

A parkettázás problémája

Szakdolgozat

Készítette:

Kis László

(Matematika BSC, Tanári szakirány)

Témavezető:

Szeghy Dávid

(geometria tanszék)



Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék.....	2
Bevezető.....	3
1. Az egybevágósági transzformációk kompozíciója.....	4
2. A parkettázás alapozása.....	13
3. A parketták osztályozása.....	25
4. Utószó.....	43
5. Irodalomjegyzék.....	44

Bevezető

A matematika az élet minden területén jelen van. Ebben a szakdolgozatban bemutatom, hogy a parkettázás, csempézés és tapétázás világában is jelen van a matematika. Megfigyelhető, hogy ha egy parkettával találkozunk, akkor abban az alakzatok mennyire szabályosan vannak elhelyezkedve. Ugyanígy fel lehet fedezni a szabályosságot a csempék és tapéták alakzatai között is.

A szakdolgozatomban ezeknek az alakzatoknak, mintáknak a szabályosságával foglalkozunk és kiderítjük hogyan tudjuk pontosan 17 csoportba (osztályba) besorolni ezeket. Ha eléggé meglepő az előbbi állítás, úgy a szakdolgozatom áttanulmányozása után kiderül, hogy mennyire is bonyolult ennek a bebizonyítása.

A szakdolgozatban először az egybevágósági szimmetriákkal foglalkozok, hogy miként lehet több egybevágósági szimmetria egymás utáni végrehajtását egy egybevágósággal helyettesíteni. Két egybevágóság kompozíciójának eredményét a fejezet végén egy táblázatba foglaltam össze.

A következő fejezetben leírom a parkettázás fogalmát és pár fontos szabályt a parkettákkal kapcsolatban. Ezeket a szabályokat természetesen a kimondásuk után be is bizonyítom.

A parketták szabályainak bemutatása után már a szabályok ismeretében egyszerűbben lehet belátni a parketták csoportosítását.

Fontos még megjegyezni, hogy a szakdolgozaton belül végig az euklideszi geometriában fogunk dolgozni.

1. Az egybevágósági transzformációk kompozíciója

Mielőtt belekezdünk az egybevágósági transzformációk tanulmányozásába tekintsük át a szakdolgozatban alkalmazott általános jelöléseket

Jelölések:

- A pontokat nagy betűkkel.
- Az egyeneseket kisbetűvel.
- A vektorokat \underline{v} alakban. Ha egy reprezentánsával van megadva, akkor \overrightarrow{AB} alakban.
- Az A, B ponton átmenő egyenest: \overline{AB} jelöli.
- Az euklideszi síkot \mathbb{E}^2 -tel jelöljük.

1.1 Definíció: A \mathbb{E}^2 euklideszi sík egy $\Phi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ leképezését *egybevágósági transzformáció*nak nevezzük, ha távolságtartó, azaz: $d(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{E}^2$ esetén, ahol d az euklideszi sík távolságfüggvénye.

Az egybevágósági transzformációkat (röviden egybevágóság), izometriának vagy távolságtartó transzformációnak is nevezzük.

1.2 Állítás: Az egybevágósági transzformációk az euklideszi síkon csoportot alkotnak a kompozíció műveletre nézve. Jelölés: $\mathfrak{T}(\mathbb{E}^2)$

Bizonyítás: Az alábbi tulajdonságok könnyen ellenőrizhetők a definíció alapján

- Zárt a kompozíció műveletre és ez a művelet asszociatív.
- Van neutrális eleme.
- $\mathfrak{T}(\mathbb{E}^2)$ csoport minden elemének van inverze.

■

A következő pár állításról bővebben Verhóczy László jegyzetében [V] a 7. fejezetben olvashatunk. Ezeket nem bizonyítjuk, mert bizonyításuk megtalálható ott, számunkra ezek a szükséges alap eszközök, melyeket később használni fogunk.

1.3 Állítás: Az egybevágósági transzformációk a következők lehetnek:

- Az identikus leképezés. Jelölés: I
- Egy \underline{v} vektorral való eltolás. Jelölés: $e_{\underline{v}}$ vagy $e_{\overline{AB}}$
- Egy P pont körüli α irányított szöggel való forgatás. Jelölés: $f_{P,\alpha}$
- Egy g egyenesre való tükrözés. Jelölés: t_g
- Csúsztatva tükrözés: egy g egyenesre való tükrözés és a g egyenessel párhuzamos \underline{v} vektorral való eltolás kompozíciója. Jelölés: $t_{g,\underline{v}}$

Ezeket az egybevágóságokat irányításuk szerint lehet csoportosítani. Vannak az irányítástartó és az irányításváltó egybevágóságok.

1.4 Állítás: Az irányítástartó egybevágóságok az eltolások és a forgatások, míg az irányításváltó egybevágóságok a tengelyes tükrözések és a csúsztatva tükrözések.

1.5 Állítás: Két irányításváltó vagy két irányítástartó egybevágóság kompozíciója irányítástartó egybevágóság, míg egy irányítástartó és egy irányításváltó egybevágóság kompozíciója irányításváltó egybevágóság.

1.6 Állítás: Egy egybevágóságot, amelyikről tudjuk milyen irányítású, egyértelműen meghatároz két pont és a képe.

1.7 Állítás: Egy egybevágóságot egyértelműen meghatároz három pont és a képe.

1.8 Állítás: Az eltolásnak és a csúsztatva tükrözésnek nincs fix pontja.

1.9 Állítás: A forgatásnak egy fix pontja van (ami körül forgatunk) és a tengelyes tükrözésnek a tengely egyenesének a pontjai lesznek a fix pontok.

1.10 Állítás: Két eltolás egymásutánja (kompozíciója): $e_{\underline{v}_2} \circ e_{\underline{v}_1} = e_{\underline{v}_1 + \underline{v}_2}$

Bizonyítás: Legyen P egy tetszőleges pont. Ha $Q := e_{\underline{v}_1}(P)$ és $R := e_{\underline{v}_2}(Q)$, akkor egyrészt $\overrightarrow{PQ} = \underline{v}_1$ és $\overrightarrow{QR} = \underline{v}_2$ másrészt a vektorok összegzése miatt $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$, azaz $e_{\underline{v}_2}(e_{\underline{v}_1}(P)) = e_{\underline{v}_1 + \underline{v}_2}(P)$. Mivel ez minden P pontra igaz, így a két egybevágóság megegyezik. ■

1.11 Állítás: Két azonos O középpontú forgatás kompozíciója: $f_{O,\beta} \circ f_{O,\alpha} = f_{O,\alpha+\beta}$

Bizonyítás: Mivel két irányítástartó egybevágóság kompozíciója 1.5 miatt irányítás tartó, így ez 1.4 miatt vagy egy eltolás, vagy egy forgatás. Valódi eltolás nem lehet, mert annak nincs fix pontja itt pedig O fix. Vegyünk egy tetszőleges $P \neq O$ pontot. Ekkor ha $P' := f_{O,\alpha}(P)$ akkor a $POP' \sphericalangle = \alpha$ irányított szög, ha $P'' := f_{O,\beta}(P')$ akkor a $P'OP'' \sphericalangle = \beta$ irányított szög, de akkor az irányított szögek összegzése miatt $POP'' \sphericalangle = POP' \sphericalangle + P'OP'' \sphericalangle = \alpha + \beta$. Azaz egy tetszőleges pontra $f_{O,\beta} \circ f_{O,\alpha}(P) = f_{O,\alpha+\beta}(P)$ így az állítás következik. ■

1.12 Lemma: Legyenek adva e, f egyenesek.

A két tükrözés kompozíciója, $t_e \circ t_f$:

- Ha $e \parallel f \Rightarrow t_f \circ t_e = e_{2^* \overline{EF}}$, ahol $\overline{EF} \perp e$ és $E \in e, F \in f$
- Ha $e \not\parallel f \Rightarrow t_f \circ t_e = f_{O, 2\alpha}$, ahol $O := e \cap f$ és $\alpha := \angle EOF$ irányított szög, ahol $E \in e, F \in f$ és $E, F \neq O$

Bizonyítás:

Nézzük meg, mi történik egy tetszőleges P pont választásánál és hogy hova kerül a képe.

Az 1 ábrán lehet követni az $e \parallel f$ esetet és az 2. ábrán az $e \not\parallel f$ esetet.

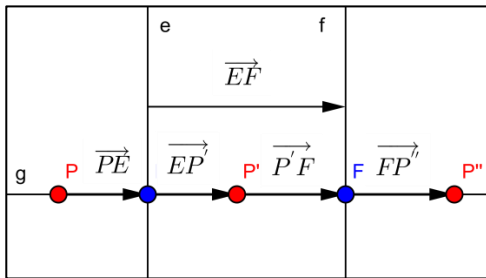
Amennyiben $e \parallel f$, akkor legyen $g \perp e$, $P \in g$ és $E := g \cap e$, $F := g \cap f$

Ekkor $P' := t_e(P) = e_{\overrightarrow{PE}}(P) = e_{\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EP'}}(P)$, ahol $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{EP'}$

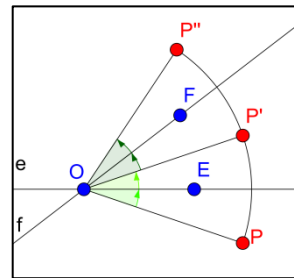
Majd $P'' := t_f(P') = e_{\overrightarrow{P'F}}(P') = e_{\overrightarrow{P'F} + \overrightarrow{FP''}}(P')$, ahol $\overrightarrow{P'F} = \overrightarrow{FP''}$

Tehát 1.10-et felhasználva adódik:

$$t_f \circ t_e(P) = e_{\overrightarrow{P'F} + \overrightarrow{FP''}} \circ e_{\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EP'}}(P) = e_{\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EP'} + \overrightarrow{P'F} + \overrightarrow{FP''}}(P) = e_{2^*(\overrightarrow{EP'} + \overrightarrow{P'F})}(P) = e_{2^* \overline{EF}}(P)$$



1. ábra



2. ábra

Amennyiben $e \not\parallel f \Rightarrow O := e \cap f$ és $E \in e, F \in f$ és $E, F \neq O$.

Legyen $P' := t_e(P)$ és $P'' := t_f(P')$

Az irányított szögek összegzését felhasználva:

$$\angle POP' = \angle POE + \angle EOP' \text{ és } \angle P'OP'' = \angle P'OF + \angle FOP'', \text{ ahol}$$

$$\angle POE = \angle EOP' \text{ és } \angle P'OF = \angle FOP''$$

Ekkor a következőt tudjuk felírni a tetszőlegesen választott P pontra:

$$P' = t_e(P) = f_{O, \angle POP'}(P) = f_{O, \angle POE + \angle EOP'}(P)$$

$$P'' = t_f(P') = f_{O, \angle P'OP''}(P') = f_{O, \angle P'OF + \angle FOP''}(P')$$

Az 1.11-et és az irányított szögek összegzését felhasználva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} t_f \circ t_e(P) &= f_{O,P'OF_4+FOP''_4} \circ f_{O,POE_4+EOP'_4}(P) = f_{O,POE_4+EOP'_4+P'OF_4+FOP''_4}(P) \\ &= f_{O,2*(EOP'_4+P'OF_4)}(P) = f_{O,2*EOF_4}(P) \end{aligned}$$

Most pedig nézzük sorra az egybevágóságoknak a kompozícióját, hogy mit is adhatnak. A bizonyításokhoz fel fogjuk használni, hogy a forgatásokat és az eltolásokat tengelyes tükrözéssel tudjuk helyettesíteni. A bizonyításoknál, ha jól helyezzük el a tengelyes tükrözéseket, akkor gyorsan leolvashatóak az eredmények.

1.13 Állítás: Két forgatás kompozíciója: $f_{B,\beta} \circ f_{A,\alpha}$

- ha $\alpha + \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, akkor eltolás
- különben forgatás $\alpha + \beta$ szöggel

Bizonyítás:

Helyettesítsük $f_{B,\beta}$ és $f_{A,\alpha}$ forgatásokat tengelyes tükrözéssel az 1.12 alapján.

$f_{A,\alpha} = t_{g_2} \circ t_{g_1}$ és $f_{B,\beta} = t_{g_3} \circ t_{g_2}$, ahol $g_2 = \overline{AB}$ egyenes és

$g_1 := f_{A,-(\alpha/2)}(g_2)$ és $g_3 := f_{B,\beta/2}(g_2)$

Ekkor $f_{B,\beta} \circ f_{A,\alpha} = t_{g_3} \circ t_{g_2} \circ t_{g_2} \circ t_{g_1} = t_{g_3} \circ t_{g_1}$

Újra felhasználva az 1.12-t a következő adódik:

ha $\alpha + \beta = 2k\pi$ (lásd 3. ábra), akkor $g_1 \parallel g_3$, így

$f_{B,\beta} \circ f_{A,\alpha} = e_{\underline{v}}$, ahol $\underline{v} \parallel f_{A,(\frac{\pi-\alpha}{2})}(\overline{AB})$ és

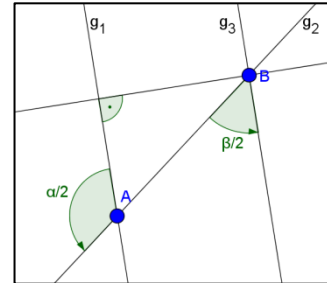
$$|\underline{v}| = \left| \sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \right| * |\overline{AB}| = \left| \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| * |\overline{AB}|$$

különben $g_3 \not\parallel g_1$ és 1.12 miatt $C := g_3 \cap g_1$ lesz a forgatás középpontja.

$$f_{B,(\beta/2)} \circ f_{A,(\alpha/2)}(g_1) = f_{B,(\beta/2)}(g_2) = g_3$$

Tehát g_3 egyenest a g_1 egyenes $(\alpha/2) + (\beta/2)$ szöggel való forgatásával kapjuk meg, ami megegyezik a két egyenes által bezárt irányított szöggel. Így 1.12-t felhasználva

$$t_{g_3} \circ t_{g_1} = f_{C,2*(\frac{\alpha+\beta}{2})} = f_{C,\alpha+\beta}$$



3. ábra

1.14 Állítás: Legyen adva $e_{\underline{v}}$ eltolás és $f_{A,\alpha}$ forgatás.

