nem Q-ban metszi az AC átlót, ígyellentmondásra jutottunk. (*14. ábra*)



14. ábra

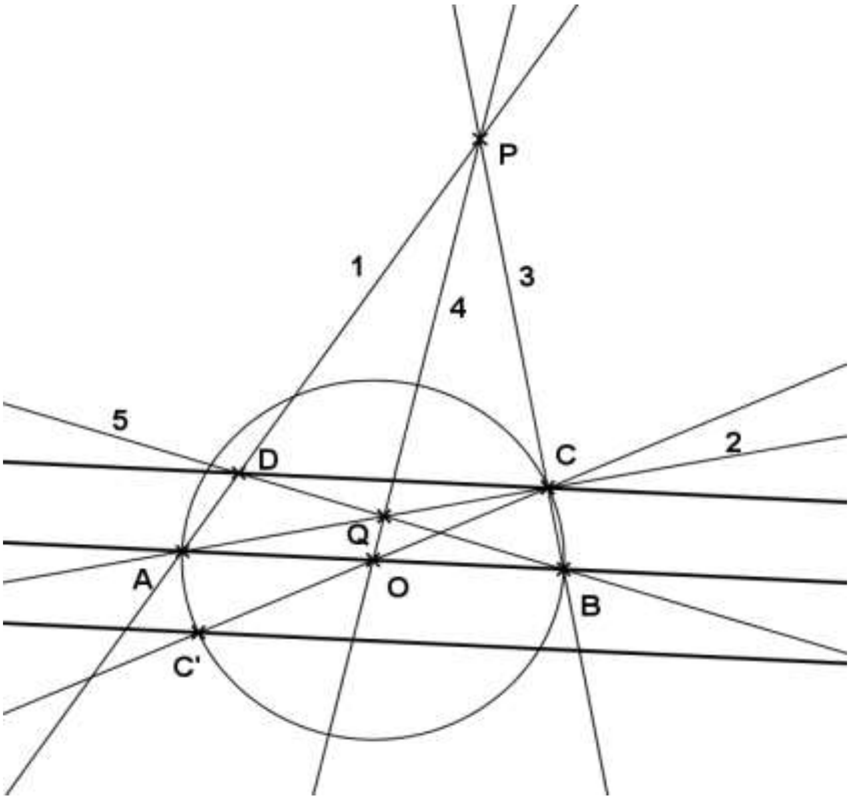
1. Szerkesszünk adott ponton át párhuzamost egy adott egyenessel!

A feladat megoldása során a fenti lemma és a segédkör segítségével elő fogunk állítani az egyenesen egy olyan ponthármast, ahol az egyik pont a másik kettőnek felezőpontja.

Először a segédkör középpontján át rajzoljunk két különböző egyenest. Az egyiknek körrel vett metszéspontjai legyenek A és B pontok, a másiknak C és C' pontok. Az AB egyenessel fogunk párhuzamost rajzolni C és C' pontokon át, mely a megadott egyenesen kijelöli a keresett ponthármast.

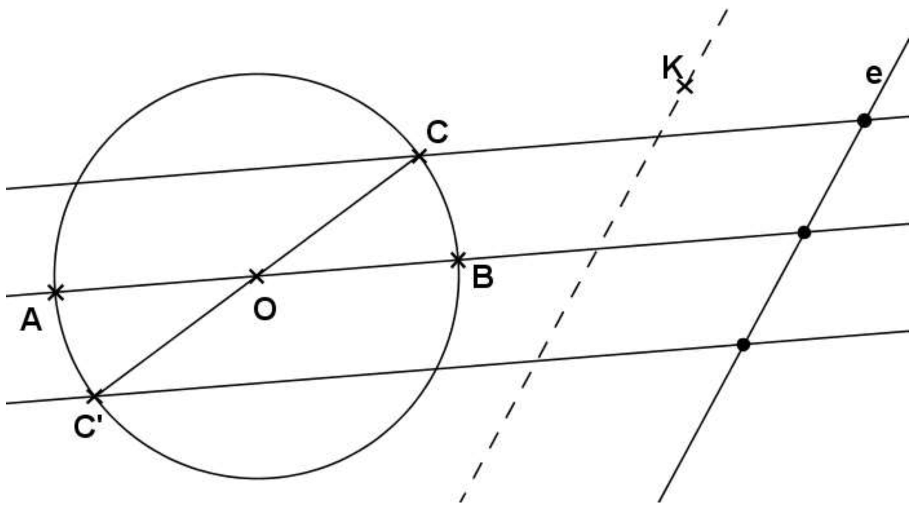
1. Első lépésként rajzoljunk egy, a kört nem érintő egyenest A pontból (1).
2. Rajzoljuk meg az AC egyenest (2).
3. Rajzoljuk meg BC egyenest (3) úgy, hogy ne legyen párhuzamos az (1) egyenessel.
4. Az (1) és (3) egyenesek metszéspontja legyen P pont.
5. Rajzoljuk meg PO egyenest (4).
6. A (2) és (4) egyenesek metszéspontja legyen Q.
7. Rajzoljuk meg BQ egyenest (5), mely az (1) egyenest D pontban metszi.
8. A CD egyenes párhuzamos az AB egyenessel a fenti lemma szerint.

