EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Matematika BSc

Szakdolgozat

Kabai Eszter

A Delaunay-felület

Témavezető:

Dr. Moussong Gábor
Egyetemi adjunktus
Geometria tanszék

Budapest, 2016

Tartalom

Bevezetés

Témavezetőm, Moussong Gábor egy számomra igazán érdekes témakört ajánlott kidolgozásra, mikor említettem, hogy szívesen foglalkoznék differenciálgeometriával. Mivel matematika-kémia tanári szakos hallgató vagyok, a cikk egyéb természettudományos vonatkozása még inkább motiválttá tett.

Dolgozatom ötlete a KöMaL-folyóirat egyik megjelent cikkéből származik. A lapban szereplő írás eredeti címe 'Forgásfelületek szappanhártyából'. Bizonyos típusú szappanhártyák felületeinek tanulmányozásáról szól, bemutatja, hogy milyen matematikai szabályok érvényesülnek e természeti jelenségekre. A cikk tartalmát kezdetben hasonlóan írom le, és később is felhasználok belőle bizonyos elemeket, viszont más matematikai bizonyításokat fogok adni a kimondott állításokra.

A dolgozat témája egy megfigyelésből indul ki. Azt vizsgáljuk, milyen felületeket formálhat meg egy szappanhártya úgy, hogy a külső és belső oldalán bizonyos nyomásokat generálunk. Laplace tétele megadja azt a fizikai összefüggést, mely érvényesül ilyen felületekre, e tétel alapján fogjuk elkezdeni további számolásainkat.

0.1. Tétel. Egy egyensúlyi helyzetben levő szappanhártya esetében a felület minden pontjában teljesül, hogy

$$p_+ - p_- = \alpha \cdot (\varkappa_1 + \varkappa_2)$$

ahol

- p_+ és p_- : a hártya pozitív illetve negatív oldalán mért gáznyomás
- $\alpha > 0$: a folyadékhártya felületi feszültsége
- $\varkappa_1 + \varkappa_2$: a felület összeggörbülete (*Minkowski-görbülete*) az adott pontban

A későbbiekben bővebben is leírjuk, mit jelöl pontosan $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$, de egyelőre csak fogadjuk el, hogy ezek a felületre jellemző adatok egy adott pontban. Először vizsgáljuk meg azt, hogy milyen feltételnek kell az összegükre teljesülnie az egyenlet alapján.

Mivel a külső és belső nyomás különbsége, valamint α értéke is állandó, szükségszerű, hogy a szóban forgó szappanhártyákra teljesül, hogy felületük minden pontjában $(\varkappa_1 + \varkappa_2)$ értéke is állandó kell, hogy legyen.

Charles Delaunay tételében leírta, hogy, ha az előző tulajdonsággal rendelkező felületek forgásfelületek, azok mindegyikére teljesül, hogy az alábbi módon állnak elő:

0.2. Tétel. Az állandó összeggörbületű forgásfelületek úgy származtathatók, hogy egy sík egyenesén kúpszeletet gördítünk, és a kúpszelet fókusza által söpört görbét az egyenes körül megforgatjuk. Az így kapott felületek a keresett forgásfelületek.

Megjegyzés. Ahhoz, hogy ezek a forgásfelületek szappanhártyából meg is valósulhassanak, speciális körülmények lennének szükségesek. A szappanhártya-modellre majd csak a 7. fejezetben fogunk szemléletes példát mutatni.

A fent megfogalmazott állítások pontosabb megértéséhez, és hogy a tételt be tudjuk bizonyítani, szükséges meghatároznunk, hogy mit nevezünk egy felületen összeggörbületnek. Miután ezt megtettük, bebizonyítom két kúpszeletre – ellipszisre és parabolára – hogy a *Delaunay-tétel* teljesül rájuk.

1. Görbék a felületen

Ahhoz, hogy megértsük, mi az az összeggörbület, annak a vizsgálatával szükséges kezdenünk, hogy egy adott felületre illeszkedő görbék görbületei között milyen összefüggések érvényesülnek.

A következőekben föltesszük, hogy akárhányszor – legalább annyiszor, ahányszor szükséges – differenciálható görbékkel dolgozunk. A későbbi konkrét görbéinkre ez a feltétel szintén teljesülni fog.

Vegyünk egy általános felületet, mely egy adott M pontjában rendelkezik érintősíkkal (ez akkor teljesül, ha ebben a pontban a felület reguláris). Ha a felületet az érintősíktól különböző, M ponton áthaladó síkokkal metsszük, a kapott síkmetszetek a ponton áthaladó felületi görbéket fognak adni. Ezen görbék görbületeit szeretnénk a közös pontban minél egyszerűbb módon meghatározni. Egy felület adott pontján áthaladó ilyen felületi görbék görbületét bizonyos síkmetszetek jól leírják.

Érdemes leszűkítenünk a metszősíkok halmazát egy részhalmazra, és először azok viszonyát vizsgálni. Belátható, hogy egy érintősíktól különböző metszősík az érintősíkkal mindig egy M pontra illeszkedő egyenesben metszi egymást, és az is egyértelmű, hogy a metszésvonal a síkkal kimetszett görbének az M pontba húzott érintő-egyenesével lesz azonos. Nézzük meg, hogyan viszonyulnak egymáshoz az azonos érintővel rendelkező síkmetszetek.

Az őket kimetsző metszősíkok az érintősíkkal különböző szögeket zárnak közre. A síkok különböző görbéket metszenek ki a felületből, mely görbék rendelkeznek egy-egy számszerű görbülettel az M pontban. Az első tétel, mely közelebb vezet minket ahhoz, hogy egyszerű adatok ismeretében meghatározhassuk a síkmetszetek görbületét, a következő:

1.1. Tétel. Az azonos érintőjű görbéket kimetsző síkok közül ahhoz tartozik az adott pontban minimális görbületű görbe, amelyet az érintősíkra merőleges sík metsz ki. Ezt a síkot *normálsík*nak nevezzük. A sík által kimetszett görbe a *normálmetszet*, a normálmetszet görbülete pedig a *normálgörbület*. Az érintőhöz tartozó többi, érintősíkra nem merőleges metszetet *ferde metszetnek* nevezzük.

A következő tétel adja meg az azonos érintőjű síkmetszetek görbületei közötti pontos összefüggést, bármely ferde metszet $\varkappa$ görbülete kifejezhető ugyanis a megfelelő érintőhöz tartozó normálgörbület segítségével, ha ismert a normálsík és a ferde metszetet kimetsző sík által közre zárt szög.

Az összefüggés, melyet a későbbiekben fel is használunk a dolgozatban, *Meusnier tétele*:

$$\varkappa = \frac{\varkappa_n}{cos\ \alpha}\text{, azaz} \qquad \varkappa_n = \varkappa \cdot cos\ \alpha$$

ahol $\varkappa_n$ a normálgörbület, α a két metszősík által közre zárt szög.

Megjegyzés. A normálgörbülethez előjelet is rendelünk. Az érintősík által meghatározott két féltér közül az egyiket kitüntetjük, és ha görbénk érintési pontbeli főnormális egységvektora ebbe a féltérbe mutat, a görbület pozitív. Amennyiben a másik féltérbe mutat, a görbület negatív lesz.

Látható, hogy az azonos érintőhöz tartozó metszősíkok közül a normálsíkok kiemelkedő szereppel rendelkeznek, a ferde metszetek segítségükkel könnyen kifejezhetők. Ezek után adódik a következő kérdés, hogy van-e a normálmetszetek között is olyan, melyből ki tudjuk fejezni a többi normálmetszetet. Hogyha találunk ilyen normálmetszetet, az azt jelenti, hogy görbületének ismeretében a felület egy adott pontjában az összes síkmetszet görbülete kifejezhető.

Ezzel a tulajdonsággal az ún. főgörbületeket adó metszetek rendelkeznek, melyeket az alábbi tétel definiál:

1.2. Tétel. Az azonos ponton átmenő normálmetszetek által meghatározott normálgörbületek, ha nem egyenlők, akkor a pontban egyértelműen létezik egy maximális és egy minimális görbületű normálmetszet. Ez esetben az őket kimetsző normálsíkok mindig merőlegesek egymásra. $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ tehát a ponthoz tartozó normálgörbületek szélsőértékei, melyeket *főnormálgörbületeknek* (*főgörbületeknek*) nevezünk. A hozzájuk tartozó irányok a *főgörbületi irányok* (*főirányok*), melyek, mint említettük merőlegesek egymásra.

