EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

A szabályos 17-szög szerkesztése

írta
Kiss Laura

Szakdolgozat
Matematika tanári szakirányon

Témavezető: Dr. Moussong Gábor egyetemi adjunktus

Geometriai Tanszék

2015

0.1. Bevezetés

Szakdolgozatom témájául a szabályos 17-szög szerkesztését választottam. Már a középiskolában közel állt hozzám a geometria. Tetszett, hogy szinte kézzel fogható dolgokról beszélünk, könnyen átláttam az ábrákat, akár síkról, akár térről volt szó. Amikor konzulensem, Moussong Gábor tanár úr felvetette azt az ötletet, hogy írjak a szabályos 17-szögről, rögtön tudtam, hogy ebben a témában szívesen elmélyednék. Nagyon kíváncsivá tett, hiszen ennek a szabályos sokszögnek a megszerkesztéséről még nem hallottam. Kezdeti nehézségek ellenére végül sikerült belátnom és megértenem, hogy a szabályos 17-szög megszerkeszthető körző és vonalzó segítségével.

Szakdolgozatom első fejezetében először Gaussról írok néhány szót, mivel az ő nevéhez fűződik a megszerkeszthetőség vizsgálata, majd a szabályos 17-szög szerkesztésének történetéről. Emlékeztetésképpen írok néhány sort a komplex számokról, trigonometrikus alakjukról, a síkon való ábrázolásukról valamint a komplex számokkal való műveletekről. A Gauss-féle bizonyítást Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond* című könyvében ismertem meg, mely nagy segítséget nyújtott annak megértéséhez. E könyv alapján fogom bemutatni Gauss módszerét. Miután megvizsgálom a szabályos n-szögeket, szeretnék tisztázni néhány eljárást bizonyos távolságok megszerkesztésére. Tárgyalom két távolság összegét, különbségét, szorzatát, egy távolság egész számmal való osztását illetve az egységszakasz ismeretében a $\sqrt{a}$ megszerkesztését. Utána megmutatom egy egyszerűbb példán, a szabályos 5-szögön a módszert annak érdekében, hogy következő fejezetünk érthetőbbé váljon. Ezek után a második fejezetben már a szabályos 17-szögre bizonyítom be, hogy megszerkeszthető. Itt is az előbbiekben használt módszert fogom alkalmazni. A harmadik (utolsó) fejezetben mutatni fogok egy tényleges szerkesztést. Ennek lépéseit a könyv alapján fogom vázolni, majd bebizonyítom, hogy ezeket elvégezve valóban egy szabályos 17-szöget fogok kapni. A szabályos 17-szög szerkesztési lépéseinek helyességét önállóan dolgoztam ki, arra csak útmutatást mutatott Hartshorne könyve.

A dolgozatom megírása közben törekedtem arra, hogy a komplex számok ismeretével akár egy középiskolás diák is megérthesse a szakdolgozatot. Éppen ezért, annak ellenére, hogy a szerkeszthetőség elméletéhez fontos az absztrakt algebrai fogalmak és tételek ismerete, én ezek használata nélkül vittem véghez a bizonyításokat.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Moussong Gábor tanár úrnak a sok segítségért és hasznos tanácsokért, melyeket a szakdolgozatom írása során kaptam.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Gauss és a szabályos sokszögek

1.1. Gauss élete és munkássága

Carl Friedrich Gauss [1] német matematikus, természettudós és csillagász volt. 1777. április 30-án született Braunschweigben alacsonyabb osztálybeli szülők egyetlen gyermekeként. Gauss ösztöndíj segítségével a Collegium Carolinumban tanult három évig, majd a Göttingeni Egyetem hallgatója lett.

A legenda szerint már hároméves korában megmutatta tehetségét, amikor fejben kijavított egy összeadási hibát, melyet apja vétett, miközben pénzügyeit számolta papíron. Gaussról hallhattunk egy másik híres történetet is, mely az idők folyamán szájhagyomány útján átalakult. Ez a történet arról szól, hogy Gauss és osztálytársai az általános iskolában azt a feladatot kapták, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss hamar megoldotta a feladatot: a számsor alá visszafele leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket kapott: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$ stb., ami összesen 100 darab számpár, melyet összeszorozva 101-el, az 10100 eredményhez vezetett. Ezt elosztotta 2-vel és megkapta a helyes megoldást, az 5050-et.

Gauss a tudomány számos területének fejlődéséhez járult hozzá. Úgy mint számelmélet, analízis, differenciálgeometria, mágnesesség, asztronómia és optika. Euler, Newton és Arkhimédész mellett őt tartják még minden idők egyik legnagyobb matematikusaként számon. 1796-ban sikerült megmutatnia, hogy bármely olyan szabályos sokszög, mely oldalainak száma Fermat-prím ($Fn = 2^{2^n} + 1$ alakú prímszámok, ezek közül öt ismert: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$), az megszerkeszthető körző és vonalzó segítségével. Ezzel sikerült betörnie a tudományos életbe. Számos elért eredménye mellett is erre volt legbüszkébb egész élete során, annyira, hogy azt kívánta, sírjára egy heptadekagont (szabályos 17-szög) véssenek. Kérését a sírköves elutasította, mondván, ez a bonyolult szerkesztés olyan lenne, mint egy kör.

1.2. Szabályos sokszögek és a szabályos 17-szög

Egy egyszerű sokszöget szabályos sokszögnek nevezünk, ha minden oldala és minden belső szöge ugyanakkora. Szabályos háromszöget, négyszöget és hatszöget, talán még az ötszöget és a tízszöget is már középiskolában tanultunk szerkeszteni. Ezeket az eljárásokat Eukleidész már a Kr. előtti 3. században ismerte. Emellett még szabályos 15-szöget is tudott szerkeszteni, körző és vonalzó segítségével. Mivel ismerjük hogyan kell szöget felezni, ezért Eukleidész bátran állíthatta, hogy ezen szabályos sokszögek kettő hatványaival való szorzatait is könnyen meg tudjuk szerkeszteni az oldalfelező merőlegesek segítségével. Tehát szerkeszthető szabályos n-szög, ahol $n = 2^k$, $2^k \cdot 3$, $2^k \cdot 5$ és $2^k \cdot 3 \cdot 5$.

Körülbelül 2000 évig csak ezeknek a szabályos sokszögeknek szerkesztését ismertük, míg nem Carl Friedrich Gauss a fent már említett 1796-os évben, 19 éves korában felfedezte, hogy a szabályos 17-szög is szerkeszthető vonalzó és körző segítségével. Gauss azt mutatta meg [4], hogy a szabályos 17-szög szerkesztése négy másodfokú egyenlet gyökeinek a megszerkesztésére vezethető vissza. Azóta több szerkesztést is közöltek a szabályos sokszögre, ezek közül is mind a Gauss által megmutatott négy egyenletre vezethető vissza [5]. Tiszta geometriai elemzésen alapuló szerkesztés azóta sem ismeretes.

