Fourier-sorok

Horváth Gábor

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés 2
1.1 Történeti bevezetés 2
1.2 Nevezetes periodikus függvények 3
1.3 Trigonometrikus polinomok és ezekből képezett végtelen trigonometrikus sorok 4

2 A Fourier-együtthatók meghatározása 5
2.1 A módszer levezetése 5
2.2 Példák a Fourier-együtthatók meghatározára 7

3 Feladatok 13

1 Bevezetés

Szakdolgozatom során periodikus függvények egyfajta közelítésével fogunk foglalkozni. Amíg a Taylor-sornál a függvényeket hatványsor alakban állítjuk elő, addig a Fourier-sornál úgynevezett trigonometikus sor segítségével fogjuk ezt megtenni.

1.1 Történeti bevezetés

A Fourier-sorok vizsgálata először a hőtan és a hangtan kapcsán indult fejlődésnek a XVIII. században. W. R. Wade amerikai professzortól idézném a következő gondolatokat: *"A klasszikus harmonikus analízis, a Fourier-analízis gyökerei mélyre nyúlnak. Mondhatnám, Isten volt az első, aki Fourier-analízist művelt, amikor fülünkbe beépített egy Fourier-analizátort. Ugyanis már a gyermek is képes arra, hogy különbséget tegyen például a hegedű és a harsona hangja között. Annak ellenére, hogy a hangjegyek, amelyekkel a dallamot leírjuk, ugyanazok. Mi akkor a különbség a két hang között? Az, hogy amikor megszólaltatunk egy hangot, az sosem csupán tiszta hang, hanem több felhangból álló együttes. Kissé általánosabban fogalmazva: minden függvényben, ami egy hangzásnak megfelel, sok rejtett információ van, amit észlelni kell, s fülünk észlelni is tudja[1]."*

[1]https://hu.wikipedia.org/wiki/Fourier-analízis

1.2 Nevezetes periodikus függvények

1.1 Definíció:
Egy $f(x)$ függvényt periodikusnak mondunk, ha létezik olyan $P \neq 0$ konstans, hogy bármely $x \in D(f)$-re $x + P \in D(f)$, $x - P \in D(f)$, továbbá

$$f(x + P) = f(x) \tag{1}$$

Ekkor P és $-P$ periódusa lesz az f függvénynek. Könnyen meggondolható, hogy két különböző, P szerint periodikus függvény összege, különbsége, szorzata és hányadosa is (ahol a nevező nem nulla) P periódusú függvény lesz, továbbá ha egy függvénynek periódusa P, akkor $-P$, $2P$, $-2P$, $3P$, $-3P$, $4P$, $-4P$, ... szintén periódusa.
Térjünk át a 2π szerint periodikus függvényekre. Ezek közül a legismertebbek a $\sin x$ és a $\cos x$. Vizsgáljuk a következő transzformáltját például a szinusz függvénynek:

$$y = A \sin(\alpha x + \beta). \tag{2}$$

A fenti formában $\sin x$ bármilyen transzformáltját felírhatjuk alkalmas α, β és A számok megválasztásával, ahol a periódus: $\frac{2\pi}{\alpha}$.
Egy jól ismert addíciós tétel alapján ezt továbbgondolva kapjuk a következőt:

$$A \sin(\alpha x + \beta) = A(\cos \alpha x \sin \beta + \sin \alpha x \cos \beta). \tag{3}$$

Legyen $a = A \sin \beta$ és $b = A \cos \beta$. Ezek szerint $\sin x$ bármely transzformáltja felírható a következő alakban:

$$a \cos \alpha x + b \sin \alpha x. \tag{4}$$

1.1 Példa:

$$5 \sin(4x + \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{5}{2} \cos 4x + 5\tfrac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x$$

Vezessük be a P periódust (4)-be. Mivel $P = \frac{2\pi}{\alpha}$, ezért $\alpha = \frac{2\pi}{P}$.
Így az új képletünk:

$$a \cos \frac{2\pi}{P} x + b \sin \frac{2\pi}{P} x. \tag{5}$$

A következő alfejezetben látni fogjuk, hogy hogyan képezünk ebből trigonometrikus polinomokat, amivel már egyre közelebbhez jutunk a lényeghez: a Fourier-sorhoz.

1.3 Trigonometrikus polinomok és ezekből képezett végtelen trigonometrikus sorok

Vizsgáljuk a következő trigonometrikus függvényeket (k=1, 2, 3,...).

$$a_k \cos \frac{2\pi}{P} kx + b_k \sin \frac{2\pi}{P} kx \tag{6}$$

Frekvenciájuk: $\alpha_k = \frac{2\pi}{P}k$, periódusuk: $P_k = \frac{2\pi}{\alpha_k} = 2\pi \frac{P}{2\pi k} = \frac{P}{k}$
Az (1.2) alfejezetben leírtak alapján könnyen látható, hogy a (6) alakú trigonometrikus függvényeknek a P szám szintén egy periódusa.
Végezzük el a következő helyettesítést: $t = \frac{2\pi x}{P}$
Ekkor az $a_k \cos kt + b_k \sin kt$ függvények 2π szerint is periodikusak.
Legyen

$$S_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{7}$$

ahol A egy konstans. $S_n(x)$ nyilván nem veszti el 2π szerinti periodikusságát, mivel az összeadott függvényeknek egyik periódusa, a 2π megegyezik (és egy A konstans hozzáadása sem rontja el a periodikusságot). A fenti $S_n(x)$-et hívjuk trigonometrikus polinomnak. A következő $S(x)$-et végtelen trigonometrikus sornak hívjuk.

$$S(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{8}$$

Meg fogjuk vizsgálni, hogy egy tetszőleges 2π szerint periodikus függvény előállítható-e végtelen trigonometrikus sorként. Látni fogjuk, hogy függvényeknek egy nagyon széles skálájára meg tudjuk ezt valósítani. Továbbá, ha egy periodikus függvény előáll a (8)-as alakban, akkor ez a függvénysor lesz a függvény Fourier-sora, az a_k és b_k együtthatókat pedig a függvény Fourier-együtthatóinak fogjuk nevezni.