A két főgörbület adja meg nekünk azokat a görbületeket, melyekből a többi normálgörbület meghatározható egy adott pontban. Az összefüggést *Euler tétele* írja le, aminek pontos ismeretére a későbbiekben nem lesz szükségünk, viszont látható, hogy így *Meusnier* és *Euler* tételének segítségével egy felületi ponton áthaladó összes síkmetszet görbülete kifejezhető a főgörbületek, és a két metszősík viszonyának ismeretében.

A főgörbületek ismeretében már módunkban áll meghatározni, mit értünk egy felületi ponthoz tartozó összeggörbület alatt, az ugyanis nem más, mint a pontbeli két főgörbület összege, tehát $\varkappa_1 + \varkappa_2$.

2. Főgörbületek forgásfelületen

Alapvetően nem egyszerű meghatározni, hogy egy pontban melyik két síkmetszet adja a két főgörbületet. Esetünkben viszont, szimmetriájuk miatt segítségünkre lesz, hogy forgásfelületekkel dolgozunk.

A forgásfelületek szimmetrikusak minden síkra, mely tartalmazza a forgástengelyüket. Bármely felületi ponthoz tartozik ilyen tükörsík, az a sík, melyet egyértelműen meghatároz a pont és a forgástengely.

Tekintsük egy adott pont normálmetszeteit. Azt a két normálmetszetet keressük, melyek a maximális és minimális görbületet adják, merőlegesek egymásra és egyértelműek. Az egyértelműség miatt tudunk a szimmetriára hivatkozva kizárni bizonyos normálmetszeteket a főgörbületek keresésekor.

A forgásfelület normálmetszeteire teljesül, hogy a szimmetriasíkra őket tükrözve szintén felületi görbét/normálmetszetet kapunk. Mivel ezek tükörképei egymásnak, a két normálmetszet egybevágó, melyből pedig következik, hogy tükörsíkon levő pontjukban megegyező a görbületük. Így ha tekintünk egy normálmetszetet, melynek tükörképe egy tőle különböző normálmetszet, az adott pontban egy másik metszet is az ő görbületét adja. A főgörbületek egyértelműsége miatt tehát ezek nem lehetnek a főgörbületet adó metszetek.

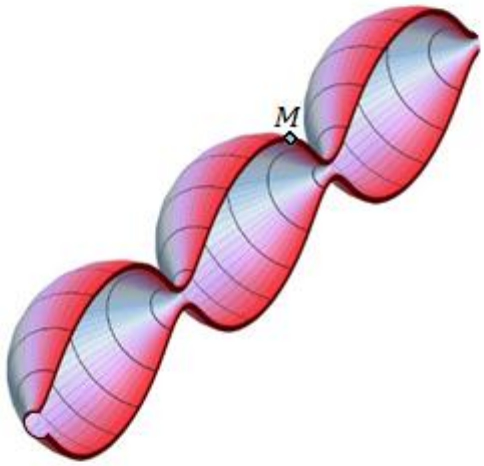
Az a két metszet nem rendelkezik tőle különböző tükörképpel, mely a tükörsíkon helyezkedik el, illetve amelyik metszősíkja erre merőleges. Ezek tükörképei ugyanis saját maguk – a tükörsík pontjaikat helyben hagyja vagy önmagukba viszi.

Megállapítható:

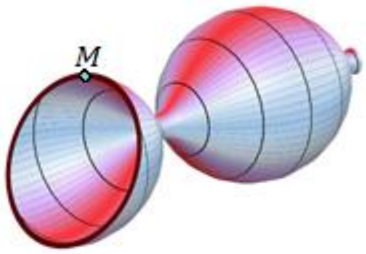
- A tükörsíkra illeszkedő normálmetszet a forgásfelület alkotója
- A tükörsíkra merőleges irányú normálmetszet érintője pont az ahhoz a ponthoz tartozó parallelkör érintője is. A második főirányt ezért tulajdonképpen a parallelkör iránya adja meg.

Összegezve, a két főgörbület egy forgásfelület bármely pontjában:

- $\varkappa_1$: az alkotó görbülete abban a pontban



- $\varkappa_2$: a ponton átmenő parallelkör érintőjéhez tartozó normálmetszet görbülete



3. Főgörbületek kiszámolása

Most, hogy tudjuk, mely két síkmetszet adja a főgörbületeket, a következő lépés a tétel bizonyításához értelemszerűen az, hogy e két síkmetszetre felírjuk, mely képletek adják meg bizonyos pontjaikban a görbületek értékét.

3.1. Az alkotó görbülete

Az alkotó görbületének meghatározása hosszabb levezetést igényel, de praktikusabb, hogyha ennek kiszámolását végezzük el előbb.

A forgásfelületek, melyeket a bevezetésben meghatároztunk, úgy álltak elő, hogy a görgetett kúpszeletek (egyik) fókusza által kirajzolt síkgörbéket megforgattuk a görgetés tengelye körül. Értelemszerű, hogy a keletkezett felületnek az alkotója ekkor maga a forgatott görbe lesz.

Adódik ezért, hogy bármely felületi pontban az egyik főgörbület a görgetéssel előállított görbének, mint alkotónak a görbülete abban a pontban. Egy görbe görbületét ki tudjuk számolni, ha annak ismerjük a paraméterezését. Kérdés, hogy meg tudjuk-e adni az ellipszis és parabola görgetésével származtatott görbék paraméterezését zárt alakban. Fogalmazzuk meg a görgetés definícióját:

3.1. Definíció. Adott γ_1 görbe és e egyenes. Mozgassuk a γ_1 görbét a rögzített e egyenes mentén úgy, hogy azok folyamatosan érintkezzenek a mozgás során. Ha a γ_1 görbe bármely P_1 és P_2 pontja közötti ívhossz megegyezik az e-beli, megfelelő $\widehat{P}_1$ és $\widehat{P}_2$ pontok közötti ívhosszal, akkor azt mondjuk, hogy a γ_1 görbe csúszásmentesen gördül az e egyenesen.

Ez a definíció rámutat, hogy a görbe előrehaladása az egyenesen söpört távolsággal adható meg. Az általános módon való paraméterezéshez szükséges, hogy az előrehaladást meg tudjuk adni. Az egyenesen söpört távolság kifejezéséhez a görgetett görbe ívhosszát megadó formulára van szükségünk. Az ellipszisre viszont ismeretes, hogy ez a formula nem adható meg zárt alakban, ezért ha görgetjük, nem tudjuk megadni a paraméterezést ezzel a módszerrel.

Emiatt más megoldáshoz kell folyamodnunk, segítségünkre egy tétel fog szolgálni, melyet a következő fejezetben vezetünk fel és bizonyítunk be.

Megjegyzés. A parabola ívhossza megadható zárt alakban. Viszont mivel az ellipszisre felírt megoldásunk alkalmazható lesz parabolára is, mindkét forgásfelületre a következőekben bemutatott levezetést fogjuk alkalmazni.

3.1.1. Görbe és simulókör görgetése

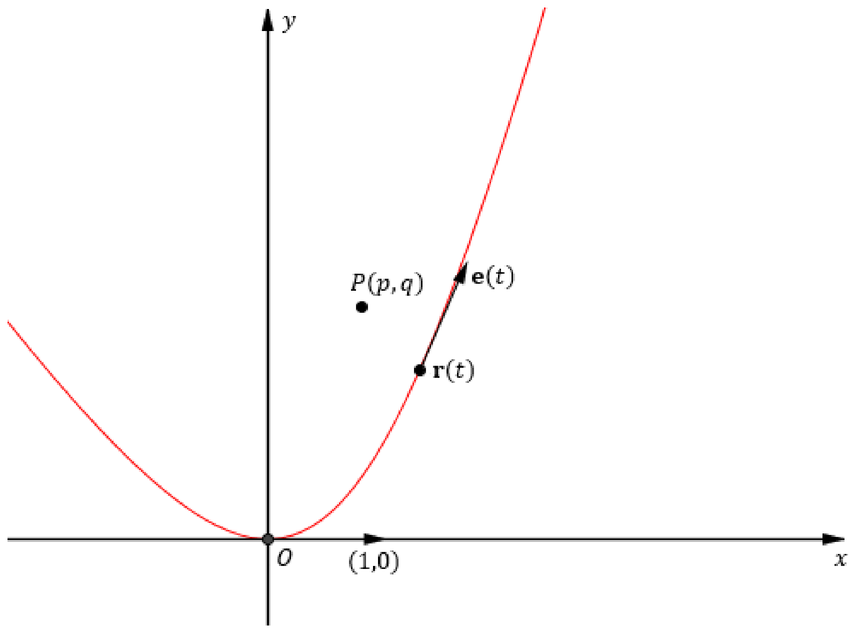
Adott ξ, egy differenciálható, reguláris síkgörbe – vagy annak egy íve – azt gördítjük egy e egyenes mentén. Nyomon követünk egy, a mozgó görbe síkjához rögzített P pontot, az általa leírt görbe $\boldsymbol{\varrho}(t)$. Kíváncsiak vagyunk $\boldsymbol{\varrho}(t)$ görbületére a görgetés egy adott pillanatában.