Ekkor $f_{A,\alpha} \circ e_{\underline{v}} = f_{C,\alpha}$

Bizonyítás: Felhasználva az 1.12-t legyen $f_{A,\alpha} = t_{g_3} \circ t_{g_2}$ és $e_{\underline{v}} = t_{g_2} \circ t_{g_1}$,

ahol $A \in g_2$ és $g_2 \perp \underline{v}$

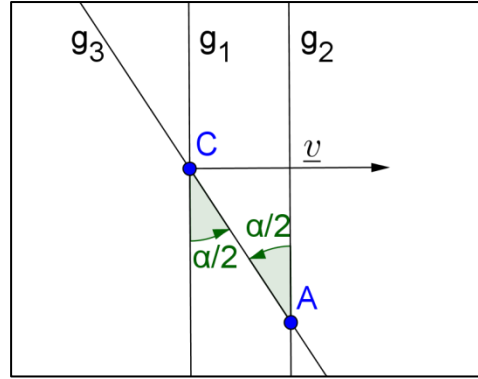
$$g_3 := f_{A,(\alpha/2)}(g_2)$$

$$g_1 := e_{-(1/2)*(\underline{v})}(g_2)$$

$$C := g_1 \cap g_3$$

Mivel $g_1 \parallel g_2$, ezért adódik, hogy

g_1 és g_3 által bezárt szög $\alpha/2$



4. ábra

1.12-t újra felhasználva a következőt kapjuk:

$$f_{A,\alpha} \circ e_{\underline{v}} = t_{g_3} \circ t_{g_2} \circ t_{g_2} \circ t_{g_1} = t_{g_3} \circ t_{g_1} = f_{C,\alpha}$$

■

Megjegyzés: $e_{\underline{v}} \circ f_{A,\alpha} = f_{D,\alpha}$ forgatás az 1.14-ben látott módszerekkel hasonlóan igazolható.

1.15 Állítás: Legyen adva $e_{\underline{v}}$ eltolás és t_g tengelyes tükrözés. Ekkor

ha $\underline{v} \perp g \Rightarrow e_{\underline{v}} \circ t_g = t_{g_1}$, ahol $g \parallel g_1$ és $g_1 := e_{\frac{1}{2}*(\underline{v})}(g)$

különben legyen $\underline{v} := \underline{v}_p + \underline{v}_m$, ahol $\underline{v}_p \parallel g$ és $\underline{v}_m \perp g$

akkor: $e_{\underline{v}} \circ t_g = t_{g_1, \underline{v}_p}$, ahol $g \parallel g_1$ és $g_1 := e_{\frac{1}{2}*(\underline{v}_m)}(g)$

Bizonyítás: Ha $\underline{v} \perp g$, akkor 1.12-t felhasználva

$$e_{\underline{v}} = t_{g_1} \circ t_g, \text{ ahol } g_1 := e_{(1/2)*\underline{v}}(g)$$

$$e_{\underline{v}} \circ t_g = t_{g_1} \circ t_g \circ t_g = t_{g_1}$$

Különben vegyük a $\underline{v} := \underline{v}_p + \underline{v}_m$ felbontást, ahol $\underline{v}_p \parallel g$ és $\underline{v}_m \perp g$.

Ekkor $g_1 := e_{(1/2)*\underline{v}_m}(g)$

Így az előző részt felhasználva $e_{\underline{v}_m} = t_{g_1} \circ t_g$ ezt kapjuk:

$$e_{\underline{v}} \circ t_g = e_{\underline{v}_p} \circ e_{\underline{v}_m} \circ t_g = e_{\underline{v}_p} \circ t_{g_1} \circ t_g \circ t_g = e_{\underline{v}_p} \circ t_{g_1} = t_{g_1, \underline{v}_p}$$

■

Megjegyzés: Az $t_g \circ e_{\underline{v}}$ kompozícióra az 1.15-ben látott módszerek alapján egyszerűen igazolható, hogy ha $\underline{v} \perp g \Rightarrow t_g \circ e_{\underline{v}} = t_{g_1}$, ahol $g_1 = e_{-(1/2)*\underline{v}}(g)$

különben legyen $\underline{v} = \underline{v}_p + \underline{v}_m$, ahol $\underline{v}_p \parallel g$ és $\underline{v}_m \perp g$.

Ekkor $g_1 = e_{-(1/2)*\underline{v}_m}(g)$ és $t_g \circ e_{\underline{v}} = t_{g_1, \underline{v}_p}$

1.16 Állítás: Legyen adva $e_{\underline{v}_1}$ eltolás és t_{g, \underline{v}_2} csúsztatva tükrözés. Ekkor

$e_{\underline{v}_1} \circ t_{g, \underline{v}_2} = t_{g_1}$, ha $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \perp g$ és $g_1 := e_{(1/2)*(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)}(g)$, különben

$e_{\underline{v}_1} \circ t_{g, \underline{v}_2} = t_{g_1, \underline{v}_p}$ és $g_1 := e_{(1/2)*(\underline{v}_m)}(g)$, ahol vegyük a következő felbontást:

$$(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = (\underline{v}_p + \underline{v}_m), \text{ ahol } \underline{v}_p \parallel g \text{ és } \underline{v}_m \perp g$$

Bizonyítás: $e_{\underline{v}_1} \circ t_{g, \underline{v}_2}$ átalakításokkal az 1.15 állításra vezethető vissza.

■

Megjegyzés: $t_{g, \underline{v}_2} \circ e_{\underline{v}_1}$ kompozíciót az 1.16-hoz hasonlóan vissza lehet vezetni az 1.15 állításra.

1.17 Állítás: Legyen adva $f_{A, \alpha}$ forgatás és t_g tengelyes tükrözés.

Ha $A \in g \Rightarrow f_{A, \alpha} \circ t_g = t_{g_2}$, ahol $g_2 = f_{A, \alpha/2}(g)$

Ha $A \notin g$, akkor $f_{A, \alpha} \circ t_g$ egy csúsztatva tükrözést ad.

Bizonyítás:

Ha $A \in g$, akkor legyen $g_2 := f_{A, \alpha/2}(g)$. Ekkor 1.12 miatt tudjuk, hogy $f_{A, \alpha} = t_{g_2} \circ t_g$.

Ezt behelyettesítve adódik: $f_{A, \alpha} \circ t_g = t_{g_2} \circ t_g \circ t_g = t_{g_2}$

Ha $A \notin g$, akkor megint az 1.12-t felhasználva:

$f_{A, \alpha} := t_{g_2} \circ t_{g_1}$ ahol $g_1 \parallel g$ és $g_2 := f_{A, \alpha/2}(g_1)$

$$f_{A, \alpha} \circ t_g = t_{g_2} \circ t_{g_1} \circ t_g$$

Mivel $g_1 \parallel g$, ezért $e_{\underline{v}_1} := t_{g_1} \circ t_g$

Ezt behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$f_{A,\alpha} \circ t_g = t_{g_2} \circ t_{g_1} \circ t_g = t_{g_2} \circ e_{\underline{v}_1}$$

Mivel $g_2 \nparallel g_1$, ezért \underline{v}_1 nem merőleges g_2 egyenesre, ezért $f_{A,\alpha} \circ t_g = t_{g_2} \circ e_{\underline{v}_1}$ 1.15 miatt csak csúsztatva tükrözés lehet.

■

Megjegyzés: Ha $A \in g$, akkor $t_g \circ f_{A,\alpha} = t_{g_2}$, ahol $g_2 = f_{A,-(\alpha/2)}(g)$ és ha $A \notin g$, akkor $f_{A,\alpha} \circ t_g$ egy csúsztatva tükrözés esete hasonlóan az 1.17-nél látott bizonyításánál látott módszerekkel vissza lehet vezetni.

1.18 Állítás: Forgatás és csúsztatva tükrözés kompozíciója

$f_{A,\alpha} \circ t_{g,\underline{v}}$ ha A távolsága g -től $\frac{1/2*|\underline{v}|}{|\tan(\alpha/2)|}$ vagy $A \in g$ és $\alpha = k\pi$ alakú, ahol $k \in \mathbb{Z}$, akkor tengelyes tükrözés, különben csúsztatva tükrözés.

Bizonyítás:

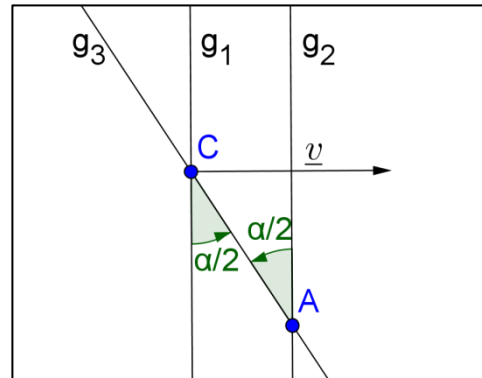
1.5 és 1.4 miatt tudjuk, hogy csak tengelyes tükrözés, illetve csúsztatva tükrözés lehet

$$f_{A,\alpha} \circ t_{g,\underline{v}} = f_{A,\alpha} \circ e_{\underline{v}} \circ t_g$$

1.14 állítást felhasználva tudjuk, hogy

$$f_{A,\alpha} \circ e_{\underline{v}} = f_{C,\alpha}$$

Az 1.17-ből tudjuk, hogy $f_{A,\alpha} \circ e_{\underline{v}} \circ t_g = f_{C,\alpha} \circ t_g$ akkor lesz tengelyes tükrözés, ha $C \in g$, különben csúsztatva tükrözés lesz. Tehát meg kell keresni, hogy hol van a C pont. Ehhez érdemes az 1.14-ben használt ábrát használni, amit a könnyebbség kedvéért ide újra beteszünk.



4. ábra

A csúsztatva tükrözés definíciójából (lásd 1.3) tudjuk, hogy $\underline{v} \parallel g$.

Ha $C \in g$, akkor A távolsága g -től $\frac{1/2*|\underline{v}|}{|\tan(\alpha/2)|}$ számmal lesz egyenlő. Ha $\alpha = k\pi$ alakú, ahol $k \in \mathbb{Z}$

akkor ebben az esetben $C \in g$ csak akkor lehet, ha $A \in g$ is teljesül, mert $\overline{AC} \parallel \underline{v}$, ami az ábrából könnyen leolvasható. Ezzel beláttuk, hogy milyen feltételek mellett lesz a $f_{A,\alpha} \circ t_{g,\underline{v}}$

kompozíció tengelyes tükrözés és amennyiben nem teljesül a feltételek valamelyike, akkor 1.5 és 1.4 miatt tudjuk, hogy csúsztatva tükrözés lesz. ■

Megjegyzés: $t_{g,\underline{v}} \circ f_{A,\alpha}$ esetét az 1.18-hoz hasonlóan lehet bizonyítani

1.19 Állítás: Tengelyes tükrözés és csúsztatva tükrözés kompozíciója:

$t_{g_1} \circ t_{g_2,\underline{v_1}} = e_{\underline{v_3}}$ ha $g_1 \parallel g_2$, különben forgatás

Bizonyítás:

Az 1.10-t és az 1.12-t felhasználva, ha $g_1 \parallel g_2$:

$$t_{g_1} \circ t_{g_2,\underline{v_1}} = t_{g_1} \circ t_{g_2} \circ e_{\underline{v_1}} = e_{\underline{v_2}} \circ e_{\underline{v_1}} = e_{\underline{v_3}}$$

különben 1.12-t és az 1.14-t felhasználva:

$$t_{g_1} \circ t_{g_2,\underline{v_1}} = t_{g_1} \circ t_{g_2} \circ e_{\underline{v_1}} = f_{A,\alpha} \circ e_{\underline{v_1}} = f_{B,\alpha}$$

1.20 Állítás: Két csúsztatva tükrözés kompozíciója:

Ha $g_1 \parallel g_2$, akkor eltolás, különben forgatás az eredménye.

Bizonyítás:

Ha $g_1 \parallel g_2$, akkor az 1.10-t és az 1.12-t felhasználva:

$$t_{g_1,\underline{v_1}} \circ t_{g_2,\underline{v_2}} = e_{\underline{v_1}} \circ t_{g_1} \circ t_{g_2} \circ e_{\underline{v_2}} = e_{\underline{v_1}} \circ e_{\underline{v_3}} \circ e_{\underline{v_2}} = e_{\underline{v_4}}$$

Ha $g_1 \not\parallel g_2$, akkor 1.12-t és az 1.14-t felhasználva:

$$t_{g_1,\underline{v_1}} \circ t_{g_2,\underline{v_2}} = e_{\underline{v_1}} \circ t_{g_1} \circ t_{g_2} \circ e_{\underline{v_2}} = e_{\underline{v_1}} \circ f_{A,\alpha} \circ e_{\underline{v_2}} = f_{C,\alpha}$$

A következő oldalon összefoglaltuk röviden az eddigi eredményeket az egybevágóságok kompozíciójáról. A kompozíciót úgy hajtom végre, hogy először az első sorban szereplő egybevágóságot, majd az első oszlopban szereplő egybevágóságot hajtom végre. ■

	eltolás: \underline{v}_1 vektorral	forgatás A pont körül α irányított szöggel	tengelyes tükrözés g -re	csúsztatva tükrözés t_{g,\underline{v}_1}
eltolás: \underline{v}_2 vektorral	eltolás $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ vektorral	forgatás α irányított szöggel	Ha $\underline{v}_2 \perp g$ akkor tengelyes tükrözés különben csúsztatva tükrözés	Ha $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \perp g$, akkor tengelyes tükrözés különben csúsztatva tükrözés
forgatás B pont körül β irányított szöggel	forgatás β irányított szöggel	ha $\alpha + \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ akkor eltolás, különben forgatás $\alpha + \beta$ szöggel	Ha $B \in g$, akkor tengelyes tükrözés különben csúsztatva tükrözés	tengelyes tükrözés, ha B távolsága g -től $\frac{1/2 * \underline{v}_1 }{ \tan \frac{\beta}{2} }$ vagy $B \in g$ és $\beta = k\pi$ alakú különben csúsztatva tükrözés.
tengelyes tükrözés h -ra	Ha $\underline{v}_1 \perp h$ akkor tengelyes tükrözés különben csúsztatva tükrözés	Ha $A \in h$, akkor tengelyes tükrözés különben csúsztatva tükrözés	Ha $g \parallel h$, akkor eltolás, különben forgatás	Ha $g \parallel h$, akkor eltolás különben forgatás
csúsztatva tükrözés t_{h,\underline{v}_2}	Ha $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \perp h$, akkor tengelyes tükrözés különben csúsztatva tükrözés	tengelyes tükrözés, ha A távolsága h -től $\frac{1/2 * \underline{v}_2 }{ \tan \frac{\alpha}{2} }$ vagy $A \in h$ és $\alpha = k\pi$ alakú különben csúsztatva tükrözés.	Ha $g \parallel h$, akkor eltolás, különben forgatás	Ha $g \parallel h$, akkor eltolás különben forgatás

2. A parkettázás alapozása

Az előző fejezet alapozása után, már készen van az alap eszköztárunk, mellyel elkezdhetjük vizsgálni, hogy a parkettázások szimmetria csoportjainak milyen alaptulajdonságai vannak. Ebben a fejezetben az eszköztárunkkal azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen következményekkel jár a szimmetriacsoport elemeire, ha tartalmaz valamilyen egybevágóságot. A fejezet feldolgozásában a Szenthe [SZ] jegyzet ide vonatkozó tematikáját követjük, de néhány helyen kiegészítjük azt, illetve más bizonyítást használunk, mint amit ott meg lehet találni.

