

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

ELTE TTK MATEMATIKAI INTÉZET

Matematikatanítási és Módszertani Központ

**Problémamegoldási és bizonyítási módszerek bemutatása
matematikai játékokkal és játékos matematikával**

Hatala Csaba László

matematika alapszak

tanári szakirány

Szakdolgozat

Témavezető: Török Judit

adjunktus



Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
1. Alapfogalmak, definíciók	3
2. A probléma és a problémamegoldás fogalma	5
3. Problémamegoldási módszerek bemutatása	6
3.1. A probléma visszavezetése egy ismert problémára	6
3.2. Analógia.....	9
3.3. Transzformáció.....	12
3.4. Szimmetria	16
3.5. Invariancia	19
3.6. Esetsztékválasztás	21
3.7. Grafikus módszer	25
4. Bizonyítási módszerek bemutatása	26
4.1. Teljes indukció	27
4.2. Indirekt bizonyítás.....	29
4.3. Direkt bizonyítás	30
Felhasznált irodalom	32

Bevezetés

Az eddigi életem során, melyet nem kis részben a különböző oktatási intézmények és a versenyzés határozott meg, rendszeresen foglalkoztam problémamegoldással, bizonyítással és játékokkal. Közoktatásban töltött éveim alatt gyakran jártam matematikaversenyekre, illetve versenyszerűen sakkoztam. Azt gondolom, akkoriban szerettem meg a játékokat és a problémamegoldást. Most az egyetem mellett személyi bankárként dolgozom, és ügyfelek problémáit fordítom le a matematika nyelvére, oldom meg, majd „bizonyítom” nekik, hogy ez számukra az optimális megoldás. Tehát a játék, a problémamegoldás és a bizonyítás mind meghatározó szerepet töltenek be az életemben.

Amikor ennek a dolgozatnak a témáját kerestem, az lebegett a szemem előtt, hogy miként tudnám a matematika számomra legérdekesebb területeit úgy bemutatni, hogy az mindenki számára érdekes lehessen. Először a sakk jutott eszembe. Persze az is eszembe jutott, hogy a diákok körében a sakk sem sokkal népszerűbb, mint a matematika. Így jutottam el a matematikai játékok témaköréhez. Arra gondoltam, hogy ahogy engem a sakk ránevelt a problémamegoldásra, úgy talán másoknak is hasznos lehet a különböző játékok, különböző módszerek megismerésére.

Dolgozatom célja tehát az lett, hogy a problémamegoldás és a bizonyítás különböző módszereit játékos módon, játékok, fejtörő feladatok segítségével, szemléletesen mutassam be. Célom, hogy egy olyan anyagot hozzak létre, melyet akár egy iskolai tanórán vagy tehetséggondozó szakkörön is jól lehet alkalmazni, de emellett tekintés is nyújt az egyetemen tárgyalt „magasabb” matematikai témák felé is.

Dolgozatom legelején a matematikai játékkal kapcsolatos legfontosabb alapfogalmakat, definíciókat tisztázom. Az első nagy fejezetben a problémamegoldás heurisztikus elveit mutatom be, matematikai játékok és érdekes matematikai feladatok segítségével. A második nagy rész három alapvető bizonyítási módszer: a direkt, az indirekt és a teljes indukciós bizonyítás bemutatását tartalmazza.

A játékok, illusztrációk között lesznek más forrásból szerzett, illetve saját játékok is. Néhány olyan példát is fogok hozni, ahol nem kifejezetten a játékoság, hanem a szemléletesség lesz a lényeg, hiszen a cél tulajdonképpen az érdeklődés felkeltése, a figyelem megragadása.

1. Alapfogalmak, definíciók

Ebben a fejezetben, mint azt a bevezetőben is említettem, a témához kapcsolódó legfontosabb alapfogalmakat és definíciókat mutatom be, ezeket fogom használni a következő fejezetekben. A Matematika BSc tantervében szereplő kurzusok tananyagának részét képező, ott számonkért tételek és definíciók bemutatásától illetve bizonyításától eltekintek.

Mindezek előtt érdemes leszögezni a matematikai játékok néhány sajátosságát. A matematikai játékok jellemzője, hogy a játéknak csak előre meghatározott számú, egymástól jól megkülönböztethető, diszkrét állapota lehet. Ezeket *állásoknak* hívjuk, a játékosok egy *lépés* során az adott állásból egy másikba lépnek, vagy passzolnak, azaz átadják a lépés lehetőségét az ellenfélnek. A játék lehet egy vagy többszemélyes. Ha többszemélyes játékról van szó, akkor a játékosoknak felváltva van lehetőségük lépni. Azt a játékosot, aki először léphet, *kezdő* játékosnak hívjuk. A játékban általában az nyer, aki az utolsó érvényes lépést meg tudja tenni, tehát aki nem tud érvényes lépést tenni, az veszít. A matematikai játékok vizsgálata során mindig azt feltételezzük, hogy a játékosok a játék során nem hibáznak, vagyis ha van nyerő stratégiájuk, akkor azt végre is hajtják.

Definíciók:

- Állapotgráf: Olyan speciális gráf, melynek csúcsai a játék lehetséges állásai, azaz állapotai, élei pedig a játék szabályainak megfelelő lépések.
- Rákövetkező: Egy **A** állás rákövetkezője **B** állás, ha a játékban egy lépésben el tudunk jutni **A**-ból **B**-be, tehát az állapotgráfban benne van az **(A, B)** él.
- Véges játék: Egy játék véges, ha véges lépésszám alatt le lehet játszani.
- Nyerő stratégia: Olyan kezdőlépés, illetve reakciók sorozata, mely segítségével az ellenfél bármely stratégiája esetén biztos a győzelem.
- Vesztes állás: Olyan állás, ahol a soron következő játékos nem tud nyerő stratégiát kidolgozni, vagyis az állapotgráfban minden rákövetkező az ellenfél számára nyertes állás.
- Biztonságos stratégia: Olyan stratégia, melynek elsődleges célja a vereség elkerülése, oly módon, hogy soha nem lépünk vesztes állásba.
- Passz: A játékos átadja a lépés jogát a másik játékosnak, ha van ilyen lehetőség.

- Nyertes állás: Olyan állás, ahol az állapotgráfban minden rákövetkező az ellenfél számára vesztes állás.
- A játék gráfja: Abban az esetben, ha a játékot valamilyen táblán vagy pályán lehet játszani, akkor ebből gráf képezhető. A mezők legyenek a gráf pontjai, és két pont között legyen él, ha a játék szabályai szerint a két mező között valamilyen kapcsolat van. Ez a kapcsolat lehet olyan, hogy az egyik mezőről a másikra lehet lépni (pl. sakk), vagy olyan, hogy a játék célja, hogy egymással kapcsolatban lévő mezőket foglaljunk el (pl. minimalom).

Állítások, megállapítások:

- Véges játék állapotgráfjában csak irányított élek lehetnek, mégpedig úgy, hogy a gráf ne tartalmazzon irányított kört. Ellenkező esetben ugyanis az adott kör mentén végtelen sokáig lehetne játszani a játékot.
- A nyerő stratégia meglétének alapvető feltétele, hogy minden lépésben tudunk az ellenfél számára vesztes csúcsba lépni az állapotgráfban, így az ellenfél csak a számunkra nyertes csúcsba lép.

Fontosnak tartom itt is leszögezni, hogy a dolgozatban nem kizárólag matematikai játékokat fogok használni az elvek, módszerek bemutatására. Lesznek nem véges vagy nem diszkrét játékok, lesz olyan játék is, melynek csak egy szereplője van. Egyes illusztrációkhoz pedig játékos feladatokat fogok elemezni.

2. A probléma és a problémamegoldás fogalma

Problémának az olyan feladatot nevezzük, melynek megoldása a problémamegoldó számára nem egyértelmű, azaz megoldásához meglévő ismereteinek együttes alkalmazására, vagy új ismeretek szerzésére van szüksége. A probléma megoldásához szükség van többek között saját ötletekre, sejtésekre, eljárásokra, gondolkodási gátak átlépésére. Fontos a már meglévő ismeretek összekapcsolása, az a matematikai látásmód, mely segítségével egy nagy képben látjuk az egész tudásunkat. A problémamegoldás egyik motorja lehet a heurisztikus elvek adekvát alkalmazása is.

Pólya György *A problémamegoldás iskolája I.* [6] című könyvében Descartes egyetemes problémamegoldás módszerét így mutatja be nagy vonalakban:

- (1) Minden problémát vezessünk vissza matematikai problémára.
- (2) Minden matematikai problémát vezessünk vissza algebraira.
- (3) Minden algebrai problémát vezessünk vissza egyetlen egyenlet megoldására.

Ma már tudjuk, hogy ez a módszer nem alkalmazható minden problémára, vagy csak egyszerűen nem érdemes minden problémára ezt a megoldásmenetet erőltetni. Pólya egy sokkal általánosabb folyamatként írja le a problémamegoldást:

- (1) A feladat megértése: Mit keresünk? Milyen adatokból tudunk kiindulni?
- (2) Tervkészítés: Hasonlít-e más feladatra? Mit lehet az adatokból kiszámolni?
- (3) A terv végrehajtása: Lépések végrehajtása és ellenőrzése.
- (4) A megoldás vizsgálata: Ellenőrzés, alternatív megoldások keresése.

A terv alapvetően három fő módszer mentén tud kialakulni, ezeket problémamegoldási stratégiáknak hívjuk:

- (1) Célirányú okoskodás: A feladat által megadott, vagy már ismert állításokból kiindulva köztes állítások sorozatán keresztül jutunk el a célhoz, megoldáshoz.
- (2) Fordított irányú okoskodás: A megoldás vagy cél ismeretében, abból visszafelé haladva keresünk köztes állításokat azzal a céllal, hogy a kiindulási feltételekhez, vagy bizonyítottan igaz állításhoz jussunk.
- (3) Szisztematikus próbálkozás: Konkrét esetek vizsgálatával jutunk el a célhoz.

Ezeket az alapvető stratégiákat természetesen meg kell tölteni tartalommal, kellenek elvek, módszerek, melyek segítségével tudunk egyet, vagy többet lépni az állítások sorozatában. A következő fejezetben ezeket a heurisztikus elveket fogom bemutatni illetve illusztrálni, főként matematikai játékok segítségével.

3. Problémamegoldási módszerek bemutatása

3.1. A probléma visszavezetése egy ismert problémára

Az egyik legalapvetőbb módszer, gyakorlatilag legalább hallgatólagos módon minden esetben alkalmazzuk. Ez a módszer például egyenlőtlenségeknél, egyenleteknél nagyon jól alkalmazható, azzal a céllal, hogy ekvivalens átalakításokon keresztül eljussunk egy ismert és bizonyított formulához. A matematikai játékoknál is nagyon hasznos ez a megközelítés, mely úgy is felfogható, hogy a játék állapotgráfiájában a kiindulási ponttól eljutunk egy ismert nyerő álláshoz.

A módszer bemutatására a 100-as számlétra játékot választottam, melyet az *Elemi matematika példatár tanároknak* jegyzet I.1. fejezete alapján tárgyalok. Majd egy egyszerűbb, saját változatot is bemutatok, állapotgráfiájának segítségével.