Ebben a kimerevített időpillanatban cseréljük le ξ-t az e-vel való érintkezési pontjához tartozó simulókörére. Rendeljük hozzá a simulókörhöz P-nek azt a helyzetét, ahol ebben a pillanatban elhelyezkedik a körhöz képest. Görgessük a kört az e egyenesen, P-t vele együtt, a síkjához rögzítve mozgatva. Így P ismét egy görbét ír le, melyet jelöljünk $\boldsymbol{\varrho}_{\varkappa}(t)$-vel.

3.1. Tétel. Abban a pontban ahol a kimerevített időpillanatban P elhelyezkedik, $\boldsymbol{\varrho}(t)$ és $\boldsymbol{\varrho}_{\varkappa}(t)$ görbék görbülete egyenlő.

3.1.2. A tétel bizonyítása

Vázoljuk fel egy általános síkgörbe görgetésének egy kiragadott időpillanatát az alábbi ábrán látható módon:



A pillanathoz hozzárendeltünk egy derékszögű segédkoordináta-rendszert úgy, hogy az x tengely azonos a gördítés tengelyével, az origó pedig a görbe és az egyenes aktuális érintkezési pontja.

Azt fogjuk vizsgálni, hogy bármely ilyen időpillanathoz képest mi történik, ha ebből a helyzetből továbbgördítjük a görbénket. A kiragadott pillanatot ezért jelöljük a $t = 0$ pillanatnak.

Mivel minden reguláris görbének létezik természetes paraméterezése, vegyük úgy, hogy a görbének ebben a koordinátarendszerben szintén adott $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ alakban.

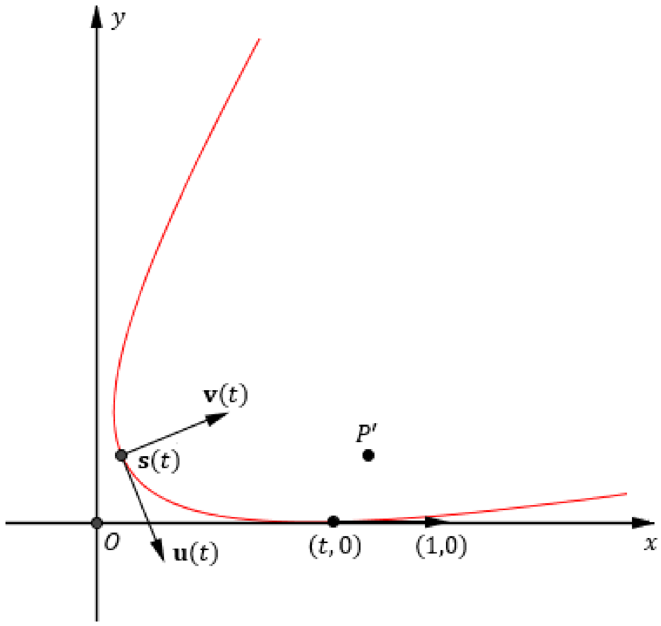
Az ábrán látható, és a továbbiakban használt jelölések:

- $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: a segéd-koordinátarendszer tengelyeinek irányait megadó egységvektorok
- $\mathbf{r}(0) = (0,0)$: az érintési pont helyvektora
- $\mathbf{e}(0) = (1,0)$: az érintési pontba húzott érintő irányát megadó egységvektor
- $P(p,q)$: a tételben szereplő, görbe síkjához rögzített, szintén gördülő pont

Megállapítható továbbá:

- Az ívhossz szerinti paraméterezés miatt ebben a koordinátarendszerben bármely $\mathbf{r}(t)$ pont azt a pontot jelöli, melyben a görbe az elgörgetés után érintkezni fog a tengellyel, ha a görgetés közben a tengelyen söpört szakasz hossza t
- Fel tudjuk írni bármely $\mathbf{r}(t)$ pont érintőjét megadó $\mathbf{e}(t) = (x'(t), y'(t))$ egységvektort. Ez az érintő lesz az, amelynek iránya megadja ebben a koordinátarendszerben a kimerevített időpillanathoz képest a tengely irányát, ha bármely $\mathbf{r}(t)$ pontig görgetjük a görbét

Következő lépésben tetszőleges $\mathbf{r}(t)$ pontig gördítsük a görbénket az x tengelyen, P pontot vele együtt, a síkjához rögzítve mozdítva.



Határozzuk meg, hová mozdultak el az előbbi pontjaink, vektorjaink. Bizonyos vektorok új irányait meg tudjuk adni számszerűen, valamely vektorokat viszont ezekből kell majd kifejeznünk.

Tudhatjuk:

- mivel ívhossz szerint paramétereztük a görbét, az x tengelyen levő régi és új érintési pont között söpört úthossz t, tehát az eredeti $\mathbf{r}(t)$ pont átkerült a $(t, 0)$ pontba

- a görgetés után $\mathbf{r}(t)$ érintője is átkerül másik vektorba, de mivel pont $\mathbf{r}(t)$-ig görgettük a görbét, az érintő maga lett a tengely. És mivel $\mathbf{e}(t)$ egységvektor volt, a tengellyel azonos irányú, (1,0) vektor lesz az érintő új irányát megadó egységvektor

Amely adatokat nem tudjuk, ezért az előbbi és az eredeti vektorok segítségével szükséges őket kifejeznünk:

- A görgetés során az előbbi segéd-koordinátarendszerünket nem mozdítottuk, jelöljük viszont, hová kerülne, hogyha a görbével együtt mozgattuk volna. Mivel a tengelyek eredeti irányát **i** és **j** egységvektorok adták meg, azt kell kifejeznünk, hogy e két vektor mely vektorokba kerülne át a mozgatás során. Elmozdulás utáni irányaikat jelölje $\mathbf{u}(t) = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v}(t) = (v_1, v_2)$ vekor
- az eredeti érintési pont, (0,0) hová mozdult, ez lesz az $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ koordinátarendszer origója, melyet jelöljünk $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t))$ vektorral
- P új koordinátái

Hogyha sikerül felírnunk paraméterekkel P elmozdulását t függvényében, akkor pontosan $\boldsymbol{\varrho}(t)$ paraméterezését fogjuk ezzel együtt megadni, mely görbét P söpör a görgetés során. Ha megkapjuk ezt a paraméterezést, már ki tudjuk fejezni $\boldsymbol{\varrho}(t)$ görbületét is, melyre kíváncsiak vagyunk.

Foglaljuk össze táblázatban az előbbi megállapításokat, jelöléseket:

Hely a kiindulási időpontban	**Görgetés utáni hely**
$\mathbf{i} = (1{,}0)$	$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$
$\mathbf{j} = (0{,}1)$	$\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t))$
$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$	$(t, 0)$
$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$	$(1{,}0)$
$(0{,}0)$	$\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t))$
$P(p, q)$	$\boldsymbol{\varrho}(t)$

Tudjuk, hogy P pont görgetés előtt $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ lineáris kombinációjaként p és q együtthatókkal állt elő. Az elmozdulás után ezért P ugyanúgy p, q együtthatókkal áll elő, csak $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok helyett $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineáris kombinációjaként.

Határozzuk meg először $\mathbf{u}(t)$ és $\mathbf{v}(t)$ vektorokat. Teljesül az alábbi összefüggés:

$$(1{,}0) = x'(t) \cdot \mathbf{u}(t) + y'(t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

Ezt kapjuk ugyanis, hogyha az $\mathbf{e}(t) = x'(t) \cdot \mathbf{i} + y'(t) \cdot \mathbf{j}$ egyenletben szereplő $\mathbf{e}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ vektorokat átírjuk az (1,0), $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorokra, melyekbe átkerültek.