2.1 Definíció: Legyen adva az euklideszi sík egy $H \subset \mathbb{E}^2$ egy részhalmaza. Ekkor egy $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ egybevágóságot a H halmaz *szimmetriájának* nevezünk, ha

$$\varphi(H) = H$$

2.2 Állítás: A H halmaz szimmetriái egy csoportot alkotnak, amit a halmaz szimmetriacsoportjának nevezünk. Jelölje ezt a csoportot $\mathcal{S}(H)$. A H halmaz szimmetriacsoportja részcsoportja az egybevágóságoknak.

$$\mathcal{S}(H) \subset \mathfrak{T}(\mathbb{E}^2)$$

Bizonyítás: Mivel $\mathcal{S}(H) \subset \mathfrak{T}(\mathbb{E}^2)$, miatt következik, hogy valódi részhalmaz.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy $\mathcal{S}(H)$ részcsoport, az kell, hogy $\mathcal{S}(H)$ zárt legyen a kompozícióra és az inverzképzésre.

Legyenek adva $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(H)$ egybevágóságok. Ekkor

$$\varphi \circ \psi(H) = \varphi(\psi(H)) = \varphi(H) = H$$

Tehát zárt a kompozícióra.

Mivel φ egybevágóság, ezért van inverze φ^{-1} , így

$$H = \varphi^{-1} \circ \varphi(H) = \varphi^{-1}(H)$$

Így beláttuk, hogy $\mathcal{S}(H)$ tényleg részcsoport. ■

2.3 Definíció: Azt mondjuk, hogy egy $P \in \mathbb{E}^2$ pont egy H halmaznak *szimmetriapontja*, ha a P pontra való tükrözés eleme a H halmaz szimmetriacsoportjának, azaz $t_P \in \mathcal{S}(H)$

2.4 Definíció: Azt mondjuk, hogy egy $g \subset \mathbb{E}^2$ egyenesről egy H halmaznak *szimmetriatengelye*, ha a g egyenesre való tükrözés eleme a H halmaz szimmetriacsoportjának, azaz $t_g \in \mathcal{S}(H)$

2.5 Definíció: Az euklideszi sík egy $W \subset \mathbb{E}^2$ részhalmazának $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportjában az eltolások egy $\mathcal{T}(W) < \mathcal{S}(W)$ részcsoporthat alkotnak.

Ha $\mathcal{T}(W)$ eltolás csoportot két lineárisan független eleme generál

$$\mathcal{T}(W) = \langle T', T'' \rangle, \text{ ahol } T', T'' \in \mathcal{T}(W)$$

akkor $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportot **tapétacsoportnak** és W halmazt **tapétának** nevezzük.

2.6 Definíció: Legyen adott egy W tapéta, $\mathcal{T}(W) = \langle T', T'' \rangle$ és legyen $x \in \mathbb{E}^2$ a sík egy tetszőleges pontja. Akkor az x által meghatározott **eltolási rácson** a

$$\mathcal{T}(x) = \{T(x) | T \in \mathcal{T}(W)\} = \{(T'')^j \circ (T')^i(x) | i, j \in \mathbb{Z}\}$$

halmazt értjük. Ez pontosan akkor W része, ha $x \in W$ teljesül.

2.7 Definíció: Az $\mathcal{T}(W) = \langle T', T'' \rangle$ eltolás csoport és $x \in \mathbb{E}^2$ által meghatározott eltolási rácsnak a következő feltételt teljesítő pontjai a megadott sorrendben egy paralelogrammát határoznak meg, amit az eltolási rács egy **egység cellájának** nevezünk.

$$x_{i,j} = (T'')^j \circ (T')^i(x)$$

$$x_{i,j+1} = (T'')^{j+1} \circ (T')^i(x)$$

$$x_{i+1,j+1} = (T'')^{j+1} \circ (T')^{i+1}(x)$$

$$x_{i+1,j} = (T'')^j \circ (T')^{i+1}(x)$$

2.8 Definíció: Az **eltolási rácsot rombikusnak** mondjuk, ha $\exists T', T''$, hogy $\mathcal{T}(W) = \langle T', T'' \rangle$ és az eltolás csoport által meghatározott egység cella rombusz. Ekkor a W tapétát **is rombikusnak** nevezzük.

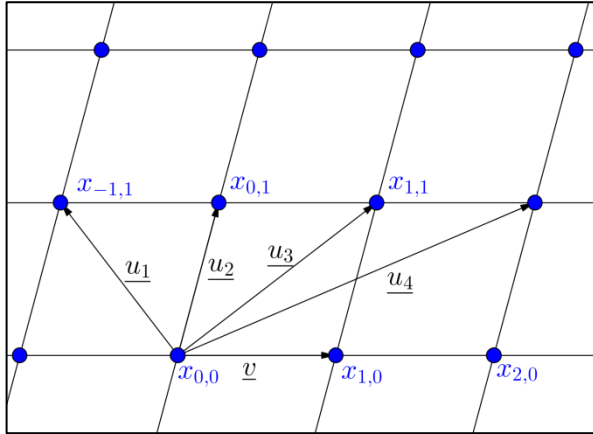
2.9 Definíció: Az **eltolási rácsot derékszögűnek** mondjuk, ha $\exists T', T''$, hogy $\mathcal{T}(W) = \langle T', T'' \rangle$ és az eltolás csoport által meghatározott egység cella téglalap. Ekkor a W tapétát **is derékszögűnek** nevezzük.

Megjegyzés: Ha egy W tapéta rombikus, attól még lehet olyan T', T'' eltolásokat találni, amik generálják az eltolás csoportot és az egységcellája nem rombusz. Ugyanez igaz a derékszögű tapétákra is, hogy lehet találni olyan eltolásokat, amik generálják az eltolás csoportot, de az egységcella nem téglalap lesz. Továbbá létezik olyan W tapéta is, amely derékszögű és rombikus is.

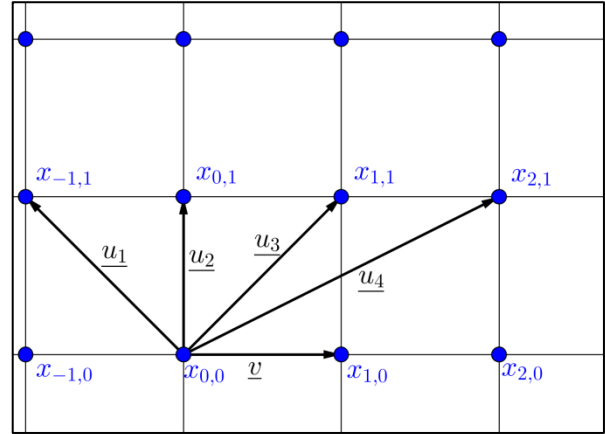
A következő oldalon az 5. és 6. ábrán az egységcellák csúcsait a $\mathcal{T}(W) = \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle$ alapján lett beszámozva 2.7 alapján. Az 5. ábrán egy rombikus tapétát látunk, ahol $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{1,1}, x_{0,1}$ pontok egy rombuszt alkotnak. Ettől még az 5. ábrán találunk más jó lineárisan független

vektorokat, amik generálják $\mathcal{T}(W)$ csoportot. Például: $\langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle, \langle \underline{v}, \underline{u}_3 \rangle, \langle \underline{v}, \underline{u}_4 \rangle$

A 6. ábrán látható tapétán hasonló módon lehet találni jó eltolásokat, mint az 5. ábrán. A 6. ábrán található tapéta derékszögű és rombikus is, mert $\underline{v}, \underline{u}_2$ által meghatározott egység cella négyzet lesz.



5. ábra



6. ábra

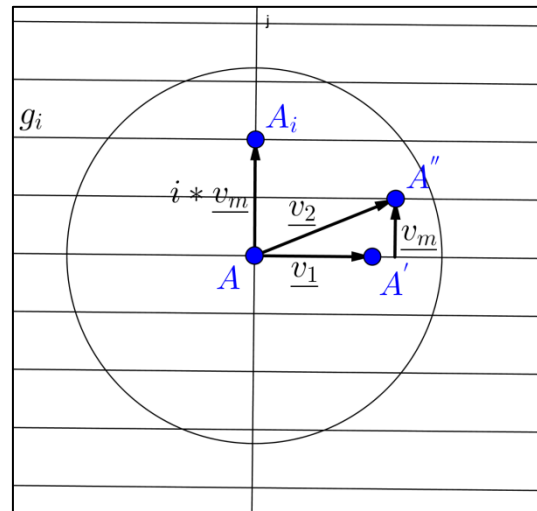
2.10 Állítás: Egy W tapéta $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportjában az eltolások hosszának mindig van egy μ pozitív minimuma.

Bizonyítás: Legyen adva $\mathcal{T}(W) = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$ és $\mathcal{T}(A)$ eltolási rács, ahol $A \in \mathbb{E}^2$ tetszőleges pont. Ekkor $A' := e_{\underline{v}_1}(A)$ és $A'' := e_{\underline{v}_2}(A)$.

Ekkor legyen H halmaz a $\mathcal{T}(A)$ eltolási rács és az A középpontú r sugarú zárt körlemez pontjainak metszete, ahol $|\underline{v}_1| \leq r \leq 2 * |\underline{v}_1|$.

Jelölje az r sugarú zárt körlemez pontjait: $B(A, r)$. Így $H := \mathcal{T}(A) \cap B(A, r)$

Mivel \underline{v}_1 és \underline{v}_2 függetlenek, ezért \underline{v}_2 felbontható \underline{v}_1 vektorra merőleges és párhuzamos komponensre. Tehát $\underline{v}_2 = \underline{v}_p + \underline{v}_m$, ahol \underline{v}_p a párhuzamos, $\underline{v}_m \neq \underline{0}$ a merőleges komponens.



7. ábra

$\mathcal{T}(A)$ eltolási rácsnak a pontjai az $\overline{AA'}$ -vel párhuzamos egyeneseken lesznek. Jelölje ezeket az egyeneseket g_i , ahol tudjuk, hogy $A_i \in g_i$ és $A_i = (e_{\underline{v}_m})^i(A)$, ahol $i \in \mathbb{Z}$.

Mivel r egy véges szám, ezért az előbb meghatározott g_i egyenesekből véges számú fog beleesni a $B(A, r)$ körlemezbe. Továbbá r választása miatt a $g_i \cap H$ halmazban maximum 5

pont szerepel. Ha veszem az összes $g_i \cap H$ halmazt, akkor megkapom a $\mathcal{T}(A) \cap B(A, r)$ halmazt, ami véges elemszámú lesz.

Továbbá r -et úgy választottuk, hogy $e_{\underline{v}_1}(A)$ benne legyen a H halmazban, tehát biztos lesz benne egy eltolás. Mivel H véges elemszámú, ezért A -ból csak véges számú vektor mutat H elemeibe, tehát kell lenni köztük egy minimális hosszúnak. ■

2.11 Állítás: Ha egy W tapéta $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja tartalmaz egy g egyenesre való t_g tükrözést, akkor a következő két eset lehetséges:

- A W rombikus és a g egyenes párhuzamos egy rombusz egységcellájának egyik átlójával.
- A W derékszögű és a g egyenes párhuzamos egy téglalap egységcellájának egyik oldalával.

Bizonyítás:

Mind két esetben a következővel kezdjük:

Legyen adva a g egyenes, ahol $t_g \in \mathcal{S}(W)$ és egy $A \in g$ pont és a hozzá tartozó $\mathcal{T}(A)$ eltolási rács. Ekkor két eset lehetséges.

Legyen C az $\mathcal{T}(A)$ eltolási rácsban az egyik A -hoz legközelebbi A -tól különböző pont.

Az első eset, ha $g \nparallel \overline{AC}$ és nem is merőleges \overline{AC} egyenesre.

Tudjuk, hogy $e_{\overline{AC}} \in \mathcal{T}(W)$. Legyen $C' = t_g(C)$. Mivel $g \nparallel \overline{AC}$ és nem is merőleges \overline{AC} egyenesre, ezért \overline{AC} és $\overline{AC'}$ lineárisan független vektorok lesznek.

$$t_g \circ e_{\overline{AC}} \circ t_g^{-1} \in \mathcal{S}(W)$$

Mivel $t_{g_1, \underline{v}} = e_{\overline{AC}} \circ t_g^{-1}$ az 1.15 miatt csúsztatva tükrözés, ahol a tengely $g_1 \parallel g$ párhuzamos.

Az 1.19-t felhasználva kapjuk, hogy $t_g \circ t_{g_1, \underline{v}}$ egy eltolás lesz. Továbbá A képe:

$$t_g \circ e_{\overline{AC}} \circ t_g^{-1}(A) = t_g(C) = C'$$

Amiből adódik, hogy $t_g \circ e_{\overline{AC}} \circ t_g^{-1} = e_{\overline{AC'}}$ $\in \mathcal{T}(W)$

Az $|AC| = |AC'|$ és $C \neq C'$ miatt $\mathcal{T}(W)$ eltolási csoportot az $\langle \overline{AC}, \overline{AC'} \rangle$ generálják, amivel megkaptuk a $\mathcal{T}(A)$ rombikus rácsot. Ha ezeken kívül lenne még pont a rombikus rácsban, akkor $|AC|$ minimalitása miatt ellentmondásra jutnánk.

A második eset, mikor g párhuzamos \overline{AC} -vel, vagy merőleges rá.

Legyen $h \perp \overline{AC}$, f az AC szakaszfelező merőleges egyenesese és $f' = t_h(f)$

Keressük meg a $D \in \mathcal{T}(A) \setminus \langle \overline{AC} \rangle(A)$ pontot, ami A -tól minimális távolságra van.

A D pont biztos az f és f' által meghatározott sávban van, mert ha nem ott lenne, akkor $D' = e_{\overline{AC}}(D)$ vagy $D'' = e_{\overline{CA}}(D)$ közül az egyik közelebb lenne az A ponthoz.

A D pont helyzetére csak 3 lehetőség lehet a sávban. $D \in f$ vagy $D \in f'$ vagy $D \in h$, mert különben ellentmondásra jutnánk \overline{AC} minimalitása miatt a következő gondolatmenettel:

Legyen $D' = t_g(D)$. A korábbiakhoz hasonlóan:

$$t_g \circ e_{\overline{AD}} \circ t_g^{-1} = e_{\overline{AD'}} \in \mathcal{T}(W)$$

Ekkor g helyzete szerint két eset lehetséges.