2 A Fourier-együtthatók meghatározása

2.1 A módszer levezetése

Tegyük fel, hogy az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{9}$$

függvénysor egyenletesen konvergens, majd rögzítsük le a k nemnegatív egész számot. Ezután szorozzuk végig (9)-et $\cos kx$-szel. Így a következőt kapjuk.

$$f(x)\cos kx = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx\Big)$$

Mivel a $\sin x$ és $\cos x$ integrálható függvények és a függvénysor egyenletesen konvergens, a fenti kifejezést integrálhatjuk a $[-\pi, \pi]$ tartományon, továbbá az integráljelet bevihetjük a szummajel mögé:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx dx\right) \tag{10}$$

Vizsgáljuk meg a kifejezés jobb oldalát. Könnyen adódik,hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx dx = 0,$$

mivel páratlan függvényt integrálunk egy origóra szimmetrikus tartományon.

Tegyük fel, hogy $n = k \neq 0$. Ekkor

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 2kx + 1)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2kx}{2k} + x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Viszont ha $n = k = 0$, akkor $\cos kx = \cos 0 = 1$, tehát

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}1 dx = 2\pi.$$

Bátkai András jegyzete (http://www.cs.elte.hu/ batka/oktatas/fouriersor.pdf) alapján.

Már csak azt az esetet kell megvizsgálnunk, ha $n \neq k$. Ehhez a következő azonosságot használjuk:

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Ez alapján kapjuk:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \big[\cos(nx+kx) + \cos(nx-kx)\big] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(n+k)x]}{n+k} + \frac{\sin[(n-k)x]}{n-k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Tehát összefoglalva az eddigieket, a (10) egyenlet jobb oldala mindenhol nulla, kivéve $k \neq 0$ esetén

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \pi,$$

továbbá $k = 0$ esetén

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 2\pi.$$

A b_n együttható kiszámolása a fentiekhez teljesen analóg módon történik azzal a különbséggel, hogy (9)-et $\sin kx$-szel szorozzuk végig, továbbá, hogy b_0 bármi lehet, mivel az azonosan nulla függvény szorzótényezője (mert $\sin 0 = 0$).
A kényelem kedvéért legyen $b_0 = 0$. Így az előző számolást megismételve kapjuk minden k természetes számra, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = b_k \pi$$

2.1 Definíció:
Legyen $f \in R[-\pi, \pi]$, továbbá legyen az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

függvénysor egyenletesen konvergens. Ekkor a fenti függvénysort f Fourier-sorának nevezzük, ahol

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

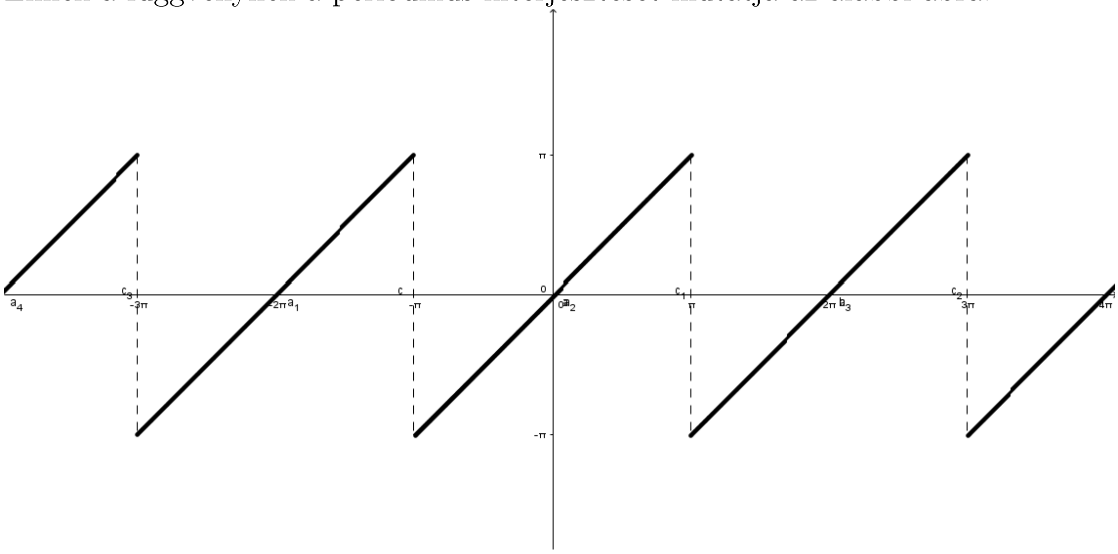
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bátkai András jegyzete (http://www.cs.elte.hu/ batka/oktatas/fouriersor.pdf) alapján.

2.2 Példák a Fourier-együtthatók meghatározára

Hangsúlyoznám, hogy még csak nagyon speciális esetekben definiáltuk egy függvény Fourier-sorát. Teljesülnie kell a 2.1 definícióban leírt feltételeknek, illetve f-nek a 2π periódusa kell, hogy legyen. Emiatt az adott függvényt le kell szűkítenünk például a $(-\pi, \pi)$ tartományra, majd ezt a függvénytartományt kiterjeszteni az egész x tengelyre.
Továbbá, $(2l+1)\pi, l \in \mathbb{Z}$-ben a függvény értéke legyen az ezekben a pontokban vett két féloldali határértékének számtani közepe. Ezzel a módszerrel egy 2π szerint periodikus függvényt kapunk.

2.2 Példa (Lazkovich Miklós – T. Sós Vera - Valós analízis II. 27.80/a feladat):
$f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi) \quad f(\pi) = 0$
Ennek a függvénynek a periodikus kiterjesztését mutatja az alábbi ábra.



Mivel nem minden függvényre igaz, hogy a Fourier-sora egyenletesen konvergens, ráadásul a fenti függvényünk még csak nem is folytonos, be kell vezetnünk egy tételt, amihez az alábbi definíció szükséges.
2.3 Definíció:
Egy $f(x)$ függvényt egy véges intervallumon szakaszonként folytonosan differenciálhatónak nevezünk, ha az intervallum feldarabolható véges sok szakaszra úgy, hogy minden szakaszon a függvény és a deriváltja is folytonos, továbbá a szakadási helyeken a jobb és bal oldali határérték is létezik és mindkettő véges.
2.4 Tétel:
Egy szakaszonként folytonosan differenciálható, 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény Fourier-sora minden pontban konvergál, $f(x)$ folytonossági helyein $f(x)$-hez konvergál. Ha $f(x)$ mindenhol folytonos, a konvergencia egyenletes is. Ha $f(x)$ nem

folytonos, akkor minden x_0 szakadási pontban a Fourier-sor összege

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right].$$

Tehát ezek alapján $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$ Fourier-sora előállítja $f(x)$-et. Továbbá, a szakadási pontokban $\big(x = (2l+1)\pi$ $(l = \pm1, \pm2, \pm3...)\big)$ a Fourier-sor nullához konvergál.
A Fourier-együtthatók:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