Bevezetésként nézzük meg a szabályos n-szöget, majd egyszerűbb példaként vizsgáljuk meg a Gauss-féle módszert a szabályos ötszögre. Így könnyebb lesz értelmeznünk a szabályos 17-szög szerkeszthetőségének bizonyítását. Komplex számokkal fogunk dolgozni, ezért először szeretnék tisztázni néhány hasznos algebrai definíciót, melyeket használni fogunk.

A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$-vel jelöljük. Azért vezetjük be ezeket a számokat, hogy olyan kifejezésekkel is tudjunk számolni, melyekben negatív számok négyzetgyökei is szerepelnek. Vezessünk be egy rövidítést, miszerint $\sqrt{-1} = i$. i-re úgy fogunk tekinteni, mint egy ismeretlenre, de közben felhasználhatjuk, hogy $i^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$. Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok. A $z = a + bi$ valós része $Re(z) = a$. A $z = a+bi$, képzetes része $Im(z) = b$. Feltesszük, hogy az $a+bi$ alakú kifejezésekkel a szokásos szabályok szerint számolhatunk. Ekkor $a+bi$ és $c + di$ számokat egyenlőnek tekintjük, ha $a = c$ és $b = d$. Valamint igaz, hogy

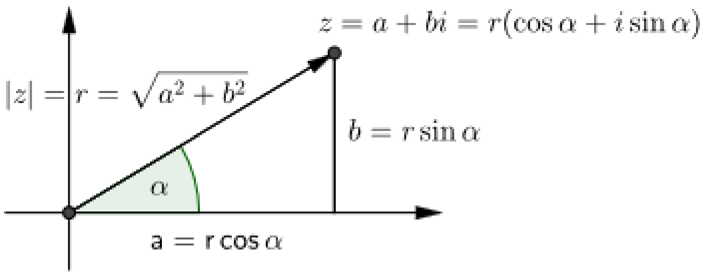
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

és

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

hiszen $i^2 = -1$.

1.1. ábra.

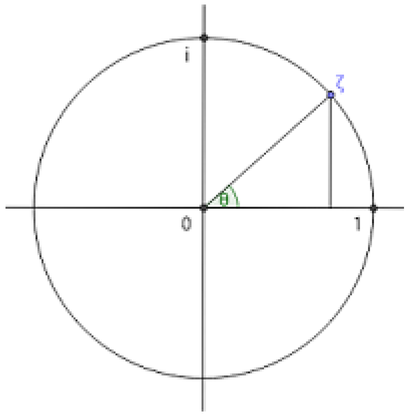


Vezessük be a komplex számok trigonometrikus alakját, leginkább mi ezzel fogunk dolgozni. Tekintsük az (1.1) ábránkat. Ha a $z = a + bi$ nem nulla szám hossza r, és szöge α, akkor nyilván $a = r\cos\alpha$ és $b = r\sin\alpha$, vagyis $z = r\cos\alpha + ir\sin\alpha = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Végül n-edik egységgyöknek nevezzük az 1 szám n-edik gyökeit. Ezek a $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van. [2]

1.3. Szabályos n-szög

Először is szeretnénk komplex számokkal kifejezni a Descartes-féle koordináta rendszerrel ellátott sík pontjait. Tehát az (a, b) pont itt a $z = a + bi$ lesz. Vegyük fel ζ-t az egységnyi sugarú körünk egy pontjaként, az ábrán látható módon.

1.2. ábra.



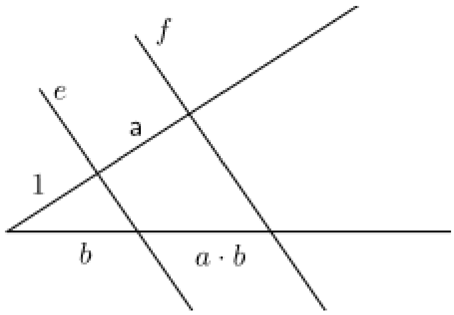
Legyen θ az origóból a ζ-ba húzott egyenes és az x tengely által bezárt irányszög. Ekkor tudjuk, hogy a trigonometrikus alak (mivel egységnyi sugarú körben dolgozunk, ezért $r = 1$):

$$\zeta = \cos\theta + i\sin\theta.$$

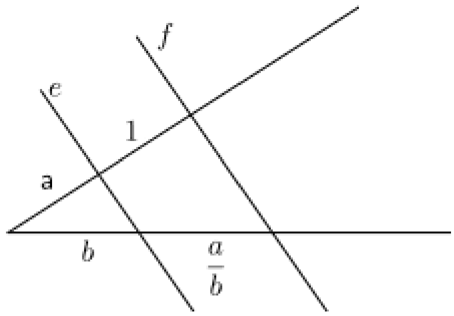
Legyen $\theta = \frac{2\pi k}{n}$, ahol n és k egész számok. Ekkor azt mondhatjuk, hogy az $x^n - 1 = 0$ egyenletnek gyöke lesz ζ, tehát $\zeta^n = 1$. Legyen $k = 0, 1, \ldots, n-1$, majd helyettesítsük be ezeket θ-ba. Ekkor megkapjuk az összes gyököt, tehát tudjuk, hogy ezek lesznek az n-edik egységgyökök. Ahhoz, hogy egy szabályos n-szög szerkeszthető legyen, elég ha meg tudjuk szerkeszteni a $\cos\frac{2\pi}{n}$-et, abból már meg tudjuk szerkeszteni a $\sin\frac{2\pi}{n}$-et, amiből pedig megkapjuk a szabályos n-szögünk oldalát.

Itt szeretnék kitérni bizonyos távolságok megszerkesztésére, ezekre is szükségünk lesz a továbbiakban. Vegyünk fel egy tetszőleges a és b szakaszt. $a + b$ megszerkesztése egyszerű, egy egyenesre felvesszük az a távolságot, majd egyik végpontjába b-t, a kapott szakasz lesz az $a + b$ távolság. $a - b$-t hasonlóan szerkesztjük, felmérjük egy tetszőleges egyenesre a-t, majd ugyanabból a kezdőpontból felmérjük b szakaszt is. b végpontja és az a végpontja közötti szakasz lesz az $a - b$ távolság. $a \cdot b$ és $\frac{a}{b}$ megszerkesztése a párhuzamos szelők tételével kapcsolatos. (Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik szögszáron keletkező szakaszok hosszának aránya megegyezik a másik szögszáron keletkező megfelelő szakaszok hosszának arányával.) Vagyis $a \cdot b$ és $\frac{a}{b}$ a következő módon szerkeszthető meg:

1.3. ábra. $a \cdot b$

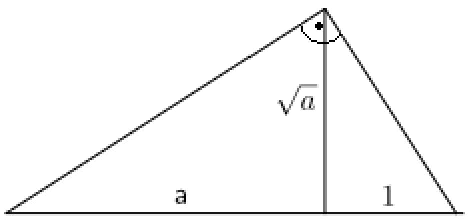


1.4. ábra. $\frac{a}{b}$



Már csak a $\sqrt{a}$ megszerkesztése maradt hátra, az a és az egységszakasz ismeretében. Szerkesztésünk a magasságtétellel magyarázható. (Bármely derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe az átfogó két szeletének.)

1.5. ábra.