1. eset ha $g \parallel \overline{AC}$, akkor $e_{\overline{AD}} \circ e_{\overline{AD'}}$ eltolás hossza rövidebb lenne, mint $|AC|$, ami ellentmondás.

2. eset ha $g \perp \overline{AC}$, akkor $e_{\overline{AD}} \circ e_{\overline{D'A}}$ eltolás hossza rövidebb lenne, mint $|AC|$, ami megint ellentmondás.

Amennyiben $D \in f$ vagy $D \in f'$, akkor $|AD| = |AD'|$ miatt \overline{AD} és $\overline{AD'}$ egy rombikus eltolási rácsot generál.

Amennyiben $D \in h$, akkor $\overline{AD} \perp \overline{AC}$ így ez a két vektor egy derékszögű eltolási rácsot generál.

A rombikus és a derékszögű eltolási rácsnál is a teljes eltolási rácsot megkapjuk, mert ha lenne még valahol egy pont az eltolási rácsban, akkor az \overline{AC} vagy \overline{AD} minimalitásának mondana ellen.

■

2.12 Lemma: Ha egy W tapéta $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja tartalmaz egy csúsztatva tükrözést, ami egy eltolási rácsot önmagára képez, akkor tartalmaz tengelyes tükrözést is.

Bizonyítás:

Legyen adva egy $\mathcal{T}(A)$ eltolási rács. Ekkor ha $P = t_{g,v}(A) \in \mathcal{T}(A)$, akkor $e_{\overline{PA}} \in \mathcal{T}(W)$. A következő egybevágóság A pontot fixen hagyja:

$$e_{\overline{PA}} \circ t_{g,\underline{v}}(A) = e_{\overline{PA}}(P) = A$$

Az 1.4 és 1.5 miatt tudjuk, hogy ez egy irányításváltó egybevágóság, míg 1.9-t felhasználva kiderül, hogy a korábbi egybevágóság egy tengelyes tükrözés. ■

2.13 Állítás: Ha egy W tapéta $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja tartalmaz egy $t_{g,\underline{v}}$ csúsztatva tükrözést, akkor $e_{2*\underline{v}} \in \mathcal{T}(W)$

Bizonyítás: A következő átalakításból egyszerűen látszódik:

$$t_{g,\underline{v}} \circ t_{g,\underline{v}} = e_{\underline{v}} \circ t_g \circ t_g \circ e_{\underline{v}} = e_{\underline{v}} \circ e_{\underline{v}} = e_{2*\underline{v}}$$

2.14 Állítás: Ha egy W tapéta $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja tartalmaz egy $t_{g,\underline{v}}$ csúsztatva tükrözést, akkor W rombikus vagy derékszögű tapéta. ■

- Ha W rombikus, akkor a g egyenes párhuzamos egy rombusz egységcellájának egyik átlójával.
- Ha W derékszögű, akkor a g egyenes párhuzamos egy téglalap egységcellájának egyik oldalával.

Bizonyítás: 1.3 miatt $t_{g,\underline{v}} = e_{\underline{v}} \circ t_g$

Innentől kezdve a bizonyításban ugyanúgy járunk el, mint 2.11 bizonyításánál. Valójában csak egy helyen akadunk el, ha a bizonyítást szó szerint követjük:

$$t_g \circ e_{\overline{AC}} \circ t_g^{-1} \in \mathcal{S}(W)$$

Ehelyett a következőt tudjuk felírni:

$$t_{g,\underline{v}} \circ e_{\overline{AC}} \circ (t_{g,\underline{v}})^{-1} = e_{\underline{v}} \circ t_g \circ e_{\overline{AC}} \circ t_g^{-1} \circ e_{\underline{v}}^{-1} \in \mathcal{S}(W)$$

2.11 bizonyításánál láttuk, hogy $t_g \circ e_{\overline{AC}} \circ t_g^{-1} = e_{\overline{AC'}}$, amit ha behelyettesítünk, akkor 1.10-t felhasználva a következőt kapjuk:

$$e_{\underline{v}} \circ t_g \circ e_{\overline{AC}} \circ t_g^{-1} \circ e_{\underline{v}}^{-1} = e_{\underline{v}} \circ e_{\overline{AC'}} \circ e_{\underline{v}}^{-1} = e_{\overline{AC'}} \in \mathcal{T}(W)$$

Innen kezdve hasonlóan 2.11 bizonyításánál látottakkal lehet folytatni.

Ahol még el lehet akadni, az a következő:

$$t_g \circ e_{\overline{AD}} \circ t_g^{-1} = e_{\overline{AD'}} \in \mathcal{T}(W)$$

De ezt is $t_{g,\underline{v}} \circ e_{\overline{AD}} \circ (t_{g,\underline{v}})^{-1}$ egybevágósággal a korábbihoz hasonló módon meg lehet oldani a problémát.

Ezzel a 2.14 állítás bizonyítását vissza tudtuk vezetni 2.11 bizonyítására. ■

2.15 Állítás: Ha egy $g \subset H$ egyenes a $H \subset \mathbb{E}^2$ halmaznak szimmetriatengelye és φ a H halmaz egy szimmetriája, akkor $g' := \varphi(g)$ is szimmetriatengelye a H halmaznak.

Bizonyítás: Vegyük a következő egybevágóságot:

$$\varphi \circ t_g \circ \varphi^{-1}$$

Erről az egybevágóságról tudjuk 1.5 miatt, hogy irányításváltó, mert φ^{-1} és φ azonos irányítású és t_g tengelyes tükrözés irányításváltó egybevágóság. Tudjuk továbbá, hogy a $P' \in g'$ az egybevágóság fix pontja, ahol $P' := \varphi(P)$

$$\varphi \circ t_P \circ \varphi^{-1}(P') = \varphi \circ t_P(P) = \varphi(P) = P'$$

Tehát $\varphi \circ t_g \circ \varphi^{-1}$ a g' egyenesnek a pontjait pontonként fixen hagyja, tehát ez az egybevágóság a $t_{g'}$ tengelyes tükrözéssel lesz egyenlő, ami azt jelenti, hogy g' a H halmaz szimmetriatengelye lesz. ■

2.16 Definíció: Legyen G a sík egybevágóságainak egy csoportja. Akkor mondjuk, hogy a sík egy P pontja a G csoportnak n -centruma, ha a csoport elemei közül a P pont körüli elforgatások, egy C_n ciklikus csoportot alkotnak, ahol $n > 1$.

Ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{E}^2$ a sík egy halmaza és a $G := \mathcal{S}(H)$ csoportnak P egy n -centruma, akkor azt mondjuk, hogy a P pont a H halmaz n -centruma.

2.17 Lemma: Ha P egy n -centruma egy G csoportnak és $Q = \psi(P)$ teljesül valamely $\psi \in G$ transzformációval, akkor a Q is n -centruma a G csoportnak.

Bizonyítás:

Legyen $\varphi \in G$ a P pont körüli forgatások alkotta ciklikus csoport generáló eleme. Ekkor

$$\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}(Q) = \psi \circ \varphi(P) = \psi(P) = Q$$

irányítástartó egybevágóságnak Q fixpontja lesz. 1.4, 1.5 és 1.9 állításokat felhasználva $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ egybevágóság pont a Q pont körüli forgatást ad.

$$(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})^n = \psi \circ \varphi^n \circ \psi^{-1} = I$$

és

$$(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})^k = \psi \circ \varphi^k \circ \psi^{-1} \neq I, \text{ ha } 0 < k < n$$

Ha mégis igaz lenne az előző egyenlőség, akkor a következő átalakításokkal ellentmondásra jutnánk.

$$\psi \circ \varphi^k \circ \psi^{-1} = I$$

Jobbról beszorozva ψ -vel

$$\psi \circ \varphi^k = \psi$$

Balról beszorozva ψ^{-1} -gyel

$$\varphi^k = I$$

Tehát a Q pont körüli forgatások egy m -centrumot alkotnak, ahol $n \leq m$ teljesül.

Ha $n < m$ teljesülne, akkor $P = \psi^{-1}(Q)$ egyenlőségre elismételve az előzőeket ellentmondásra jutnánk, így $n = m$ egyenlőségnek kell teljesülnie, ami azt jelenti, hogy Q is egy n -centrum lesz.

■

Következmény: Ha egy $P \in H$ pont a $H \subset \mathbb{E}^2$ halmaznak szimmetriapontja, akkor 2.16 alapján P pont a H halmaz egy 2-centruma. Ha φ a H halmaz egy szimmetriája, akkor 2.17 alapján $P' := \varphi(P)$ is szimmetriapontja a H halmaznak.

2.18 Állítás: Ha egy W tapéta $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportjában létezik $f_{P,\alpha} \in \mathcal{S}(W)$ forgatás és egy $Q \neq P$ pont körüli $f_{Q,\alpha} \in \mathcal{S}(W)$ forgatás, ahol $0 < \alpha < \pi$, akkor $\mu \leq 2d(P, Q)$ érvényes, ahol μ a csoportban levő eltolások hosszának minimuma.

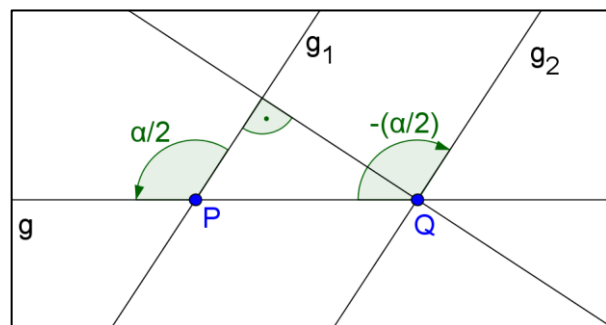
Bizonyítás:

1.13 miatt tudjuk, hogy $f_{P,\alpha} \circ f_{Q,\beta}$ akkor eltolás, ha $\alpha + \beta = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$

Mivel $f_{P,\alpha} \in \mathcal{S}(W)$ és $f_{Q,\alpha} \in \mathcal{S}(W)$, így $f_{Q,-\alpha} \in \mathcal{S}(W)$

Figyeljük meg a következő kompozíciót:

$$f_{P,\alpha} \circ f_{Q,-\alpha}$$



8. ábra

Ez biztosan egy eltolás lesz, mivel megfelel az 1.13-ban írtaknak.

Legyen $g := \overline{PQ}$ egyenes. Az 1.13-t bizonyításában látottakat felhasználva:

$$t_g \circ t_{g_1} := f_{P,\alpha}, \text{ ahol } g_1 = f_{P,-(\alpha/2)}(g)$$

$$t_{g_2} \circ t_g := f_{Q,-\alpha}, \text{ ahol } g_2 = f_{Q,-(\alpha/2)}(g)$$

$$\text{Ekkor } f_{Q,\alpha} \circ f_{P,\alpha} = t_{g_2} \circ t_g \circ t_g \circ t_{g_1} = t_{g_2} \circ t_{g_1}$$

1.12 felhasználásával $g_1 \parallel g_2$ miatt $t_{g_2} \circ t_{g_1}$ egy eltolás lesz.

Ezzel a kompozícióval 2.10-ben említett μ számra kapunk egy felső becslést a háromszög egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\mu \leq 2d(g_1, g_2) \leq 2d(P, Q)$$

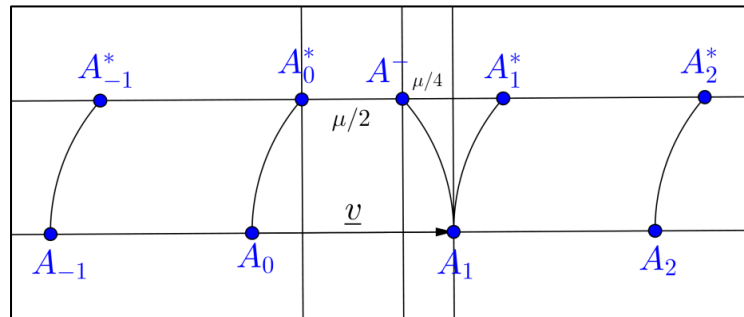
2.19 Tétel: A krisztallográfiai korlát. Ha egy W tapéta $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportjának létezik egy n -centruma, akkor $n = 2, 3, 4, 6$ lehetséges csak.

Bizonyítás:

Legyen adva A pont a W tapétának n -centruma és $e_{\underline{v}} \in \mathcal{T}(W) < \mathcal{S}(W)$, ahol \underline{v} minimális hosszúságú, azaz $|\underline{v}| = \mu$. A bizonyításhoz a 2.18 állítást és a 2.17 lemmát fogjuk felhasználni. Ehhez segítségül készítsük el a következő ábrát:

Tekintsük az $A_k := e_{k*(\underline{v})}(A)$ pontokat, ahol $k \in \mathbb{Z}$ és ezeket elforgatjuk.

$A_k^* := f_{A_{k+1},-\alpha}(A_k)$, akkor ezek egy \underline{v} -vel párhuzamos egyenesen lesznek és egymástól μ távol. Ha most egy pontot ellentétes irányba



9. ábra

forgatunk el $A^- := f_{A,\alpha}(A_1)$, akkor ez valakitől $\mu/2$ -nél kisebb távolságra lesz, hacsak nem épp felező pont lesz, vagy valakivel a A_k^* pontok közül egybeesik, lásd 9. ábra. Egyszerű számolásokkal belátható, hogy amikor egybeesik a két pont, akkor ezek csak 60, 90 fok többszöröseinél történhetnek meg, azaz a szimmetriacsoportban 2, 3, 4, 6 centrum lehet csak.

Amikor meg épp felezőpont, akkor egyszerű számolás alapján látható, hogy az α szög a következő egyenlőségek valamelyike igaz:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \text{ vagy } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

amire belátható, hogy nem lesz n -centrumhoz tartozó forgatási szög. ■

2.20 Állítás: Ha egy W tapéta $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportjának létezik 4-centruma, akkor nem létezik sem 3-centruma, sem 6-centruma.

Bizonyítás: Ha van 4-centruma, akkor létezik $f_{A,\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{S}(W)$ forgatás.

Ha van 3-centruma, akkor létezik $f_{B,\frac{2\pi}{3}} \in \mathcal{S}(W)$ forgatás.

Ha van 6-centruma, akkor létezik $f_{C,\frac{\pi}{3}} \in \mathcal{S}(W)$ forgatás.