Mivel $f(x)$ páratlan függvény, $\cos kx$ pedig páros minden k természetes számra, így a szorzatuk páratlan. Ennek értelmében a_k minden k-ra nulla, mivel páratlan függvényt integrálunk origóra szimmetrikus tartományon (ld. előző alfejezet). Ez értelemszerűen minden páratlan függvény Fourier-együtthatóira igaz lesz, tehát innentől nem is fogunk foglalkozni páratlan függvény a_k együtthatóival, továbbá a b_k együtthatók kiszámításához a könnyen számolhatóság érdekében csak $[0,\pi]$ tartományon integrálunk és ezt megszorozzuk kettővel. Érdemes meggondolni már előre, mielőtt nézünk egy páros függvényre is példát, hogy annak pedig a b_k együtthatói esnek ki. Továbbá, hogy páratlan függvény Fourier-sora tisztán szinuszos, párosé pedig koszinuszos.
Ezek alapján a fenti páratlan $f(x)$ Fourier-sora a következő alakú lesz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \tag{11}$$

Páros függvényé pedig:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{12}$$

Folytassuk tehát a Fourier-sorfejtést, amihez parciális integrálást kell alkalmaznunk:

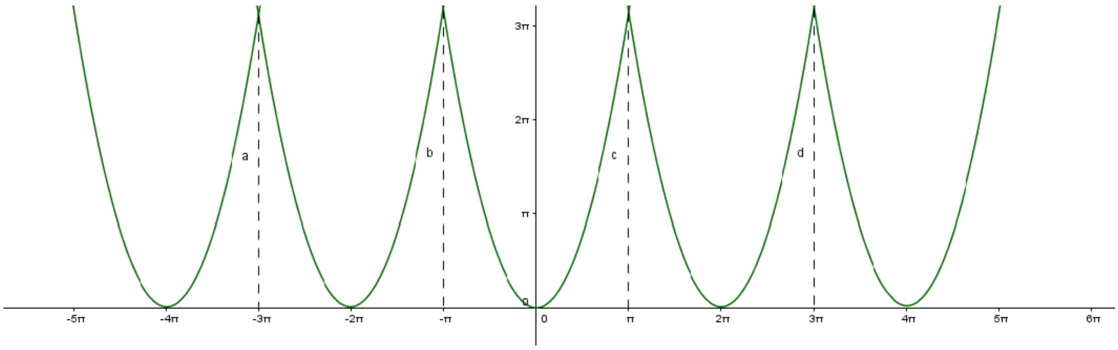
$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx dx = -\frac{2}{\pi k}\Big[x\cos kx\Big]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}\cos kx dx = -\frac{2}{k}\cos k\pi = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

Így tehát (11)-be behelyettesítve

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - ...\right). \tag{13}$$

A továbbiakban nézzünk egy példát páros függvényre.

2.5 Példa (Tolstov G.P. - Fourier series első fejezet, első példa):
$f(x) = x^2 \quad (-\pi \le x \le \pi)$. $f(x)$ periodikus kiterjesztését az alábbi ábrán láthatjuk.



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos kx dx = -\frac{4}{\pi k}\int_0^\pi x\sin kx dx = \frac{4}{\pi k^2}\Big[x\cos kx\Big]_0^\pi - \frac{4}{\pi k^2}\int_0^\pi \cos kx dx =$$

$$= \frac{4}{k^2}\cos k\pi = (-1)^k\frac{4}{k^2}$$

Továbbá, $b_k = 0$ minden k természetes számra, mivel $f(x)$ páros. Ezeket (12)-be behelyettesítve kapjuk, hogy

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} - ...\right). \tag{14}$$

A 2.4 tétel alapján a konvergencia egyenletes és a függvényt Fourier-sora mindenütt előállítja.

2.6 Példa(Tolstov G.P. - Fourier series első fejezet, 3. példa): $f(x) = |\sin x|$
$f(x)$ egy minden x-en értelmezett (tehát nem kell foglalkoznunk kiterjesztéssel) folytonos, szakaszonként folytonosan differenciálható és páros függvény. Így a 2.4 tétel itt is alkalmazható, továbbá a konvergencia egyenletes.
Mivel $|\sin x| = \sin x \ (0 \le x \le \pi)$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos kx dx$$

Ennek az integrálnak a kiszámításához át kell alakítanunk az integrandust, méghozzá a következő trigonometrikus összefüggés segítségével:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(y-x))$$

Ennek felhasználásával folytatva a_k kiszámítását:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Bigg[\sin(x+kx) - \sin(kx-x)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Bigg[\sin[(k+1)x] - \sin[(k-1)x]\Bigg] = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos[(k+1)x]}{k+1} - \frac{\cos[(k-1)x]}{k-1}\right]_0^\pi =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1} - \frac{(-1)^{k-1}-1}{k-1}\right] = -2\frac{(-1)^k+1}{\pi(k^2-1)}$$

Könnyen látható, hogy páratlan k-ra a számláló nulla, továbbá k=1-re a nevező is, tehát ezt az esetet külön meg kell vizsgálnunk.

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x dx = 0$$

Mivel $f(x)$ páros, $b_k = 0$. a_k-t (12)-be behelyettesítve kapjuk, hogy

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + ...\right). \tag{15}$$

Az eddigiekben láthattunk pár általános példát a Fourier-sorfejtésre. Mielőtt továbbmennénk, vonjunk le egy-két praktikus következtetést az eddigi munkánkból. A (13)-as egyenlet megfelelő rendezésével a következő trigonometrikus sor összegére bukkanhatunk:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} = \frac{x}{2} \qquad (-\pi < x < \pi)$$

Továbbá, (14)-ből adódik:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \qquad (-\pi \le x \le \pi)$$

(15)-ből pedig:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos2kx}{(2k)^2-1} = \frac{1}{2} - |\sin x|\frac{\pi}{4} \qquad x \in \mathbb{R}$$

A 2.4 tétel adott egy feltételt ami miatt a (13)-ban, (14)-ben és (15)-ben egyenlőségjelet írhattunk, tehát nem csak megközelítettük az adott függvényt, hanem elő is állítottuk. Erre szeretnénk most egy jobban használható, egyszerűbb feltételt adni.