Az előbbi egyenletet írjuk ki koordinátánként:

$$1 = x'(t) \cdot u_1(t) + y'(t) \cdot v_1(t)$$

$$0 = x'(t) \cdot u_2(t) + y'(t) \cdot v_2(t)$$

Látható, hogy az egyenletek teljesülnek, ha az

$$\mathbf{u}(t) = (x'(t), -y'(t))$$

$$\mathbf{v}(t) = (y'(t), x'(t))$$

vektorokat helyettesítjük be.

Az első egyenletnél felhasználtuk, hogy ívhossz szerint paramétereztünk, mert ekkor $v = 1 = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$, vagyis $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$, ami pont az az egyenlet, amit $u_1(t) = x'(t)$ és $v_1(t) = y'(t)$ behelyettesítésekor kapunk a korábbi egyenletben.

Most, hogy kifejeztük, hová mozdult el a kiindulási pontban fölvett koordinátarendszer, az új vektorokat és P előállításának régi lineáris kombinációját felhasználva írjuk fel, mely lineáris kombináció adja meg a pont új helyét.

A kiindulási időpontban teljesült:

$$P = \mathbf{0} + p \cdot \mathbf{i} + q \cdot \mathbf{j}$$

Hogyha a régi vektorokat átírjuk az újakra, az új egyenlet:

$$\boldsymbol{\varrho}(t) = \mathbf{s}(t) + p \cdot \mathbf{u}(t) + q \cdot \mathbf{v}(t)$$

Ebből, amit ismerünk: p, q, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$. Az $\mathbf{s}(t)$ vektort még nem ismerjük, szükségünk lesz egy újabb összefüggésre, melyből kifejezhetjük. Ez az összefüggés:

$$(t,0) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot x + \mathbf{v}(t) \cdot y$$

melyet az eredeti

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{0} + \mathbf{i} \cdot x + \mathbf{j} \cdot y$$

egyenletből kapunk, szintén az új vektorokra írva át a megfelelő tagokat.

Ebből az egyenletből kifejezhetjük $\mathbf{s}(t)$ koordinátáit:

$$\mathbf{s}(t) = (t - x'(t) \cdot x(t) - y'(t) \cdot y(t), y'(t) \cdot x(t) - x'(t) \cdot y(t))$$

Mivel már $\mathbf{s}(t)$-t is ismerjük, meg tudjuk adni $\boldsymbol{\varrho}(t)$ paraméterezését.

Azért, hogy átláthatóbbá tegyük az egyenleteket, $x(t)$ és $y(t)$, valamint deriváltjaik esetében a továbbiakban elhagyjuk annak jelölését, hogy ezek t-től függő paraméterek. A $\boldsymbol{\varrho}$-t megadó paraméterezés tehát:

$$\boldsymbol{\varrho} = (t - x'x - y'y + px' + qy', y'x - x'y - py' + qx')$$

Ebből már fel tudjuk írni a görbületet megadó képletet. A görbület kiszámításához szükségünk van $\boldsymbol{\varrho}'$ és $\boldsymbol{\varrho}''$ koordinátáira:

$$\boldsymbol{\varrho}' = (1 - x'^2 - xx'' - y'^2 - yy'' + px'' + qy'',$$
$$x'y' + xy'' - y'x' - yx'' - py'' + qx'')$$

$$\boldsymbol{\varrho}'' = (-2x'x'' - x'x'' - xx''' - 2y'y'' - y'y'' - yy''' + px''' + qy''',$$
$$x'y'' + xy''' - y'x'' - yx''' - py''' + qx''')$$

Mivel $t = 0$-ra számoljuk ki a görbületet, a t-től függő tagoknak írjuk be a 0-hoz tartozó helyettesítési értékeiket, melyek:

1) $\mathbf{r}'(0) = \big(x'(0), y'(0)\big) = (1,0)$
2) $y'' = \varkappa(0)$, mert $v = 1$, tehát $\varkappa(0) = \det(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 1 \cdot y'' - 0 \cdot x'' = y''$
3) $x'' = 0$, mivel $|\mathbf{r}''(0)| = \varkappa(0)$, azaz $\sqrt{y''(t)^2 + x''(t)^2} = \varkappa(0)$. Az előző pont szerint $y''(0) = \varkappa(0)$, így adódik, hogy $x''(0)$ értéke valóban 0.

Megjegyzés. $\varkappa(0)$ a görgetett ξ görbe görbületét jelenti $t = 0$-ban (az illesztett koordinátarendszer origójában).

Ezek alapján:

$$\boldsymbol{\varrho}'(0) = (1 - 1 - 0 - 0 - 0 + 0 + q\varkappa(0), 0 - 0 - p\varkappa(0) + 0) = \varkappa(0)(q, -p)$$

$$\boldsymbol{\varrho}''(0) = (0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 + px''' + qy''',$$

$$1 \cdot \varkappa(0) + 0 - 0 - 0 - p\,y''' + q\,x''') =$$

$$= (p\,x''' + qy''', \varkappa(0) - py''' + qx''')$$

Kifejeztük **ϱ'** és **ϱ''**-t, vagyis felírhatjuk **ϱ** görbületét $t = 0$-ban

$$\varkappa_\varrho(0) = \frac{det\begin{pmatrix} \varkappa(0)q & -\varkappa(0)p \\ px'''(0) + qy'''(0) & \varkappa(0) - py'''(0) + qx'''(0) \end{pmatrix}}{(\kappa(0)\sqrt{p^2 + q^2})^3}$$

Kiírva a determinánst:

$$\varkappa_\varrho(0) = \frac{\varkappa(0)^2 q - pqy'''(0)\varkappa(0) + q^2 x'''(0)\varkappa(0)}{\varkappa(0)^3 (p^2 + q^2)^{3/2}} +$$

$$+ \frac{p^2 x'''(0)\varkappa(0) + pqy'''(0)\varkappa(0)}{\varkappa(0)^3 (p^2 + q^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\varkappa(0)x'''(0)(p^2 + q^2)}{\varkappa(0)^3 (p^2 + q^2)^{3/2}} + \frac{q\varkappa(0)^2}{\varkappa(0)^3 (p^2 + q^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{x'''(0)}{\varkappa(0)^2 (p^2 + q^2)^{1/2}} + \frac{q}{\varkappa(0)(p^2 + q^2)^{3/2}}$$

Szükségünk van még $x'''(0)$ meghatározására. Ez a *Frenet-képletek* segítségével megtehető, melyek szerint

$$\mathbf{e}' = \varkappa\mathbf{n} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{n}' = -\varkappa\mathbf{e}$$

A harmadik deriváltra ezért általánosan felírható

$$\mathbf{r}''' = \mathbf{e}'' = \varkappa'\mathbf{n} + \varkappa\mathbf{n}' = \varkappa'\mathbf{n} - \varkappa^2\mathbf{e}$$

Hogyha $t = 0$, akkor $\mathbf{e}(0) = \mathbf{i}$ és $\mathbf{n}(0) = \mathbf{j}$. Emiatt az előbbi egyenlet $t = 0$-ban:

$$\mathbf{r}'''(0) = \big(x'''(0), y'''(0)\big) = -\varkappa(0)^2\mathbf{i} + \varkappa(0)'\mathbf{j}$$

A koordináta definíciójából következik, hogy $x'''(0)$-t az előbbi lineáris kombináció $\mathbf{i}$ vektoros tagjának együtthatója adja, tehát $x'''(0) = -\varkappa(0)^2$.