Az 1.13-t felhasználva:

$$f_{A,\frac{\pi}{2}} \circ f_{B,\frac{2\pi}{3}} = f_{D,\frac{7\pi}{6}}$$

$$f_{A,\frac{\pi}{2}} \circ f_{B,\frac{\pi}{3}} = f_{E,\frac{5\pi}{6}}$$

De ezek az 2.19 miatt ellentmondást adnak, tehát valóban nem lehet a 4-centrum mellett 3-centrum vagy 6-centrum.

2.21 Tétel: Legyen $W \subset \mathbb{E}^2$ tapéta és $C \in \mathbb{E}^2$ a $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportnak egy 6-centruma. Ha $M \in \mathbb{E}^2$ pont a C ponthoz egyik legközelebbi szimmetriacentrum $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportban, akkor M egy 2-centrum.

A C pont egy olyan szabályos hatszögnek a középpontja, melynek egyik pontja M , oldalfelezőpontjai $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportnak a 2-centrumai és a hatszög csúcsai $\mathcal{S}(W)$ 3-centrumai.

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{S}(W)$ csoportban a C -hez egyik legközelebb elhelyezkedő szimmetriacentrum M . Ilyen biztos van 2.18 miatt.

Ekkor 2.19 miatt M csak 2, 3, 4 vagy 6 centrum lehet. Az 2.20 miatt M nem lehet 4-centrum. Tegyük fel, hogy M 3-centrum. A következő egybevágóság által definiált E pont (1.13-at használva)

$$f_{M,\frac{2\pi}{3}} \circ f_{C,\frac{\pi}{3}} = f_{E,\pi}$$

egy C -hez közelebbi n -centrumot hozna létre, ami ellentmondás, így M nem lehet 3-centrum.

Ha M 6-centrum, akkor az előbbi egybevágóság ugyanúgy létrehozná a C -hez közelebb eső E pontot, ami egy n -centrum lenne.

Tehát M csak 2 centrum lehet.

Az 1.13-t felhasználva: $f_{C,-\frac{\pi}{3}} \circ f_{M,\pi} = f_{D,\frac{2\pi}{3}}$

Az előbbi egybevágóság által definiált D pont az $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportnak egy 3-centruma lesz.

Az állításban szereplő szabályos hatszög csúcsait pedig a következőből kapjuk:

$$\left(f_{C, \frac{\pi}{3}}\right)^i(D) = D_i, \text{ ahol } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Itt D_i 2.17 lemma alapján 3-centrum lesz.

A 2-centrumokat hasonlóképp kapjuk a következőből:

$$\left(f_{C, \frac{\pi}{3}}\right)^i(M) = M_i, \text{ ahol } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

■

2.22 Tétel: Ha egy $W \subset \mathbb{E}^2$ tapéta $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportjának nincs 6-centruma, de van 3-centruma, akkor csak 3-centruma van. Ha $C \in \mathbb{E}^2$ a $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportnak egy 3-centruma és $M \in \mathbb{E}^2$ pont a C ponthoz egyik legközelebb levő n -centrum, akkor a C pont egy olyan szabályos hatszögnek a középpontja, melynek egyik pontja M és a hatszög csúcsai $\mathcal{S}(W)$ 3-centrumai.

Bizonyítás: Az 2.20 tétel miatt 3-centrum és 4-centrum nem lehet egyszerre megtalálható egy tapéta szimmetriacsoportjában.

Legyen C az $\mathcal{S}(W)$ egy 3-centruma. Ha lenne egy D pont, ami $\mathcal{S}(W)$ 2-centruma, akkor

$$f_{C, -\frac{2\pi}{3}} \circ f_{D, \pi} = f_{E, \frac{\pi}{3}}$$

által definiált E pont egy 6-centrum lenne, de ezt a tétel feltételei kizárták.

Ebből adódik, hogy csak 3-centrum lehetséges.

Legyen a C -hez egyik legközelebb eső 3-centrum M .

Ekkor $f_{C, \frac{2\pi}{3}} \circ f_{M, \frac{2\pi}{3}} = f_{N, \frac{4\pi}{3}}$ által meghatározott N pont ugyancsak egy 3-centrum lesz.

A hatszög csúcsait $\left(f_{C, \frac{2\pi}{3}}\right)^i(M)$ és $\left(f_{C, \frac{2\pi}{3}}\right)^i(N)$ pontok adják, ahol $i = 1, 2, 3$

■

2.23 Tétel: Legyen $W \subset \mathbb{E}^2$ tapéta és $C \in \mathbb{E}^2$ a $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportnak egy 4-centruma. Ekkor ha $M \in \mathbb{E}^2$ a szimmetriacsoport C ponthoz egyik legközelebbi n -centruma egy 2-centrum lesz és C egy olyan négyzet középpontja, melynek egyik pontja M és ahol az oldalfelezőpontok a szimmetriacsoport 2-centrumai és a csúcsai a szimmetriacsoport 4-centrumai.

Bizonyítás:

Legyen a szimmetriacsoportban a C -hez az egyik legközelebbi n -centrum M .

Ha M 4-centrum, akkor $f_{C, \frac{\pi}{2}} \circ f_{M, \frac{\pi}{2}} = f_{E, \pi}$ által meghatározott E pont egy közelebbi n -centrum lenne.

Így adódik 2.20 miatt, hogy M 2-centrum lesz.

Az $f_{C, -\frac{\pi}{2}} \circ f_{M, \pi} = f_{D, \frac{\pi}{2}}$ által meghatározott D pont a szimmetriacsoport egy 4-centruma.

Az $(f_{C, \frac{\pi}{2}})^i(D)$ és $(f_{C, \frac{\pi}{2}})^i(M)$ adják meg a tételben szereplő négyzetet, ahol $i = 1, 2, 3, 4$

■

A 2.21, 2.22 és 2.23 tételeknél látott alakzatokat ha a csúcsok körül elforgatjuk, akkor tudjuk, hogy az elforgatottak is hasonló alakzatok és így egybevágó alakzatokkal hézagmentesen ki tudjuk tölteni a síkot. Más centrum nem lesz, mert ha lenne, akkor azt forgatásokkal (ahogyan az eredeti alakzatokat elvittük) vissza lehetne vinni az eredeti alakzatba és ott kapnánk egy új centrumot. Ekkor komponálással könnyen adódna, hogy az eredeti ponthoz közelebbi pontot tudnánk kapni.

3. A parketták osztályozása

Az előző két fejezet eszköztárával felszerelve már nekiállhatunk a parketták osztályozásának. Először is azt kell tisztáznunk, hogy mit tekintünk két külön osztálynak, tehát két parkettázás mi alapján kerül bele egyik vagy másik osztályba.

3.1 Definíció: Két parketta azonos osztályú, ha szimmetriacsoportjaik megegyeznek.

A krisztallográfiai korlát egy hatalmas segítség abban, hogy elinduljunk az osztályozásban. Tehát először érdemes végigmenni, hogy milyen n -centrumok vannak benne és utána megvizsgálni, hogy a többi egybevágóságot ez miként befolyásolja.

Elméletben szépen hangzik, hogy van 17 osztálya a parkettázásoknak, de ahhoz, hogy nem csak elméletben léteznek, ezért néhányra fogok mutatni egy-egy példát és megmutatom, hogy más osztály nem létezik.

A következő oldalon egy táblázatban összefoglalom, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkeznek ezek az osztályok. A táblázatban az n -centrumokra vonatkozó információt mindig az adott oszlop első sorában tudjuk leolvasni. A táblázat egyes celláinak bal felső részében az adott osztály jelölését fogjuk látni.

A tapétacsoportok osztályozása

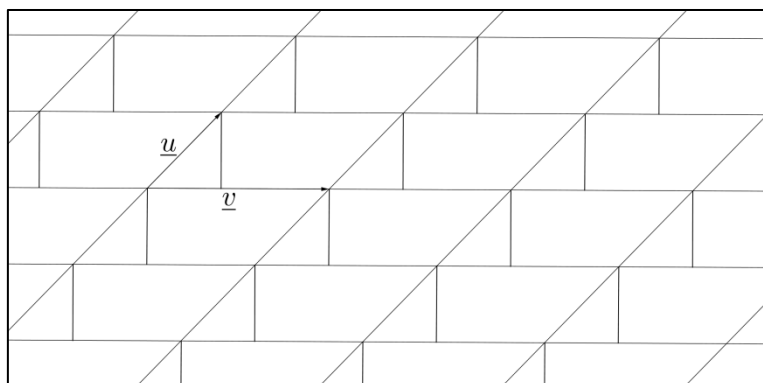
Nincsen n-centrum	Csak 2-centrum van	4-centrumok vannak	Csak 3-centrum van	6-centrumok vannak
w_1^0 Nincsen irányítást váltó egybevágóság	w_2^0 Nincsen irányítást váltó egybevágóság	w_4^0 Nincsen szimmetria-tengely	w_3^0 Nincsen szimmetria-tengely	w_6^0 Nincsen szimmetria-tengely
w_1^1 Vannak olyan csúsztatott tükrözések, melyek tengelye nem szimmetria tengely	w_2^1 Vannak olyan 2-centrumok, melyek nincsenek szimmetria-tengelyeken	w_4^1 Minden szimmetria-tengelyen van 4-centrum	w_3^1 Minden 3-centrum szimmetria-tengelyen van	w_6^1 Létezik szimmetria-tengely
w_1^2 Minden csúsztatott tükrözés tengelye szimmetria-tengely	w_2^2 Minden 2-centrum szimmetria-tengelyen van	w_4^2 Nem létezik olyan szimmetria-tengely, melyen 4-centrum van	w_3^2 Van olyan 3-centrum, amin nem megy át szimmetria-tengely	
w_1^3 Nincsen szimmetria-tengely, de vannak csúsztatott tükrözések	w_2^3 Az összes szimmetria-tengely párhuzamos			
	w_2^4 Nincsen szimmetria-tengely, de van csúsztatott tükrözés			

Az első oszloppal kezdjük, amikor $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportban nincsen n-centrum.

3.2 Állítás: Létezik olyan tapéta, amiben a két független eltolás generálja az $\mathcal{S}(W)$ csoportot.

Bizonyítás: A tapéta (2.5) definíciója szerint van két lineárisan független eltolás, ami generálja az eltolás csoportot $\mathcal{S}(W)$ -ben. Ha nincs más egybevágóság, akkor csak eltolások vannak, azaz $\mathcal{T}(W) = \mathcal{S}(W)$

A következő példa bizonyítja, hogy tényleg létezik ilyen tapéta, ahol $\mathcal{T}(W) = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$:



10. ábra

■

A következő részben megnézzük, hogy mi is történik akkor, ha w_1 típusú tapétához hozzáadunk egy tengelyes tükrözést. Ekkor tudjuk a 2.11 és 2.14 miatt, hogy ha a W tapéta tartalmaz egy tengelyes tükrözést vagy egy csúsztatva tükrözést, akkor a következő két eset lehetséges:

- W tapétának létezik rombikus eltolási rácsa és a tengely párhuzamos a rombusz egyik átlójával
- W tapétának létezik derékszögű eltolási rácsa és a tengely párhuzamos az eltolási rács egyik oldalával.

Mindkét esetben, mivel a tapéta nem tartalmaz n-centrumot, ezért a szimmetriatengelyek és a csúsztatva tükrözések tengelyei párhuzamosak lesznek egymással.

3.3 Állítás: Legyen W tapéta rombikus és nem derékszögű. Ha $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja nem tartalmaz n-centrumot, de tartalmaz egy tengelyes tükrözést t_g vagy egy csúsztatva tükrözést $t_{g,v}$, akkor a tapéta w_1^1 típusú.

Bizonyítás: A W tapéta rombikus eltolási rácsa legyen: $\mathcal{T}(W) = \langle \underline{e}_{v_1}, \underline{e}_{v_2} \rangle$.

Tekintsük először azt az esetet, amikor egy t_g tengelyes tükrözés van benne a szimmetriacsoportban.

Tekintsük meg a másik esetet, amikor a szimmetriacsoport egy $t_{g,\underline{v}}$ csúsztatva tükrözést tartalmaz és $g \parallel (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$

Mivel g párhuzamos a rombusz egyik átlójával, ezért \underline{v} vektort 2.13 miatt $\frac{1}{2}k * (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$ alakban tudjuk felírni, ahol $k \in \mathbb{Z}$ és $e_{(\underline{v}_1+\underline{v}_2)} \in \mathcal{T}(W)$. Amennyiben k páros, akkor $e_{\frac{1}{2}k*(\underline{v}_1+\underline{v}_2)} \in \mathcal{T}(W)$ miatt $\exists \underline{v}_3 \in \mathcal{T}(W)$, hogy $\underline{v} + \underline{v}_3 = \underline{0}$

$$t_{g,\underline{v}} = t_g \circ e_{\underline{v}} \circ e_{\underline{v}_3} = t_g$$

Ezzel visszavezettük a korábbi esetre.

Ha k páratlan szám, akkor $\exists \underline{v}_3 \in \mathcal{T}(W)$, hogy $\underline{v} + \underline{v}_3 = \frac{1}{2} * (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$.

Ekkor a következő csúsztatva tükrözést tudjuk megkapni:

$$t_{g,\underline{v}} = t_g \circ e_{\underline{v}} \circ e_{\underline{v}_3} = t_{g, \frac{1}{2}*(\underline{v}_1+\underline{v}_2)}$$

A kapott csúsztatva tükrözés után az $e_{\underline{v}_1}$ eltolást elvégezve egy tengelyes tükrözést fogunk kapni és ezzel az előző esetre tudjuk visszavezetni ezt az esetet.

A $g \parallel (\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$ esetben \underline{v}_2 vektor helyét kell a $\underline{v}_2' := -\underline{v}_2$ vektort venni, mint a rombuszt generáló másik vektort és akkor $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \parallel g$ adódik, amit az előbb néztünk.

■

3.4 Állítás: Legyen W tapéta derékszögű és nem rombikus. Ha $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja nem tartalmaz n -centrumot, $\mathcal{T}(W) = \langle e_{\underline{v}_1}, e_{\underline{v}_2} \rangle$, ahol $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$ és tartalmaz egy csúsztatva tükrözést $t_{g,\underline{v}}$, akkor két eset lehetséges.

- 1. eset: ha $\underline{v} = k * \underline{v}_1$ vagy $\underline{v} = k * \underline{v}_2$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, akkor a tapéta ω_1^2 típusú.
- 2. eset: ha $\underline{v} = \left(k + \frac{1}{2}\right) * \underline{v}_1$ vagy $\underline{v} = \left(k + \frac{1}{2}\right) * \underline{v}_2$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, akkor a tapéta ω_1^3 típusú.

Bizonyítás:

A 2.14-ből kiderül, hogy $g \parallel \underline{v}_1$ vagy $g \parallel \underline{v}_2$ és 2.13-ból adódik, hogy csak az állításban szereplő eltolások lehetségesek. Legyen $g \parallel \underline{v}_1$ hiszen a bázis vektorok megcserélésével ez elérhető.