2.7 Tétel:
Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus és legalább kétszer folytonosan differenciálható, akkor a Fourier-sora mindenütt előállítja.
Ennek a bizonyításához 2 további segédtétel szükséges, amiből levezethetjük.
2.8 Segédtétel:
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és 2π szerint periodikus. Ha f Fourier-sora egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, akkor az összege minden pontban $f(x)$-szel egyenlő.
Bizonyítás: Legyen f Fourier-sorának összege g.
Ekkor a 2.4 tétel szerint g folytonos, továbbá a Fourier-együtthatói megegyeznek f Fourier-együtthatóival. Ebből egyszerűen következik, hogy a folytonos és 2π szerint periodikus $f - g$ függvény Fourier-együtthatói nullával egyenlőek. Ekkor $f - g = 0$, azaz $f = g$.
2.9 Segédtétel:
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus és legalább kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}$-en, akkor van olyan $M > 0$ szám, hogy f Fourier-együtthatóira fennállnak az alábbi becslések minden $n \geq 1$-re.

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2}$$

$$|b_n| \leq \frac{M}{n^2}$$

Bizonyítás: A tétel szerint f kétszer folytonosan differenciálható. Ezáltal az a_n és b_n Fourier-együtthatókat megadó formulákban szereplő integrálásokat parciális integrálás módszerével elvégezhetjük (mivel $f(x)$-et deriválhatjuk).

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin nx}{n}dx =$$
$$= -\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx - \frac{\pi}{2})dx$$

Ezt megismételve:

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\left[f'(x)\frac{\sin(nx - \frac{\pi}{2})}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{-1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\frac{\sin(nx - \frac{\pi}{2})}{n}dx =$$
$$= \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx - \pi)dx$$

2.9 Segédtétel bizonyítása Laczkovich Miklós – T. Sós Vera - Valós Analízis II és Bátkai András jegyzete (http://www.cs.elte.hu/ batka/oktatas/fouriersor.pdf) alapján történt.

A b_n együtthatókra ugyanezt végigjátszva kapjuk, hogy

$$b_n = \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \sin{(nx - \pi)} dx$$

A tételben szereplő M-et próbáljuk megtalálni, tehát már csak felülről kell becsülnünk a kapott eredményt:

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| |\cos{(nx - \pi)}| dx \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx = \frac{M}{n^2},$$

ahol kihasználtuk, hogy a koszinusz függvény értékkészlete $[-1, 1]$, továbbá bevezettük az $M = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx$ jelölést.

$|b_n|$-t hasonlóan becsüljük:

$$|b_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| |\sin{(nx - \pi)}| dx \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx = \frac{M}{n^2}.$$

Ezzel a 2.9 segédtételt beláttuk, amiből következik az alábbi összefüggés:

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \frac{2M}{n^2}.$$

Weierstrass jól ismert kritériuma alapján teljesül az egyenletes konvergencia, mivel a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor abszolút konvergens. Emiatt teljesül a 2.8-as segédtétel feltétele, így $f(x)$-et mindenhol előállítja a Fourier-sora.

Ezzel végeztünk az elméleti résszel, szakdolgozatom hátralevő részét önálló feladatmegoldás fogja kitölteni.

2.9 Segédtétel bizonyítása Laczkovich Miklós – T. Sós Vera - Valós Analízis II és Bátkai András jegyzete (http://www.cs.elte.hu/ batka/oktatas/fouriersor.pdf) alapján történt.

3 Feladatok

3.1 Feladat:
Fejtsük Fourier-sorba az $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi) \quad f(0) = 0$ függvényt, majd ennek segítségével határozzuk meg a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ numerikus sor összegét!

Megoldás:
A 2.2 példához hasonlóan elő tudjuk állítani a periodikus kiterjesztését $f(x)$-nek, amire alkalmazva a 2.4 tételt kapjuk, hogy $f(x)$-hez a Fourier-sora konvergál $(0, 2\pi)$ minden pontjában, illetve a periodikus kiterjesztéshez $(0, 2\pi)$-n kívül. Továbbá, a szakadási pontokban a Fourier-sor nullához konvergál.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi - x}{2} \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\sin nx}{n} dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi - x}{2} \frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\cos nx}{n} dx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{1}{n}$$

Tehát,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

A feladat második részének megoldásához vizsgáljuk meg a fenti egyenlet jobb oldalán levő függvénysort az $x = \frac{\pi}{2}$ helyen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} = \frac{\pi}{4}$$

Mivel $\sin \frac{n\pi}{2}$ minden páros n-re nulla, továbbá páratlan n-ekre 1 és -1 között váltakozik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

3.2 Feladat:
Határozzuk meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ numerikus sorok összegét.

Megoldás: A feladat megoldásához a 2.5 példa nyújt segítséget, miszerint

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} - ...\right) = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Az első sor összegének kiszámításához a fenti egyenletben x helyére π-t írunk (mivel a periodikus kiterjesztés itt is folytonos, a Fourier-sor összege itt szintén x^2), továbbá kihasználjuk, hogy $\cos n\pi = (-1)^n$. Így a szummázandó sorozatban a -1 kitevője $2n+1$ lesz, ezért elhagyhatjuk.

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \text{ így}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A feladat második részéhez az $x = 0$ helyettesítést kell elvégeznünk:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

tehát az eredmény $-\dfrac{\pi^2}{12}$.