Ugyanezt a módszert követve az C' ponton át húzzunk párhuzamost az AB egyenessel. Így a C és C' pontokon áthaladó egyenesek párhuzamosak egymással, illetve középpárhuzamosuk az AB egyenes. (*15. ábra*)



15. ábra

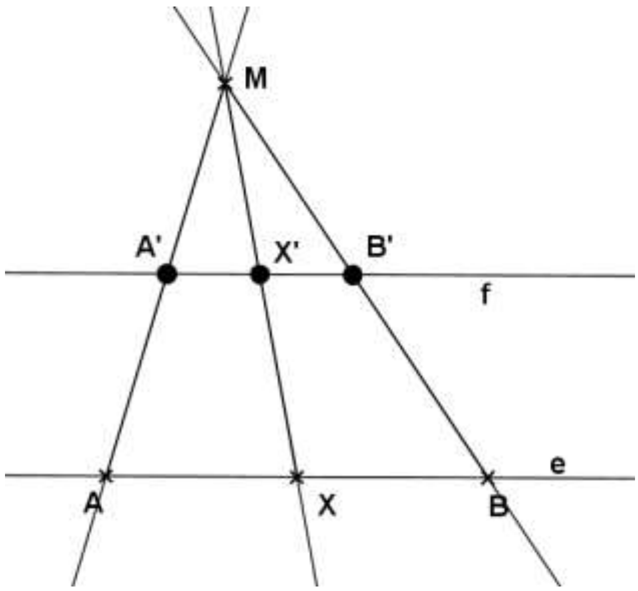
A feladat szerint egy tetszőleges e egyenessel kell egy tetszőleges K ponton át párhuzamost rajzolni. A fenti elgondolás szerint a három egymással párhuzamos egyenesünk három olyan pontban metszenek bármely tetszőleges egyenest, amely nem párhuzamos velük, hogy az egyik a másik kettőnek felezőpontja. Így már az egyenesen lévő három segítségével, az egyenessel már könnyedén párhuzamost tudunk rajzolni K ponton át. (*16. ábra*)



16. ábra

2. Szerkesszük meg egy adott szakasz felezőpontját!

Tekintsük a szakaszt tartalmazó e egyenest, s a szakasz végpontjai legyenek A és B pontok. Az e egyenessel rajzoljunk párhuzamost egy tetszőleges ponton át, ez legyen f egyenes. Az f egyenesen a kör középpárhuzamosai segítségével ki tudunk jelölni két pontot és a felezőpontjaikat, melyek legyenek A', X' és B' ebben a sorrendben (úgy válasszuk meg ezeket a pontokat, hogy AB szakasz hossza ne egyezzen meg $A'B'$ szakasz hosszával). Ekkor rajzoljuk meg A és A' pontokon áthaladó egyenest, illetve B-n és B'-n áthaladó egyenest. Ezek metszéspontja legyen M. A feladatok előtti lemma alapján az MX' egyenes – mivel az X' pont az AB szakasz felezőpontja – az AB szakaszt éppen a felezőpontjában, X pontban metszi. (*17. ábra*)