Nézzük meg az első esetet. Legyen $\underline{v} = k * \underline{v}_1$, ezért $e_{\underline{v}} \in \mathcal{T}(W)$.

Tudjuk, hogy $\exists \underline{v}_3$ vektor, amire $e_{\underline{v}} \circ e_{\underline{v}_3} = I$

$$\text{Ekkor } t_{g, \underline{v}} \circ e_{\underline{v}_3} = t_g \circ e_{\underline{v}} \circ e_{\underline{v}_3} = t_g$$

Ezzel megkaptuk, hogy a csúsztatva tükrözés tengelye egyben egy tengelyes tükrözés tengelye is.

További tengelyes tükrözést a szimmetriacsoportban csak a $t_g \circ e_{k \cdot \underline{v}_2}$ egybevágósággal lehet kapni, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ha ezen kívül még lenne tengelyes tükrözés a szimmetriacsoportban, akkor kapnánk egy \underline{v}_2 vektorral párhuzamos, de annál kisebb eltolást, ami ellentmondás. Hasonlóan vezetne ellentmondásra az is, ha egy csúsztatva tükrözést vennénk bele a szimmetriacsoportba. Ezzel megkaptuk w_1^2 esetet.

Most pedig nézzük meg a második esetet. 2.14 miatt feltehetjük, hogy $g \parallel \underline{v}_1$

Legyen $\underline{v} = \left(k + \frac{1}{2}\right) * \underline{v}_1$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Tudjuk a csúsztatva tükrözés definíciójából, hogy $\underline{v} \parallel g$.

Válasszuk $\underline{v}_3 = -k * \underline{v}_1$ vektort. Ekkor $e_{\underline{v}} \circ e_{\underline{v}_3} = e_{\frac{1}{2} * (\underline{v}_1)}$

A $t_{g, \underline{v}}$ csúsztatva tükrözéssel állítsunk elő egy egyszerűbben kezelhető csúsztatva tükrözést:

$$t_{g, \underline{v}} \circ e_{\underline{v}_3} = t_g \circ e_{\underline{v}} \circ e_{\underline{v}_3} = t_g \circ e_{\frac{1}{2} * (\underline{v}_1)} = t_{g, \frac{1}{2} * (\underline{v}_1)}$$

Ekkor $t_{g, \frac{1}{2} * (\underline{v}_1)}$ csúsztatva tükrözés és $e_{l * \underline{v}_1}$ kompozícióját véve egy újabb csúsztatva tükrözést kapok, aminek a tengelye ugyanaz marad.

Ha $l * \underline{v}_2$ vektorral veszem a kompozíciót akkor az 1.16 alapján egy újabb csúsztatva tükrözést kapok, amire a következő igaz:

$$e_{l * \underline{v}_2} \circ t_{g, \underline{v}} = t_{g_i, \underline{v}}, \text{ ahol } g_i = e_{\frac{1}{2} * l * (\underline{v}_2)}(g) \text{ eltolással kapjuk, mert } (l * \underline{v}_2) \perp g$$

Más csúsztatva tükrözés vagy tengelyes tükrözés bevétele a csoportba olyan eltolást eredményezne a csoportban, amit $e_{\underline{v}_1}, e_{\underline{v}_2}$ nem generál, ami ellentmondás.

Mivel \underline{v}_1 és \underline{v}_2 elnevezése felcserélhető, ezért nem kell külön a $g \parallel \underline{v}_2$ esetet bebizonyítani.

Így megkaptuk a w_1^3 típusú tapétát.

■

3.5 Állítás: Ha $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja nem tartalmaz n -centrumot, de tartalmaz egy csúsztatva tükrözést $t_{g,\underline{v}}$, akkor a következő három eset lehetséges:

- g párhuzamos az egyik rombikus egységcella átlójával, akkor w_1^1 típusú vagy
- g párhuzamos az egyik derékszögű egységcella oldalával és $\underline{v} = k * \underline{v}_1$ vagy $\underline{v} = k * \underline{v}_2$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, akkor a tapéta w_1^2 típusú vagy
- g párhuzamos az egyik derékszögű egységcella oldalával és $\underline{v} = \left(k + \frac{1}{2}\right) * \underline{v}_1$ vagy $\underline{v} = \left(k + \frac{1}{2}\right) * \underline{v}_2$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, akkor a tapéta w_1^3 típusú.

Bizonyítás: Mindegyik esetet vissza lehet vezetni 3.3 vagy 3.4 állításokra. ■

Most hogy kész vagyunk azon tapéták osztályozásával, amiben nincs n -centrum, menjünk tovább.

A következő részben azokkal a tapétákkal fogunk foglalkozni, ahol van 2-centrum, de nincs 4-centrum.

3.6 Állítás: Legyen adva egy W tapéta w_2^i típusú tapéta, ahol $i = 0, 1, 2, 3, 4$ és

$$\mathcal{T}(W) = \langle e_{\underline{v}_1}, e_{\underline{v}_2} \rangle.$$

Ha P pont a W tapétának egy 2-centruma, akkor az összes centrum helye a következő alakban írható fel:

$$e_{\left(i*\frac{1}{2}\right)\underline{v}_1} \circ e_{\left(j*\frac{1}{2}\right)\underline{v}_2}(P), \text{ ahol } i, j \in \mathbb{Z}$$

Bizonyítás:

Az 1.14 alapján tudjuk, hogy $e_{\underline{v}} \circ f_{P,\pi} = f_{P',\pi}$, ahol $e_{\underline{v}} \in \mathcal{T}(W)$ egy π nagyságú forgatás lesz.

Az 1.14 bizonyításában használt módszerrel az új forgatás középpontját a következő

$$\text{hozzárendeléssel tudjuk megadni: } P' := e_{\left(\frac{1}{2}\right)*\underline{v}}(P)$$

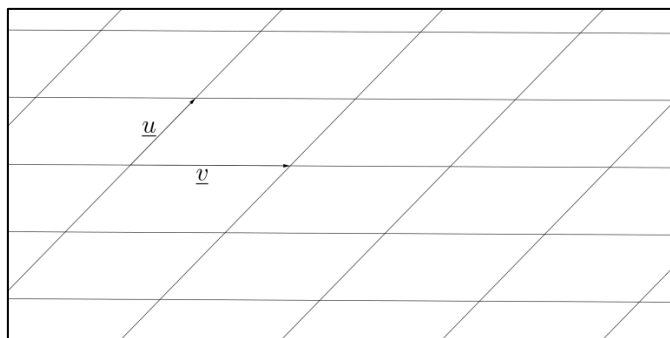
Az $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportban az eltolásokat $e_{\underline{v}} = \left(e_{\underline{v}_1}\right)^i \circ \left(e_{\underline{v}_2}\right)^j = e_{\left(i*\underline{v}_1\right)+\left(j*\underline{v}_2\right)}$ egyenlőséggel kapjuk meg, ezért megkapjuk az összes 2-centrum helyét.

Ha még ezeken kívül lenne még valahol egy P'' 2-centrum, akkor 1.13 bizonyításában látott módszer alapján $f_{P,\pi} \circ f_{P'',\pi} = e_{\frac{1}{2*P''P}}$ eltolást kapjuk, ami $\mathcal{T}(W)$ csoportban benne van.

Tehát P'' helyét már korábban megkaptuk.

3.7 Állítás: Létezik olyan W tapéta, melynek $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportjában csak eltolások és 2-centrumok vannak benne.

Bizonyítás: A következő példával bizonyítjuk az állítást:



12. ábra

3.8 Állítás: Legyen adva W rombikus, de nem derékszögű tapéta, melynek $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja tartalmaz t_g tengelyes tükrözést és 2-centrumot. Akkor W w_2^1 osztályba tartozik.

Bizonyítás: Válasszunk olyan $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ vektorokat, melyre $\mathcal{T}(W) = \langle e_{\underline{v}_1}, e_{\underline{v}_2} \rangle$ és az egységcellája rombusz.

Ekkor tudjuk az 2.11 miatt, hogy t_g tengelyes tükrözés g tengelye párhuzamos az egyik átlóval, azaz $g \parallel (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$ vagy $g \parallel (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$. A bizonyítást $g \parallel (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$ fogjuk belátni, a $g \parallel (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$ eset bizonyítása \underline{v}_2 helyett $-\underline{v}_2$ választása esetén adódik.

Legyen P pont a W tapéta egy 2-centruma. Ekkor a 3.6 miatt tudjuk, hogy az összes 2-centrum a következő alakra hozható:

$$e_{(i * \frac{1}{2})\underline{v}_1} \circ e_{(j * \frac{1}{2})\underline{v}_2}(P), \text{ ahol } i, j \in \mathbb{Z}$$

Legyen P' egy P -től különböző 2-centrum. Ekkor $\overrightarrow{PP'}$ vektor a következő alakban írható fel:

$$\overrightarrow{PP'} = (p_i * \frac{1}{2})\underline{v}_1 + (p_j * \frac{1}{2})\underline{v}_2, \text{ ahol } p_i, p_j \in \mathbb{Z}$$

A g szimmetriatengely és a 2-centrumok helyzetére 2.17 miatt, két lehetőség van.

1 eset: g egyenes tartalmaz 2-centrumot.

2 eset: g egyenes kettő 2-centrum szakaszfelező merőlegese.

Valójában a két eset ugyanaz. Ezt a 2. esetből fogjuk belátni.

$g \parallel (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$, miatt $(p_i * \frac{1}{2}) \underline{v}_1 + (p_j * \frac{1}{2}) \underline{v}_2$ vektornak merőlegesnek kell g -re lennie.

Ez pedig akkor lehetséges, ha $(p_i * \frac{1}{2}) \underline{v}_1 + (p_j * \frac{1}{2}) \underline{v}_2 = \lambda (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$

Ebből adódik, hogy $p_i = -p_j$ egyenlőségnek kell teljesülnie.

Továbbá tudjuk, hogy a PP' szakasz felezőpontja P'' rajta van a g egyenesen, tehát

$$P'' = e_{(p_i * \frac{1}{4}) \underline{v}_1 - (p_j * \frac{1}{4}) \underline{v}_2} (P)$$

Mivel $g \parallel (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$ és $P'' \in g$, ezért tudjuk, $Q := e_{\frac{3}{4} * i (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)} (P'')$ pont rajta van a g egyenesen. Ekkor a következő eltolás egy 2-centrumot határoz meg, ami rajta van g egyenesen:

$$e_{(\frac{3}{4} * i) (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)} \circ e_{(i * \frac{1}{4}) \underline{v}_1 - (i * \frac{1}{4}) \underline{v}_2} (P) = e_{i * \underline{v}_1 + (i * \frac{1}{2}) \underline{v}_2} (P)$$

Eddig sikerült levezetni, hogy ha van egy t_g tengelyes tükrözés és $\exists P$ pont a W tapétának 2-centruma, hogy $P \in g$.

Legyen $P \in g$ a W tapétának egy 2-centruma és $t_g \in \mathcal{S}(W)$.

Ekkor az 1.17 miatt $t_g \circ f_{P,\pi} = t_{g_1}$, ahol $P \in g_1$ és $g_1 \perp g$.

Mivel itt megvan a rombusz mind a 2 átlójával párhuzamos tengelyes tükrözés, ezért 3.3 bizonyításában látott módszer alapján látjuk mit generál t_g és t_{g_1} tengelyes tükrözések az eltolásokkal együtt. Ha ezen kívül lenne még tengelyes tükrözés, akkor az egy olyan $e_{\underline{v}}$ eltolást tudna generálni, ami nincs benne $\mathcal{T}(W)$ csoportban.

Tehát $t_g, t_{g_1} \in \mathcal{S}(W)$, ahol $g \perp g_1$ és $P = g \cap g_1$ a W tapétának 2-centruma. Ekkor $e_{(\frac{1}{2}) \underline{v}_1} (P)$ egy olyan 2-centrum lesz, amin nem megy át szimmetriatengely.

■

A derékszögű tapéták vizsgálatánál, amik tartalmaznak csúsztatva tükrözést és 2-centrumot, de 4-centrumot nem, ott érdemes a csúsztatva tükrözés elhelyezkedésére figyelmet fordítani. Ehhez egy lemmát fogunk kimondani:

3.9 Lemma: Legyen adva W derékszögű, de nem rombikus tapéta, $\mathcal{T}(W) = \langle e_{\underline{v}_1}, e_{\underline{v}_2} \rangle$, ahol $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoport tartalmaz egy $t_{g,\underline{v}}$ csúsztatva tükrözést. Ekkor a következő négy esetre lehet visszavezetni.

1. $g \parallel \underline{v}_1$, $t_g \in \mathcal{S}(W)$, $\exists P$, hogy $P \in g$ és P a W tapétának egy 2-centruma.
2. $g \parallel \underline{v}_1$, $t_{g, \frac{1}{2} * (\underline{v}_1)} \in \mathcal{S}(W)$, $\exists P$, hogy $P \in g$ és P a W tapétának egy 2-centruma.
3. $g \parallel \underline{v}_1$, $t_g \in \mathcal{S}(W)$, $\exists P$, hogy P a W tapétának egy 2-centruma és $P' \in g$, ahol

$$P' = e_{\frac{1}{4} * (\underline{v}_2)}(P)$$
4. $g \parallel \underline{v}_1$, $t_{g, \frac{1}{2} * (\underline{v}_1)} \in \mathcal{S}(W)$, $\exists P$, hogy P a W tapétának egy 2-centruma és $P' \in g$, ahol

$$P' = e_{\frac{1}{4} * (\underline{v}_2)}(P)$$

Bizonyítás: 2.14 miatt tudjuk, hogy $g \parallel \underline{v}_1$, az 2.13 miatt tudjuk, hogy $\underline{v} := \frac{1}{2} * k * \underline{v}_1$ lehet. 3.6 miatt tudjuk, hogy hogyan helyezkednek el a 2-centrumok. Mivel W derékszögű tapéta, ezért 2.17 miatt tudjuk, hogy g egyenesen vagy van 2-centrum, vagy kettő 2-centrum oldalfelező merőlegese.