3.3 Feladat (Laczkovich Miklós – T. Sós Vera - Valós Analízis II, 27.80/g feladat):
Írjuk fel az alábbi függvény Fourier-sorát.

$$f(x) = (x-\pi)^2 \quad (x \in [0,\pi)), \qquad f(x) = (x+\pi)^2 \quad (x \in [-\pi, 0))$$

A fenti függvény periodikus kiterjesztése szinte teljesen megegyezik a 2.5 példánál levő ábrán látottakhoz annyi különbséggel, hogy el van tolva π-vel az x tengely mentén. Vegyük észre, hogy az így kapott függvény szintén páros, 2π szerint periodikus, folytonos és Fourier-sora szintén mindenütt előállítja. A párosság miatt az a_n együtthatók kiszámításához nullától π-ig integrálunk, majd ezt megszorozzuk kettővel, a b_n együtthatók pedig minden $n \geq 0$-ra nullával egyenlők.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \pi x^2 + \pi^2 x\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x-\pi)^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[(x-\pi)^2 \frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2(x-\pi)\frac{\sin nx}{n} dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi (x-\pi)\sin nx dx = \frac{4}{\pi n^2}\left[(x-\pi)\cos nx\right]_0^\pi - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \cos nx dx = \frac{4}{n^2}$$

Tehát

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Szokásunkhoz híven most is következtetünk egy nevezetes függvénysor összegére a fenti egyenlet megfelelő átrendezésével.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} \qquad (0 \le x < \pi)$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} \qquad (-\pi \le x < 0)$$

3.4 Feladat: Határozzuk meg a következő függvények Fourier-sorait.

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) \quad (-\pi < x < \pi)$$

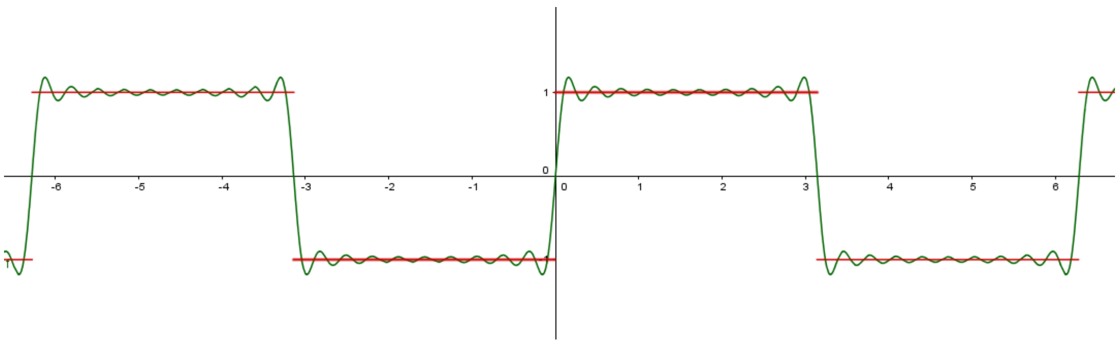
$$g(x) = 1 \quad (0 < x < \pi), \quad g(x) = 0 \quad (-\pi < x < 0)$$

Vegyük észre, hogy a két függvény megegyezik a $(0, \pi)$ intervallumban.
$f(x)$ páratlan, tehát csak a b_n együtthatókat kell kiszámolnunk, ahol nullától π-ig integrálunk és ezt megszorozzuk kettővel.

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n}\left[\cos nx\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n]$$

Így

$$\mathrm{sgn}(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right).$$



A fenti ábrán láthatjuk $f(x)$ periodikus kiterjesztését (piros) és tizedik Fourier-polinomját (zöld).

$g(x)$ se nem páros, se nem páratlan, de a Fourier-együtthatóinak számolásakor szintén nullától π-ig integrálunk, mert ezen tartományon kívül az értéke (és ezáltal az integráltja is) nulla.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx = \frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi} = 1$$

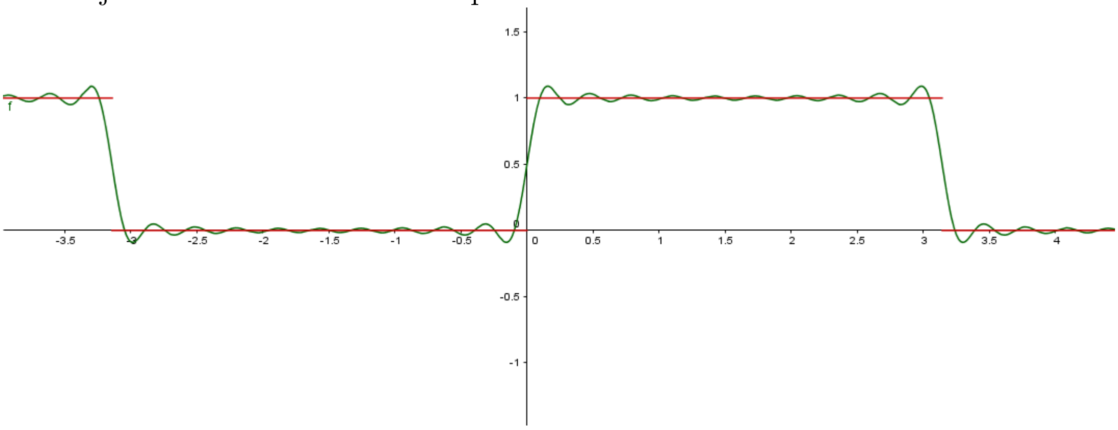
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{\pi n}\Big[\cos nx\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}\big(1-(-1)^n\big)$$

Így

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right).$$

A kiterjesztés és a tizedik Fourier-polinom:



3.5 Feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sin^3 x$ és $g(x) = \cos^3 x$ függvények Fourier-sorait!

Néhány esetben elég a sorbafejtendő függvényt alakítgatnunk addig, amíg trigonometrikus polinom alakú nem lesz. Ha ezzel megvagyunk, amit eredményül kaptunk, az lesz a függvény Fourier-sora.

Tehát a következő formában kell felírnunk a fenti függvényeket:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Megoldás:

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x$$

Mivel

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

ezért

$$\sin^2 x \sin x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \sin x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos 2x.$$

Alkalmazva az

$$\frac{1}{2} \sin x \cos 2x = \frac{1}{4}(2 \sin x \cos 2x + \sin x - \sin x)$$

trükkös átalakítást és felhasználva, hogy

$$\sin 3x = 2 \sin x \cos 2x + \sin x,$$

kapjuk az eredményt:

$$\sin^3 x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$$

A $g(x)$ függvény esetében hasonlóan:

$$\cos^2 x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \cos x = \frac{1}{2}(\cos x \cos 2x + \cos x) =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos x + \cos 3x) + \frac{1}{2} \cos x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x = \cos^3 x,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\cos 3x = 2 \cos x \cos 2x - \cos x$.

Tehát mindkét esetben kettő darab nemnulla Fourier-együtthatót találtunk:

$f(x)$ esetében $b_1 = \frac{3}{4}$ és $b_3 = -\frac{1}{4}$, tehát: $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$.

$g(x)$ esetében pedig $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, tehát: $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$.