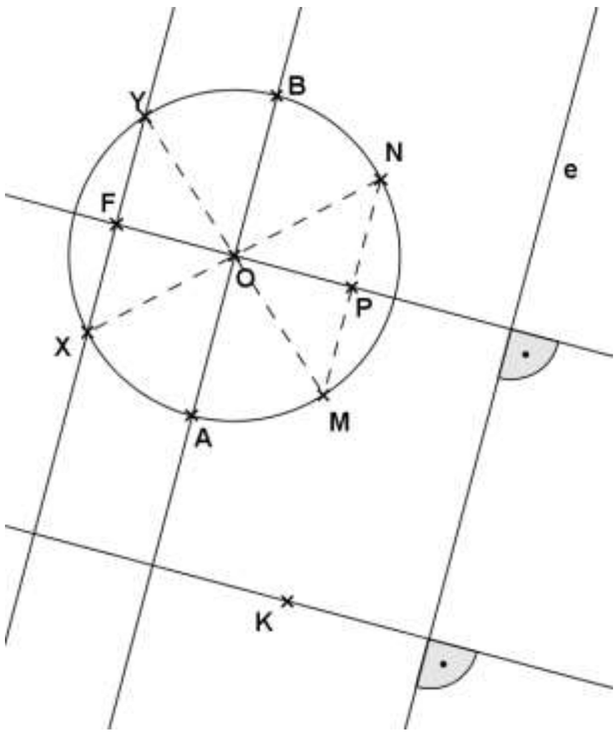
17. ábra

3. Szerkesszünk adott pontra illeszkedő, adott egyenesre merőleges egyenest!

Adott egy e egyenes, melyre merőlegest kell állítanunk K ponton keresztül. Először az O ponton át rajzoljunk merőlegest az egyenessel, s majd K ponton át azzal párhuzamost rajzolunk.

Az e egyenessel rajzoljunk párhuzamost a segédkör O középpontján keresztül, mely a kört A és B pontokban metszi. Rajzoljunk egy másik, ezekkel párhuzamos egyenest úgy, hogy a kört két pontban metssze, X és Y pontokban. Szerkesszük meg az XY szakasz felezőpontját, F pontot a már korábban leírtak szerint.Az FO egyenes ekkor merőleges az eddig szerkesztett egyenesekre, így az e egyenesre is. Így az FO egyenessel kell párhuzamost szerkesztenünk a K ponton keresztül.

Ezt legegyszerűbben a következőképpen tudjuk végrehajtani: az YO egyenesnek az Y-on kívüli körrel vett metszéspontját, M-et, és az XO egyenes X-en kívüli körrel vett metszéspontját, N-et jelöljük ki, s ha ezeket összekötjük, akkor ennek a szakasznak és az FO egyenesnek metszéspontja adja P pontot. Az FP szakasznak O pont a felezőpontja, így az FO egyenessel K-n keresztül a már ismert módon párhuzamost tudunk szerkeszteni. (*18.ábra*)



18. ábra

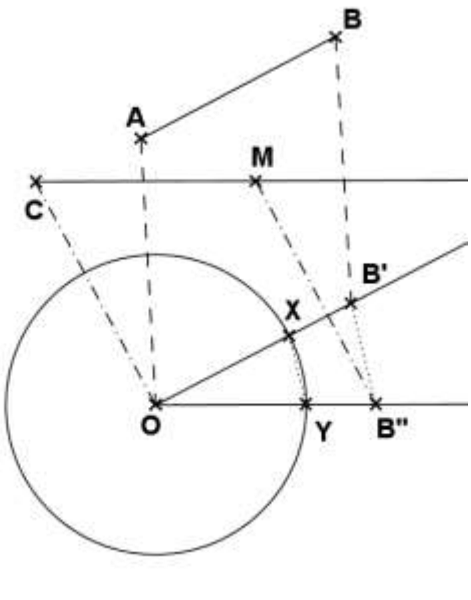
4. Egy adott félegyenesre a végpontjából mérjünk fel egy adott távolságot!

Adott egy AB szakasz, illetve egy C végpontú félegyenes. A segédkörünk O középpontjába toljuk el a szakaszt és a félegyenest egyaránt, másoljuk a szakaszt az eltolt félegyenesre, majd ezt toljuk vissza az eredeti félegyenesbe.

A szakaszok eltolása a következő módon történik: O ponton keresztül rajzoljunk AB szakasszal párhuzamost, s úgy mérjük fel az O végpontú félegyenesre az AB szakaszt, hogy az A pontot összekötjük az O ponttal, s az AO szakasszal párhuzamosan B-n keresztül egyenest húzunk. Ez az egyenes az O-ból induló, AB szakasszal párhuzamos egyenest B' pontban metssze. Az OB' egyenes a kört X pontban metssze.