Mivel \underline{v}_1 és \underline{v}_2 szerepe felcserélhető, ezért így már egyszerűen látszik, hogy valóban ez a 4 eset lehetséges. ■

3.10 Tétel: Ha a W tapétára a 3.9 lemma 1. esete igaz, akkor w_2^2 tapétáról van szó.

Bizonyítás: A g -vel párhuzamos szimmetriatengelyeket a $k * \underline{v}_2$, $k \in \mathbb{Z}$ eltolásokkal való kompozíció adja meg, tehát az 1.15 alapján könnyen látható, hogy a g -vel párhuzamos szimmetriatengelyekre a következő képlet lesz igaz:

$$g_i = \left(e_{\frac{1}{2} * (\underline{v}_2)} \right)^i (g), \text{ ahol } i \in \mathbb{Z}$$

Itt g_i szimmetriatengely lesz. Mivel $\exists P$, hogy $P \in g$ és P a W tapétának egy 2-centruma, ezért 3.6 alapján látjuk, hogy az összes 2-centrum az alábbi képlettel megkapható:

$$e_{\left(i * \frac{1}{2}\right) \underline{v}_1} \circ e_{\left(j * \frac{1}{2}\right) \underline{v}_2} (P), \text{ ahol } i, j \in \mathbb{Z}$$

Tudjuk továbbá, hogy $g_i \parallel \underline{v}_1$ és $g_i \perp \underline{v}_2$, amiből adódik, hogy minden 2-centrum szimmetria tengelyen lesz. ■

Megjegyzés: Az előző bizonyítás gondolatmenetét folytatva felmerül a kérdés, hogy van-e még szimmetria tengely azokon kívül, amit már megtaláltunk. Láttuk, hogy $P \in g$ pont az $\mathcal{S}(W)$ egy 2-centruma. Ekkor a következő kompozícióval egy g -re merőleges szimmetriatengelyt kapunk az 1.17-t felhasználva:

$t_h = t_g \circ f_{P,\pi}$, ahol $g \perp h$ és $P = g \cap h$

Innen a h -val párhuzamos szimmetriatengelyeket az 1.15 miatt a következő képlettel kapjuk meg:

$$h_j = \left(e_{\frac{1}{2}^*(\underline{v}_2)} \right)^j (h), \text{ ahol } j \in \mathbb{Z}, \text{ mert } g \perp \underline{v}_2$$

Ha ezeken kívül lenne még szimmetriatengely, akkor az egy olyan eltolást eredményezne, ami nincs benne $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportban. Megkaptuk az összes 2-centrumot is, mert, ha lenne ezen kívül, akkor kapnánk olyan eltolást, mely nincs benne az eltolási csoportunkban.

3.11 Tétel: Ha a W tapétára az 3.9 lemma 2. vagy 3. esete igaz, akkor ω_2^3 tapétáról van szó.

Bizonyítás: Vegyük először a 2. esetben a következő kompozíciót:

$$t_{g,\underline{v}} \circ f_{P,\pi}$$

Ez a kompozíció az 1.18 állítás miatt egy t_h tengelyes tükrözést fog eredményezni. Ha pontosan kiszámoljuk hogy h hol helyezkedik el, akkor megkapjuk a 3-as esetre visszavezethető tengelyes tükrözést.

Így a következő adódik:

$$t_{g,\underline{v}} \circ f_{P,\pi} = t_h$$

$$t_{g,\underline{v}} = t_h \circ (f_{P,\pi})^{-1} = t_h \circ f_{P,\pi}$$

Tehát a 3.9 lemma 3-as és a 2-es esete ugyanazt a szimmetriacsoportot fogják létrehozni.

Vegyük a 3. esetet és nézzük meg, hogy milyen típusú tapétáról van szó.

Tudjuk, hogy ha $t_h \in \mathcal{S}(W)$, akkor 1.15-t felhasználva $h_i = \left(e_{\frac{1}{2}^*(\underline{v}_2)} \right)^i (h)$, $i \in \mathbb{Z}$ esetén szimmetria tengely lesz. Ezen kívül h -val párhuzamos szimmetria tengely nem létezik, mert különben olyan eltolást kapnánk, ami nincs benne az eltolási csoportban. 3.6 miatt tudjuk, hogy az összes 2-centrumot a következő képlettel megkapjuk:

$$P_{jk} = e_{(j*\frac{1}{2})\underline{v}_1} \circ e_{(k*\frac{1}{2})\underline{v}_2} (P), \text{ ahol a kezdeti feltétel miatt } P \notin g$$

Ebből adódik, hogy h_i egyenesek egyike sem tartalmaz 2-centrumot.

Ha a ω_2^3 tapéta feltétele nem teljesülne, akkor $\exists g$ szimmetriatengely, amely $g \perp h_i$ valamelyik h_i egyenesre, de akkor $t_g \circ t_{h_i}$ kompozíció 1.12 miatt egy új 2-centrumot adna, ami ellentmondás.

Ezzel beláttuk, hogy ha a 2. vagy 3. eset áll fenn, akkor egy w_2^3 típusú tapétáról van szó. ■

3.12 Tétel: Ha a W tapétára az 3.9 lemma 4. esete igaz, akkor w_2^4 tapétáról van szó.

Bizonyítás: Az 1.16 alapján ki tudjuk számolni, hogy $t_{g,v}$ kompozíciója e_{i*v_2} eltolással ($i \in \mathbb{Z}$) a következő csúsztatva tükrözéseket tudja adni:

$$e_{i*v_2} \circ t_{g,v} = t_{g_i,v}, \text{ ahol } g_i = e_{\frac{1}{2}i*}(v_2)(g)$$

Továbbá 1.12-t felhasználva $f_{P,\pi} := t_{h_1} \circ t_{h_2}$, ahol $h_1 \parallel g$, $h_2 \perp g$ és $P \in h_1 \cap h_2$. Ezt a következő képletbe behelyettesítve:

$$t_{g,v} \circ f_{P,\pi} = e_v \circ t_g \circ t_{h_1} \circ t_{h_2} = e_v \circ e_{v_3} \circ t_{h_2}, \text{ ahol tudjuk, hogy } v \perp h_2 \text{ és } v_3 \parallel h_2 \text{ és}$$

$$v_3 = 2 * \frac{1}{4} * (v_2) = \frac{1}{2} * (v_2)$$

Innen 1.10 és 1.15 felhasználásával adódik, hogy az egybevágóság egy csúsztatva tükrözés lesz, aminek h_3 tengelyére a következők igazak: $h_3 := e_{\frac{1}{2}(v)}(h_2)$ és $h_2 \perp g$.

A v helyére behelyettesítve a 3.9 lemmában szereplő feltételt, adódik hogy:

$$h_3 := e_{\frac{1}{4}(v_1)}(h_2)$$

Az 1.16 alapján ki tudjuk számolni, hogy $t_{h_3, \frac{1}{2}*}(v_2)$ kompozíciója e_{i*v_1} eltolással ($i \in \mathbb{Z}$) a következő csúsztatva tükrözéseket tudja adni:

$$e_{i*v_1} \circ t_{h_3, \frac{1}{2}*}(v_2) = t_{h_i, \frac{1}{2}*}(v_2), \text{ ahol } h_i = e_{\frac{1}{2}i*}(v_1)(h_3)$$

A csúsztatva tükrözések egyike se tartalmaz 2-centrumot.

Tegyük fel, hogy létezik t_d tengelyes tükrözés. Ekkor két lehetőség van. Az első eset, hogy két 2-centrum felezőmerőlegese d , ahol a felezőpont nem 2-centrum. De ekkor a szimmetria tengely egybeesik egy csúsztatva tükrözés tengelyével, így ha venném a kompozíciójukat, akkor ellentmondásra jutnék.

A második eset, hogy tartalmaz $P \in d$ 2-centrumot.

Ekkor $d \parallel g$ vagy $d' \parallel g$ teljesül, ahol $d' := f_{P,\pi}(d)$ egyenlőség teljesül a következő miatt:

$$t_{d'} = t_d \circ f_{P,\pi}$$

Amennyiben $d \parallel g$, akkor d -re létezik olyan i , hogy g_i és g_{i+1} között legyen, ahol

$$g_i = e_{\frac{1}{2}i^*(v_2)}(g)$$

A következő kompozícióval ellentmondásra jutunk:

$$t_{g_i, \frac{1}{2}^*(v_1)} \circ t_d = e_{\lambda^*(v_2) + \frac{1}{2}^*(v_1)} = e_{\lambda^*(v_2)} \circ e_{\frac{1}{2}^*(v_1)}, \text{ ahol } \lambda \text{ nem feltétlen egész}$$

mert $\underline{v_1}$ és $\underline{v_2}$ lineárisan függetlenek így $e_{\frac{1}{2}^*(v_2)} \notin \mathcal{S}(W)$, tehát $e_{j^*(v_1)} \circ e_{\frac{1}{2}^*(v_2)} \notin \mathcal{S}(W)$, így ellentmondásra jutottunk.

Tehát a 4. esetben nem létezik tengelyes tükrözés, de van csúsztatva tükrözés és 2-centrum, ami a w_2^4 tapéta definíciója.

■

3.13 Tétel: Legyen adva W tapéta, aminek P pont a 4-centruma. Ekkor az 2.23 állításban meghatározott négyzet egy A csúcsából kiinduló szomszédos csúcsokba indított két vektor $\underline{v_1}$ és $\underline{v_2}$ jó lesz az eltolási csoport két generáló vektorának. Tehát W rombikus és derékszögű tapéta lesz.

Bizonyítás: Tudjuk az 2.17 állítás alapján, hogy ha $\varphi \in \mathcal{S}(W)$, akkor $\varphi(P)$ is 4-centrum lesz. Ez alapján csak egy módon lehetne bővíteni az eltolási csoportot, mégpedig ha az A csúcsból induló P -be mutató $\frac{v_1+v_2}{2}$ eltolást is belevennénk az eltolási csoportba. De az

$$f_{C, \frac{\pi}{2}} = e_{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)} \circ f_{P, \frac{\pi}{2}}$$

által meghatározott C pont is a W tapéta 4-centruma lesz és $C := e_{\frac{1}{2}^*(v_1)}(P)$, de ez ellentmondásba lenne az 2.23 állítással, mert a C pontnak az állítás szerint 2-centrumnak kell lennie.

Tehát $\frac{v_1+v_2}{2}$ vektorral való eltolás nincs benne W tapéta szimmetriacsoportjában.

A tételben említett $\underline{v_1}$ és $\underline{v_2}$ vektorral való eltolást a következő kompozícióból tudjuk megkapni, ahol M jelölje a P ponthoz egyik legközelebbi 2-centrumot és $M' := f_{P, \frac{\pi}{2}}(M)$

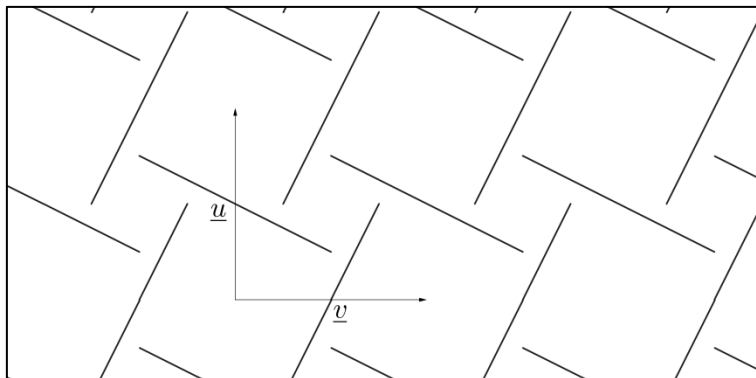
$$f_{M, \pi} \circ f_{P, \pi} = e_{\underline{v_1}}$$

$$f_{M', \pi} \circ f_{P, \pi} = e_{\underline{v_2}}$$

Ezzel megkaptuk a tételben említett két vektort. Mivel $\underline{v_1} \perp \underline{v_2}$ ezért derékszögű a W tapéta és mivel $|\underline{v_1}| = |\underline{v_2}|$ ezért W tapéta rombikus.

3.14 Állítás: Létezik olyan W tapéta, melynek $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja tartalmaz 4-centrumot, de irányításváltó egybevágóságot nem.

Bizonyítás: Egy egyszerű példa bizonyítja a létezést:



13. ábra

3.15 Állítás: Legyen adva W tapéta, aminek P pont a 4-centruma. Ha $\mathcal{S}(W)$ tartalmaz t_g tengelyes tükrözést, akkor csak w_4^1 és w_4^2 típusú tapéta lehet.

Bizonyítás: Az 3.13-ból ismerjük a W tapéta eltolási rácsát, amiből következik, hogy W rombikus és derékszögű tapéta.

Az 2.11-t felhasználva g egyenes helyzete csak a következő lehet:

- $g \parallel \underline{v}_1$
- $g \parallel \underline{v}_1 + \underline{v}_2$

Az 3.3 állítás bizonyítását és 1.15 állítást felhasználva ismerjük az összes t_{g_i} , ahol $g_i \parallel g$ tengelyes tükrözés helyét.

Ha $g_i \parallel \underline{v}_1$, akkor $g_i := e_{\frac{1}{2}i*(\underline{v}_2)}(g)$ 1.15 miatt

Ha $g_i \parallel \underline{v}_1 + \underline{v}_2$, akkor $g_i := e_{i*(\underline{v}_1)}(g)$ 3.3 bizonyításában látottak miatt

Az 2.17 lemma miatt tudjuk, hogy ha P 4-centrum, akkor $P' = t_{g_i}(P)$ is 4-centrum, ezért ha $g \parallel \underline{v}_1$, akkor g tartalmaz 2 és 4-centrumot is.

Ha $g \parallel \underline{v}_1 + \underline{v}_2$, akkor g csak 2-centrumot vagy csak 4-centrumot tartalmaz.

Vizsgáljuk meg az utóbbi két esetet, azaz, ha $g \parallel \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ és csak 2-centrumot tartalmaz és

ha $g \parallel \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ és csak 4-centrumot tartalmaz

Ha $g \parallel \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ és csak 2-centrumot tartalmaz, akkor legyen $P \in g$ egy 2-centrum.

Ekkor $t_{g'} = t_g \circ f_{P,\pi}$ egy olyan g' szimmetriatengelyt határoz meg, ami merőleges g -re, azaz $g' \parallel \underline{v}_1 - \underline{v}_2$ és csak 2-centrumot tartalmaz. Az 1.17 állítás miatt tudjuk, hogy ha egy tengelyes tükrözés 4-centrummal való kompozícióját vennénk, akkor csúsztatva tükrözést kapnánk. Így ebből megkaptuk a w_4^2 tapétát.

Ha $g \parallel \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ és csak 4-centrumot tartalmaz, akkor legyen $P \in g$ egy 4-centrum.

Ekkor $t_g \circ f_{P,\pi}$ és $t_g \circ f_{P,\frac{\pi}{2}}$ és $t_g \circ f_{P,-(\frac{\pi}{2})}$ által meghatározott új szimmetriatengelyekkel megkaptuk mind a négy vektorral párhuzamos szimmetriatengelyeket, amiből a korábbi képlet alapján ki lehet számolni az összes szimmetriatengelyt. Így kaptuk meg a w_4^1 tapétát. ■

Térjünk most át a 3-centrumok esetére, azaz, ha a tapétánknak csak 3-centruma van.

