

# Szabályos mozaikok

Kovács Anita Mária

Matematika BSc

Szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Moussong Gábor egyetemi adjunktus

Geometriai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2016

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>2. A gömbi geometriáról</b>	<b>4</b>
<b>3. A hiperbolikus síkgeometriáról</b>	<b>6</b>
<b>4. A szabályos sokszögekről</b>	<b>7</b>
<b>5. A szabályos mozaikokról</b>	<b>15</b>
5.1. Euklideszi síkon . . . . .	19
5.2. Gömbi síkon . . . . .	20
5.3. Hiperbolikus síkon . . . . .	23
<b>6. Befejezés</b>	<b>30</b>

# 1. Bevezetés

Dolgozatomat azzal a szándékkal írtam, hogy három különböző (gömbi, euklideszi és hiperbolikus) síkon bemutassam a szabályos mozaikokat, szükséges és elégséges feltételeket keressek a létezésükre, és alapvető tulajdonságaikkal jellemezzem őket. A szabályos mozaik kifejezés alatt a sík egyfajta kitépését értjük, ahol csak szabályos sokszögeket használhatunk. Ezeket úgy kell egymáshoz illeszteni, hogy egymás metszése nélkül maradéktalanul befedjék az egész síkot. A különböző geometriákban ennek más és más feltételei vannak.

Az Olvasó által ismertnek tekintem az euklideszi sík alapvető tulajdonságait, a gömbi és a hiperbolikus geometria témánkhoz szükséges mértékű bemutatását azonban hasznosnak tartom. Ezt követően ismertetem a szabályos sokszögek általános és geometriánként eltérő tulajdonságait, ami által a három síkgeometria különbségeibe is szemléletes betekintést nyerhetünk. Ezek után jutunk el a fő témánkhoz, a szabályos mozaikokhoz, amelyeket szintén először általánosan, majd geometriánként jellemezek, a szükséges feltételek megtalálása után elégséges feltételt mutatok a létezésükre.

Ez a téma kiválóan alkalmas, hogy bemutassa a hiperbolikus síkgeometria euklideszihez viszonyított sokszínűségét, akár középiskolás végzettséggel rendelkezőknek is (feltéve persze, hogy érdeklődők és fogékonyak a matematika iránt). Ezt szem előtt tartva vezettem be a fogalmakat, mondtam ki az állításokat, és fogalmaztam meg a hozzáfűzött magyarázatokat.

A lehetőséget megragadva szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Moussong Gábor tanár úrnak, aki segítségével, szakmai tapasztalatával és támogatásával nagy mértékben hozzájárult a szakdolgozatom elkészítéséhez.

## 2. A gömbi geometriáról

A gömbi geometria a gömbfelület geometriája. Szokás úgy tekinteni rá, mint az euklideszi sík görbült megfelelőjére, így értelmet nyer az amúgy oximoronnak tűnő gömbi sík kifejezés. A legtöbb euklideszi geometriában megismert fogalom gond nélkül bevezethető itt is, figyelve arra, hogy ezek mind gömbi értelemben veendőek: pontok, egyenesek, szakaszok, távolság, körök, szögek... A továbbiakban a félreértések elkerülése végett minden alkalommal egyértelműsíttem, ha gömbi fogalommal van dolgunk, a többi esetben az euklideszi geometriáról van szó. Ezek egy része persze új definíciót igényel. Legyen  $O_g$  a gömb középpontja,  $R$  a sugara. Pontoknak tekintjük a gömbfelület pontjait. A gömbi egyenesek a főkörök, vagyis azok a halmazok, amik a gömbfelület és az  $O_g$  középpontot tartalmazó (valamely) sík metszeteiként állnak elő.

A gömbi geometria érdekes illeszkedési tulajdonságokkal rendelkezik. Bármely két nem egybeeső gömbi egyenes pontosan két pontban metszi egymást. Ezek a pontok  $O_g$ -re szimmetrikusan helyezkednek el, átellenes pontoknak hívjuk őket. Bármely két átellenes ponton át végtelen sok gömbi egyenes húzható. Ha azonban  $A$  és  $B$  pontok nem átellenesek, akkor egyértelműen illeszkedik rájuk gömbi egyenes. Egy főkört két különböző pontja ( $A$  és  $B$ ) két körívre bontja. A rövidebbik ívet (vagy bármelyiket, ha  $A$  és  $B$  átellenesek) nevezzük az  $A$  és  $B$  pontok által meghatározott gömbi szakasznak. Az  $A$  és  $B$  pont gömbi távolságán az általuk meghatározott gömbi szakasz ívhosszát értjük, amelynek mérete a középponti szög és a gömb sugarának szorzatával kapható, azaz  $R \cdot \angle A O_g B$ . Az egyszerűség kedvéért érdemes egység sugarú gömbbel dolgozni, tehát a továbbiakban legyen  $R = 1$ . Ezekből következik, hogy két pont gömbi távolsága legfeljebb  $\pi$ .