A C végpontú félegyenest hasonlóképpen toljuk el úgy, hogy az O pontot tekintsük az eltolt félegyenes végpontjának. Az eltolt félegyenes a kört az Y pontban metssze.

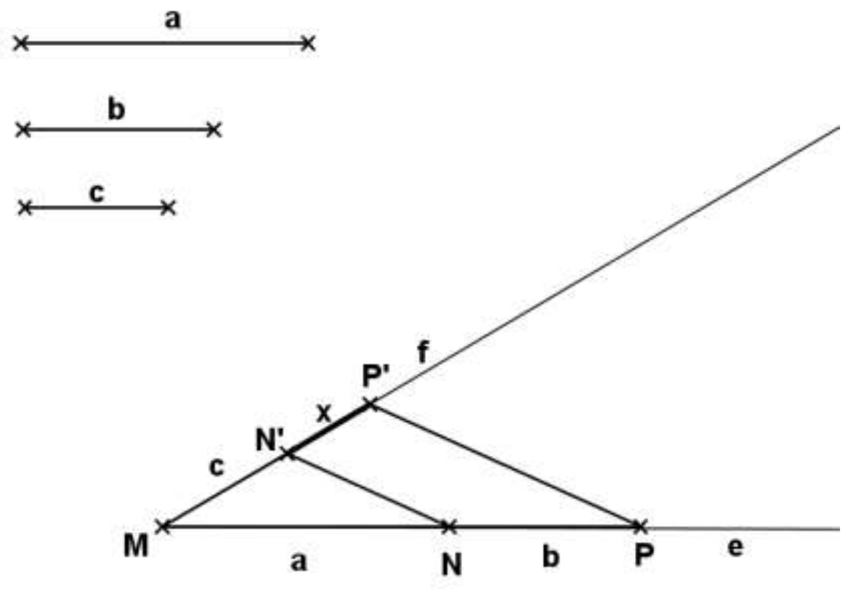
Rajzoljuk meg az XY szakaszt, s húzzunk ezzel párhuzamost a B' ponton keresztül. Ez az egyenes az O végpontú félegyenest az B'' pontban metssze. Ekkor az OB'' szakasz ugyanolyan hosszú, mint az AB szakasz. Képzeljük el az YOX szög szögfelezőjét, melyre tükrözéssel a B' pontból B''-t kapjuk. Már csak az OB'' szakaszt kell átmásolni az eredeti, C végpontú szakaszra a fentebb említett módszerrel, azaz kössük össze az O és C pontokat, s a B'' ponton keresztül rajzoljunk ezzel párhuzamost. A C vépontú félegyenest az M pontban metssze ez az egyenes, és így a CM szakasz hossza az AB szakasz hosszával megegyezik. (*19. ábra*)



19. ábra

5. Adottak az a, b és c szakaszok. Szerkesszük meg az x szakaszt úgy, hogy teljesüljön az $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ összefüggés!

Vegyük észre, hogy a feladat a párhuzamos szelők tételére visszavezethető. Vegyünk fel egy pontot, M-et és két M kezdőpontú félegyenest, e-t és f-et. Az e félegyenesre mérjük fel az a szakaszt, melynek M ponton kívüli végpontja N pont, s innen mérjük fel a b távolságot, melynek másik végpontja a P pont. Az M végpontból az f egyenesre mérjük fel a c szakaszt, melynek másik végpontja legyen N'. Az NN' egyenessel P ponton át rajzoljunk párhuzamost, mely az f egyenest a P' pontban metszi, s ekkor megkapjuk az x szakaszt, amely az $N'P'$ szakasz, s így teljesül, hogy $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. (*20. ábra*)