1.4. Szabályos 5-szög szerkeszthetősége

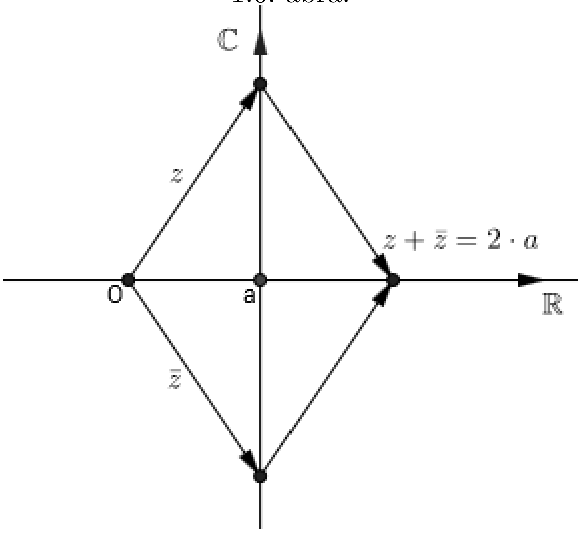
Ebben a fejezetben szeretnénk belátni, hogy a szabályos ötszög szerkeszthető körző és vonalzó segítségével. A fenti eljárást alkalmazzuk $n = 5$-re. Ekkor az origóból a ζ-ba mutató egyenes és az x tengelyünk által bezárt irányszög $\frac{2\pi}{5}$, tehát $\Theta = \frac{2\pi}{5}$.

Így

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}.$$

Ez lesz az első csúcsa a szabályos ötszögnek az 1 után, ami az x tengelyen helyezkedik el. Tehát az ötszög csúcsai rendre 1, ζ, ζ^2, ζ^3 és ζ^4 lesznek. Tudjuk, hogy $\zeta^4 = \zeta^{-1}$, tehát konjugáltja ζ-nak.

1.6. ábra.



Nézzük az (1.6) ábrán látható rombuszt. Két vektor összege a rombuszunk átlója lesz, tehát $z + \bar{z} = 2 \cdot a$. Itt $a = \cos\theta$, z és $\bar{z}$-t megfeleltetjük ζ és $\bar{\zeta}$-nak, tehát

$$\zeta + \bar{\zeta} = \zeta + \zeta^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5}. \tag{1.1}$$

Legyen $\alpha = \zeta + \zeta^4$. Ekkor

$$\alpha^2 = \zeta^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \zeta^4 + \zeta^8.$$

Tudjuk, hogy $\zeta^4 \cdot \zeta = \zeta^5$, ami pedig nem más, mint 1, hiszen $\zeta^5 = 1$. ζ^8 pedig megegyezik ζ^3-al. Nézzük meg mit kapunk, ha felírjuk az $\alpha + \alpha^2$ összeget.

$$\alpha + \alpha^2 = \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta^1 + 2 = 1.$$

A mértani sorozatok segítségével belátható, hogy ez valóban igaz.

Legyenek 1, ζ, ζ^2, ζ^3, ζ^4 egy mértani sorozat tagjai. A mértani sorozat összegképlete könnyen belátható, hogy a komplex számokra is alkalmazható. Helyettesítsük be az adatokat az összegképletbe. Tehát:

$$S_n = 1 \cdot \frac{\zeta^5 - 1}{\zeta - 1}.$$

$\zeta^5 = 1$, vagyis a számláló nulla, így az eredmény is nulla lesz. Ezért

$$\alpha + \alpha^2 = \underbrace{\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta^1 + 1}_{0} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

A képletből látjuk, hogy α gyöke lesz az $x^2 + x - 1 = 0$ egyenletnek.

A másodfokú megoldóképletbe behelyettesítve megkapjuk:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4+1}}{2}.$$

Tehát:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{5}.$$

Mivel tudjuk, hogy α egy pozitív szám, ezért csak az összeadást vehetjük figyelembe.

(1.1) alapján $\zeta + \zeta^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5} = \alpha$, tehát

$$2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

$\frac{1}{4}$ szerkeszthető, $\sqrt{5}$ és $\sqrt{5} - 1$ is szerkeszthető és ezek szorzatai is szerkeszthetőek, így bebizonyítottuk tételünket, miszerint a szabályos ötszög szerkeszthető körző és vonalzó segítségével.

2. fejezet

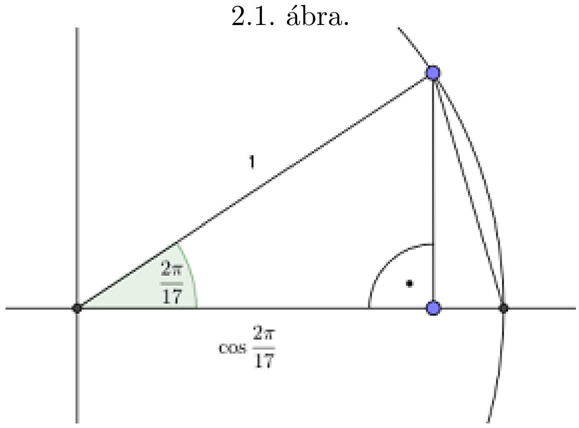
A szabályos 17-szög

2.1. A szabályos 17-szög szerkeszthetősége

Most szeretném bebizonyítani, hogy a szabályos 17-szög szerkeszthető körző és vonalzó segítségével. Vegyünk fel egy egységkört a Descartes-féle koordináta rendszerben, melynek középpontja az origó. A speciális szabályos 17-szög első csúcsa legyen az 1, következő a ζ majd ζ további hatványai legyenek a többi csúcsok.

Ugyanúgy, ahogy az ötszögnél is, alkalmazzuk az eljárást $n = 17$-re. Ekkor az origóból a ζ-ba mutató egyenes, és az x tengelyünk által bezárt irányszög $\frac{2\pi}{17}$ lesz, tehát $\theta = \frac{2\pi}{17}$.

2.1. ábra.



Így

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{17} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{17}.$$

Itt is elegendő lesz bebizonyítanunk azt, hogy $\cos\frac{2\pi}{17}$ szerkeszthető. Ha megszerkeszthető a $\cos\frac{2\pi}{17}$ távolság, akkor az origótól a $\cos\frac{2\pi}{17}$ távolságra lévő pontban állított merőleges pontosan ott metszi a körünket, ahol a szabályos 17-szögünk első pontja található az x tengelyen fekvő pont után. Így már meg is kaptuk az oldalhosszúságunkat, amit akartunk. Tehát bebizonyítottuk, hogy a szabályos 17-szög szerkeszthető.

Célunk tehát megmutatni, hogy

$$\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{17}$$

egy megszerkeszthető szám lesz. Ehhez három további komplex számot értelmezzünk:

$$\alpha = \zeta + \zeta^{-1} \tag{2.1}$$

$$\beta = \zeta + \zeta^4 + \zeta^{-1} + \zeta^{-4} \tag{2.2}$$

$$\gamma = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \zeta^{-4} + \zeta^{-8} \tag{2.3}$$

Feltehetjük a nagy kérdést: Honnan jönnek ezek az egyenletek? Ennek magasabb matematikai okai vannak. Később látni fogjuk, hogy a kitevők szerencsés összeválogatása segíteni fog a feltételezésünk bebizonyításában.