Ha a gömbi kör definiálásánál ragaszkodunk az euklideszi kör-meghatározáshoz, akkor az a gömbi síkot két korlátos tartományra osztja, és két pont is tekinthető középpontnak (amik persze átellenesek). A gömbi kör egyér-

telmúsége érdekében tegyünk megszorítást a sugárra:  $r < \frac{\pi}{2}$ . Az  $r = \frac{\pi}{2}$  egyenlőséget azért nem érdemes megengedni, mert úgy éppen egy főkört kapunk, amit gömbi egyenesnek definiáltunk. Tehát gömbi körnek nevezzük az adott ponttól (középpont,  $O$ ) azonos gömbi távolságra (sugár,  $r$ ) lévő pontok halmazát, feltéve, hogy  $r < \frac{\pi}{2}$ . A két tartomány megkülönböztetésére a középpontot tartalmazó tartományt nevezzük a gömbi kör belsejének.

Két gömbi egyenes hajlásszögének nevezzük a (bármelyik) metszéspontjukban húzott, gömböt érintő egyenesek hajlásszögét, ami tehát legfeljebb  $\frac{\pi}{2}$  mértékű. Ha adott  $AB$  és  $BC$  gömbi szakasz, akkor az általuk bezárt  $ABC$  szög a  $B$ -ből indított két érintő félegyenes hajlásszöge. Két gömbi szakasz által bezárt szög tehát  $0$  és  $\pi$  között bármilyen értéket felvehet.

### 3. A hiperbolikus síkgeometriáról

Ha a három síkgeometriát a nem metsző egyenesek szempontjából vizsgáljuk:

Az euklideszi síkon jól ismert axióma: Egy adott egyenessel egy azon kívül fekvő ponton át pontosan egy nem metsző egyenes húzható. Ez a párhuzamossági axióma egyik megfogalmazása.

A gömbi síkon azonban (ahogy azt láthattuk is) bármely két különböző gömbi egyenes metszi egymást. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adott gömbi egyenessel azon kívül fekvő gömbi ponton át nem húzható nem metsző gömbi egyenes.

Ezekkel szemben a hiperbolikus geometria arra építkezik, hogy adott egyenessel egy azon kívül fekvő ponton át nem csak egy nem metsző egyenes húzható. Ez a párhuzamossági axióma tagadásával egyenértékű állítás. Az euklideszi síkgeometria minden más axiómája (tehát a párhuzamossági kivételével) teljesül. Így az euklideszi síkgeometriában értelmezett párhuzamosság kérdését nem érintő problémák az euklidesziben megszokott módon kezelhetők, épp úgy a fogalmak (pontok, szakaszok, szögek, sokszögek, körök...), mint az állítások (egy háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást; egy húrnégyszög szemközti szögeinek összege egyenlő...). Viszont nem használhatunk semmit, ami az euklideszi geometriában a párhuzamosságon alapszik, például a vektorokat, amiknek hiányában a hasonlóság vagy a koordináta-rendszer fogalmának bevezetése sem lehetséges. Példaként említhetjük még a sokszögek szögösszegét, ami az euklideszi geometriában a párhuzamosság miatt függ csak a sokszög oldalszámától.

## 4. A szabályos sokszögekről

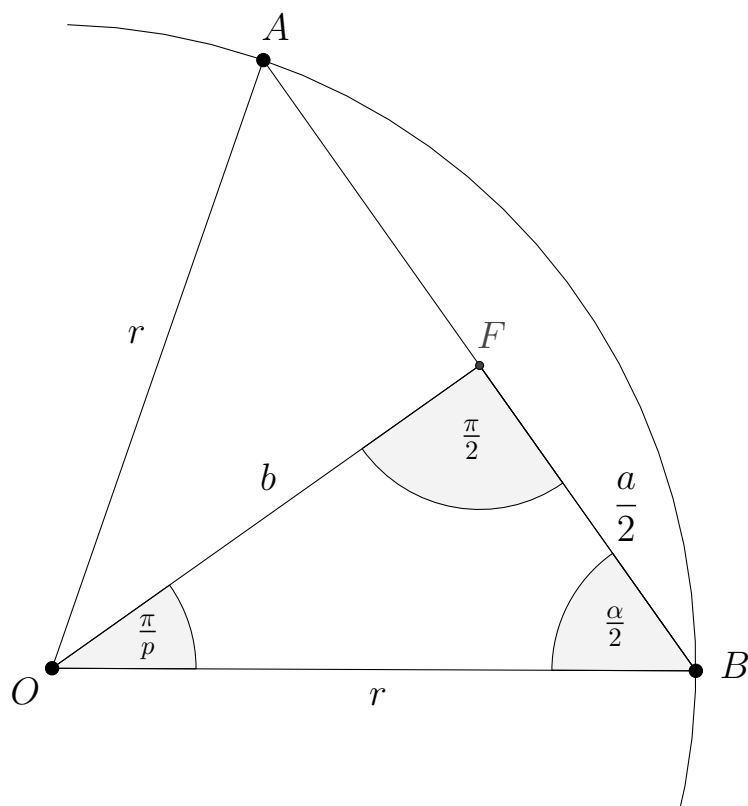
A szabályos sokszögekre vonatkozó alábbi definíció egyaránt érvényes az euklideszi, a gömbi és a hiperbolikus síkgeometriában is.