3.6 Feladat (Laczkovich Miklós – T. Sós Vera - Valós Analízis II, 27.80/b feladat): Fejtsük Fourier-sorba az $f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi)$ függvényt!

Tudjuk, hogy az $|x|$ függvény az $x = 0$ helyen nem differenciálható (mivel jobb és bal deriváltja nem egyenlő ebben a pontban), de mivel a 2.3 definíció alapján a függvény szakaszonként folytonosan differenciálható, így a 2.4 tétel szerint a függvényt a Fourier-sora minden pontban előállítja.

Mivel $f(x)$ páros, az a_n együtthatók számításához szokásosan nullától π-ig integrálunk és beszorozzuk kettővel. Ez azért is lesz kedvező, mert itt $|x| = x$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \pi$$

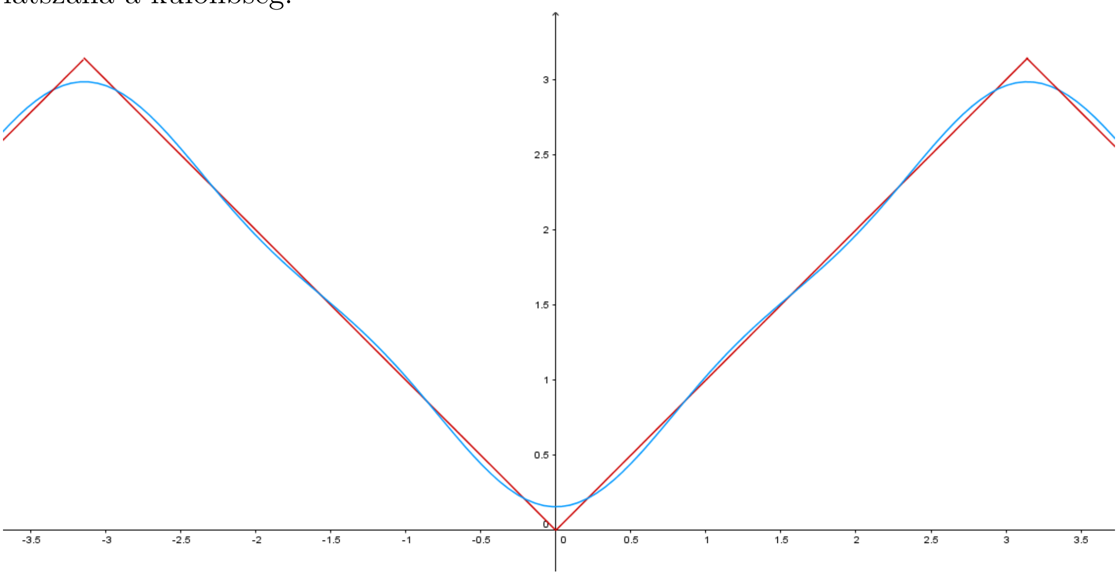
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi n}\Big[x\sin nx\Big]_0^\pi - \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\Big[\cos nx\Big]_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1]$$

Így

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 9x}{25} + ...\right).$$

Az alábbi ábrán láthatjuk, hogy $f(x)$ periodikus kiterjesztésétől már a második Fourier-polinomja is kevéssel tér el, nagy n-ekre már csak jóval nagyobb nagyítással látszana a különbség.



A második Fourier-polinom (kék): $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9}\right).$

3.7 Feladat (Tolstov G.P - Fourier series első fejezet 1/a feladat): Fejtsük Fourier-sorba a következő függvényt.

$$f(x) = e^{ax} \quad (-\pi < x < \pi) \quad \text{ahol } a \text{ nullától különböző valós szám.}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{ax}}{a}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a}\right) = \frac{2 \text{ sh } a\pi}{a\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx dx = \frac{1}{\pi n}\left[e^{ax}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{a}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx dx =$$

$$= \frac{a}{\pi n^2}\left[e^{ax}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{a^2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx dx =$$

$$= (-1)^n\frac{a}{\pi n^2}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}) - \frac{a^2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx dx$$

Ha elnevezzük c-nek az $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx dx$ kifejezést, akkor az eddigiekből következik:

$$c = \frac{(-1)^n 2a \text{ sh } a\pi}{\pi n^2} - \frac{a^2}{n^2}c, \text{ ahonnan}$$

$$c = \frac{(-1)^n 2a \text{ sh } a\pi}{\pi(a^2 + n^2)} = a_n.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx dx = -\frac{1}{\pi n}\left[e^{ax}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{a}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx dx =$$

$$= -\frac{(-1)^n}{\pi n}(e^{a\pi} - e^{-a\pi}) + \frac{a}{\pi n^2}\left[e^{ax}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{a^2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx dx$$

Legyen $d = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx dx$, így

$$d = -\frac{(-1)^n}{\pi n}2 \text{ sh } a\pi - \frac{a^2}{n^2}d, \text{ ahonnan}$$

$$d = -\frac{(-1)^n 2n \text{ sh } a\pi}{\pi(a^2 + n^2)} = b_n.$$

Tehát a keresett Fourier-sor:

$$\frac{\text{sh } a\pi}{a\pi} + \frac{2 \text{ sh } a\pi}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a\cos nx}{a^2 + n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin nx}{a^2 + n^2}\right).$$

3.8 Feladat (Tolstov G.P - Fourier series első fejezet 1/b feladat): Határozzuk meg a Fourier-együtthatóit a következő függvénynek.

$$f(x) = \cos ax \quad (-\pi \le x \le \pi) \quad \text{ahol } a \text{ nem egész szám.}$$

Mivel a fenti függvény páros,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax dx = \frac{2}{a\pi}\Big[\sin ax\Big]_0^\pi = \frac{2\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(\cos(a-n)x + \cos(a+n)x\big)dx =$$