Azt szeretnénk megmutatni először, hogy γ megszerkeszthető. Miután ezt beláttuk, bizonyítjuk, hogy β előállítható γ-ból az alapműveletek és a gyökvonás segítségével. Így β is szerkeszthető lesz. Majd ugyanezt az eljárást elvégezzük α-ra is.

Kezdjük a γ-val. Legyen γ' a γ-ban nem szereplő kitevőjű ζ hatványok összege, vagyis

$$\gamma' = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^{-3} + \zeta^{-5} + \zeta^{-6} + \zeta^{-7} \tag{2.4}$$

Ugyebár tudjuk, hogy a ζ kitevőit tekinthetjük modulo 17 (azaz a kitevők 17-es maradékaiként), vagyis $\zeta^{16} = \zeta^{-1}$, $\zeta^{15} = \zeta^{-2}$ stb.

Írjuk fel γ és γ' összegét rendezve:

$$\gamma + \gamma' = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots + \zeta^{16}.$$

Az ötszögnél már láttuk, hogy a mértani összegzési képlet miatt

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots + \zeta^{16} = 0.$$

Átrendezve az egyenletet megkapjuk, hogy

$$\gamma + \gamma' = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + ... + \zeta^{16} = -1. \tag{2.5}$$

Most nézzük meg mit kapunk, ha felírjuk $\gamma \cdot \gamma'$-t.

$\gamma \cdot \gamma'$ megtalálásához csinálnunk kell egy táblázatot. Ebben a táblázatban összeszorozzuk γ minden tagját γ' minden tagjával, és leírjuk azok kitevőit moduló 17.

$\gamma \cdot \gamma'$ kitevőinek táblázata

4	6	7	8	-2	-4	-5	-6
5	7	8	9	-1	-3	-4	-5
7	9	10	11	1	-1	-2	-3
11	13	14	15	5	3	2	1
2	4	5	6	-4	-6	-7	-8
1	3	4	5	-5	-7	-8	-9
-1	1	2	3	-7	-9	-10	-11
-5	.3	-2	-1	-11	-13	-14	-15

Látjuk, hogy minden $1 \leq i \leq 16$ moduló 17 szám pontosan 4-szer fordul elő. A (2.5)-es egyenletnél már beláttuk, hogy $\sum_{i=1}^{16} \zeta^i = -1$, így

$$\gamma \cdot \gamma' = 4 \cdot \sum_{i=1}^{16} \zeta^i = -4.$$

Könnyen belátható a gyökök és együtthatók összefüggése alapján, hogy γ és γ' gyökei a következő másodfokú egyenletnek:

$$x^2 - \left(\gamma + \gamma'\right) x + \gamma \cdot \gamma'.$$

Behelyettesítve a már kiszámolt eredményeket megkapjuk, hogy ez az egyenlet az

$$x^2 + x - 4 = 0.$$

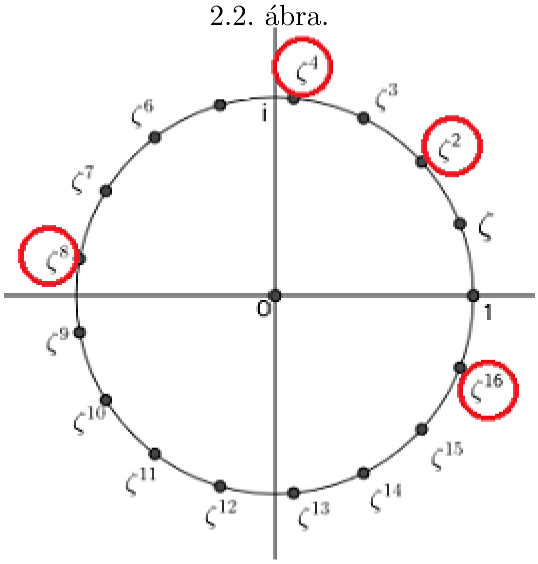
Másodfokú egyenlet megoldóképletét használva:

$$x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right).$$

Döntsük el, hogy plusz vagy mínusz. Ha megnézzük a γ összeget, látjuk, hogy kiesnek a képzetes részek. Tehát γ valós, sőt

$$\gamma = 2\left(\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17}\right).$$

2.2. ábra.



Nézzük meg a (2.2) ábrán a ζ^2, ζ^4, ζ^8, és ζ^{16} pozícióit. A különböző hatványokról megállapíthatjuk, hogy $Im(\zeta^8) > -1$ (ζ^8 valós része nagyobb, mint -1), $Im(\zeta^4) > 0$, $Im(\zeta^2) > \frac{1}{2}$, és végül $Im(\zeta^{16}) > \frac{1}{2}$. γ a külön-külön vett valós részek összege lesz, amiről tudjuk, hogy biztosan nagyobb lesz, mint 0, vagyis γ pozitív lesz. Tehát:

$$\gamma = Im(\gamma) = Im(\zeta^8+\zeta^4+\zeta^2+\zeta^{16}) = Im(\zeta^8)+Im(\zeta^4)+Im(\zeta^2)+Im(\zeta^{16}) > 0.$$

Így γ a következő lesz:

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{17}\right).$$

Következő lépés az, hogy megmutassuk, hogy elő tudjuk állítani γ-ból β-t az alapműveletek és a gyökvonás segítségével. β' legyen $\gamma - \beta$.

Ekkor

$$\beta' = \zeta^2 + \zeta^8 + \zeta^{-2} + \zeta^{-2}.$$

Visszaemlékezve arra, hogy mi volt a β (lásd:2.1), látjuk, hogy

$$\beta + \beta' = \zeta + \zeta^4 + \zeta^{-1} + \zeta^{-4} + \zeta^2 + \zeta^8 + \zeta^{-2} + \zeta^{-8},$$

ami nem más, mint γ. Tehát ezzel be is láttuk, hogy $\beta + \beta'$ előállítható, hiszen az maga a γ.

És mi a helyzet $\beta\cdot\beta'$-vel? Összeszorozva minden tagot minden taggal kapunk egy hasonló táblázatot, mint γ-nál. Ennél a táblázatnál megfigyelhetjük, hogy ζ minden kitevője előfordul 1-től 16-ig, leszámítva a 0 kitevőjű ζ-t, ami persze nem más, mint az 1. Mivel tudjuk, hogy az összes kitevőjű tag összege 0, de nem vesszük az ζ^0-t, ezért összegük -1 lesz.

Írjuk fel az alábbi egyenletet:

$$x^2 - \left(\beta + \beta'\right)x + \beta\cdot\beta' = 0,$$

majd helyettesítsük be a már kiszámolt értékeket:

$$x^2 - \gamma x - 1 = 0.$$

Írjuk fel az egyenletünkre a másodfokú egyenlet megoldóképletét. A (2.2) ábra alapján megint meg tudjuk vizsgálni, hogy a β pozitív lesz, így elhagyhatjuk a $-$ jelet.

$$x = \frac{1}{2}\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2+4}\right)$$

Írjuk be γ helyére a már kiszámított értéket és egyszerűsítsük a kapott eredményt.