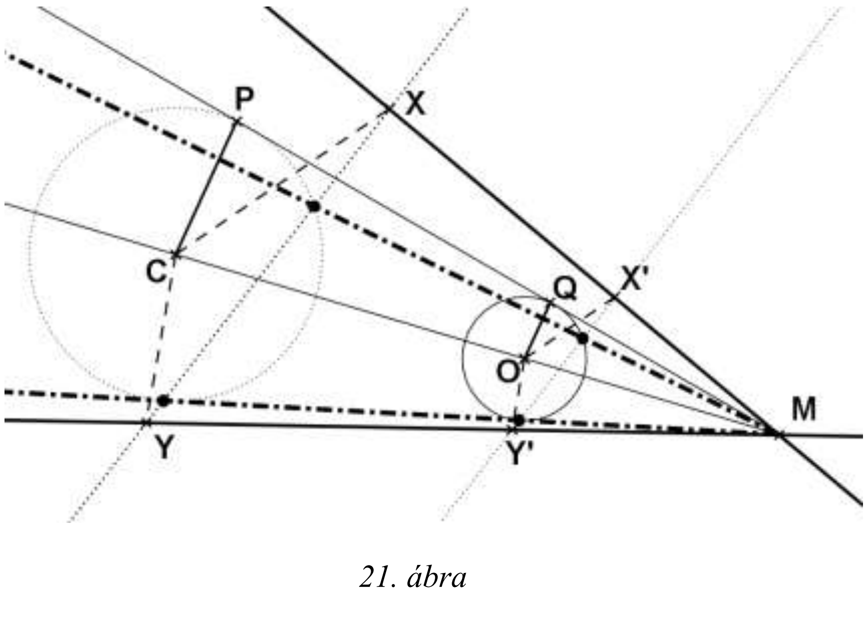
20. ábra

6. Szerkesszük meg egy két pontja által adott egyenes és egy középpontja és sugara által adott kör metszéspontjait!

Adott egy egyenes X és Y pontja, illetve egy kör középpontja C, és egy pontja P. A segédkörünk középpontja legyen O pont. A feladat megoldása során középpontos hasonlósági transzformációt fogunk alkalmazni, ahol a szükséges adataink a hasonlósági középpont és az alkalmas λ hasonlósági arány, melyeket úgy kell megválasztanunk, hogy a hasonlóság által az elmetszendő kör a rögzített segédkörre képeződjön.

A CP szakasszal rajzoljunk párhuzamost az O ponton keresztül, mely a segédkört a Q pontban metssze. Ekkor CO és PQ szakaszok metszéspontja legyen M, a hasonlóság középpontja, a hasonlósági arány pedig $\lambda = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MC}}$. Az X és Y pontokat kössük össze az M ponttal, s hajtsuk végre az M pontra vonatkozó középpontos hasonlósági transzformációt ezeken a pontokon is. Mivel $\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{MX}'}{\mathrm{MX}} = \frac{\mathrm{MY}'}{\mathrm{MY}}$, ezért az X' és Y' pontokat a következőképpen tudjuk kijelölni:

CX egyenessel rajzoljunk párhuzamost az O ponton keresztül, s ez az X egyenest az X' pontban metszi, majd ugyanezt végezzük el az Y pontra vonatkozólag. Ekkor az $X'Y'$ egyenes az XY egyenes képe, s ennek a körrel vett metszéspontjai is éppen az eredeti kör és egyenes metszéspontjainak képei. Így az M pontot kössük össze ezekkel a metszéspontokkal, s az XY egyenessel vett metszéspontjai lesznek a körrel vett metszéspontjai az XY egyenesnek. (*21. ábra*)



21. ábra

7. Szerkesszük meg két olyan kör metszéspontját, melyek középpontjaik és egy-egy pontjaik által vannak megadva!

A feladatot először oldjuk meg úgy, hogy az egyik kör a segédkörünk legyen. Ekkor a segédkör középpontja legyen O, sugara R, a másik kör középpontja K, sugara pedig r.

A feladat során fel fogjuk használni két kör hatványvonalát, mely két metsző kör esetén a középpontokat összekötő szakaszra merőleges egyenes, sőt, ekkor a két kör hatványvonala a metszéspontokat összekötő egyenes, így a hatványvonal és a középpontokat összekötő szakasz metszéspontját kell megkeresnünk.