Az alap játék így néz ki: „*Ketten játszanak egymás ellen, Első és Második. Első mond egy 1 és 10 közötti számot (beleértve a határokat). Második ehhez hozzáad egy 1 és 10 közötti számot, és közli az eredményt. Ezek után mindig az aktuális eredményhez adnak hozzá felváltva egy 1 és 10 közötti számot, az nyer, aki végül kimondja a 100-at. Kinek van nyerő stratégiája?*” [3]

A probléma tehát adott, nyerő stratégiát kidolgozni a játékhoz. Látható, hogy itt a fordított irányú okoskodás lesz a célravezető, azaz olyan állást keresek, ahol az ellenfél a lépésétől függetlenül vesztes állásba kerül. Könnyen belátható, hogy ilyen állás például, ha el tudok jutni a 89-hez. Ekkor gyakorlatilag visszavezettem a problémát egy könnyebb problémára, hiszen a 89 közelebb van a nullához, mint a 100. A cél persze az lenne, hogy 1 és 10 közötti célszámra vezessem vissza a problémát, mert akkor az első lépésben nyerő álláshoz jutok és kész a nyerő stratégia.

Ahhoz, hogy a 89-et el tudjuk érni, meg kell találni az előtte lévő hasonló tulajdonságú számot. Ez a 78 lesz, és ezt a módszert tudjuk folytatni: 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1 lesznek az ellenfél számára vesztes állások, ahova lépni érdemes. Így a probléma egészen odáig visszavezethető, hogy az első játékosnak 1-et kell mondania, és utána az ellenfél minden lépését ki kell egészítenie 11-re. Ezt meg tudja tenni a kezdő játékos, tehát nyerő stratégiája van a játékhoz, melyet úgy találtunk meg, hogy minden lépésben egy ismert nyerő állásra vezettük vissza a problémát.

Módosítsuk egy kicsit a játékot! *Az előző játékot játsszuk, azzal a különbséggel, hogy az veszít, aki kénytelen legalább 100-at mondani.* [3]

A játék gyorsan visszavezethető arra, hogy az nyer, aki kimondja a 99-et. Ez pedig már nagyon hasonlít az előző játékra, csak minden szám el van tolva eggyel. Vesztes állás lesz a 88, 77, 66, 55, 44, 33, 22, és a 11. Tehát az első vesztes állás a nulla lesz, így az előző játékkal ellentétben nem tud nyerő stratégiát kidolgozni az első játékos, a második játékos fog nyerni.

Nézzünk egy másik módosítást! *Az alap játékot játsszuk azzal a módosítással, hogy a játék során a két játékos összesen egyszer passzolhat.* [3]

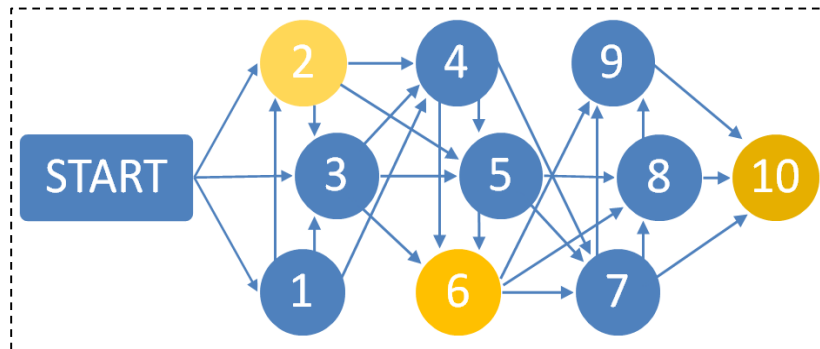
Itt is az a cél, hogy visszavezessük a problémát az eredeti játékra. Ha valamilyen játékos részéről megtörtént a passz, akkor máris az alap játékban vagyunk. Tehát egyértelmű, hogy az első játékos nem passzolhat rögtön, mert akkor második válik kezdővé és van nyertes stratégiája. Sőt, az első játékos az alapjátékban számára jó, az ellenfélnek vesztes számokat sem mondhatja, mert akkor a második passzol, és ezzel az kerül nyerő állásba. Ezt a helyzetet tudja kihasználni a második játékos, és az előző két játék nyertes stratégiáit ötvözve tud nyerni. Ugyanis első módosításban látottaknak megfelelően az alapjátékban az ellenfél számra vesztes számoknál eggyel kisebbet mond, amíg az első játékos nem lép e számok egyikére, vagy nem passzol. Ha ezek közül bármelyik megtörténik, akkor a fent leírtaknak megfelelően a második játékos az alapjáték nyertes stratégiájára tud váltani, és nyer.

Látható, hogy egy játékon belül, illetve a különböző játéktípusok esetén is a nyerő stratégia kulcsa, hogy már ismert problémára vezetjük vissza az új problémát. Ez a módszer a játéktípus állapotgráfjával is jól szemléltethető. Mivel az alapjáték állapotgráfja több, mint 100 csúcsú lenne, több mint ezer éllel, ezért egy egyszerűbb változatot mutatok be, ahol a 10-hez kell eljutni kisebb lépésekkel.

Legyen a játék a következő: *Ketten játszanak egymás ellen, nullától indulva felváltva választhatnak az 1,2 és 3 számok közül, melyek hozzáadódnak az addigi összeghez. Az nyer, aki hamarabb eljut a 10-hez.*

A játék állapotgráfja az 1. ábrán látható. Sárga színnel jelöltem a nyertes állásokat, tehát ahova a kezdő játékosnak érdemes lépnie, mert az a második számára az vesztes állás. Látható, hogy az eredeti játékhoz hasonlóan, itt is a kezdő játékosnak van

győztes stratégiája, a gráf élei mentén visszavezethető a probléma egészen az első lépésig. Itt az ábra segítségével az összes lehetséges játékmenetet ellenőrizhetjük, egy bonyolultabb gráf már inkább csak számítógépes alkalmazás során lehet hasznos.



1. ábra: Az egyszerűsített játék állapotgráfja

Azt *gondolom*, érdemes röviden áttekinteni a játékot n célszám és k megengedett maximális lépéshossz esetén. A nyerő stratégia kulcsa minden esetben, hogy el tudjon jutni a játékos az $n-k-1$ számra. Az ehhez vezető út mindig az $(n-1)-t(k+1)$ alakú mezőkön át vezet, ahol t természetes szám. Ha a nulla előáll ilyen alakban, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája, minden más esetben az elsőnek.

További meggondolást igényel, hogy mi a helyzet, ha t db passzolási lehetőség van a játék során. Könnyen belátható, hogy ha t páros, akkor semmi sem változik, hiszen az alap játékban nyerő stratégiával rendelkező játékosnak annyi a feladata, hogy játssza a nyerő stratégiát, és ha az ellenfél passzol, akkor arra passzal válaszoljon. Hasonló módon belátható, hogy ha s páratlan, akkor a stratégia ugyanaz, mintha 1 passz lenne összesen.

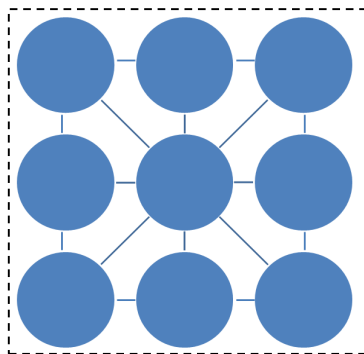
3.2. Analógia

Pólya György *Indukció és analógia* című könyvében az analógiát a hasonlóság egy fajtájának, határozottabb fogalmi szintjének nevezi. A pontosan megfogalmazott Pólya-féle definíció így hangzik: „Két rendszer analóg, ha megfelelő részeik világosan megfogalmazható kapcsolataikban megegyeznek.” [8]

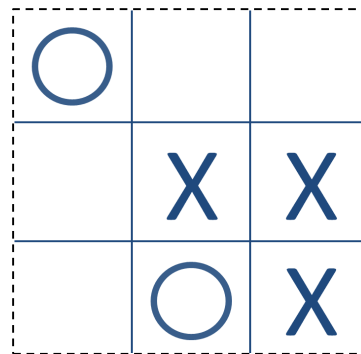
Az analógián alapuló problémamegoldás lényege hasonló az előző fejezetben tárgyalt módszerhez. Itt azt kell észrevenni, hogy az ismeretlennek tűnő probléma valójában egy már ismert probléma, csak más köntösben. Tehát ha az előttünk álló probléma analóg egy már ismert problémával, akkor a megoldási módjuk is teljesen hasonló lesz.

Matematikai játékoknál az analógia az állapotgráfokra, vagy a játék gráfjára vonatkozóan is értelmezhető. Egy játékot analógnak tekintünk egy másik játékkal, ha állapotgráfja izomorf a másik játék állapotgráfjával. Ekkor természetesen a nyerő stratégia is ugyanaz a két játékban, tehát elég az egyik játékra kidolgozni azt. Ha az egyik játék gráfja izomorf a másik játék gráfjával, vagy annak duálisával, akkor mindenképp érdemes analógiát keresni. Ennek illusztrálására a minimalmot és néhány azzal analóg játékot fogok bemutatni, Csákány Béla *Diszkrét matematikai játékok* című könyve [2] alapján.

A közismert, 24 pontból álló gráfon játszható malom egyszerűsített változata a minimalom. A játék gráfja a 2. ábrán látható. A játék menete teljesen hasonló a maloméhoz, azzal a különbséggel, hogy itt csak 4-4 bábut tesznek le a játékosok, és aki malmot csinál, az máris nyer. A játék papíron, vagy akár csak simán a porba rajzolva egy 3×3-as négyzetrácson is játszható, két különböző jel használatával (3. ábra).



2. ábra: A minimalom gráfja

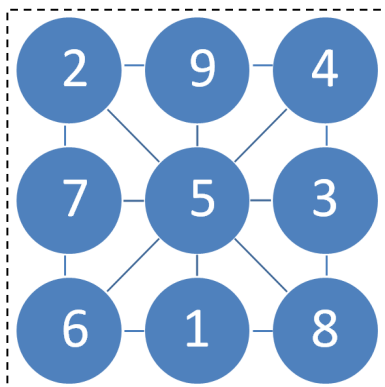


3. ábra: A játék másik formája

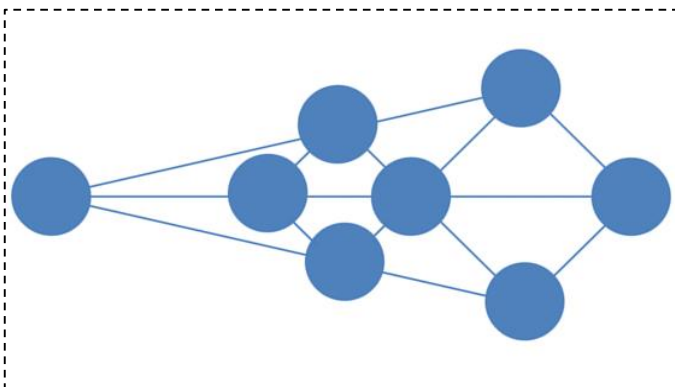
A minimalom játékban nagyon egyszerű a biztonságos stratégia. Mindössze el kell kerülni a 3. ábrán is látható „kettős fenyegetést”. Könnyen belátható, hogy elég a középső mezőre lépni, ha a kezdő játékos nem lép oda, ha pedig odalép, akkor valamelyik sarokba kell lépni. A további lépések egyértelműek, a közvetlen egyszeres fenyegetésekre kell reagálni, vagy malmot kell csinálni, ha engedi az ellenfél.