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{17}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}\right)^2 + 4}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{17}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$$

$$x = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$$

Így β-ra a következő eredményt kapjuk:

$$\beta = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right).$$

Utolsó lépésünk bebizonyítani, hogy α előállítható γ-val és β-val az alapműveletek és a gyökvonás segítségével. Tekintsük tehát az α-t. Vegyünk fel egy α'-t, melyre igaz, hogy $\alpha' = \beta - \alpha$. Ekkor

$$\alpha' = \zeta^4 + \zeta^{-4}.$$

Meg kell fontolnunk, hogy mi lesz $\alpha \cdot \alpha'$ eredménye. Ez nem más, mint

$$\alpha \cdot \alpha' = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^{-3} + \zeta^{-3}$$

lesz. Legyen $\alpha \cdot \alpha' = \beta''$. Vegyünk fel egy β'''-t, melyre igaz, hogy

$$\beta'' + \beta''' = \gamma'.$$

Ekkor

$$\beta''' = \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^{-6} + \zeta^{-7}$$

(lásd.: 2.4). β'' és β''' is való szám. Megnézve $\beta'' \cdot \beta'''$-t hasonló eredményt kapunk, mint $\beta{\cdot}\beta'$-nél. Hiszen az összegben megint előfordul ζ összes kitevőjű tagja, kivéve ζ^0-t, így a szorzat itt is -1 lesz. Tehát,

$$\beta'' \cdot \beta''' = \sum_{i=1}^{16} \zeta^i = -1.$$

A gyökök és együtthatók összefüggése alapján belátjuk, hogy β'' és β''' gyökei a következő másodfokú egyenletnek:

$$x^2 - \left(\beta'' + \beta'''\right) - \beta''\beta''' = 0.$$

Behelyettesítve a kiszámoltakat megkapjuk, hogy

$$x^2 - \gamma' x - 1 = 0.$$

Használjuk a másodfokú egyenletmegoldó képletünket:

$$x = \frac{\gamma' \pm \sqrt{(\gamma')^2 + 4}}{2}.$$

Hasonló gondolatmenetet használva mint a γ-nál és β-nál, itt is látjuk, hogy β'' pozitív lesz. Megoldva egyenletünket egy a β-hoz hasonló eredményt kapunk,

$$x = \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right).$$

Tehát

$$\beta'' = \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right).$$

Emlékezzünk, hogy $\alpha + \alpha' = \beta$, és $\alpha \cdot \alpha' = \beta''$, tehát α és α' gyöke lesz az

$$x^2 - \beta x + \beta'' = 0$$

egyenletnek.

Tehát

$$x = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\beta''}}{2}.$$

Nekünk az α fog kelleni. Itt is végig kell gondolnunk, hogy α és α' közül melyikhez használjuk a mínusz, és melyikhez a plusz előjelet. Tudjuk, hogy $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$. Megnézve az (2.2) árbán látszik, hogy ezek összege biztos nagyobb lesz, mint az $\alpha' = \zeta^4 + \zeta^{-4}$ összeg, tehát az α nevezőjében a plusz jelet kell használnunk. Helyettesítsük be az ismert értékeket.

Így megkapjuk α-ra az eredményünket, ami

$$\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{8}\Bigg(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\ +2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\Bigg) \tag{2.6}$$

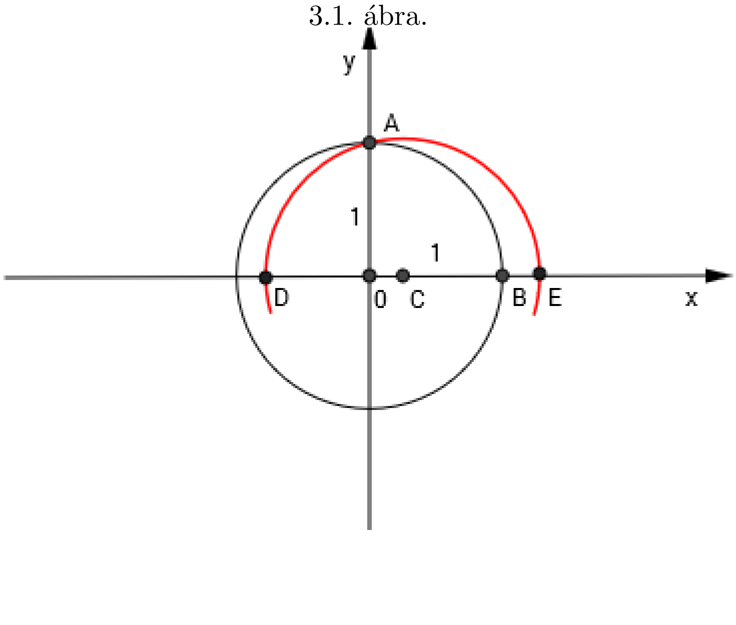
3. fejezet

Szabályos 17-szög szerkesztés

3.1. A szabályos 17-szög szerkesztésének lépései

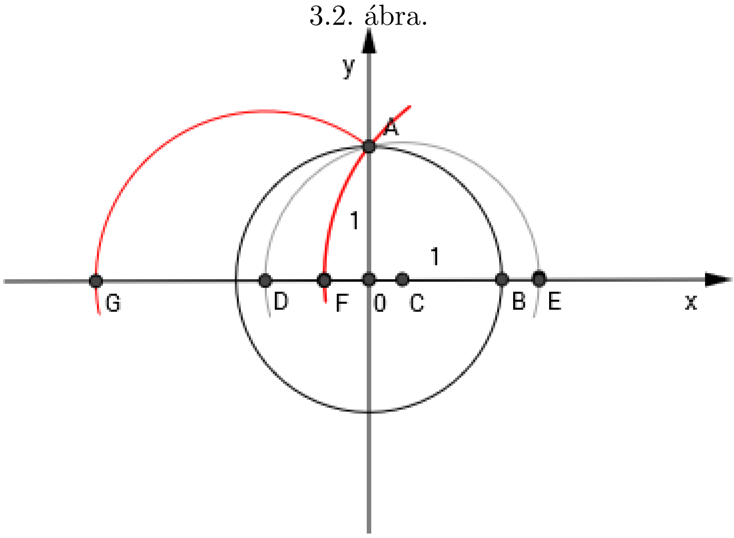
1. Vegyünk fel a Descartes-féle koordináta rendszerben azt a kört, melynek O középpontja az origó. Messe x tengely pozitív felét B-ben, az y tengely pozitív felét pedig A-ban, az (3.1) ábra alapján. Vegyünk fel egy C pontot x-en, melyre igaz, hogy $OC = \frac{1}{4}OB$. A C középpontú, CA sugarú kör messe az x tengelyt D-ben és E-ben a (3.1) ábra alapján.

3.1. ábra.