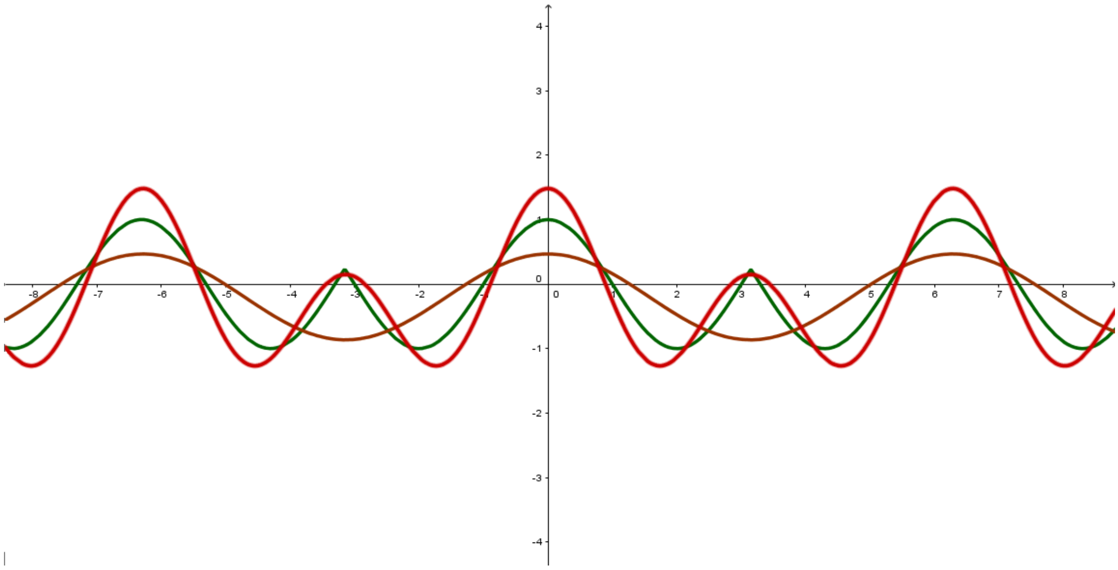
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a-n)x}{a-n} + \frac{\sin(a+n)x}{a+n}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n} + \frac{\sin(a+n)\pi}{a+n}\right) =$$

$$= \frac{(a+n)\sin(a-n)\pi + (a-n)\sin(a+n)\pi}{\pi(a^2-n^2)}$$

Mivel $\sin(a-n)\pi + \sin(a+n)\pi = 2\sin\pi a\cos\pi n$,

$$a_n = \frac{2a\sin\pi a\cos\pi n - 2n\cos\pi a\sin\pi n}{\pi(a^2-n^2)} = (-1)^n\frac{2a\sin\pi a}{\pi(a^2-n^2)}.$$

$$b_n = 0.$$



Az eredeti függvény $a = 1,57$-re (zöld), az első (barna) és a második (piros) Fourier-polinom.

3.9 Feladat: Bizonyítsuk be, hogy $\sin^n x$ és $\cos^n x$ is trigonometrikus polinom minden pozitív $n \in \mathbb{N}$-re!

$$\text{Trigonometrikus polinom (emlékeztető)} : \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)$$

A bizonyításhoz szükséges formulák:

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x] \tag{16}$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \tag{17}$$

$$\cos ax \sin bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x - \sin(a-b)x] \tag{18}$$

Továbbá (16) és (17) következményei:

$$\sin^2(ax) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax) \tag{19}$$

$$\cos^2(ax) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2ax) \tag{20}$$

Megjegyzés: A fenti egyenleteknek a jobb oldalán trigonometrikus polinomok állnak.

Bizonyítás (teljes indukció):

Mivel $\sin x$ és $\cos x$ önmagukban trigonometrikus polinomok, ezért elég azt bizonyítanunk, hogy n trigonometrikus polinom szorzata is trigonometrikus polinom. Kezdjük az $n = 2$ esettel:
Az

$$\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)\right]\left[\frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{M} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big)\right]$$

szorzat elvégzése után a trigonometrikus polinomba nem beleillő tagok a (16), (17), (18), (19) és (20) egyenletek bal oldalán levő szorzatokkal megegyező alakúak lesznek (ahol a és b egész számok).
Majd mindegyikre alkalmazva a megfelelő formulát, az eredmény trigonometrikus polinomok összege lesz, ami természetesen szintén trigonometrikus polinom.
Tegyük fel, hogy n a legutolsó szám, amire n trigonometrikus polinom szorzata is trigonometrikus polinom. (Indukciós feltevés)
Bizonyítandó: $(n+1)$-re az öröklődés.

Legyenek c_k, $k \in \mathbb{Z}^+$ tetszőleges trigonometrikus polinomok. Ekkor

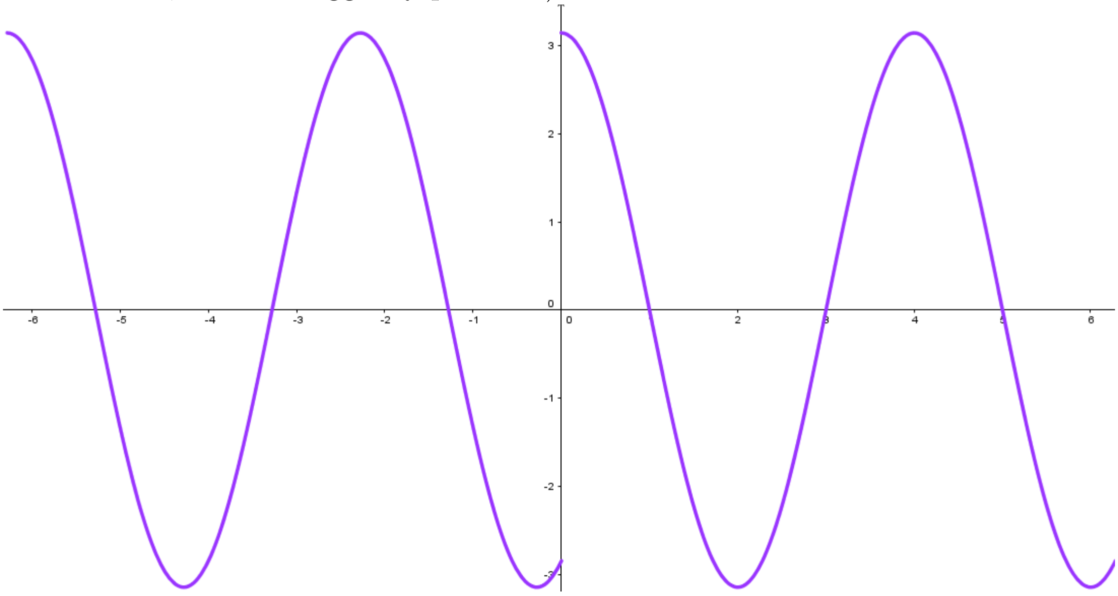
$$\underbrace{c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \ldots \cdot c_n}_{\text{ami az indukciós feltevés szerint trigonometrikus polinom}} \cdot c_{n+1}$$

Tehát az eredmény két trigonometrikus polinom szorzata, amiről az előző oldalon bebizonyítottuk, hogy trigonometrikus polinom.