Tekintsük a következő játékot: Az $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ számjegyek közül két játékos felváltva választ egyet-egyét, a már választott számokat nem lehet még egyszer választani. Az nyer, akinél van három olyan szám, melyek összege 15. [2]

Az 4. ábrán látható, hogy a minimalom mezőit meg lehet számozni úgy, hogy a számok bűvös négyzetet alkossanak, vagyis minden sorban, oszlopban és átlóban 15 legyen a számok összege. Tehát aki egy sorban, oszlopban vagy átlóban az összes számot megszerzi, az győz a játékban, ugyanis semelyik másik számhármass összege nem 15. A játék tehát analóg a minimalommal, a két játékban a biztonságos stratégia megegyezik. Szerintem a minimalom esetében sokkal könnyebb megtalálni ezt a stratégiát, ezért fontos az analógia felismerése.



4. ábra: A számozás



5. ábra: A blokád gráfja

A *blokád* nevű játékot a minimalom gráfjának duálisán (5. ábra) játsszák. A duális kifejezést itt olyan értelemben használom, hogy a metszéspontok és az egyenesek szerepét cseréljük fel. *A pontok városoknak, az egyenesek utaknak felelnek meg. A játékosok felváltva lépnek, egy lépés során lezárhatnak egy több ponton átmenő, teljes utat. Az győz, aki először zár körül egy teljes várost.* [2]

A négy városon átmenő egyenes felel meg a középső mezőnek, a három várost tartalmazó egyenesek a sarkoknak, a két várost tartalmazók pedig a maradék négy mezőnek. Belátható, hogy a blokád biztonságos stratégiája megegyezik a minimaloméval.

Szintén a minimalommal analóg játék, ha 9 előre megadott szóból választanak felváltva a játékosok, és az nyer, akinek hamarabb van 3 olyan szava, melyekben van közös betű. [2] A megadott szavak jellemzője, hogy 3-3 közülük tartalmaz olyan közös betűt, melyet semelyik másik nem. A 6. ábrán látható 9 szó saját gyűjtésem, és teljesíti ezeket a feltételeket.

Ha ezeket úgy rendezzük el, mint az ábrán, hogy az azonos betűt tartalmazó szavak egy sorba, oszlopba illetve átlóra kerüljenek, akkor a minimalomhoz tettük hasonlónak a játékot. Ha egy sorban, vagy oszlopban, vagy átlóban lévő összes szót megszerezzük, akkor nyerünk. Ha az ellenfelet ebben megakadályozzuk, akkor elkerüljük a vereséget. Látható, hogy a biztonságos stratégia ugyanaz, mint a minimalom esetében. Így, az ábra segítségével könnyen tudunk ilyen stratégiát találni a megadott szavakra.

ÓDÁI	NINI	RICK
ALÁ	NÓRA	VAK
TÁR	TNT	TÓK

6. ábra: Játék a szavakkal

Véleményem szerint az összes itt bemutatott minimalommal analóg játékra igaz, hogy a biztonságos stratégiájukat könnyebb úgy megtalálni, ha a minimalomét keressük meg, és „azt fordítjuk le az adott játék nyelvére”. Problémamegoldásnál hasonlóan hatékony módszer lehet az analógia.

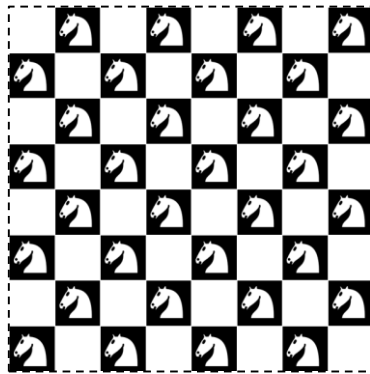
3.3. Transzformáció

Problémamegoldás során transzformációt alkalmazunk, amikor egy problémát átfogalmazunk a matematika egy másik területéhez tartozó – például algebrai, számelméleti vagy geometriai – problémává. A módszer hasonló az analógiához, a lényeg, hogy egy nehezen átlátható probléma helyett egy átláthatóbb, könnyebben kezelhető problémához jussunk.

A módszer bemutatásához először közismert játékos, sakktáblával kapcsolatos feladatokat fogok felhasználni. Ezek közül az első: *Legfeljebb hány huszárt lehet úgy elhelyezni egy szabályos sakktáblán, hogy ne üssék egymást?*

A megoldás (7. ábra) ismeretében már nem tűnik nehéznek a probléma, azonban próbálgatással hosszadalmas lehet jó eredményre jutni, illetve további megfontolást igényel annak a bizonyítása, hogy tényleg nem lehet több mint 32 huszár a táblán a feltételeknek megfelelően. Ezt az indirekt bizonyításról szóló részben tárgyalom.

A feladat egyik legegyszerűbb megoldása transzformáció segítségével lehetséges: át kell fogalmazni a problémát gráfelméleti problémává. Tekintsük a sakktáblát egy olyan gráfnak, melynek pontja a mezők, és köztük akkor van él, ha a huszár az egyik mezőről a másikra tud lépni. Ekkor a feladat így fogalmazható meg: *Mennyi ebben a gráfban a független pontok maximális száma?*



7.ábra: 32 huszár egy 8×8-as táblán

Mivel a huszár minden lépése során ellentétes színű mezőre lép, ezért számára a sakktábla egy páros gráf, melyben az egyik pontosztály a fehér, a másik a sötét mezők halmaza. Mivel egy osztályon belül nincs él, ezért a független pontok maximális száma az osztályok elemszámának maximuma, azaz 32. Így triviálisan látszik, hogy ennyi huszárt tudunk elhelyezni a táblán és többet nem.

Szintén huszárokról és a hozzájuk tartozó gráfról szól a következő feladat. *Be tudja-e úgy járni egy huszár a sakktáblát, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintsen, és végül a kiindulási mezőre érjen vissza?*

A válasz az, hogy igen, de egyéb ötlet híján itt is rengeteg próbálgatásra lenne szükség, hogy találjunk egy ilyen bejárást (8. ábra [1]) és ezzel bizonyítsuk az állítást. Viszont a transzformáció itt is segít, ugyanis a problémával ekvivalens gráfelméleti probléma egy tétel segítségével megoldható. Az előző feladatból tudjuk, hogy a tábla egy olyan páros gráf a huszár számára, melynek mindkét pontosztályában 32 pont van. Az a kérdés pedig, hogy bejárható-e egy gráf oly módon, hogy minden pontban egyszer járunk, a gráfelmélet nyelvén a Hamilton-kör létezésére kérdez rá. *Van-e Hamilton-kör egy olyan páros gráfban, melynek mindkét pontosztályban 32 pont található?*

33	58	39	52	31	56	37	46
40	51	32	57	38	45	30	55
59	34	49	42	53	36	47	44
50	41	60	35	48	43	54	29
61	22	11	16	3	28	9	18
12	15	4	21	10	17	2	27
23	62	13	6	25	64	19	8
14	5	24	63	20	7	26	1

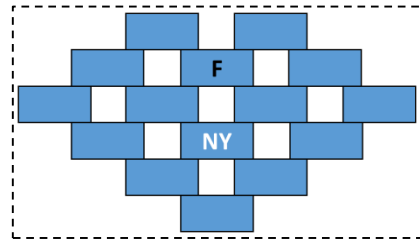
8. ábra: A tábla bejárása huszárral

A választ a következő tétel adja meg: *Egy $K(n,m)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik Hamilton-kör, ha $n=m$.* Mivel itt a két pontosztály azonos elemszámú, tudjuk, hogy biztosan van Hamilton-kör a gráfban, azaz a huszár be tudja járni a táblát a fent kikötött módon. Ez a tétel nem segít a megfelelő bejárás megtalálásában, viszont biztosítja, hogy nem haszontalan próbálkozni vele.

Az utolsó sakktáblás feladat a bástyákról szól. *Legfeljebb hány bástyát lehet úgy elhelyezni egy szabályos sakktáblán, hogy ne üssék egymást?*

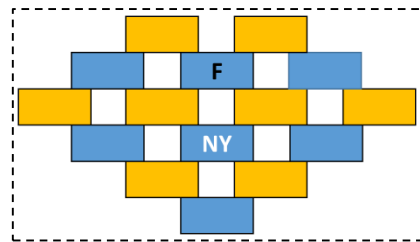
Erre a kérdésre elemi úton is könnyű jó választ adni. Látszik, hogy ha az egyik nagytáblán helyezük el a bástyákat, akkor az egy jó megoldás, nem ütnek egymást és az a megérzésünk, hogy nem is fér el több (skatulyaelv). Ezt a gráfelméleti megfontolás is alátámasztja, hiszen a bástyák számára egy sakktábla minden oszlopa egy teljes részgráf, vagyis egy oszlopban 1-nél, összesen 8-nál több bástya nem lehet a táblán.

Szintén a gráfelmélet segítségével elemezhető a következő játék, mely az *Elemi matematika feladatgyűjtemény* [4] 2.7. fejezetében található, 2.3. játék módosítása. A 9. ábrán látható tábla megjelölt mezőjén áll egy farkas, a másik jelölt mezőn egy nyuszi. A két bábuval felváltva léphetünk egy mezőről egy másik vele szomszédos mezőre. A Farkas kezd, és akkor nyer, ha a Nyuszi mezőjére tud lépni. Van-e biztonságos stratégiája a Nyuszinak? Mi a helyzet akkor, ha a Nyuszi kezd?



9. ábra: A kezdő állás

Ha gráfot készítünk a mezőkből, akkor láthatjuk, hogy egy páros gráfról van szó. A 10. ábrán az egy pontosztályhoz tartozó mezők azonos színnel vannak jelölve. Látható, hogy a kezdő állásban a Farkas és a Nyuszi egy pontosztályban vannak. Ha a Farkas kezd, akkor átlép a másik pontosztályba, hiszen a páros gráfban egy pontosztályon belül nincsenek élek. A következő lépésben a Nyuszi is átlép a másik pontosztályba, de mivel minden él legalább másodfokú, ezért mindig tud a Farkasétól különböző pontba lépni. A Nyuszinak tehát van biztonságos stratégiája, mely mindössze abból áll, hogy nem szabad a farkas mezőjére lépnie.

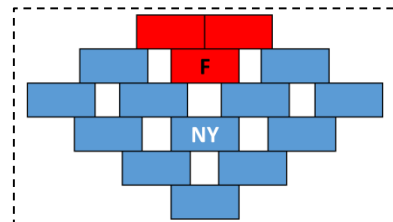


10. ábra: Pontosztályok

Teljesen más a helyzet, ha a Nyuszi kezd. Ekkor ő lép át először a másik pontosztályba, és a Farkas erre a lépésre tud reagálni. Látható, hogy a Nyuszinak a tábla szélei felé kell mennie, ahol előbb vagy utóbb „beszorul” az egyik másodfokú pontba, ahonnan csak olyan pontba tud lépni, mely szomszédos a Farkas által ponttal. Tehát ebben az esetben a Nyuszinak nincs biztonságos stratégiája.