Ezt behelyettesítjük a $\varkappa_\varrho(0)$-t megadó egyenletbe, melyre végül azt kapjuk, hogy

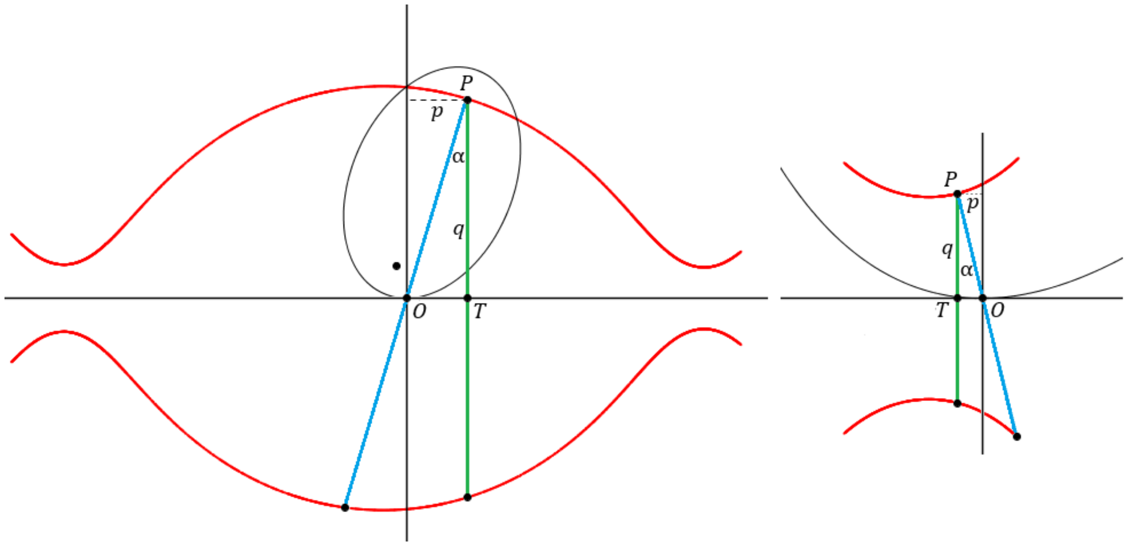
$$\varkappa_\varrho(0) = -\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} + \frac{q}{\varkappa(0) \cdot (p^2 + q^2)^{3/2}}$$

A kapott kifejezés azt mutatja, hogy a görbület csak az adott pillanatban levő érintési pontbeli görbülettől, és az abban a pillanatban az illesztett koordinátarendszerben P helyétől (p és q koordinátáktól) függ.

Tehát a görbénk helyett, ha bármilyen másik olyan görbét gördítünk, melynek a tengellyel való érintkezési pontjában ugyanakkora a görbülete, a figyelt P pontban a két keletkező görbének ugyanakkora lesz a görbülete. Ilyen görbe például az eredeti görbe simulóköre (a tengelyen levő pontjában). Ezért tételünket ezzel az eredménnyel sikerült bebizonyítanunk.

3.2. A parallelkör érintőjéhez tartozó normálgörbület

Hogyha a parallelkör érintőjéhez tartozó normálmetszet nem maga a kör, akkor a parallelkör az ehhez a főirányhoz tartozó egyik ferde metszet. Az ábrákon látható, hogy a görgetések során P pont helyzete hasonlóan határozza meg a számunkra fontos távolságokat. Kék színnel jelöltük a normálmetszet vonalát, zölddel a parallelkörét.



Felhasználtuk, hogy a normálmetszet vonalát az aktuális érintési pont és a fókuszpont által meghatározott egyenes adja meg, az úgynevezett gördülési elvre hivatkozva. E szerint az elv szerint gördítés során a fókuszpont mindig az éppen aktuális érintkezési pont körüli forgómozgást végez. Mivel az O középpontú, OP sugarú kör érintője megfelel a görbe érintőjének, és tudjuk, hogy a kör érintője merőleges a sugárra, ezért a P-beli érintőre valóban merőleges lesz az OP szakasz.

Ferde metszet és normálmetszet görbülete közötti összefüggést a *Meusnier-tétel* mondott ki:

$$\varkappa_n = \varkappa \cdot cos\, \alpha$$

Fontos megállapítanunk, hogy ez a görbület milyen előjellel fog rendelkezni. Az előző fejezetben úgy vezettük le a görbületet, hogy a pozitív irányt a görgetés tengelyétől a felület irányába mutató vektor adta meg. A parallelkör valamint a normálmetszet viszont a tengely felé görbül, ennek az irányvektornak ellentétes irányába, tehát ez a főgörbületünk negatív előjelet fog fölvenni.

A képlet jelöléseit használva tehát

- $\varkappa$: a parallelkör görbülete. Az ábrán látható, hogy a kör sugara a PT szakasz, mely hossza q. Így a parallelkör, azaz a ferde metszet görbülete ennek a reciproka, negatív előjellel:

$$\varkappa = -\frac{1}{q}$$

- $cos\ \alpha$: a két metszet síkja által közre zárt szög koszinusza. Ennek értéke az ábrán jelölt OPT háromszög megfelelő befogójának és átfogójának hányadosa:

$$cos\ \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

Ezek alapján megkapjuk, hogy a másik keresett főgörbületet a

$$\varkappa_n = \varkappa_2 = -\frac{1}{q}\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = -\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

képlet adja meg. Látható, hogy ez a képlet nem tartalmaz új paramétereket a másik főgörbülethez képest, ugyan azt a p-t és q-t kell kifejezni, mint ami $\varkappa_1$ kiszámolásához szükséges.

4. Az összeggörbület képlete

Ismerve a két főgörbületet, fel tudjuk írni az összeggörbületet. Az összeggörbület a két főgörbület összege, vagyis:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = -\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{q}{\kappa(0)(p^2+q^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} =$$

$$= \frac{q}{\kappa(0)(p^2+q^2)^{3/2}} - \frac{2}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

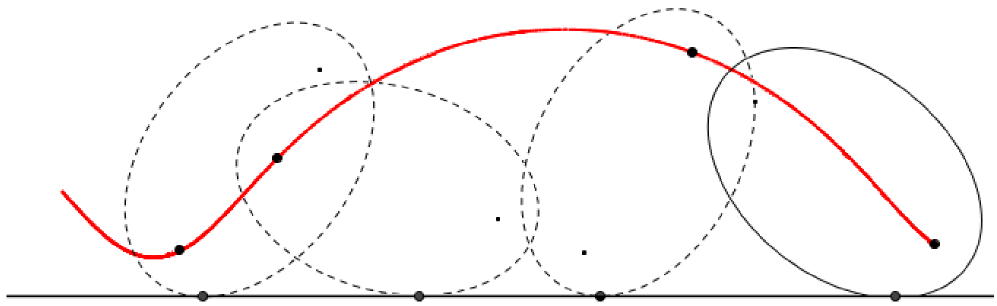
Mivel az összefüggéseket általánosan vezettük le síkgörbékre, az ellipszis és parabola görgetésével származtatott mindkét forgásfelületre használhatjuk ezt a képletet az összeggörbület kiszámolásához.

Feladatunk tehát az, hogy kifejezzük általánosan $\varkappa(0)$-t valamint p-t és q-t megadó képleteket, mert ezek értéke függ attól, hogy a gördítés melyik időpillanatát választottuk a kimerevített időpillanatnak.

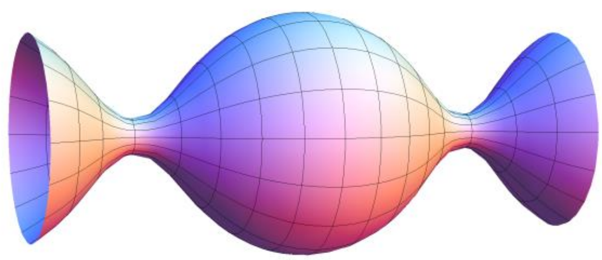
Ha ismerjük a görbe egy μ szerinti paraméterezését, természetesen meg tudjuk adni, hogy melyik a kiragadott pillanat, attól függően, hogy a tengely abban a pillanatban melyik $\mathbf{r}(\mu)$ pontban az érinti a görbét (a görgetés tekinthető úgy is, hogy a görbe rögzített, és annak mentén gördítjük a minden pillanatban érintőként funkcionáló egyenest).

5. Az ellipszis görgetése

Az ellipszis fókuszpontja egy periodikusan hullámzó vonalat ír le az ellipszis görgetése során.



Hogyha ezt a görbét a térben megforgatjuk a görgetés tengelye körül, az ún. unduloidot kapjuk. Először erről a felületről bizonyítjuk be, hogy teljesül rá a *Delaunay-tétel*.



Az unduloid modellje

Mint említettük, p, q és $\varkappa(0)$ kifejezéséhez szükség van a görbe egy paraméterezésére. Az a illetve b nagy- és kistengely hosszúságú ellipszis ismeretes paraméterezése, ha középpontja az origóban van:

$$\mathbf{r}(\alpha) = (a\ cos\alpha, b\ sin\alpha)$$

Az összeggörbületben szereplő ismeretlenek közül fejezzük ki először $\varkappa(0)$ értékét, vagyis a görbe görbületét, ha az a görgetés tengelyével egy $\mathbf{r}(\alpha)$ pontjában érintkezik. Ez a már korábban is használt képlet alapján megtehető.