3.10 Feladat: Határozzuk meg a következő függvény Fourier-sorát, majd vizsgáljuk meg a függvénysort az $x = 0$ és $x = \pi$ helyeken!

$$f(x) = \pi \cos ax \quad (0 \leq x < 2\pi) \quad \text{ahol } a \text{ nem egész szám}$$

A függvény hasonlít a 3.8-as feladatban szereplőhöz, de ha rápillantunk a lenti ábrára ($a = 1,57$ esete) láthatjuk, hogy ennek a függvénynek a periodikus kiterjesztése nem páros, de általában nem is páratlan (ha az a 0,5-nek egy páratlan számszorosa, akkor a függvény páratlan).



Így az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi \cos ax dx = \frac{1}{a} \Big[\sin ax \Big]_0^{2\pi} = \frac{\sin 2a\pi}{a},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(\cos (a-n)x + \cos (a+n)x \big) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (a-n)x}{a-n} + \frac{\sin (a+n)x}{a+n} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (a-n)2\pi}{a-n} + \frac{\sin (a+n)2\pi}{a+n} \right) =$$

$$= \frac{(a+n)\sin(a-n)2\pi + (a-n)\sin(a+n)2\pi}{2(a^2-n^2)},$$

a 3.8-as feladatban alkalmazott addíciós tétel miatt:

$$a_n = \frac{a\sin 2a\pi}{a^2-n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi\cos ax \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\sin (a+n)x - \sin (a-n)x\big)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos (a-n)x}{a-n} - \frac{\cos (a+n)x}{a+n}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos (a-n)2\pi}{a-n} - \frac{\cos (a+n)2\pi}{a+n} - \frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right) =$$

$$= \frac{(a+n)\cos(a-n)2\pi - (a-n)\cos(a+n)2\pi - 2n}{2(a^2-n^2)},$$

Mivel $\cos(a-n)2\pi + \cos(a+n)2\pi = 2\cos 2a\pi \cos 2n\pi$ és
$\cos(a-n)2\pi - \cos(a+n)2\pi = 2\sin 2a\pi \sin 2n\pi$,

$$b_n = \frac{n\cos 2a\pi \cos 2n\pi + a\sin 2a\pi \sin 2n\pi}{a^2-n^2} = \frac{n\cos 2a\pi}{a^2-n^2}.$$

Így a keresett Fourier-sor:

$$\frac{\sin 2a\pi}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a\sin 2a\pi \cos nx}{a^2-n^2} + \frac{n\cos 2a\pi \sin nx}{a^2-n^2}\right).$$

Mivel az $x=\pi$ helyen az f függvény folytonos, így itt Fourier-sora előállítja:

$$\pi\cos a\pi = \frac{\sin 2a\pi}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\sin 2a\pi}{a^2-n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\sin 2a\pi}{a^2-n^2} = \pi\cos a\pi - \frac{\sin 2a\pi}{2a}.$$

Az $x=0$ helyen a függvénynek szakadási pontja van, így a 2.4 tétel alapján a Fourier-sor összege $\frac{1}{2}(f(0)+f(2\pi)) = \frac{\pi}{2}(1+\cos a2\pi)$, így:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin 2a\pi}{a^2-n^2} = \frac{\pi}{2}(1+\cos a2\pi) - \frac{\sin 2a\pi}{2a}.$$

3.11 Feladat: Legyen $f(x) = \frac{\pi}{4}$ a $(0, \pi)$ intervallumon. Fejtsük olyan tiszta szinuszos Fourier-sorba, amivel ki tudjuk számolni a következő numerikus sorok összegét:

$$(a) \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

$$(b) \quad 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - ...$$

$$(c) \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + ...$$

A fenti függvény Fourier-sora akkor lesz tisztán szinuszos, ha páratlan kiterjesztést kreálunk.
Ekkor a függvény: $f(x) = \frac{\pi}{4}$ ha $x \in (0, \pi)$ és $f(x) = -\frac{\pi}{4}$ ha $x \in (-\pi, 0)$, $f(0) = 0$.
Az együtthatók:

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi}{4} \sin nx dx = -\frac{1}{2n} \Big[\cos nx \Big]_0^\pi =$$

$$= -\frac{1}{2n} \big[(-1)^n - 1 \big] = \frac{1 - (-1)^n}{2n}.$$

Tehát:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \qquad x \in (0, \pi),$$

amit egy másik függvény Fourier-sorából már megkaptunk a 12. oldalon, továbbá:

$$-\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \qquad x \in (-\pi, 0).$$

Az $x = \frac{\pi}{2}$ helyen vizsgálva a fenti függvénysort:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

A (b) feladatban szereplő sorban láthatóan nem szerepelnek a hárommal osztható páratlan számok reciprokai. Így az ötlet az, hogy az $x = \frac{\pi}{3}$ helyen vizsgálódjunk, mivel itt a $\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ számlálója nullát ad $n = 1$-re, $n = 4$-re, stb.

Legyen tehát $x = \frac{\pi}{3}$. Ekkor $\quad \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + ... \right),$

$$\text{Továbbá,}\quad \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + ...$$

A (c) feladathoz vizsgáljuk a kifejezést az $x = \dfrac{\pi}{4}$ helyen:

$$\text{Mivel}\quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{4}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + ...\right),$$

így a keresett összeg a $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

3.12 Feladat: Legyen $f(x) = x$ a $(0, \pi)$ intervallumon. Keressünk olyan kiterjesztést, aminek Fourier-sorával ki tudjuk számolni a következő numerikus sor összegét:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + ...$$

Ha a páros kiterjesztést választjuk, akkor az $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi)$ (2π szerint periodikusan kiterjesztett) függvényt kapjuk. Már korábban kiszámoltuk, hogy

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 9x}{25} + ...\right).$$

Itt elvégezve az $x = 0$ helyettesítést:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...\right), \quad \text{ahonnan}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Források:

Laczkovich Miklós – T. Sós Vera - Valós Analízis II
http://www.cs.elte.hu/ batka/oktatas/fouriersor.pdf (Bátkai András jegyzete)
Tolstov G.P. - Fourier series