**Definíció.** Ha egy kört  $p$  darab ponttal egyenlő hosszúságú körívekre osztunk ( $p \geq 3$ ), akkor az osztópontok konvex burkát  $p$  oldalú szabályos sokszögnek nevezzük. Csúcsai az osztópontok, oldalai azok a szakaszok, melyeknek végpontjai a kör mentén szomszédos csúcsok, szögei pedig az egy csúcsban csatlakozó oldalak által bezárt szög.

Az euklideszi eset az Olvasó számára jól ismert, további megjegyzést nem igényel. A gömbi szabályos sokszög oldalai minden esetben a gömbi kör belsejében vannak. A hiperbolikus geometriában a kör meghatározása változatlan az euklideszihez képest, így mindhárom síkgeometriában érvényes, hogy a kör a szabályos sokszög köréért köre (melynek középpontját jelöljük  $O$ -val, sugarát  $r$ -rel). Egyaránt igaz az az állítás is, miszerint a szabályos sokszög oldalai egyenlő hosszúak ( $a$ ), szögeik azonos mértékűek ( $\alpha$ ). A definícióból adódóan egy  $p$  oldalú szabályos sokszögnek  $p$ -edrendben forgásszimmetriája van, melynek középpontja a köréért kör középpontja. A csúcsokat  $O$  ponttal összekötve  $p$  darab egybevágó háromszöget kapunk, melyeknek szögei  $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{2\pi}{p}$ , oldalai  $r, r, a$ .

Ezen a ponton kiváló lehetőség kínálkozik a háromféle síkgeometria különbségeinek szemléltetésére, érdemes tehát egy kis kitérőt tenni. Az egyik háromszög  $a$  hosszú oldalának felezőpontját kössük össze  $O$ -val. Mivel az így kapott derékszögű háromszögek egybevágók, bármelyiket választhatjuk a további vizsgálódásainkra.

A következő példa alapjául az imént előállított derékszögű háromszög szolgál, melyet az 1. ábra illusztrál. Szögei tehát  $\frac{\pi}{p}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}$ , oldalai  $r, \frac{a}{2}, b$ . Vizsgáljuk meg, hogy az euklideszi, a gömbi és a hiperbolikus síkgeometriában rögzített  $p$  mellett hogyan változik  $\frac{\alpha}{2}$  szög  $r$  függvényében!



1. ábra.

### Euklideszi síkon

Az euklideszi síkon  $r$   $0$  és  $+\infty$  között bármilyen értéket felvehet. Mint ismeretes, egy háromszög két szöge egyértelműen meghatározza a harmadikat, ami a mi esetünkben azt jelenti, hogy  $\frac{\alpha}{2}$  szög független  $r$  változásától.

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy  $r$  változtatásával egymáshoz hasonló háromszögeket kapunk, vagyis ha  $p$  és  $\frac{\alpha}{2}$  közül az egyik adott, akkor hasonlóság erejéig egyértelműen meghatározott a háromszögünk. Az egybevágóság garantálásához szükséges  $r$  értéke.



### Gömbi síkon

A gömbi geometriában érvényes, szögekre vonatkozó koszinusz-tétel a derékszögre felírva:

$$\cos \frac{\pi}{2} = -\cos \frac{\pi}{p} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\pi}{p} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos r$$

Mivel  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ , a következő módon rendezhetjük át az egyenletet:

$$\cos \frac{\pi}{p} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\pi}{p} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos r$$

Amiből  $\cos r$ -et kifejezve:

$$\cos r = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

Mivel az adott derékszögű háromszöget szabályos sokszögből származtattuk, a paraméterek egyes tulajdonságait már ismerhetjük. Például tudjuk, hogy a szabályos sokszögek a gömbi kör belsejében helyezkednek el, ezért  $r$  0 és  $\frac{\pi}{2}$  között változhat. A háromszög  $F$  csúcsánál lévő derékszögtől különböző szögei  $\frac{\pi}{2}$ -nél kisebbek, mert  $\alpha$  a szabályos sokszög szöge, és  $p \geq 3$ . Ezért az (1) egyenletben szereplő kotangens függvények értelmezési tartománya a  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  intervallum.