Teljesen más a helyzet, ha a Nyuszi kezd. Ekkor ő lép át először a másik pontosztályba, és a Farkas erre a lépésre tud reagálni. Látható, hogy a Nyuszinak a tábla szélei felé kell mennie, ahol előbb vagy utóbb „beszorul” az egyik másodfokú pontba, ahonnan csak olyan pontba tud lépni, mely szomszédos a Farkas által ponttal. Tehát ebben az esetben a Nyuszinak nincs biztonságos stratégiája.

Nézzük mi a helyzet, ha a táblát és ezzel együtt a gráfot egy kicsit megváltoztatjuk (11. ábra). Ekkor az új él elrontja a páros gráfot, létrejön egy hármas klikk. Mi ennek a jelentősége?



11. ábra: A módosított tábla

Láttuk az eredeti helyzetben, hogy csak az az múlik a biztonságos stratégia léte, hogy ki kezd. Ebben az esetben, ha a Farkas kezd, akkor sincs biztonságban a nyuszi. Ennek az az oka,

hogy a hármas klikk összes pontján áthaladva a Farkas a gráf páros részgráfjában úgy tud ugyanolyan pontosztályba kerülni, mint a Nyuszi, hogy a Nyuszin lesz a lépés sora. Ekkor a helyzet már végig ugyanaz lesz, mint ha az eredeti táblán a nyuszi kezdene, mivel ő nem tud átmenni a hármas klikken, hiszen a Farkas annak egy pontjából tudja ellenőrizni az egész klikket. Tehát ekkor a Nyuszinak nem lesz biztonságos stratégiája.

A következő játékos trükkel az elemi matematika kurzuson találkoztam. *Írj le egy kétjegyű számot! Végezd el vele a következő lépéseket:*

(1) *A leírt szám számjegyeinek összegét vond ki a számból!*

(2) *Az így kapott szám számjegyeit add össze!*

(3) *Az így kapott számot szorozd meg az eredeti számmal!*

(4) *Vond ki ebből az eredeti szám négyszeresét!*

(5) *Az így kapott számot oszd el 5-tel!*

A trükk lényege, hogy a lépések elvégzése után visszakapjuk az eredetileg leírt számot. Hogy miért történik ez, arra a számelmélet ad választ, tehát le kell fordítani a történéseket a számelmélet nyelvére.

Az első lépésben egy kétjegyű, tehát $x = 10a + b$ alakú számból vonjuk ki a számjegyeinek összegét, tehát $a+b$ -t. Ekkor egy $9a$ alakú, vagyis kilenccel osztható számot kapunk. Fontos, hogy ez a szám legfeljebb 81 lehet, hiszen legfeljebb 99-ből vontuk ki a számjegyeinek összegét. A második lépésben összeadjuk a $9a$ alakú szám számjegyeit. Ez 9 lesz, hiszen pont ez a 9-cel való oszthatóság feltétele. Ezzel a két lépéssel bármelyik kétjegyű számból előállítottuk a 9-et.

A harmadik lépésben megszorozzuk a 9-et az eredeti számmal, így $9x$ -et kapunk. Ebből vonjuk az eredeti szám négyszeresét, $4x$ -et, így kapunk $5x$ -et. Végül ezt osztjuk el 5-tel, így visszakapjuk az eredeti számot, x -et. A további lépésekben tehát a 9-ből előállítottuk az eredetileg leírt számot. A trükk lényege, hogy a 9-es számot sehol sem említi, mégis a 9-es oszthatóságon múlik a megfejtése, melyhez a számelmélet segítségével tudunk eljutni.

3.4. Szimmetria

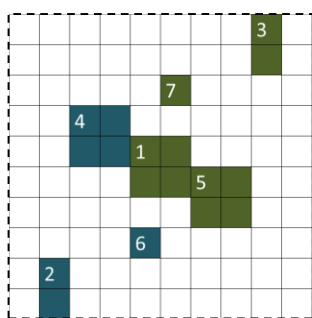
Problémamegoldás során a megadott adatok közötti szimmetriaviszonyok felismerésével is közelebb lehet kerülni a megoldáshoz. A módszer jellemzője, hogy nem csak diszkrét értékek, adatok, feltételek esetén, hanem akár általánosan, folytonosan is alkalmazható. A korongos játék ezt az állítást támasztja alá.

Matematikai játékokban is sokszor fel lehet fedezni szimmetriát. Ebben a fejezetben ilyen játékokat fogok bemutatni Svetoslav Bilchev és Emiliya Velikova *Matematikai játékok* című munkája [9], az *Elemi matematika példatár tanároknak* [3] I.2. fejezete, illetve saját ötletek alapján. A jó stratégia alapja legtöbbször egy szimmetria tengely vagy középpont kijelölése, majd az ellenfél lépéseinek tükrözött ismétlése.

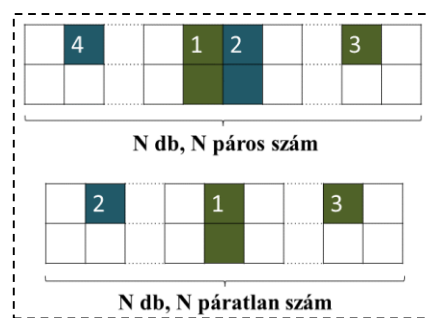
Az első játékban a két játékos felváltva kiszínezi egy 10×10 -es négyzetrács még üres részén egy 1×1 -es, 1×2 -es vagy 2×2 -es rácsstéglalapot. Az nyer, aki a 10×10 -es négyzetrács utolsó mezőjét is kiszínezi. [9]

A nyerő stratégia kulcsa, hogy az első lépésben el kell foglalni a négyzetrács közepét egy 2×2 -es négyzettel. A továbbiakban az ellenfél lépését kell középpontosan tükrözni az első alakzatra. A jó stratégiával játszott játék egy lehetséges állása a 12. ábrán látható, a lépések sorrendjét a számok jelzik.

A második játékot egy $N \times 2$ -es táblán (13. ábra) lehet játszani, mely 1×1 -es négyzetekből áll. A két játékos váltva lép. Egy lépés során egy befestetlen 1×1 -es vagy egy 1×2 -es területet lehet befesteni. Az a játékos veszít, aki nem tud többet lépni. [9]



12. ábra: Játék a 10×10 -es rácson



13. ábra: Játék az $N \times 2$ -es táblán

Ha N egy páratlan szám, akkor a játék az első játékhoz hasonló módon játszható, a szimmetriatengely kijelölése után az első játékosnak van nyerő stratégiája. Viszont ha N páros, akkor a szimmetriatengely a tábla közepén húzódik, és így a második játékosnak van nyerő stratégiája, ő tudja másolni az első játékos lépéseit.

Az eddigi játékok során mindig jól meghatározott keretek között, táblán, négyzetláncra játszottunk. A szimmetria viszont ennél általánosabb esetekre is igaz. A következő játék pontos gyakorlati megvalósítása nehézségekbe ütközik, de szerintem az elvi jelentősége hatalmas. *Egy középpontosan szimmetrikus asztalra két játékos felváltva rak le ugyanakkora körlapokat úgy, hogy azok ne fedjék egymást és ne lógnak le az asztalról. Az veszít, aki nem tud több körlapot lerakni.*

A nyertes stratégia az előzőekhez hasonlóan itt is a szimmetriaközéppont elfoglalásával kezdődik. Ezután pedig az ellenfél lépéseit kell másolni középpontra szimmetrikusan. Természetesen mivel ez a játék nem diszkrét, ezért nem elemezhetjük ki az összes esetet, hiszen abból végtelen sok van. A nyerő stratégia létezését csak és kizárólag a szimmetria biztosítja.

Érdeemes meggondolni, hogy működik-e ugyanez a stratégia abban az esetben is, ha *tengelyesen szimmetrikus* asztalon játszunk a játékot, és a szimmetriaközéppont helyett a szimmetriatengely asztalra eső szakaszának középpontját foglaljuk el először. A válasz az, hogy nem. Az ellenfél ugyanis el tud úgy helyezni körlapot, hogy azt metsse a szimmetriatengelyt, de ne legyen arra szimmetrikus. Ekkor az első játékos nem tud szimmetrikus lépést tenni, hiszen akkor a két körlap metszené egymást. A szimmetria tehát felborul és a játék kiszámíthatatlanná válik.

A következő játék más típusú, mint az eddigiek, de a szimmetria itt is kulcsfontosságú. *Felírunk egy sorba $2n$ darab számjegyet így: $1, 2, 1, 2, 1, 2 \dots 1, 2$. A két játékos felváltva $+$ vagy \cdot műveleti jelet tehet egy 1 -es és egy 2 -es közé, ha még ott nincs semmi. Miután mind a $2n-1$ darab jelet elhelyezték, a kezdő játékos nyer, ha kifejezés értéke páros, a második játékos, ha páratlan. [9]*

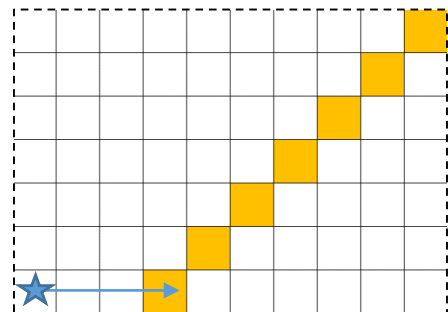
A játék során a kezdő játékos arra törekszik, hogy az összeg minden tagjában benne legyen a 2 -es szorzótényezőként, hiszen ekkor minden tag, így az összeg is páros lesz. A második játékos célja, hogy páratlan számú páratlan tag legyen az összegben, ez pedig csak úgy jöhet létre, ha páratlan számú 1 -es mindkét oldalán $+$ jel van. Így tehát a kezdő számára kézenfekvő, hogy a bal szélső 1 -es és a szomszédos 2 -es közé rakja az első \cdot jelet, megteremtve ezzel a szimmetrikus válasz lehetőségét a maradék $2n-2$ lépésre nézve. Ezek után mindössze annyi a teendő, hogy ha a második játékos valamelyik 1 -es mellé $+$ jelet rak, akkor az 1 -es másik oldalára egy \cdot jelet kell rakni. Így az összeg minden tagja páros lesz, a kezdő játékos nyer.

Végül a kétkupacos NIM játékot és egy azzal analóg játékot fogok bemutatni. A szabályok a következők: *Két kupacban kavicsok vannak (k és n darab). Két játékos felváltva vehet el tetszőleges darabszámú kavicsot, de egyszerre csak az egyik kupacból. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Kinek van nyerő stratégiája? [3]*

Mielőtt belemélyednénk a probléma tanulmányozásába, nézzünk egy ezzel analóg problémát. *Egy $k \times n$ -es négyzetrács bal alsó sarkában áll egy figura. Két játékos felváltva léphet vele, vagy jobbra akármennyit, vagy felfelé akármennyit. Az nyer, aki eljut a jobb felső sarokba. [3]*

Világos, hogy a két probléma analóg, hiszen az egyik kupacból x db kavics elvétele megfeleltethető annak, hogy x lépést teszünk a négyzetrácsban jobbra, és a másik kupacból való elvétel megfeleltethető a felfelé tett lépéseknek. Azt gondolom, hogy a $k \times n$ -es táblán való lépegetés jobban áttekinthető, ezért azt fogom elemezni, hiszen a nyerő stratégia, a 3.2. fejezetben elmondottak alapján analóg. Ez a játék hasonló a számlétrához a nyerő stratégia megtalálásának módjában, hiszen ezekben visszafelé kell gondolkodni. Először meg kell keresni egy nyerő állást, majd az azt megelőzőket, és ezek alapján lehet felfedezni valamilyen szabályszerűséget. A 14. ábrán látható a nyerő stratégia szemléletes vázlata.