Ellipszisre:

$$\mathbf{r}'(\alpha) = (-a\sin\alpha\,, b\cos\alpha)$$

$$\mathbf{r}''(\alpha) = (-a\cos\alpha\,, -b\sin\alpha)$$

$$v(\alpha) = |r'(\alpha)| = \sqrt{a^2 sin^2\alpha + b^2 cos^2\alpha} = \sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}$$

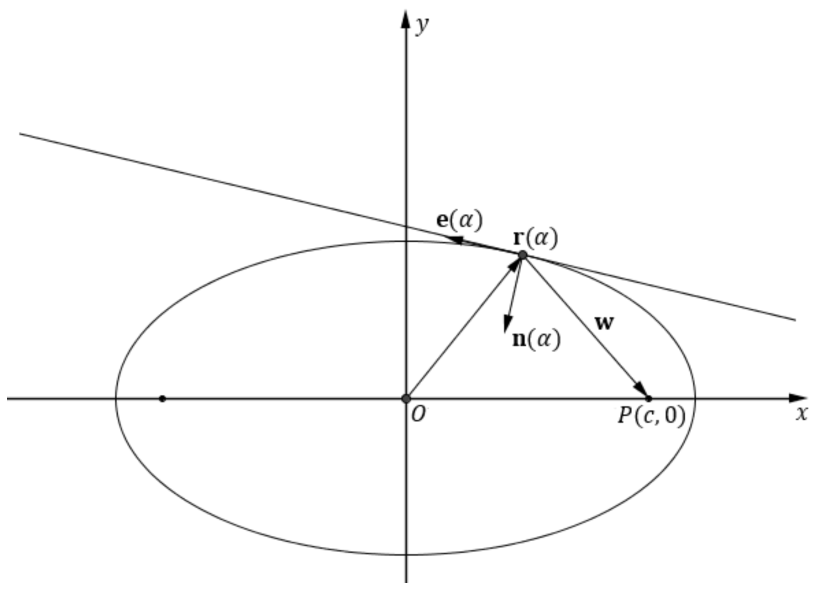
Az utolsó egyenletben felhasználtuk, hogy az ellipszisre jellemző távolságokra teljesül a $b^2 = a^2 - c^2$ összefüggés, ahol (a és b a nagy- és kisféltengely hossza, valamint) c a középpont és fókuszpont távolsága.

A görbület egyenletébe beírva ezeket:

$$\varkappa(0) = \frac{\det(\mathbf{r}'(\alpha), \mathbf{r}''(\alpha))}{v(\alpha)^3} = \frac{ab\ sin^2\alpha + ab\ cos^2\alpha}{(a^2 - c^2 cos^2\alpha)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 - c^2 cos^2\alpha)^{3/2}}$$

A képletben szereplő p és q kifejezése is megtehető α függvényében. Ez a két paraméter, mint említettük, a fókuszpont koordinátája abban a derékszögű koordinátarendszerben, melynek a görgetés tengelye az x tengely, és origója az érintési pont. Hogy megkapjuk e két paramétert, szükséges felírnunk az érintési ponttól függően ennek a koordinátarendszernek az egységvektorait (az ellipszis koordinátarendszerében).

Ismét felhasználjuk, hogy a görgetést szemlélhetjük úgy, hogy a tengely vándorol végig a görgetett görbe ívén. Ennek ismeretében rajzoljuk fel az ábrát, ha a tengely egy $\mathbf{r}(\alpha)$ pontban érinti az ellipszist:



Az illesztett koordinátarendszer egységvektorait jelölje most **e** és **n** vektor (**n** egységvektor az ellipszis belseje felé mutat, **e** pedig az **n** vektor 90°-os elforgatottja).

Az ellipszis koordinátarendszerében $\mathbf{r}(\alpha)$-ból levezethetjük $\mathbf{e}(\alpha)$ vektort úgy, mint $\mathbf{r}(\alpha)$-ba húzott érintő-egységvektort:

$$\mathbf{e}(\alpha) = \frac{(-\,a\sin\alpha\,, b\cos\alpha)}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}} = \left(\frac{-\,a\sin\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}, \frac{b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}\right)$$

Megkapjuk az erre merőleges $\mathbf{n}(\alpha)$ vektort is $-90°$-os forgatással:

$$\mathbf{n}(\alpha) = \left(\frac{-\,b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}, \frac{-\,a\sin\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}\right)$$

Az ábrán látható, hogy az $\mathbf{r}(\alpha)$ és **w** vektorok összege a $(c, 0)$ vektor. A **w** vektor viszont p és q együtthatókkal előáll **e** és **n** lineáris kombinációjaként (mint P helye az illesztett koordinátarendszerben), így felírható:

$$(c, 0) = \mathbf{r}(\alpha) + \mathbf{e}(\alpha)\cdot p(\alpha) + \mathbf{n}(\alpha)\cdot q(\alpha)$$

Ez az összefüggés két egyenletet ad, melyben két ismeretlenünk van, következésképpen p és q kifejezhető. Írjuk fel a két egyenletet, a jelölésben most p és q-nak az α-tól való függését hagyjuk el:

$$c = a\cos\alpha + p\frac{-a\sin\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}} + q\frac{-b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}$$

$$0 = b\sin\alpha + p\frac{b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}} + q\frac{-a\sin\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}$$

Az első egyenletből fejezzük ki p-t:

$$p = q\frac{-b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}\,\frac{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}{a\sin\alpha} + a\cos\alpha\frac{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}{a\sin\alpha} - $$
$$- \, c\,\frac{\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}{a\sin\alpha}$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket, megkapjuk, hogy

$$p = q\frac{-b\cos\alpha}{a\sin\alpha} + \frac{a\cos\alpha\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha} - c\sqrt{a^2 - c^2 cos^2\alpha}}{a\sin\alpha}$$

Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe, elvégezve az alapvető egyszerűsítéseket

$$0 = b\sin\alpha + q\frac{-a\sin\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha}} +$$

$$+\frac{-qb\cos\alpha + a\cos\alpha\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha} - c\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha}}{a\sin\alpha}\ \frac{b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha}} =$$

$$= b\sin\alpha - q\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha}} - q\frac{b^2cos^2\alpha}{a\sin\alpha\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha}} + \frac{b\ cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{bc\cos\alpha}{a\sin\alpha}$$

Összevonjuk q együtthatóit, átvisszük baloldalra, a jobb oldalt pedig közös nevezőre hozzuk, és elvégzünk további egyszerűsítéseket

$$q\frac{\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha}}{a\sin\alpha} = \frac{a\,b - b\,c\cos\alpha}{a\sin\alpha}$$

Kifejezzük q-t:

$$q = \frac{b\ (a - c\ cos\ \alpha)}{\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha}}$$

Mivel tudjuk, hogy, $a^2 - c^2cos^2\alpha = (a + c\cos\alpha)(a - c\cos\alpha)$, ismét lehet egyszerűsíteni, és megkapjuk, hogy

$$q = b\sqrt{\frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha}}$$

Ezt visszahelyettesítjük a p-t megadó egyenletbe, hogy kifejezhessük p-t is:

$$p = \frac{b\sqrt{a - c\cos\alpha}}{\sqrt{a + c\cos\alpha}}\ \frac{-b\cos\alpha}{a\sin\alpha} + \frac{a\cos\alpha\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha} - c\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha}}{a\sin\alpha} =$$

$$= \frac{-b^2\cos\alpha\sqrt{a - c\cos\alpha}}{a\sin\alpha\sqrt{a + c\cos\alpha}} +$$

$$+\frac{a\cos\alpha\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha}\sqrt{a + c\cos\alpha} - c\sqrt{a^2 - c^2cos^2\alpha}\sqrt{a + c\cos\alpha}}{a\sin\alpha\sqrt{a + c\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a - c\cos\alpha}}{\sqrt{a + c\cos\alpha}}\ \frac{-b^2\cos\alpha + a\cos\alpha\,(a + c\cos\alpha) - c(a + c\cos\alpha)}{a\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{a - c\cos\alpha}}{\sqrt{a + c\cos\alpha}} \frac{\cos\alpha\,(-b^2 + a^2 + a\,c\cos\alpha - c^2) - ac}{a\sin\alpha}$$

Ismételten felhasználjuk, hogy $b^2 = a^2 - c^2$, mert ekkor

$$p = \frac{\sqrt{a - c\cos\alpha}}{\sqrt{a + c\cos\alpha}} \frac{ac(cos^2\alpha - 1)}{a\sin\alpha} =$$

$$= -c\sin\alpha \sqrt{\frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha}}$$