Az O és K középpontokat összekötő szakasz hossza legyen d, a hatványvonalat és a középpontokat összekötő szakasz metszéspontja legyen H. Az O és H pontokat összekötő szakasz legyen x. Ekkor Pitagorasz-tétel segítségével felírható a következő egyenlőség:

$$R^2 - x^2 = r^2 - (d - x)^2,$$

melyből x-et kifejezve kapjuk:

$$x = \frac{R^2 - r^2 + d^2}{2d}$$

$$x = \frac{R^2}{2d} - \frac{r^2}{2d} + \frac{d}{2}$$

Vegyük a jobb oldal tagjait külön:

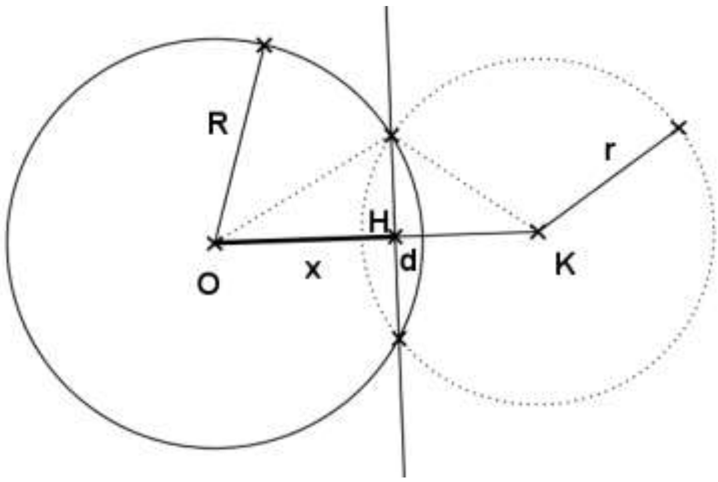
$$x_1 = \frac{R^2}{2d}$$

$$x_2 = \frac{r^2}{2d}$$

$$x_3 = \frac{d}{2}$$

Az x_1, x_2 és x_3 hosszúságú szakaszok a következőképpen szerkeszthetők meg:

Az 5. feladatot felhasználván aránypárral fogunk dolgozni. Mivel $x_1 = \frac{R^2}{2d}$, így létre tudjuk hozni az $\frac{x_1}{R} = \frac{R}{2d}$ kifejezésből x_1 -et, s ugyanezzel a módszerrel x_2 -t. Az x_3 -hoz természetesen elég a szakaszt felezni. Ha megkaptuk külön x_1, x_2 és x_3 hosszát, akkor meg tudjuk szerkeszteni az $x = x_1 - x_2 + x_3$ hosszúságú szakaszt, s felmérni ezt a két kör középpontját összekötő szakaszra O pontból. Ekkor már csak merőlegest kell szerkesztenünk ebből a pontból, s ennek két metszéspontja a segédkörrel adja a két kör metszéspontját is. (*22. ábra*)



22. ábra

Az imént a feladatot visszavezettük arra, ha már az egyik körünk (a segédkör) teljes egészében adott, nem csak középpontjával és egy pontjával. Azonban, ha felhasználjuk a 6. feladatban leírtakat, miszerint középpontos hasonlóságot alkalmazunk, már könnyedén megoldható a feladat.

A két kör hatványvonalát szerkesszük meg a fent leírtak szerint. Az egyik körrel végezzük el a középpontos hasonlóságot, melynek középpontja legyen M. Középpontos hasonlósággal szerkesszük meg a segédkörhöz tartozóan a hatványvonalat. Ekkor M pontot kössük össze a segédkör és a hatványvonal metszéspontjaival, s ezek az egyenesek a két kör hatványvonalát a keresett metszéspontokban metszik.

Ezzel a Poncelet-Steiner-féle szerkesztésekről szóló tételt bebizonyítottuk, hiszen létrehoztunk minden euklideszi szerkesztéssel előállítható pontot és egyenest a segédkör használatával, csak vonalzóval.

5. Irodalomjegyzék

[1] Hajós György: Bevezetés a geometriába, *Tankönyvkiadó, Budapest* (1984)

[2] Strohmajer János: Geometriai Példatár III., *Nemzeti Tankönykiadó, Budapest* (1994)

[3] http://mnaszodi.web.elte.hu/teaching/tanarklub/tanarklub2012nov.html (2015)

[4] http://www.geogebra.org/ (2016)

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/Euklideszi_szerkeszt%C3%A9s (2016)

[6] http://www.crnl.hu/matt/mattort/mascheroni.html (2016)

[7] http://www.bethlen.hu/matek/mathist/forras/Euklideszi_szerkesztes.htm (2016)

[8] https://hu.wikipedia.org/wiki/Jean-Victor_Poncelet (2016)