A szabály szerint a jobb felső mező a cél. Világos, hogy a vele csúcsban szomszédos sárga mező is jó annak, aki odalép, hiszen az ellenfél kétféle lépést tehet, és mindkét lépés után a jobb felső mezőbe tudunk lépni. Hasonlóan az összes sárga mező jó lesz, tehát azok a mezők, melyek függőlegesen és vízszintesen is egyenlő távol-



14. ábra: A $k \times n$ -es változat

ságra vannak a jobb felső saroktól. A kezdő játékosnak nyerő stratégiája van, mely abból áll, hogy „sárga” mezőre lép minden lépésben. Az első lépés kivételével ez azt jelenti, hogy az ellenfél lépéseit szimmetrikusan másolja a kezdő játékos, tehát amennyit a másik játékos lép jobbra vagy fel, annyit lép a kezdő fel vagy jobbra.

A kavicsos verzióban ez annak felel meg, hogy a kezdő játékos minden lépésben egyenlővé teszi a két kupacban lévő kavicsok számát, ha azok nem egyenlők. Ha kezdő állásban ezek egyenlők, akkor a második játékos tud nyerni. Ebben a stratégiában is a szimmetria a kulcs ahhoz, hogy ne kelljen minden lehetőséget külön kielemezni.

3.5. Invariancia

A módszer lényege, hogy az állandó mennyiségek, tulajdonságok felismerése alapján jutunk el a probléma megoldásához. Szép példa erre a következő probléma: *Tegyük fel, hogy egy 8×8 -as saktábla mezői egyenként megfordíthatók, és egy-egy mező ellentétes oldala ellentétes színű. Ha egyszerre egy egész sor vagy oszlop fordítható meg, akkor tetszőleges kezdő helyzetből el tudunk-e jutni a szabályos saktábla állapothoz?*

A válasz az, hogy nem. Például, ha a szabályos helyzethez képest páratlan számú mező van megfordítva, akkor nincs megoldás. Ennek az az oka, hogy egy fordítás során a fekete mezők számának paritása nem változik. Az alábbiakban a módszert, az előző fejezethez hasonlóan a *Matematikai játékok* című írás [9], továbbá az *Elemi matematika feladatgyűjtemény* [4] invarianciáról szóló fejezetének egyik feladatával fogom illusztrálni.

Az első játék egy, a *Matematikai játékok* című forrásban található játék módosítása: *Adottak a következő számok: 1, 2, 3... 9, 10, 10, -11, -12, -13, -14, -15. A két játékos felváltva választ egy-egy számot. Az nyer, akinél az összegyűjtött számok összegének abszolút értéke nagyobb.*

Először is azt kell észrevenni, hogy ezeknek a számoknak az összege nulla: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 10 + (-11) + (-12) + (-13) + (-14) + (-15) = 0$. A bal oldal bármelyik tagját levonva mindkét oldalról az egyenlet igaz marad, vagyis az egyenlőségjel két oldalán az összeg azonos lesz. Ha az egyenletrendezés szabályait mellőzve átrakunk egyes tagokat a másik oldalra, akkor a két oldal abszolút értéke lesz egyenlő. Amikor a két játékos választ, akkor lényegében az egyenlet két oldalára választ tagokat, tehát a két oldal abszolút értéke mindig egyenlő lesz, a játékosok választásától függetlenül. Ennek a játéknak tehát nincs nyertese.

A második játék szintén egy, az előző forrásban található játék módosítása: *Felírjuk egy táblára az 1, 2... 2014, 2015 számokat. A két játékos felváltva letöröl két számot és helyettük az különbségük abszolút értékét írja fel. A kezdő játékos nyer, ha a táblán maradó szám páros, és veszít, ha páratlan. Kinek van nyerő stratégiája? [9]*

Az előző játék és az invariancia-elv alapján már lehet sejteni, hogy a játék kimenetele független a játékosok lépéseitől. Fontos észrevenni, hogy a számok összege

eredetileg (1008·2015) páros szám. Az az állítás, hogy a játékosok lépéseitől függetlenül ez az összeg páros marad és a kezdő játékos nyer.

(1) Ha két azonos paritású számot töröl le egy játékos, akkor a táblán maradt számok összege páros marad. Az azonos paritású számok különbsége is páros, ezt hozzáadva a táblán lévőkhöz, az összeg páros marad.

(2) Ha két ellentétes paritású számot töröl le egy játékos, akkor a táblán az összeg páratlanra változik. Viszont a két letörölt szám különbsége páratlan, ezt hozzáadva a táblán lévőkhöz, mégis páros marad az összeg.

Még egyszerűbb belátni, hogy az összeg páros marad, ha rájövünk, hogy minden lépésben a kisebbik letörölt szám kétszeresével, tehát páros számmal csökken. Ez könnyen belátható, hiszen $x - a - b + |a - b|$ pont $x - 2a$, ha $a < b$, és $x - 2b$, ha $b < a$.

A következő játékos feladattal elemi matematika órán találkozhatnak a hallgatók, és azt gondolom, hogy az invariancia egy szép példája. *Egy szigeten 13 szürke, 15 barna, 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor annyira megijednek egymástól, hogy mindketten a harmadik színre változtatják bőrüket. Két azonos színű kaméleon nem ijed meg egymástól, így találkozáskor nem változtatják meg színüket. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva minden kaméleon ugyanolyan színű legyen?* [4] **(8.6. fejezet, 8.5. feladat)**

A cél tehát, hogy az egyes egyedek létszámának eloszlása a 45,0,0 legyen. Az első gondolata az lenne talán mindenkinek, hogy a három létszám paritásának változását vizsgálja. Az lenne a kérdés, hogy lehetséges-e olyan helyzet, hogy egy létszám páratlan és kettő páros. A válasz az, hogy igen, hiszen az alaphelyzethez képest egy találkozás után pont ilyen lesz az eloszlás. Ezzel tehát nem kerültünk közelebb a válaszhoz.

Vizsgáljuk ezért a létszámok hármass maradékait. Kezdetben ezek rendre: 1,0,2. Tehát a három létszám három különböző maradékosztályban van. Nézzük, mi történik egy találkozás során a maradékokkal. Kettő közülük 1-gyel csökken, egy pedig 2-vel nő, tehát a $-1 \equiv +2 \pmod{3}$ kongruencia miatt továbbra is minden létszám különböző maradékosztályban lesz. A 45,0,0 létszámeloszlás tehát nem érhető el, mert abban két létszám azonos maradékosztályban lenne. Tehát soha sem lehet minden kaméleon azonos színű, a maradékok invarianciája miatt.

3.6. Esetszétválasztás

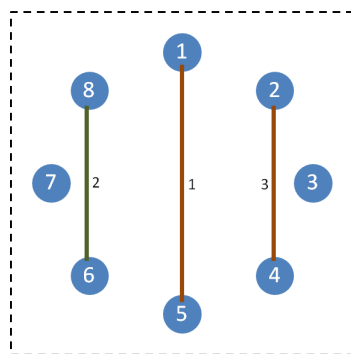
Sokszor előfordul, hogy egy általánosan megfogalmazott probléma esetén egy paraméter különböző értékeinél más és más megoldása van a problémának. Lehetséges, hogy csak eredmény más, de olyan is előfordul, hogy teljesen más módszer a célra vezető a megoldás során. Ekkor érdemes a problémát több részre bontani és az egyes részeket külön vizsgálni. Ezt a módszert *Matematikai játékok 2.* című forrás [10], továbbá egy teljesen saját játék segítségével illusztrálom.

Nézzük az első játékot: *Egy körvonalon n pontot beszámozunk 1-től n -ig. A két játékos felváltva összeköt két, azonos paritású pontot egy egyenessel, oly módon, hogy az egyenesek nem metszhetik egymást, még a körvonalon sem. Az veszít, aki nem tud több ilyen egyenest behúzni. [10]*

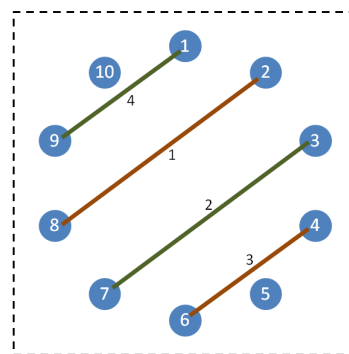
Itt négy esetet különböztethetünk meg, az alapján, hogy a körvonalon lévő pontok számának mennyi a 4-es maradéka. (15-18. ábra)

(1) $n=4k$ alakú: A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. A szimmetriát kihasználva, az első lépésében berajzolja a kör egyik átmérőjét, és aztán minden lépésében a második játékos lépéseit arra szimmetrikusan megismétli.

(2) $n=4k+2$ alakú: A második játékosnak van nyerő stratégiája, mivel az átmérőn fekvő pontok ellentétes paritásúak, így az első játékos nem tud átmérőt behúzni, a második játékos viszont minden lépésben le tudja másolni az első játékos lépését, ahogy az a 16. ábrán is látható.



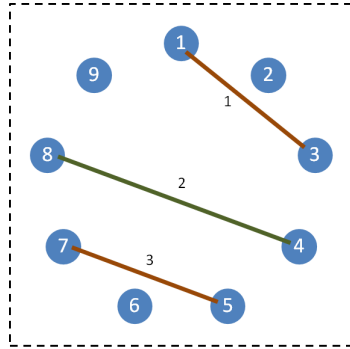
15. ábra: 1. eset



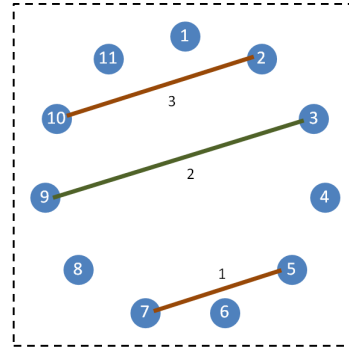
16. ábra: 2. eset

(3) $n=4k+1$ alakú: A kezdő játékos az 1 és a 3 pontok összekötésével kiiktat 3 pontot, így visszavezeti a problémát az $n=4k+2$ típusú esetre, ahol az (eredetileg második) kezdő játékos veszít.

(4) $n=4k+3$ alakú: A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. Az első lépésében összeköti a $2k+1$ és $3k+1$ pontokat, így $n=4k$ pont marad játékban, viszont ezeket egy köríven egyenletesen elhelyezve, az átmérők ellentétes végén ellentétes paritású pontok lesznek. Így lényegében a (2) esetben tárgyalt helyzet áll elő, ahol a másodikként egyenest behúzó játékos a nyerő, aki jelen esetben az első játékos.