Megkaptuk ezzel, hogy mik $\varkappa(0)$, p és q–nak az α-tól függő képletei. Ezeket fogjuk behelyettesíteni az összeggörbületet megadó egyenletbe, amely ekkor:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = \frac{b\sqrt{\frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha}}}{\frac{ab}{(a^2 - c^2cos^2\alpha)^{3/2}}\left(c^2sin^2\alpha\frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha} + b^2\ \frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha}\right)^{3/2}} -$$

$$- \frac{2}{\sqrt{c^2sin^2\alpha\left(\frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha}\right) + b^2\left(\frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha}\right)}}$$

A nevezőkben ismét felhasználjuk a $c^2sin^2\alpha + b^2 = a^2 - c^2cos^2\alpha$ összefüggést, hogy tudjunk egyszerűsíteni:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = \frac{\left(\frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha}\right)^{1/2}}{a\left(\frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha}\right)^{3/2}} - \frac{2}{\left(\frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha}\right)^{1/2}(a^2 - c^2cos^2\alpha)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{a\,\frac{a - c\cos\alpha}{a + c\cos\alpha}} - \frac{2}{a - c\cos\alpha}$$

Közös nevezőre hozzuk a tagokat:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = \frac{a + c\cos\alpha - 2a}{a\,(a - c\cos\alpha)}$$

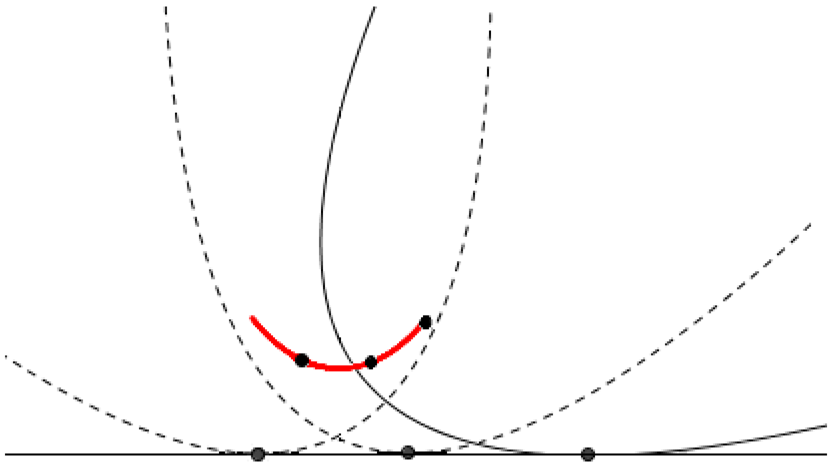
Látszik, hogy a felső tag $-(a - c\cos\alpha)$-val azonos, melyet kiejt a nevező, tehát az eredmény:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = -\frac{1}{a}$$

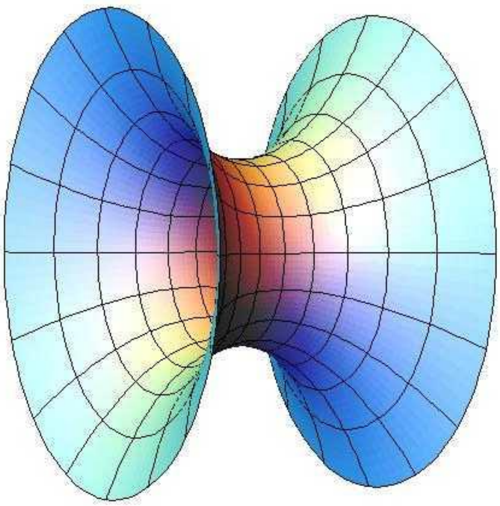
Ezzel sikerült bizonyítatnunk, hogy az összeggörbület nem függ α-tól, vagyis attól, hogy melyik pontjában vagyunk a felületnek. Az összeggörbület valóban minden felületi pontban konstans, a felület alkotóját előállító görgetett ellipszis nagyféltengelyének a reciproka. Sikerült bebizonyítanunk tehát a *Delaunay-tételnek* azon részét, miszerint, ha a kúpszeletünk ellipszis, a görgetéssel valóban állandó összeggörbületű felületet származtathatunk.

6. Parabola görgetése

A parabola fókuszpontja nem periodikus görbét rajzol ki, ez esetben egy íves vonalat kapunk:



Ezt az ívet megforgatva kapjuk másik vizsgálandó felületünket, a katenoidot:



Katenoid

Erre a felületre szintén érdemes elvégeznünk az előbbi számolást, ugyanis ahogy a későbbiekben látjuk, a témakörünknek egy speciális esetét adja az eredmény. Számoljuk ki tehát, mit kapunk ez esetben az összeggörbület értékére.

Mint említettük, a korábban levezetett összeggörbület képlete általánosan használható görbék gördítésére, így ez esetben is csak $\varkappa(0)$, p és q kifejezése lesz a feladatunk.

A $(0, c)$ fókuszpontú parabola paraméteres megadása, ha talppontja az origóban van:

$$\mathbf{r}(\Theta) = (2c\Theta, c\Theta^2)$$

Ismét $\varkappa(0)$ kiszámolását végezzük el előbb. A szükséges deriváltak, valamint a sebesség:

$$\mathbf{r}'(\Theta) = (2c, 2c\Theta)$$

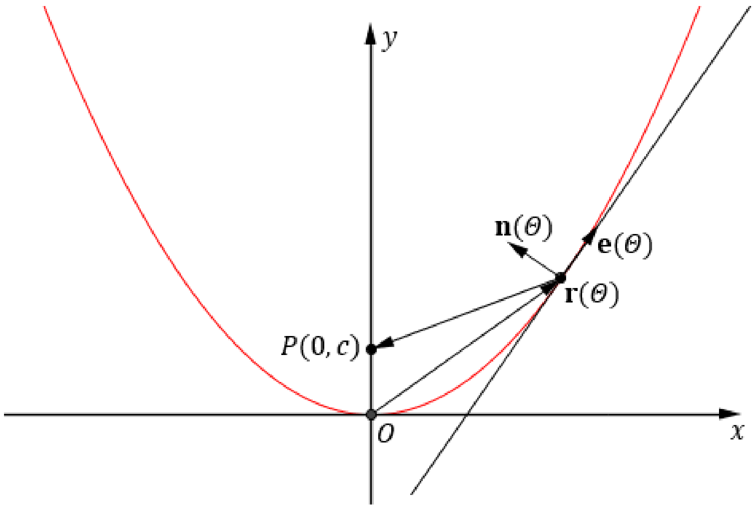
$$\mathbf{r}''(\Theta) = (0,2c)$$

$$v(\Theta) = \sqrt{(2c)^2 + (2c\Theta)^2} = \sqrt{4c^2 + 4c^2\Theta^2}$$

A görbület így:

$$\varkappa(0) = \frac{4c^2}{(4c^2 + 4c^2\Theta^2)^{3/2}} = \frac{1}{2c(1 + \Theta^2)^{3/2}}$$

A p és q meghatározásához szükséges összefüggés hasonlóan leolvasható, ha bármely pontba berajzoljuk az érintőt, mint a gördítés tengelyét:



Ismét az $\mathbf{r}(\Theta)$-be és az $\mathbf{r}(\Theta)$-ből a fókuszba mutató vektorok összegeként adódik a számoláshoz kiindulásként szolgáló egyenlet:

$$(0, c) = \mathbf{r}(\Theta) + \mathbf{e}(\Theta) \cdot p(\Theta) + \mathbf{n}(\Theta) \cdot q(\Theta)$$

A két merőleges egységvektor:

$$\mathbf{e}(\Theta) = \frac{(2c, 2c\Theta)}{\sqrt{4c^2 + 4c^2\Theta^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\Theta^2}}, \frac{\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}}\right)$$

$$\mathbf{n}(\Theta) = \left(\frac{-\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\Theta^2}}\right)$$

Tehát felírható koordinátánként (Θ-tól való függés jelölését elhagyva):

$$0 = 2c\Theta + \frac{p}{\sqrt{1+\Theta^2}} - \frac{q\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}}$$

$$c = c\Theta^2 + \frac{p\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}} + \frac{q}{\sqrt{1+\Theta^2}}$$

Most p paramétert fejezzük ki először, az első egyenletből:

$$p = \frac{q\Theta}{\sqrt{1+\Theta^2}}\sqrt{1+\Theta^2} - 2c\Theta\sqrt{1+\Theta^2} = q\Theta - 2c\Theta\sqrt{1+\Theta^2}$$