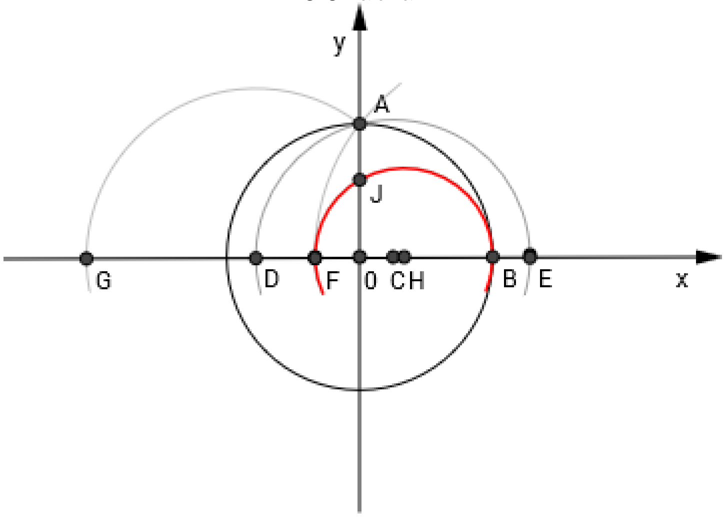
2. E középpontú, EA sugarú körrel metsszük el F-ben, illetve D középpontú DA sugarú körrel G-ben az x tengely negatív felét.

3.2. ábra.



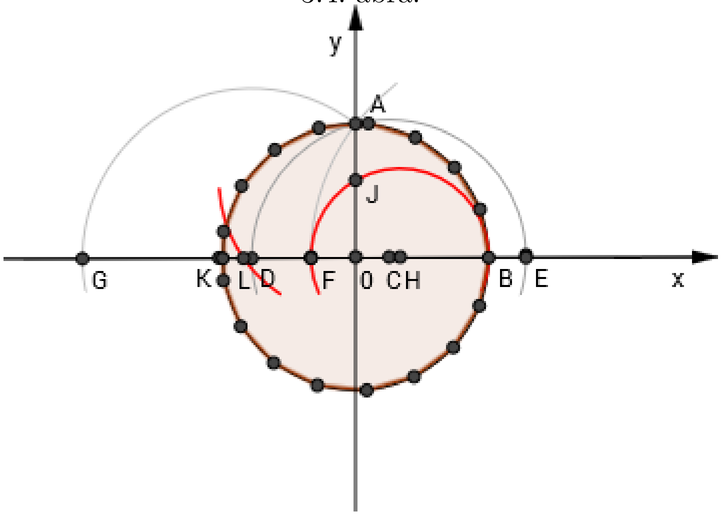
3. Legyen H a BF szakasz felezőpontja. A H középpontú, HB sugarú kör messe az y tengely pozitív felét J-ben.

3.3. ábra.



4. Legyen K a OG szakasz felezőpontja. Metsszük el a J középpontú, OK sugarú körrel az x tengelyt L-ben az (3.4) ábra alapján. Ekkor azt állítjuk, hogy KL az egységnyi sugarú körbe írt a szabályos 34-szög oldalhosszúsága. ennek ismeretében már meg tudjuk szerkeszteni az egységnyi sugarú körünkbe írt szabályos 17-szöget.

3.4. ábra.



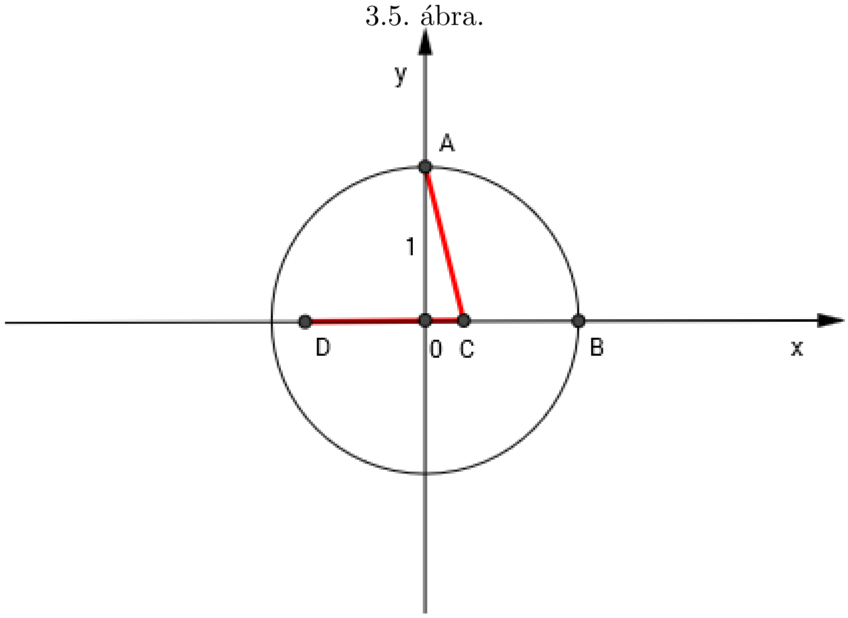
3.2. A szabályos 17-szög szerkesztés helyességének bizonyítása

Bizonyítás. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos 17-szög valóban megszerkeszthető a fenti lépések elvégzésével. Ehhez mutassuk meg, hogy $OD = \frac{1}{2}\gamma$, $OG = \beta$, $OF = \beta''$ és $KL = \alpha'$. Miután ezeket beláttuk, már csak arra lesz szükség, hogy megmutassuk α' nem más, mint egy szabályos 34-szög oldala. Innentől már gyerekjáték, hiszen 34-szögből egyszerűen meg tudjuk szerkeszteni a szabályos 17-szögünket.

- Kezdjük az első egyenlőség bebizonyításával, vagyis mutassuk meg, hogy

$$OD = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{17}\right) = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}\right).$$

3.5. ábra.



Feladatunk tehát az, hogy kiszámítsuk mennyi az OD távolság. A (3.5) ábra alapján felírhatjuk, hogy $OD = DC - OC$, illetve tudjuk, hogy $DC = AC$. OC-t ismerjük, hiszen C-t úgy vettük fel, hogy negyedelje az OB szakaszt. Kérdés az, hogy mekkora a DC távolság. Ezt egy egyszerő Pitagorasz tétellel ki tudjuk számolni, mivel $DC = AC$. Egységnyi sugarú körről beszélünk, ezért AO szakasz nagysága is ismert, vagyis 1. Így

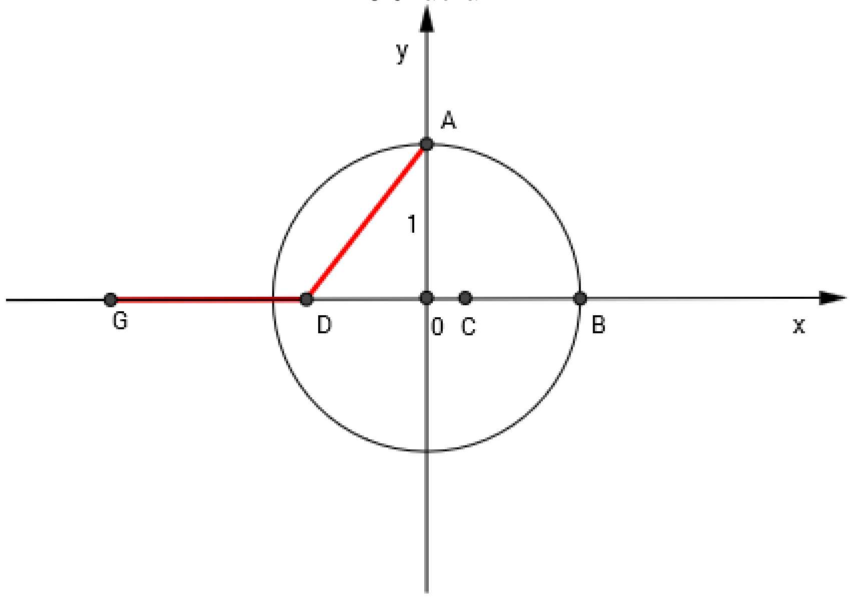
$$AC^2 = OC^2 + AO^2.$$

Megoldva az egyenletet kapjuk, hogy $AC = \sqrt{\frac{17}{16}}$.