17. ábra: 3. eset



18. ábra: 4. eset

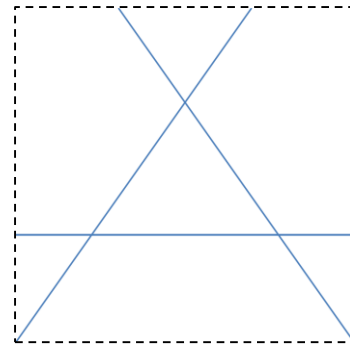
A következő játék is esetszétválasztással elemezhető: Két játékos egy $2k$ -jegyű szám számjegyeit felváltva írja fel, a 6, 7, 8, 9 számjegyek felhasználásával. Ha az így kapott szám végül osztható 9-cel, akkor a második játékos nyer. Ellenkező esetben a kezdő játékos nyer. [10]

(1) $k=3a$: A második játékos nyer. A kezdő játékos minden lépése után egy olyan számjegyet ír, ami az előző számmal összeadva 6 maradékot ad 9-cel osztva. Ekkor a $2k$ -jegyű szám biztosan osztható lesz 9-cel.

(2) $k=3a+1$: A kezdő játékos nyer. A kezdő játékos első lépése lehet 6, 7 vagy 8. Ezután a második játékos minden lépésére az (1) esetben leírt stratégiát alkalmazza, így a középső $2 \cdot 3a$ számjegyből álló szám osztható lesz 9-cel. Viszont az első és az utolsó számjegyet is hozzávéve a számhoz, már semmiképp sem lesz osztható 9-cel.

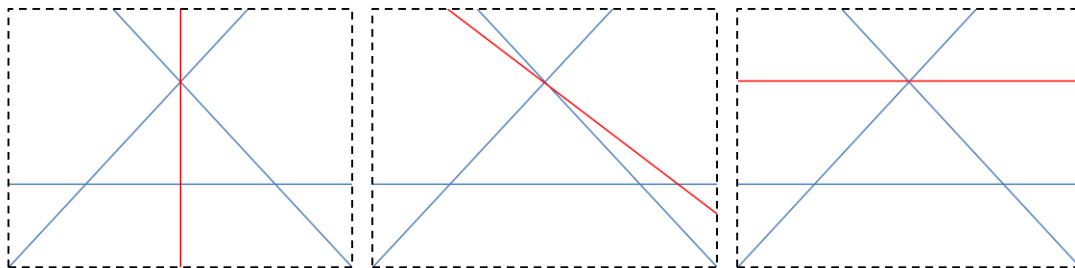
(3) $k=3a+2$: A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. A kezdő játékos első lépése a 9-es számjegy. Ezután az utolsó lépés kivételével minden lépésére az (1) esetben leírt stratégiát alkalmazza. Így $6a+1$ lépés után a szám biztosan osztható lesz 9-cel. Ekkor három lépés van hátra, ebből kettőt a második játékos tesz meg. Ha a második játékos következő lépése 9, akkor az első játékos 9-től különböző számjegyet ír, és a szám, a második játékos utolsó lépésétől függetlenül, nem lesz osztható 9-cel. Ha a második játékos utolsó előtti lépése nem 9, akkor az első játékos ír 9-et, és az egész szám, a második játékos utolsó lépésétől függetlenül, nem lesz osztható 9-cel.

A saját játékom a következő: *A játékot ketten játsszák az 19. ábrán szereplő kezdőhelyzetből indulva. Az első játékos behúz egy, az ábrán szereplő metszéspon- tok egyikén átmenő, eddigiektől különböző egyenest. Ez- után a második játékostól indulva felváltva beszíneznek (egy-egy saját színnel) egy olyan tartományt a táblán, mely nem szomszédos már beszínezett saját tartomány- nyal. Aki nem tud újabb tartományt beszínezni, az veszít.*



19. ábra: A kezdő állás

Kézenfekvő, hogy a kezdő egyenes behúzásától függően különböztessünk meg eseteket. Látható, hogy a játék szempontjából a tábla szimmetrikus, a három metszés- pont egyenrangú, amíg az egyikén keresztül be nem húzzuk a plusz egyenest. A behú- zott egyeneseket három típusba lehet sorolni, mint az a következő ábrákon látható.



20. ábra: 1. eset

21. ábra: 2. eset

22. ábra: 3. eset

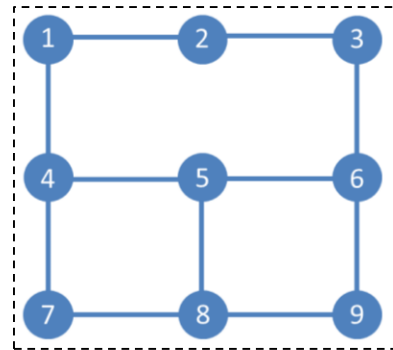
Az első esethez tartoznak az olyan típusú kezdő egyenesek, melyek a harmadik egyenest a másik két metszéspon- t között metszik. A második esetben nem a két meg- lévő metszéspon- t között metszi, harmadik esetben egyáltalán nem is metszi az új egye- nes a harmadik egyenest.

1. eset: A szimmetriáról szóló fejezetben tárgyaltak erre az esetre is alkalmaz- hatóak. A behúzott egyenes két oldala szimmetrikus, így a színezést kezdő játékos minden lépését le tudja másolni a másik játékos. Tehát megéri így behúzni a vonalat, mert a vonalat behúzó játékosnak van nyerő stratégiája.

2. eset: Az eset valójában megegyezik az első esettel. Ugyanannyi tartomány van, és az elrendezésük is izomorf az első esetnél lévőkhez. Így a győztes stratégia is ugyanaz, csak a jobb alsó sarokból induló egyenest tekintjük „szimmetriatengelynek”.

3. eset: Itt a megoldás már koránt sem olyan egyszerű, mint az előző két eset- ben. Ebben az esetben 9 tartomány keletkezik, mégpedig úgy, hogy a középső tarto- mány 3 egymástól független tartománnyal szomszédos. A maradék 5 tartomány közül

4 nem szomszédos egymással. Tehát cél lehet, hogy a középső tartományt és az említett négy tartományt színezzé be a második játékos. Másképp nem is lehet 5 tartományt beszínezni a szabályoknak megfelelően. (Az eset tárgyalásának megkönnyítése érdekében a 23. ábrán gráf alakban ábrázoltam a tartományokat, és megszámoztam azokat.)



23. ábra: A 3. eset gráf alakban

Könnyen belátható, hogy fent említett 5 mező kiszínezése csak akkor lehetséges, ha az első játékos a másik négy mezőt színezi be. Ha az első játékos valamelyik sarokban lévő mezőt beszínezi, akkor máris megakadályozta ezt az ideális forgatókönyvet. Felmerül tehát a kérdés, hogy ha 5-öt nem is, de 4 mezőt biztosan ki tud-e színezni a színezést kezdő játékos úgy, hogy közben ne veszítsen. A válasz az, hogy nem, mert elég, ha a másik játékos két sarkot elfoglal és máris nincs a maradék 7 tartomány közül 4 független. Kivéve természetesen a 2,4,6,8 csúcsoknak megfelelő tartományokat, de csak azok kiszínezése vesztes stratégia.

Eddig tehát beláttuk, hogy az első (az egyenest behúzó) játékos tud olyan stratégiát választani, hogy a második (színezést kezdő) játékos legfeljebb 3 tartományt tudjon beszínezni. Kérdés, hogy eközben az első játékos is be tud-e színezni 3 mezőt, mert ha igen, akkor nyer, ugyanis 3-3 színezés után a második játékosnak kellene színeznie, de nem tud.

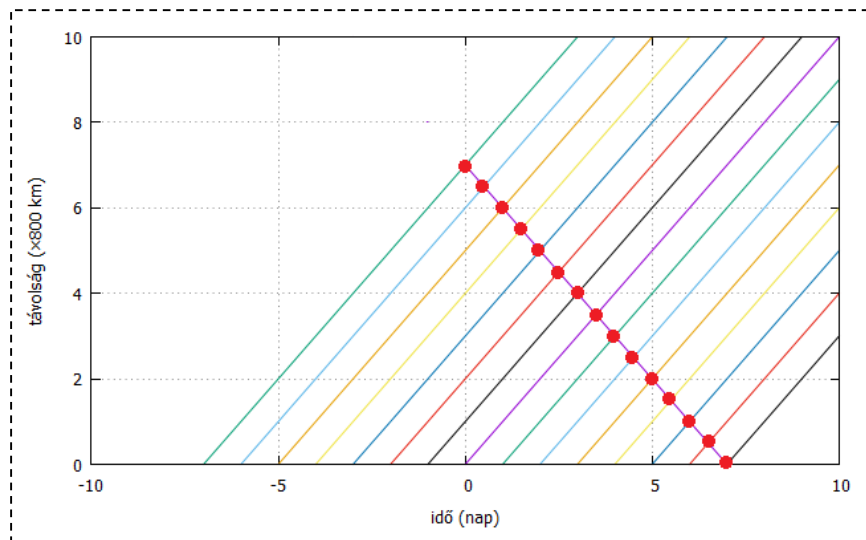
A válasz az, hogy igen a második játékos minden esetben be tud színezni 3 tartományt. Ugyanis, ha a gráfban két egy oldalon levő sarkot (pl. 1 és 7) is be tud színezni, akkor a szemközti oldalon lévő 3 pont (3,6,9) közül legalább az egyik biztosan szabad lesz. Ha pedig a második játékos két szemközti sarok beszínezésével megakadályozza az egy oldalon lévő sarkok beszínezését, akkor az első lépésben beszínezett sarok (7 vagy 9) után a középső pontot kell beszínezni. Ekkor a 2-es pont még mindenképp szabad marad, így elérhető a 3 db pont kiszínezése. Tehát a 3. esetben is a második játékosnak van nyerő stratégiája, melynek első lépése a 7-es vagy 9-es csúcsnak megfelelő tartomány beszínezése, a további lépéseket a fent leírtaknak megfelelően kell megtenni.

3.7. Grafikus módszer

A problémamegoldás során sokszor előfordul, hogy nehéz fejben végiggondolni az összes lépést. Ilyenkor egy jó ábra gyakran kitisztítja a képet, előre viszi a problémamegoldás folyamatát. Ha valamilyen egyenletrendszerrel kell dolgoznunk, akkor is nagy segítség lehet, ha az egyes egyenleteknek megfelelő alakzatokat, akár csak vázlatosan, ábrázoljuk egy közös koordináta-rendszerben. Ebben a fejezetben egy fejtörő feladatokkal illusztrálom ezt a módszert.

Ezzel a feladattal is elemi matematika kurzus kereteiben belül találkoztam. *Minden nap pontosan délben egy hajó indul Lisszabonból New Yorkba az Atlanti óceánon, és ugyanabban a pillanatban egy másik az ellenkező irányba. Az út mindkét irányban pontosan hét napig tart. Egy hajó hány szembejövővel találkozik útja során?*

Ez egy kicsit becsapós feladat, ugyanis az emberek többsége gyorsan rávágja, hogy 7. Amikor kiderül, hogy nem az a jó válasz, akkor rövid gondolkodás után felmerül, hogy 14, vagy 15, vagy 13. Ennek eldöntéséhez legegyszerűbb, ha a grafikus módszerhez folyamodunk, és (sebességüket egyenletesnek tekintve) egyenesként ábrázoljuk a hajók útját egy távolság-idő grafikonon (24. ábra).