Melyet behelyettesítünk a második egyenletbe:

$$c = \frac{q\Theta^2 - 2c\Theta^2\sqrt{1+\Theta^2} + q}{\sqrt{1+\Theta^2}} + c\Theta^2$$

$$c\sqrt{1+\Theta^2} = q\Theta^2 - c\Theta^2\sqrt{1+\Theta^2} + q$$

$$c\sqrt{1+\Theta^2}(1+\Theta^2) = q(1+\Theta^2)$$

Megkaptuk q-nak a Θ-tól függő alakját:

$$q = c\sqrt{1+\Theta^2}$$

Ezt a kifejezést visszahelyettesítjük a korábban felírt, p-t kifejező egyenletbe, hogy annak képletéhez is eljussunk:

$$p = c\Theta\sqrt{1+\Theta^2} - 2c\Theta\sqrt{1+\Theta^2} = -c\Theta\sqrt{1+\Theta^2}$$

Megkaptuk a keresett paramétereket:

$$\varkappa(0) = \frac{1}{2c(1+\Theta^2)^{3/2}}$$

$$q = c\sqrt{1+\Theta^2}$$

$$p = -c\Theta\sqrt{1+\Theta^2}$$

Ezeket helyettesítjük be az összeggörbület képletébe. Az egyenlet:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = \frac{c\sqrt{1+\Theta^2}}{\frac{1}{2c(1+\Theta^2)^{3/2}}\left(c^2\Theta^2(1+\Theta^2)+c^2(1+\Theta^2)\right)^{3/2}} -$$

$$- \frac{2}{\sqrt{c^2\Theta^2(1+\Theta^2)+c^2(1+\Theta^2)}}$$

Ahol megtehetjük, a tagokat összevonjuk, egyszerűsítünk, így eljutunk az eredményhez:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = \frac{2c^2(1+\Theta^2)^2}{c^3(1+\Theta^2)^3} - \frac{2}{\sqrt{c^2(1+\Theta^2)^2}} = \frac{2}{c(1+\Theta^2)} - \frac{2}{c(1+\Theta^2)} = 0$$

Az összeggörbületre tehát ebben az esetben is konstans számot kaptunk, $\varkappa_1 + \varkappa_2$ értéke a származtatott felület minden pontjában nulla lesz. Érdemes megjegyeznünk, hogy ez az ellipszis esetétől nem teljesen független eredmény, látható az az összefüggés, hogy ha az ellipszis nagyféltengelyének hossza végtelenhez tart, az $1/a$ összeggörbület határértéke éppen a parabolára kapott értéket adja.

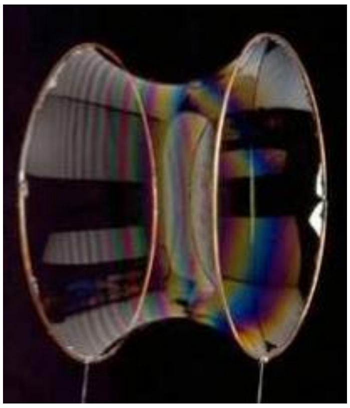
6.1. Következtetések, magyarázat

Emlékezzünk vissza a dolgozat elején említett összefüggésre, mely a szappanhártyákra teljesül:

$$p_+ - p_- = \alpha \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)$$

Hogyha az összeggörbület nulla, adódik, hogy a jobb oldali szorzat egésze az lesz, tehát a baloldali $(p_+ - p_-)$-ra, a külső és belső nyomás közötti különbségre is nullát kapunk.

Ebben az esetben ez a kapott felület megvalósítható szappanhártyaként. Megkapjuk a katenoid alakját, hogyha két kör alakú drótot szorosan egymás mellett szappanos oldatba mártunk, majd onnan kiemelve lassan távolítani kezdjük egymástól őket. A külső és belső nyomás ekkor értelemszerűen valóban megegyezik.



A keletkező hártya felületi energiája ebben a formájában lesz a legkisebb, a hártyát a felületi feszültség húzza össze a lehető legkisebbre az adott körülmények között. Ilyen felületekről kapták a nevüket az ún. minimálfelületek. Minimálfelületeknek matematikában azokat a felületeket nevezik, melyek Minkowski-görbülete minden pontjukban nulla, mely, mint ahogy bizonyítottuk, a katenoidra is teljesül.

További érdekességek közé tartozik, hogy a görgetés által leírt görbe tulajdonképpen a láncgörbét adja, a koszinusz hiperbolikusz függvényt kapnánk, ha paramétereznénk az ívet.

A láncgörbe elnevezése onnan származik, hogy a két pont között függő, (homogén tömegeloszlású) lánc ennek a görbének alakját veszi fel. Megkaptuk, hogy térben forgatva a görbe szintén egy olyan felületet rajzol ki, mely a fizikában egyensúlyi helyzetét mutatja egy anyagi halmaznak. Az alapján, hogy milyen erők érvényesülnek bármilyen kifeszítés során, valószínűleg be lehet bizonyítani, hogy az erők eredője – síkban és térben egyaránt – miért egy koszinusz hiperbolikusz függvényhez vezetnek el minket.

7. További kúpszeletek

A dolgozat végén pár szóban még említsük meg, mi történik a többi kúpszelet gördítése esetében. Ezek eredményeit nem bizonyítjuk, egyes esetekben ráadásul könnyen látszódik majd mit kapunk, ha elvégezzük az eddigi eljárásokat.

Hiperbola

Hiperbola gördítése során a kiválasztott fókuszpont egy periodikus, hurkolt görbét ír le (amikor a gördítés tengelye éppen egybeesik az aszimptotával a gördítést úgy kell folytatni, hogy áttérünk a hiperbola másik ágára – közben a fókuszpont ugyan az marad). A fókusz leírta görbét a tengely körül megforgatva konstans $1/a$ *Minkowski-görbületű* forgásfelületet fogunk kapni, ezt a dolgozatban most nem bizonyítjuk.

Kör

A kör középpontja egy egyenes mentén halad a görgetés során, melyet megforgatva a hengerfelületet kapjuk. Az összeggörbületre a nulla görbületű egyenes (alkotó) és a minden pontban normálmetszetként adódó parallelkörök görbületéből adódik, hogy $1/r$. Ez szintén következik az ellipszis esetéből, hogyha csak egy fókuszunk van és $a = r$.

Egyenes szakasz

Hogyha a görgetett ellipszis kisféltengelyének hosszát nullának vesszük, felírhatjuk még azt a speciális esetet, mikor szakaszt gördítünk az egyenesen (a szakasz két végpontja az elfajult ellipszis két fókusza). A kiválasztott végpont egymást érintő félköröket ír le, miközben a szakasz a tengelyen halad. Ennek forgatásával a kapott felület a szakasz hosszával megegyező sugarú gömböknek egy végtelen füzére lesz. Bármely pontban mindkét normálmetszet a szakasz hosszával megegyező sugarú kör, így az összeggörbület a körök görbületének kétszerese, a konstans $2/r$.

Érdekesség

További bizonyításokkal el lehet jutni ahhoz az eredményhez is, hogy a forgásfelületek közül csak és kizárólag ezek, a kúpszelet görgetéssel származtatatott felületek rendelkeznek konstans összeggörbülettel minden pontjukban. Olyan felület létezik, mely nem forgásfelület, és teljesül rá a feltétel, de forgásfelületek közül csak az ilyen módon előállított felületek adják a keresett felületeket.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni konzulensemnek, Moussong Gábornak lelkiismeretes munkáját, melyet évfolyamom geometriai tanulmányaira fordított, azt, hogy elvállalta témavezetésemet, valamint a sok segítséget és magyarázatot, melyek lehetővé tették a dolgozat elkészítésének megvalósítását.

Felhasznált irodalom

[1] Gnädig Péter, Simányi Nándor: Forgásfelületek szappanhártyából (Charles Delaunay tételéről), KöMaL,1998. március, 173-181. oldal

[2] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria, Budapest: Műszaki Könyvkiadó, 1979.

[3] Juhász András: Fizikai kísérletek gyűjteménye I., Budapest: Arkhimédész Bt.-Typotex Kiadó, 1994.

[4] https://hu.wikipedia.org/wiki/Minim%C3%A1lfel%C3%BClet

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/Katenoid

Weboldalakról felhasznált ábrák

http://www.experiminta.de/riesen-seifenhaut.html

http://homepages.math.uic.edu/~ddumas/teaching/2010/fall/math442/

https://www.youtube.com/watch?v=NWCP9HgKoiU

http://arkadiusz.jadczyk.salon24.pl/66757,obracanie-kota-ogonem