Tehát
$$OD = \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}-1}{4},$$
amely nem más, mint $\frac{1}{2}\gamma$, melyet ki szerettünk volna számítani.

- Következő lépés az, hogy megmutassuk:
$$OG = \beta = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right).$$
Ehhez rajzoljunk megint egy ábrát a használható információkkal, mely alapján könnyebben értelmezhetjük számításunkat.

3.6. ábra.



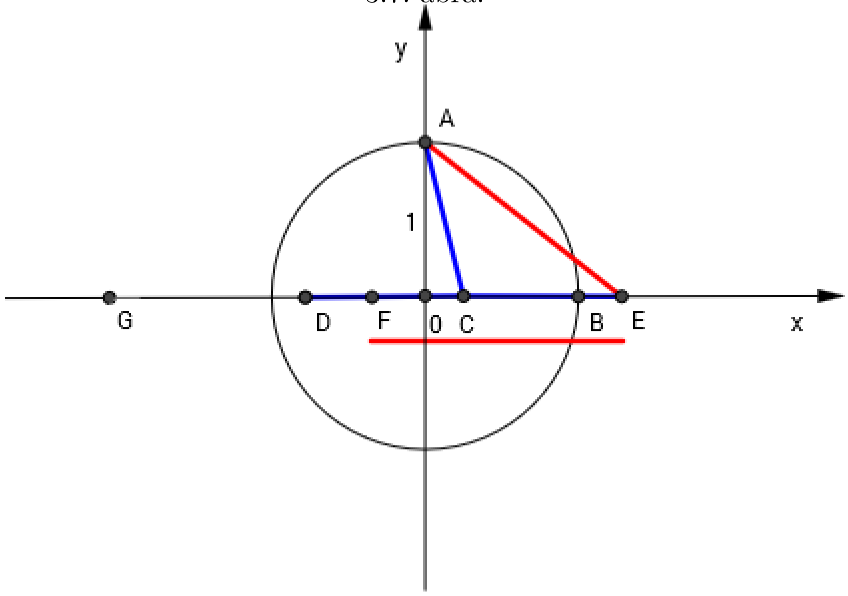
A (3.6) ábra alapján látjuk, hogy $OG = OD + DG$, ahol DG nem más, mint DA. A Pitagorasz tétel segítségével számítsuk ki DA-t.
$$DA^2 = OA^2 + OD^2$$
Tehát
$$DA = \sqrt{\frac{34-2\sqrt{17}}{16}} = \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}.$$
Így
$$OG = OD + DA = \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4} = \\ = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right), \tag{3.1}$$

ami megegyezik β-val, mellyel bizonyítottuk feltevésünket.

- Most azt fogjuk megmutatni, hogy OF szakasz hossza nem más, mint a már fentebb kiszámított β'' értéke, vagyis $\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)$.

  Megint hívjunk segítségül egy ábrát, hogy könnyebben értelmezzük a feladatot:

3.7. ábra.



Próbáljuk meg OF-et kifejezni már ismert adatok segítségével. Látjuk, hogy $OF = EA - OE$. OE pedig nem más, mint DC és $OC = \frac{1}{4}$ összege. Még meg kell vizsgálnunk, mennyi lehet DC. Egyszerű, hiszen az DC szakasz hossza megegyezik AC-vel, melyre korábban azt kaptuk, hogy $\frac{17}{16}$. Nem tudjuk még EA hosszát, erre írjunk fel megint egy Pitagorasz tételt.

$$EA^2 = OE^2 + OA^2 = \left(\frac{17}{16}+\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2$$

Megoldva az egyenletet megkapjuk, hogy

$$EA = \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}.$$

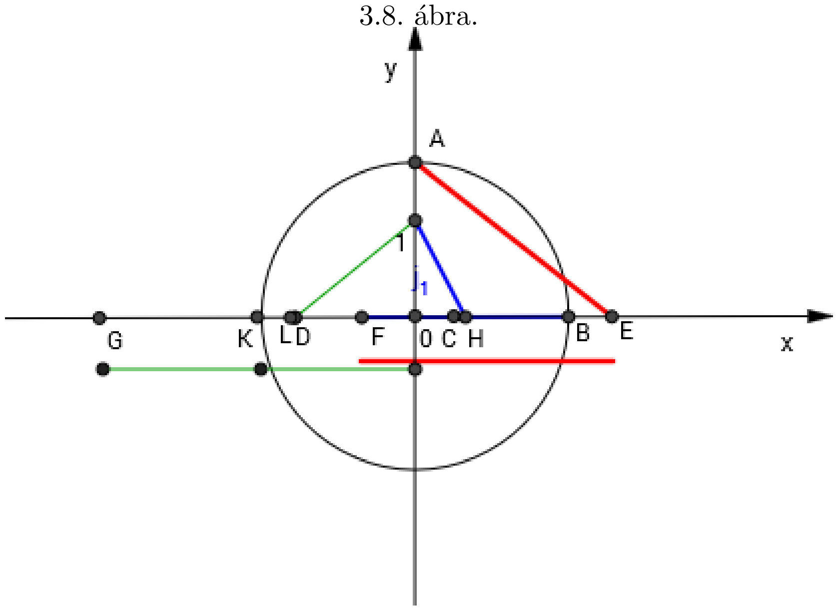
Így

$$OF = \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4} - \frac{\sqrt{17}+1}{4} = \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right).$$

Ismét beláttunk, hogy az egyenlőség igaz.

- Térjünk át az utolsó, egyben legnehezebb lépésünkre. Ennél a feladatrésznél még fontosabb lesz egy jól átlátható ábra elkészítése. Feladatunk tehát az, hogy kiszámítsuk KL értékét, és megkapjuk eredményül α'-t. α' értékét nem számítottuk ki fentebb, de egy könnyű kivonás segítségével megkaphatjuk azt. Hívjuk segítségül az alábbi egyenletünket:
$$\alpha + \alpha' = \beta.$$
Megoldva ezt, megkapjuk α'-re, hogy
$$\alpha' = \frac{1}{8}\Bigg(-1 + \sqrt{17} + 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - -2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}\Bigg). \tag{3.2}$$
Tekintsük meg alaposan a (3.8)-as ábrát.

3.8. ábra.