24. ábra: A egyik irányba menő és a szembejövő hajók találkozásai

Az ábrán a párhuzamos egyenesek az azonos kikötőből induló hajókat, az őket metsző egyenes a másik kikötőből induló hajót jelöli. A találkozásokat piros pöttyel jelöltem. Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy összesen 15 találkozás történik, ha azokat az eseteket is beleszámoljuk, amikor épp megérkezik, illetve indul egy-egy hajó.

4. Bizonyítási módszerek bemutatása

Ebben a rövid fejezetben először a bizonyításokról, azok jelentőségéről fogok írni, főként az *Indoklás és bizonyítás* [5], valamint *A gondolkodás iskolája* [7] című munkák alapján, majd bemutatok három alapvető bizonyítási módszert néhány játékos vagy szemléletes példa segítségével.

Pólya György a fent említett könyvében egész fejezetben (*Minek bizonyítani?*) fejtegeti a bizonyítások szükségességének és szükséges szigorúságának témáját. Elmondja, hogy az első logikai rendszer Eukleidész *Elemek c.* műve volt, melyben az axiómák, a definíciók és a tételek meghatározott sorrendben követték egymást. Felhívja a figyelmet arra, hogy minden ilyen logikai rendszert a bizonyítások tartanak össze.

Valóban nyilvánvaló, hogy a matematika épületét a bizonyítások tarták egyben. Kérdés azonban, hogy mikor milyen szigorúság szükséges az egyes bizonyításokkal kapcsolatban. Mindkét forrás kiemeli, hogy új tételek, összefüggések kutatásakor a matematikus szükségszerűen elrugaszkodik az egzakt bizonyítások talajáról, hamarabb biztos a dolgában, mint hogy azt bizonyítani tudná. A hétköznapi életben, vagy a fizikában sem ragaszkodunk a túlságosan magas követelményeknek megfelelő bizonyításokhoz, sokszor inkább modellezük a dolgokat, jelenségeket.

Manapság már az is világos, hogy közoktatásban „nem lehet olyan szigorú, egzakt, matematikai formalizmussal leírt bizonyításokat megtanítani, mint amit a felsőoktatásban elvárnak a hallgatóktól.” [5] Többek között ezért a szigorúan vett bizonyítási módszerek mellett egyre inkább bizonyításnak tekintjük az indoklásokat, következtetéseket, szemléltetéseket is. Ezek alapján az előzőekben bemutatott módszerek is bizonyításnak minősülhetnek adott közegben.

Ebben a fejezetben a matematikai bizonyítások egy magasabb szintjének megfelelő bizonyításokat fogok bemutatni. Ezekben néhány állítás láncolata lesz előtérbe állítva. A Matematika BSc tantervében szereplő kurzusok tananyagának részét képező, ott számonkért tételeket és definíciókat csak szükség esetén idézem.

4.1. Teljes indukció

A teljes indukciós bizonyítás alapja a Peano-axiómarendszer 5. axiómája. Az 5. axióma kimondja, hogy a természetes számok (\mathbf{N}) minden A részhalmazára igaz, hogy ha tartalmazza a nullát és minden elemének rákövetkezőjét is, akkor $A = \mathbf{N}$. A teljes indukciós bizonyítás lényege, hogy egy állítás $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq a (a \in \mathbf{N})$ számra igaz, ha a következő két feltétel teljesül:

(1) Az állítás igaz $a \in \mathbf{N}$ -re.

(2) Ha n -re igaz, akkor abból következik, hogy $n+1$ -re is igaz.

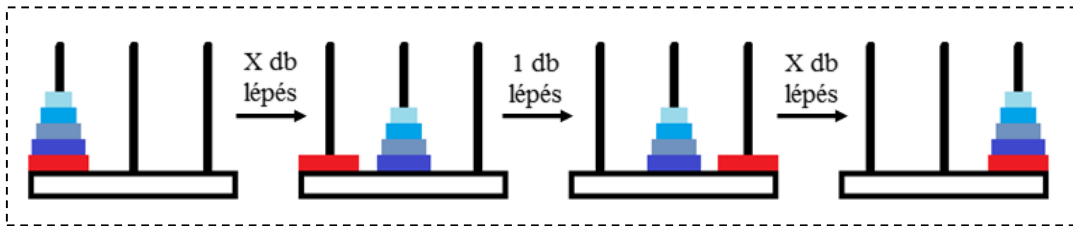
Tehát a módszer lényege, hogy egy adott számra belátjuk, hogy igaz az állítás, illetve bemutatjuk, hogy meg tudjuk tenni a (2) pontban leírt indukciós lépést. Ezt a fajta bizonyítási módszert elsősorban összegformulák, egyenlőségek, egyenlőtlenségek, oszthatósági állítások, illetve egyéb állítások általánosításának bizonyítására használjuk.

A teljes indukció módszerének alapvető szemléltetésére alkalmas a dominó-elv vagy a lépcsős példa. A dominó-elv lényege, hogy a sorban felállított dominók mind eldőlnék, ha eldőlt az első, és minden dominó biztosan eldönti a következőt is. A lépcsős példa azt mutatja meg, hogy akár egy végtelen lépcsőn is teljesen fel tudunk menni, ha fel tudunk lépni az első lépcsőfokra, és minden egyes lépcsőfokról fel tudunk lépni a következőre. [5]

Ebben a dolgozatban a teljes indukciós bizonyítás bemutatására elsősorban a Hanoi tornyok nevű, egyszemélyes játékot szemeltem ki, mellyel a Csákány-féle *Matematikai játékok* könyvben találkoztam [1]. A játék három oszlopból és n darab különböző méretű, középen lyukas korongból áll. Kezdetben az első oszlopra vannak rácsúsztatva a korongok, alul a legnagyobb, majd fokozatosan felfelé csökkenve a többi, végül felül a legkisebb. A játék célja, hogy átrakjuk a korongokat ugyanilyen elrendezésben a harmadik oszlopra, oly módon, hogy lépésenként csak egy korongot mozgassunk, és soha nem rakunk nagyobb korongot kisebbre. Számunkra az a kérdés adódik, hogy vajon hány lépésben lehet megnyerni a játékot, ha n db koronggal játszunk.

Triviális, hogy $n=1$ esetén 1 lépésben, $n=2$ esetén 3 lépésben tudok végezni. Rövid próbálgatás után az is látható, hogy $n=3$ esetén legalább 7 lépés kell. Ha $n=k>2$, akkor rövid gondolkodás után felfedezhető, hogy milyen módszerrel tudjuk megoldani

a feladatot. A lényeg, hogy $k-1$ darab korongot átpakolunk a 2. oszlopra x lépésben, majd a legalsó (az ábrán pirossal jelölt) korongot áthelyezzük a 3. oszlopra 1 lépésben, majd a 2. oszlopról az $k-1$ darabot ugyancsak x lépésben visszapakoljuk a legalsóra. Tehát összesen $2x+1$ lépésben végzünk, ahol x tulajdonképpen a $k-1$ darabot tartalmazó játék lépésszáma. Tehát ha tudjuk a k darab korongból álló játék megoldásának lépésszámát, akkor abból meghatározható a $k+1$ -es eset. Elmondhatjuk, hogy a bizonyítás indukciós lépését (25. ábra) megtaláltuk.



25. ábra: Az indukciós lépés

A teljes indukció tényleges végrehajtásához már csak meg kell sejténünk, hogy $n=k$ darab korong esetén mennyi a minimálisan szükséges lépésszám. Az $n=1,2,3$ esetek vizsgálata után sejtjük, hogy a szükséges lépésszám 2^n-1 . Ez alapján, $n=k$ esetén a szükséges lépésszám 2^k-1 , erre az indukciós lépés alkalmazva azt kapjuk, hogy $n=k+1$ esetén $2(2^k-1)+1=2^{k+1}-2+1=2^{k+1}-1$, azért láthatjuk, hogy ez pontosan az a lépésszám, amit bizonyítani akartunk.

A teljes indukció másik illusztrációja a 3.6. fejezetben található saját játékomhoz kapcsolódik. Abban a játékban a játékosok felváltva színezhettek ki a síkon egy olyan tartományt, mely nem szomszédos saját, már beszínezett tartománnyal. Nézzük ennek a játéknak a kooperatív változatát! *Két játékos felváltva színez be (egy-egy saját színnel) egy egyenesekkel tartományokra bontott téglalapot. Akkor győznek, ha minden tartományt ki tudtak színezni két színnel úgy, hogy nincs két szomszédos tartomány, mely azonos színű. Meg tudják ezt mindig tenni?*

A válasz az, hogy igen. A bizonyításhoz mindössze a teljes indukció és egy ötlet szükséges. Nyilvánvaló, hogy ha összesen 1 egyenes, azaz 2 tartomány van, akkor kiszínezhető a téglalap. Tegyük fel, hogy n egyenes esetén is van jó színezés. Ha behúzzuk az $n+1$. egyenest, akkor annak egyik oldalán maradjon ugyanaz a színezés, a másik oldalán pedig legyen minden tartomány ellenkező színű, mint addig. Így belátuk, hogy tetszőlegesen sok egyenes és tartomány esetén van jó színezés.

4.2. Indirekt bizonyítás

Az indirekt bizonyítás lényege, hogy a bizonyítani kívánt állítás tagadásáról látjuk be, hogy ellentmondáshoz vezet, ezzel bizonyítva az eredeti kijelentés helyességét. Ennek logikai alapjait az alábbiakban foglalom össze, az [5] forrás alapján:

- (1) Ellentmondásmentesség: $A \wedge \neg A$ mindig hamis.
- (2) A harmadik kizárása: $A \vee \neg A$ mindig igaz.
- (3) Tagadás tagadása: $\neg(\neg A) = A$
- (4) Műveletek tagadása: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- (5) Kvantorok tagadása: $\neg(\exists x, T(x)) = (\forall x, \neg T(x))$, $\neg(\forall x, T(x)) = (\exists x, \neg T(x))$

Ez a módszer abban az esetben indokolt igazán, ha más módon nem járunk sikerrel. A módszer hasznos lehet többek között tételek megfordításánál, negált egzisztenciátételeknél, illetve olyan állításoknál, ahol kevés megkülönböztethető eset van. A bizonyításhoz szükséges ellentmondásokból 4 típust különböztet meg:

- (1) Az állítás, amire következtettünk a feltételből, ellentmond az indirekt feltételnek.
- (2) Az indirekt feltétel következménye ellentmond egy ismert tételnek, axiómának.
- (3) Az indirekt feltétel következménye ellentmond a bizonyítandó tétel feltételének.
- (4) Az indirekt feltételből következik egy állítás és annak negáltja is.

Illusztrációként egy már korábban tárgyalt témát folytatok. A transzformáció elvről szóló fejezetben szerepelt a következő feladat: *Legfeljebb hány huszár lehet úgy elhelyezni egy szabályos sakktáblán, hogy ne üssék egymást?* Ennek kapcsán állítottam, hogy próbálgatással el lehet jutni a jó eredményre (32), de akkor további megfontolást igényel annak bizonyítása, hogy nem lehet ennél több huszárt elhelyezni a táblán a feladatnak megfelelően. Ezt fogom most indirekt módon bizonyítani.