3.16 Állítás: Legyen adva W tapéta, aminek P pont a 3-centruma. Ekkor az 2.22 tételben meghatározott $ABCDEF$ szabályos hatszög $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{v}_1$ és $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \underline{v}_2$ vektorai generálják a rombikus eltolási rácsot.

Bizonyítás: 1.13 alapján könnyen kiszámolható, hogy $e_{\underline{v}_1} = f_{B,\frac{4\pi}{3}} \circ f_{A,\frac{2\pi}{3}}$

Hasonlóan $e_{\underline{v}_2} = f_{C,\frac{4\pi}{3}} \circ f_{B,\frac{2\pi}{3}}$

Amennyiben $\underline{v}_3 := \overrightarrow{AB}$ való eltolás benne lenne a szimmetriacsoportban, akkor

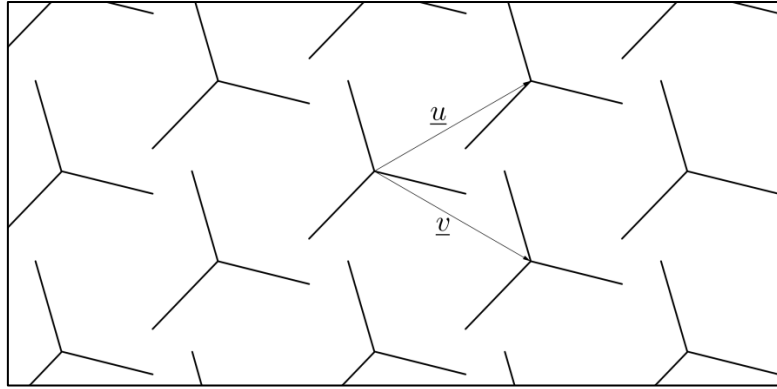
$$f_{P,\frac{2\pi}{3}} \circ e_{\underline{v}_3} = f_{P',\frac{2\pi}{3}}$$

egy olyan új P' 3-centrumot kapnánk 1.14 felhasználásával, ami 2.22 állítás miatt nem lehet benne a szimmetriacsoportban.

Mivel $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}|$ a szabályos hatszög tulajdonságai miatt, ezért adódik, hogy W rombikus tapéta lesz. ■

3.17 Állítás: Létezik olyan W tapéta, melynek $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja csak 3-centrumot tartalmaz, de irányításváltó egybevágóságot nem.

Bizonyítás: Egy egyszerű példa bizonyítja a létezést:



14. ábra

■

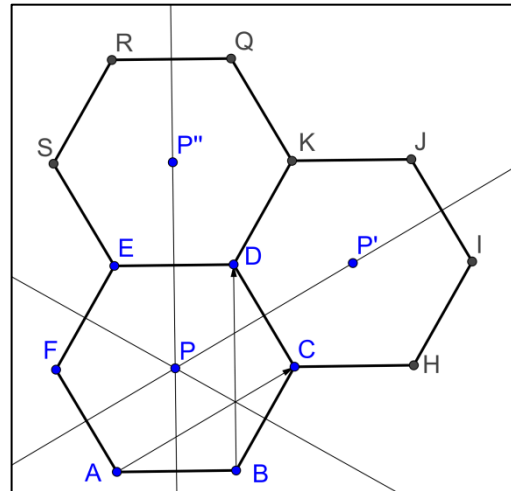
3.18 Állítás: Legyen adva W tapéta, aminek P pont a 3-centruma és $\mathcal{T}(W) = \langle e_{\underline{v}_1}, e_{\underline{v}_2} \rangle$. Ha $t_g \in \mathcal{S}(W)$ és $g \parallel \underline{v}_1$, akkor W tapéta w_3^2 típusú.

Bizonyítás: Legyen adva az 2.22 tételben szereplő $ABCDEF$ szabályos hatszög. Tudjuk 3.16 állítás alapján, hogy $\overrightarrow{AC} = \underline{v}_1$ és $\overrightarrow{BD} = \underline{v}_2$, ha mégsem, akkor a szabályos hatszög átnevezésével csúcsainak átnevezésével teljesül az egyenlőség.

Ekkor $g \parallel \overrightarrow{AC}$. Az 15. ábrából könnyen leolvasható, hogy $g \perp \overrightarrow{CD}$ vektorra és $\exists P' \in g$ 3-centrum, mert az 2.17 lemma miatt 3-centrum képe 3-centrum kell, hogy legyen.

A $f_{P', \frac{2\pi}{3}} \circ t_g$ és $f_{P'', \frac{4\pi}{3}} \circ t_g$ kompozíciókkal két újabb szimmetriatengelyt kapunk meg, amik az $ABCDEF$ szabályos hatszögnek az oldalfelező merőlegeseivel lesznek párhuzamosak.

Az 3.16 állításból tudjuk, hogy W tapéta rombikus. A rombikus tapétáknál az 3.3 állítás bizonyításában megkaptuk, hogy egy szimmetriatengely és az eltolások kompozíciója milyen újabb szimmetriatengelyeket hoz létre.



15. ábra

Emlékeztetőül: $t_g \circ (e_{\underline{v}_2})^{i*2} = t_{g_1}$, ahol $g_1 = e_{i^*(\underline{v}_2)}(g)$

Ha a három darab szimmetriatengelyre használjuk az előző összefüggést \underline{v}_1 vagy \underline{v}_2 vektorral, akkor megkapjuk az összes szimmetriatengelyt. Az előbbi összefüggésből és a korábbi ábrából pedig leolvasható, hogy az $ABCDEF$ szabályos hatszögnek a szimmetriatengelyei

mindig egy hatszög középpontjára illeszkednek, így a hatszögek egyik csúcsa sem lesz szimmetriatengelyen, amivel beláttuk az állításunkat. ■

3.19 Állítás: Legyen adva W tapéta, aminek P pont a 3-centruma és $\mathcal{T}(W) = \langle e_{\underline{v}_1}, e_{\underline{v}_2} \rangle$. Ha $t_g \in \mathcal{S}(W)$ és $g \perp \underline{v}_1$, akkor W tapéta w_3^2 típusú.

Bizonyítás: Vegyük megint az 2.22 tételben szereplő $ABCDEF$ szabályos hatszöget. Tudjuk 3.16 állítás alapján, hogy $\overrightarrow{AC} = \underline{v}_1$ és $\overrightarrow{BD} = \underline{v}_2$. Legyen P a szabályos hatszög középpontja.

Ekkor $g \parallel \overrightarrow{CD}$. Tegyük fel, hogy g metszi a PC zárt szakaszt valahol. Ha megnézzük a 15. ábrát közelebbről, akkor rájövünk, hogy g csak a P vagy a C pontban metszheti a szakaszt, mivel 2.17 lemma alapján 3-centrum képe csak 3-centrum lehet.

Ha $P \in g$, akkor $f_{P, \frac{2\pi}{3}} \circ t_g$ és $f_{P, \frac{4\pi}{3}} \circ t_g$ kompozíciókkal két újabb szimmetriatengelyt kapunk meg, amik az $ABCDEF$ szabályos hatszögnek a szemközti csúcsokat összekötő átló egyenesei lesznek. Ha $C \in g$, akkor a 15. ábrán P'' pontra mondhatjuk el az előbbi részt.

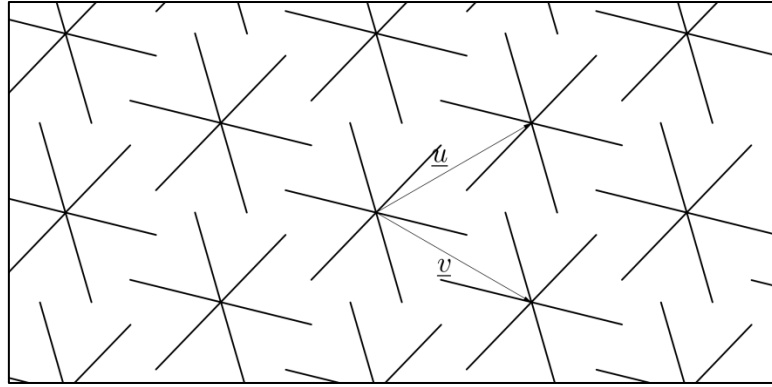
A $t_g \circ (e_{\underline{v}_1})^{i*2} = t_{g_1}$, ahol $g_1 = e_{i*(\underline{v}_1)}(g)$ összefüggést felhasználva megkapjuk, hogy az összes 3-centrum szimmetriatengelyen lesz. ■

Megjegyzés: A 3.18 és 3.19 állításokban felhasználtuk, hogy a szimmetria tengely vagy párhuzamos \underline{v}_1 vektorral, vagy merőleges rá. Más lehetőség nincsen, hiszen 2.11-ben meghatároztuk hol lehetnek szimmetriatengelyek. A 15. ábrából leolvasható, hogy derékszögű eltolási rácsa nincs a 3-centrummal rendelkező tapétának, így csak a rombikus eltolási rácsokat kell megtalálni. Ezeket pedig $\overrightarrow{AC} = \underline{v}_1$, $\overrightarrow{BD} = \underline{v}_2$, $\overrightarrow{CE} = \underline{v}_3$ vektorok közül tetszőleges kettőt kiválasztva megkapjuk a rombikus rácsokat. A forgatási szimmetria miatt az összes lehetőség sorra került 3.18 és 3.19 állításban, így más lehetőség nem maradt a tengelyes tükrözések elhelyezkedésére. Ha pedig tetszőleges csúsztatva tükrözés eleme a szimmetriacsoportnak, akkor 3.3 bizonyításánál láttuk, hogy van tengelyes tükrözés is, így visszavezettük a korábbi megállapításokra.

Ami hátramaradt az a 6-centrumok esete.

3.20 Állítás: Létezik olyan W tapéta, melynek $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja tartalmaz 6-centrumot, de irányításváltó egybevágóságot nem.

Bizonyítás: A következő példa bizonyítja az állítást:



16. ábra

3.21 Állítás: Ha egy W tapéta $\mathcal{S}(W)$ szimmetriacsoportja tartalmaz 6-centrumot és van benne irányításváltó egybevágóság, akkor W w_6^1 osztályú.

Bizonyítás: Vegyük az 2.21 tételben szereplő $ABCDEF$ szabályos hatszöget. Ekkor erre a szabályos hatszögre 3.16 bizonyítását el lehet mondani, tehát az \overrightarrow{AC} és \overrightarrow{BD} vektor generálni fogják az eltolási csoportot. A csúcsok átnevezése miatt \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BD} és \overrightarrow{CE} vektor közül bármely kettőt választva generálni fogják az eltolási csoportot. Mivel $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{CE}|$ vektorok hossza egyenlő, ezért az egységcellák rombuszok lesznek.

2.11 miatt tudjuk, hogy a szimmetriatengely párhuzamos lesz a rombusz egyik átlójával. Elég egy esetet megvizsgálni, mert a többi a vektorok szerepének a felcserélésével hasonlóképp meg lehet kapni.

Vegyük $\mathcal{T}(P)$ eltolási rácsát, ahol a P pont 6-centrum. Ekkor 2.16 miatt a szimmetriatengely az egységcellának is a szimmetriatengelye lesz. Így már a 15. ábrát megtekintve könnyedén leolvasható, hogy a szimmetriatengelyen lesz 6-centrum.

Ha $P \in g$ 6-centrum és $t_g \in \mathcal{S}(W)$, akkor $g_i := f_{P, i \cdot \frac{\pi}{6}}(g)$, ahol $i := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ is szimmetriatengely lesz. A 3.3 bizonyításában látottak miatt a további szimmetriatengelyeket kapunk az alábbi

$$g_{2j} := (e_{\underline{v}_1})^j (g_i) \text{ vagy } g_{2j} := (e_{\underline{v}_2})^j (g_i) \quad j \in \mathbb{Z} \text{ egyenlőségekkel, ha } \underline{v}_1 \nparallel g_i \text{ vagy } \underline{v}_2 \nparallel g_i$$

Ha $t_{g, \underline{v}} \in \mathcal{S}(W)$ teljesül és $e_{\underline{v}} \notin \mathcal{S}(W)$, akkor $e_{\underline{v}_2} \circ t_{g, \underline{v}}$ vagy $e_{\underline{v}_1} \circ t_{g, \underline{v}}$ kompozícióval a 3.18 bizonyításához hasonlóan kapunk egy tengelyes tükrözést. A tengelyes tükrözés helyzetéről pedig az előbb volt szó.

Ha lenne más irányításváltó egybevágóság is a csoportban, akkor az egy olyan eltolást eredményezne, ami nincs benne az eltolás csoportban, így ellentmondásra jutnánk. ■

4. Utószó

A célom a szakdolgozatban az volt, hogy bemutassam mennyire bonyolult is a parkettázás világa. A parketta definiálásával már rengeteg megkötést tettem, arra vonatkozólag, hogy hogyan is néz ki a szimmetriacsoportja. Hosszas tárgyalás után végül sikerült belátni, hogy egy parketta szimmetriacsoportja összesen 17 osztályba sorolható be. A parketták egy részére adtam csak példát, de mindegyikre lehet példát találni. A Szenthe [SZ] jegyzetben mindegyik típusra található példa.

Persze a parkettázással kapcsolatban vannak más problémák is, amit itt nem tárgyaltam. Az egyik például, ha kitekintünk a 3 dimenziós esetre, akkor hogyan néznek ki a szimmetriacsoportok. Egy másik probléma, amit nagyon sokáig nem tudtak megoldani, hogy le lehet-e fedni a síkot valamennyi síkidom használatával, úgy hogy ne legyen benne eltolási szimmetria. Erre Penrose adott egy olyan meglepő választ, hogy ő két síkidommal le tudta fedni a síkot.

Szóval sok érdekes kérdés van még, amit tanulmányozni lehet a parkettázással kapcsolatban, amik között vannak könnyebbek és nehezebbek is, így mindenki találhat számára érdekes és megoldandó problémát ebben a témakörben.

Ezúttal köszönetet mondok itt is Szeghy Dávid témavezetőmnek az útmutatásért, a türelméért, a rugalmasságáért amit irányomban tanúsított.

5. Irodalomjegyzék

- [SZ] Szenthe János: Szimmetriák a geometriában, Az euklidészi sík szimmetriacsoportjai, Sapientia Egyetem (előadássorozat jegyzete), Kolozsvár, 2004.
- [V] Verhóczy László: Euklideszi Geometria, ELTE (egyetemi jegyzet), 2012, <http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/EukGeoJe.pdf>