Látjuk, hogy
$$KL = OK - OL \tag{3.3}$$
Bontsuk a feladatunkat két lépésre, először próbáljuk meg OK-t majd utána OL-t kifejezni. Ezt a technikát többször is használni fogjuk, hogy áttekinthetőbbek legyenek az egyenletek. Kezdjük az egyszerűbbel, vagyis OK-val.

- $\underline{OK}$: Tudjuk már a szerkesztés lépései miatt, hogy $\underline{OK}= \frac{OG}{2}$. OG-t pedig már fentebb kiszámítottuk, így ezt a lépést elvégeztük.✓
- $\underline{OL}$: OL kiszámításához először írjunk fel egy Pitagorasz tételt az OJL háromszögünkre.

$$JL^2 = JO^2 + OL^2 \Rightarrow OL = \sqrt{JL^2 - JO^2}$$

Ismét kaptunk kettő ismeretlent, melyekre újabb egyenletet kell felírnunk. Tegyük ezt meg ismét két lépésben.

  * $\underline{JL}$: Ez egyszerű, hiszen $\underline{JL}= K = \frac{OG}{2}$, OG-t ismerjük, így megvan JL-em is.✓
  * $\underline{JO}$: Ismét használjuk fel Pitagorasz tételét, és fejezzük ki JO-t.

$$JH^2 = JO^2 + OH^2 \Rightarrow JO = \sqrt{JH^2 - OH^2}$$

Itt JH nem más, mint FH, amiről tudjuk, hogy $\frac{1+OF}{2}$. Tehát

$$JH = \frac{1 + OF}{2}.$$

OH-ra írjunk fel egy kivonást, vagyis $OH = FH - OF$. FH az előző lépében kiszámoltuk, írjuk be a kivonásba.

$$OH = \frac{1 + OF}{2} - OF = \frac{1 - OF}{2}.$$

Írjuk vissza JH-t és OH-t a helyükre:

$$JO = \sqrt{JH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{1 + OF}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - OF}{2}\right)^2}$$

Megkapjuk, hogy $\underline{JO}= \sqrt{OF}$. ✓

Kiszámítva JO-t és JL-t beírjuk azokat a helyükre, és megkapjuk ezzel OL-t.

$$OL = \sqrt{\frac{OG^2}{4} - OF}.$$

Hosszas számítások után megkapjuk eredményül, hogy

$$\underline{OL} = \frac{1}{4}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Most már tudjuk OL-t is. ✓

Írjuk vissza az (3.3) egyenletünkbe az adatokat, így megkapjuk KL-t.

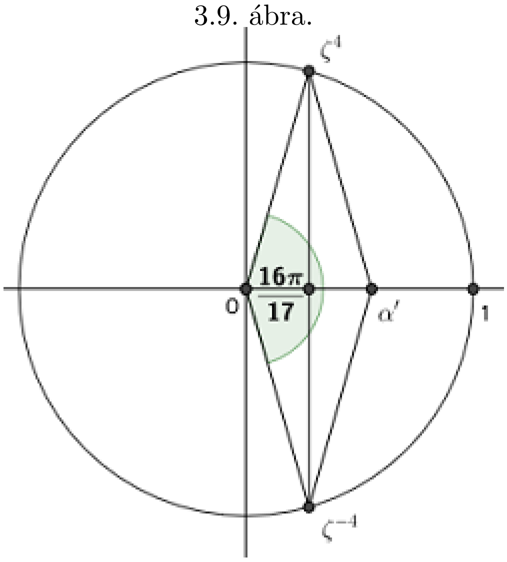
$$\underline{KL} = \frac{1}{8}\Bigg(-1+\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}- \\ -\frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}\Bigg) \quad (3.4)$$

Egyszerűsítve megkapjuk eredményül α'-t, ahogy az szükséges volt.

$$\alpha' = \frac{1}{8}\Bigg(-1+\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}- \\ -2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}\Bigg) \quad (3.5)$$

Utolsó lépésünk bebizonyítani, hogy ez az oldal, vagyis KL nem más, mint az egységnyi sugarú körbe beírt szabályos 34-szög oldala. Tekintsük meg az alábbi ábránkat.

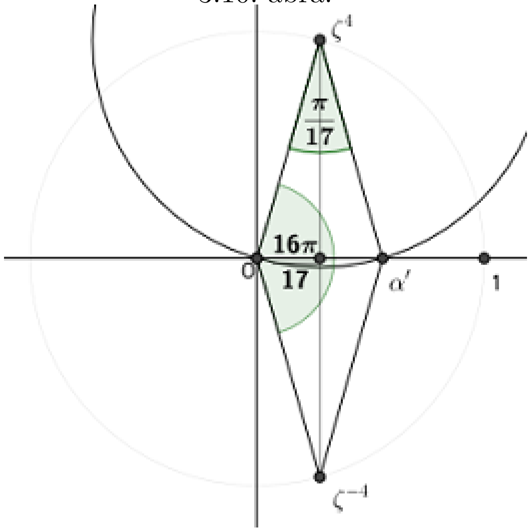
3.9. ábra.



Tudjuk, hogy $\alpha' = \zeta^4 + \zeta^{-4}$. Illetve azt is tudjuk, hogy a ζ^4 és a ζ^{-4} által bezárt szög $\frac{16\pi}{17}$. Hiszen egy szögtartomány $\frac{2\pi}{17}$, és ebből kell a pozitív és a negatív irányba 4-et venni, tehát összesen a 8-szorosát vesszük.

Rajzoljunk egy másik ábrát, melyen megmutatjuk, hogy az O, ζ^4 és α' által bezárt szög nem más, mint $\frac{\pi}{17}$.

3.10. ábra.



Ezt könnyen beláthatjuk, hiszen a négyszög belső szögeinek összege 2π. Ezek után összeadások és szorzások elvégzésével kijön, hogy a keresett szögünk valóban $\frac{\pi}{17}$. Tehát a $\frac{\pi}{17}$ középpontú szöghöz tartozó húr az egységnyi sugarú körben nem más, mint a szabályos 34-szög oldala, ami itt O és α' távolsága lesz. Ennek ismeretében már könnyen befejezhető a szerkesztésünk. Miután a KL szakasszal, mint oldalhosszal megszerkesztjük a szabályos 34-szöget, válasszuk ki minden második csúcsot, ezek fogják a szabályos 17-szögünk csúcsait alkotni. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a szerkesztési lépéseinkkel megszerkeszthető a szabályos 17-szög.

□

Irodalomjegyzék

[1] Élesztős László, Rostás Sándor: Magyar nagylexikon V. (C-Csem) *Budapest, Magyar Nagylexikon*, 503-504 (1997)

[2] http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/wp-content/uploads/2015/09/Alg1n_print_3.pdf (Utolsó letöltés ideje: 2015.12.03, 15:22)

[3] http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/wp-content/uploads/2014/11/Alg1n_print_4.pdf (Utolsó letöltés ideje: 2015.12.03, 15:18)

[4] Robin Hartshorne: Geometry: Euclid and Beyond *New York, Springer-Verlag*, 250-259 (2000)

[5] http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=199109 (Utolsó letöltés ideje: 2015.12.03, 16:14)