Tegyük fel indirekt módon, hogy el lehet helyezni 33 huszár a sakktáblán úgy, hogy ne üssék egymást. Ebből az következik, hogy a tábla egyik felén legalább 17, az egyik negyedén minimum 9, az egyik nyolcadán pedig nem kevesebb, mint 5 huszárt lehet elhelyezni a szabályoknak megfelelően. A sakktábla nyolcada egy 2×4 -es rész, azaz 8 mező. Minden egyes erre lerakott huszár 2 mezőt foglal el, egyet, amin áll és egyet, ahova lépni tud (26. ábra). Vagyis a skatulya-elv alapján az 5. huszárt már nem tudjuk elhelyezni úgy, hogy ne legyen ütésben. Így tehát ellentmondásra jutottunk az indirekt feltétellel szemben, ez eredeti állítást fogadjuk el igaznak.



26. ábra: A 2×4 -es rész

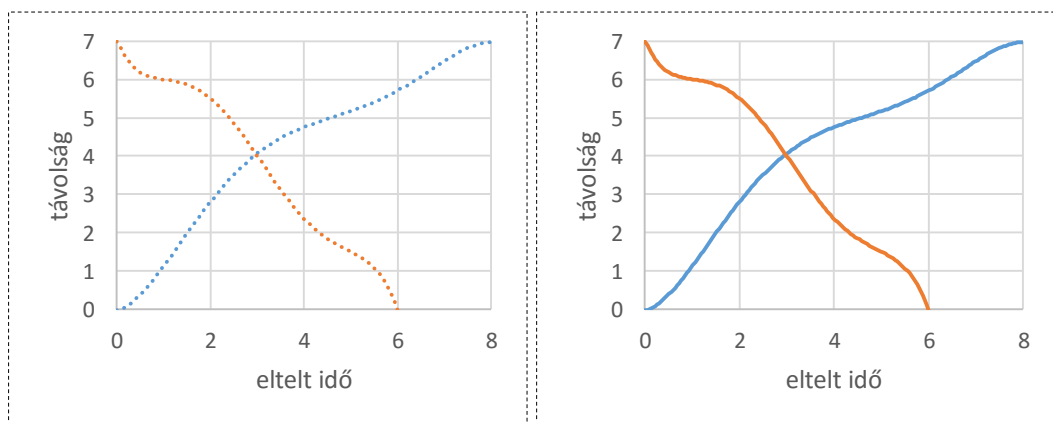
4.3. Direkt bizonyítás

A direkt bizonyítás során közvetlenül az állítást bizonyítjuk logikailag egymásra épülő igaz állítások véges sorozatával. A bizonyítás során felhasznált axiómák, definíciók, tételek valamint a választott stratégia az adott problémától, bizonyító előzetes ismereteitől és gondolkodási szintjétől függenek. [5]

A következő problémával a Pázmány Péter Katolikus Egyetem egyik kurzusán találkoztam, és úgy gondolom, hogy egy szép példája a korlátos intervallumon folytonos függvényekre vonatkozó Bolzano-tétel felhasználásának és szemléltetésének. *Egy tibeti szerzetes reggel 7-kor elhagyja a kolostort, hogy szokásos útvonalán felmenjen a hegytetőre. Másnap reggel újra 7-kor indul a hegycsúcsról, és az előző napi útvonalon haladva visszatér a kolostorba. Igazolja, hogy az útvonalon van olyan pont, ahol mindkét nap pontosan ugyanakkor megy át a szerzetes!*

Elemi megfontolások alapján többféleképpen is szemléltetni lehet, hogy miért van ez így. Például az első ilyen megfontolás során képzeljük el, hogy reggel hétkor mindkét irányba egyszerre indul el egy-egy szerzetes. Ekkor az út egy pontján mindenképp találkoznak egymással, vagyis lesz olyan pont, melyen mind a két irányba haladó szerzetes ugyanabban a pillanatban halad át.

A másik elemi megfontolás lényege, hogy rajzoljuk fel egy grafikonon a két út távolság-idő függvényének modelljét (27. és 28. ábra), és vegyük észre, hogy a két függvény metszi egymást. Szemléletesen ez az érvelés is rendben van, ugyanakkor néhány alapvető dolgot meg kell még fontolnunk, hogy ebből a szemléltetésből valóban bizonyítás legyen.

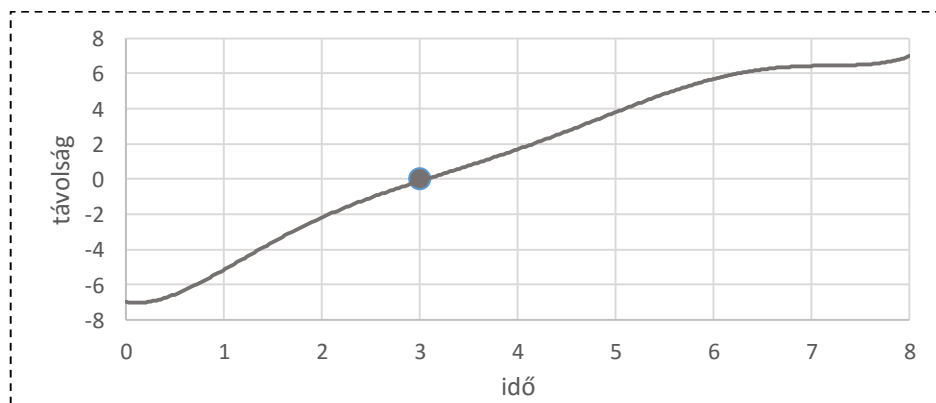


27-28. ábra: A két függvény diszkrét pontokból és folytonosan (0 – kolostor, 7 – hegytető)

Már a szemléltetéshez is szükséges meggondolnunk, hogy a feladatot a 27. vagy a 28. ábra modellezi helyesen, azaz diszkrét pontokról vagy egy folytonos görbéről beszélünk, diszkrét pontok esetén ugyanis egyáltalán nem biztos, hogy a két függvénynek van közös pontja. Szerencsére a feladat leírása alapján tekinthetjük folytonosnak a szerzetes mozgását leíró görbét, hiszen soha sem kerül egy pillanat alatt egy „messze” lévő pontba. Gyakorlatilag értelmezhetjük úgy a feladatot, hogy a szerzetes mozgását egy folytonos görbe írja le a távolság idő-grafikonon.

Felmerül a kérdés, hogy akkor kész vagyunk? Hiszen látszik, hogy a két görbének metszenie kell egymást, tehát van olyan időpont, amikor mindkét nap ugyanott járt a szerzetes. A szemléltetés szintjén ez már rendben van, de a bizonyításhoz ennél több kell. Mondhatjuk például, hogy az egyik görbe két részre bontja a távolság-idő síkot, a másik görbe pedig a két tartományt köti össze, tehát mindenképp metszenie kell az elsőt. Ennek bizonyítása, mely a Jordan-tétel következménye, azonban túlmutat ezen a szinten.

Szerencsére van egy sokkal egyszerűbb lehetőség is. Vegyük a két görbe különbségét, ha ez nulla, akkor az pont azt jelenti, hogy a görbék metszik egymást. Tehát már csak azt kell belátni, hogy a két görbe különbsége felveszi a nulla értéket. Ehhez felhasználjuk a Bolzano-tételt. A tétel kimondja, hogy: *Korlátos, zárt intervallumon értelmezett, negatív és pozitív értékeket is felvevő, folytonos függvénynek van zérushelye.* Két folytonos függvény különbsége is folytonos, és jelen esetben egy korlátos és zárt intervallumon van értelmezve. Az is világos, hogy a különbséggörbe felvesz pozitív és negatív értékeket is. Tehát alkalmazható a tétel, valóban felveszi a nulla értéket is (29. ábra). A bizonyítás így már elég egzakt, megfelel az elvárt szintnek, igazoltuk az állítást.



29. ábra: A két görbe különbséggörbéje, és a zérushely

Felhasznált irodalom

- [1] **DR. MOSONYI K.** 1996: Matematikai játékok – Tankönyvkiadó, Budapest
- [2] **CSÁKÁNY B.** 1998: Diszkrét matematikai játékok – Polygon Könyvtár, Szeged
- [3] **FRIED K. – KORÁNDI J. – TÖRÖK J.** 2013: Elemi matematika példatár tanároknak – Budapest, ELTE TTK Matematikai Intézet, Matematikatanítási és Módszertani Központ (<http://mathdid.elte.hu/>, letöltés: 2016. április 11.) [p. 11.]
- [4] **HEGYVÁRI N. – HRASKÓ A. – KORÁNDI J. – TÖRÖK J.** 2013: Elemi matematika feladatgyűjtemény – Budapest, ELTE TTK Matematikai Intézet, Matematikatanítási és Módszertani Központ (<http://mathdid.elte.hu/>, letöltés: 2016. április 11.)
- [5] **Makó Z. – Téglási I.** 2012: Indoklás és bizonyítás – Eger, Eszterházy Károly Főiskola, Matematikai és Informatikai Intézet (http://aries.ektf.hu/~hz/pdf-tamop/pdf-xx/Ind_biz.pdf, letöltés: 2016. április 11.) [p. 6.]
- [6] **PÓLYA GY.** 1967: A problémamegoldás iskolája I. – Tankönyvkiadó, Budapest
- [7] **PÓLYA GY.** 1994: A gondolkodás iskolája – Typotex Kiadó, Budapest
- [8] **PÓLYA GY.** 1988: Indukció és analógia – Gondolat, Budapest [p. 29.]
- [9] **BILCHEV, S. and VELIKOVA, E.** 2007: Mathematical Games – Level 1, In the book G. Makrides (Ed.), MATHEU, Identification, Motivation and Support of Mathematical Talents in European Schools, Manual 1, 2 & 3, Intercollege, Cyprus, Published by MATH.EU Project, ISBN 9963-634-31-1, Volume 1, p. 14-19. (*magyar fordítás a Miskolci Egyetem honlapjáról, utolsó elérés: 2016.05.15.* <http://www.uni-miskolc.hu/evml/database/downloads/matalap/segedletek/matematikai-jatekok.pdf>)

- [10] **BILCHEV, S. and VELIKOVA, E.** 2007: Mathematical Games – Level 2, In the book G. Makrides (Ed.), MATHEU, Identification, Motivation and Support of Mathematical Talents in European Schools, Manual 1, 2 & 3, Intercollege, Cyprus, Published by MATH.EU Project, ISBN 9963-634-31-1, Volume 3, p. 16-30. (*magyar fordítás a Miskolci Egyetem honlapjáról, utolsó elérés: 2016.05.15.* <http://www.uni-miskolc.hu/evml/database/downloads/matalap/segedletek/matematicai-jatekok-2.pdf>)
- [11] **AMBRUS A.** 2004: Bevezetés a matematika didaktikába – Egyetemi jegyzet – ELTE Eötvös Kiadó, Budapest
- [12] **VÁSÁRHELYI É.** 2013: Matematika módszertani példatár – Budapest, ELTE TTK Matematikai Intézet, Matematikatanítási és Módszertani Központ (<http://mathdid.elte.hu/>)