Ha  $r$  0-hoz tart:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \cos r = 1$$

Ekkor persze az (1) egyenlet jobb oldala:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 1$$

Mivel  $p$  rögzített,  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{p}$  konstans, csak  $\alpha$  a változó.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{p}$$

A jobb oldalt átírva a  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{p} = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right)$  egyenlőség szerint:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right)$$

Így megkapjuk az eredményt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}$$

Ha  $r \frac{\pi}{2}$ -hez tart:

$$\lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos r = 0$$

Így persze az (1) jobb oldala is:

$$\lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 0$$

Mivel  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{p}$  konstans, ezért

$$\lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 0$$

teljesül, és így jutunk a megoldáshoz:

$$\lim_{r \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Ez azt jelenti, hogy  $r$  minél kisebb,  $\frac{\alpha}{2}$  annál inkább közelít az euklideszi esethez, vagyis  $\left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right)$ -hez. Míg ha  $r$  értékét  $\frac{\pi}{2}$ -hez közelítjük,  $\frac{\alpha}{2}$  is  $\frac{\pi}{2}$ -hez közelít. Az eddigiek alapján tehát adott  $p$  mellett minden lehetséges  $r$  értékhez egyértelműen létezik egy  $\frac{\alpha}{2}$  érték. Mivel  $\frac{\pi}{p}$  és  $\frac{\alpha}{2}$  háromszögbeli szerepe felcserélhető, ezért  $r$  és  $\frac{\alpha}{2}$  is egyértelműen meghatározza  $p$ -t. Ennél még többet is mondhatunk  $r$  és  $\frac{\alpha}{2}$  viszonyáról, de ahhoz érdemes az (1) egyenletet átrendezni a következő módon.

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \cdot \cos r$$

Mivel  $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ , ezért a  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$  invertálható.

$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}^{-1} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \cdot \cos r \right) \quad (2)$$

A (2) egyenlet alapján kijelenthetjük, hogy  $f_g(r) := \frac{\alpha}{2}$  függvény a  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  intervallumon folytonos és szigorúan monoton növekvő, mert a  $\cos$  függvény  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ -en, a  $\operatorname{ctg}^{-1}$  függvény pedig  $(0, +\infty)$ -en folytonos és szigorúan monoton csökkenő. Ez azt jelenti, hogy  $f_g(r)$  függvény a  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  intervallumon minden értéket pontosan egyszer vesz fel. Az  $f_g(r)$  függvény folytonosságából és szigorú monotonitásából következik az invertálhatósága, ami miatt bármely lehetséges  $p$  és  $\frac{\alpha}{2}$  értékhez egyértelműen létezik  $r$ .

### Hiperbolikus síkon

A hiperbolikus síkon  $r$  0 és  $+\infty$  között minden értéket felvehet. A feladat megoldásában a hiperbolikus síkon érvényes trigonometriai összefüggések lehetnek segítségünkre. Közülük is a derékszögű háromszögekre fennálló alábbi képlet<sup>1</sup> bizonyul a leghasznosabbnak, ez ugyanis már közvetlenül tartalmazza a számunkra szükséges paramétereket.

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \cosh r \quad (3)$$

A gömbi esetről tett  $\frac{\pi}{p}$ -re és  $\frac{\alpha}{2}$ -re vonatkozó megállapítások itt is helytállóak, ezért ismét a  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  intervallumot tekinthetjük a kotangens függvény értelmezési tartományának.

Az egyenlet átrendezése után az alábbi alakot kapjuk.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} \cdot \frac{1}{\cosh r}$$

---

<sup>1</sup>Reiman István: Geometria és határterületei, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., Kisújszállás 1999, 418. o.

Ha  $r$  0-hoz tart:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \cosh r = 1$$

Így a jobb oldal határértéke:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} \cdot \frac{1}{\cosh r} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p}$$

Mivel  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right)$ , ezért

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right)$$

Ezért a megoldás:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}$$

Ha  $r +\infty$ -hez tart:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \cosh r = +\infty$$

Ekkor a jobb oldal:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} \cdot \frac{1}{\cosh r} = 0$$

Így persze a bal oldal:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0$$

És így jutunk a megoldáshoz:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2} = 0$$

Mit is jelent ez? Ha a derékszögű háromszög átfogóját minél kisebbre vesszük, annál közelebb jutunk az euklideszi síkon kapott értékhez  $\left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} \right)$ . Ha viszont az átfogót minél hosszabbra választjuk, annál inkább közelíti a 0-t a kérdéses szög.

A gömbi esethez hasonlóan vizsgáljuk meg itt is  $p$ ,  $r$  és  $\frac{\alpha}{2}$  viszonyát. Az eddigiek alapján nem szorul magyarázatra, hogy rögzített  $p$  mellett bármely

lehetséges  $r$  érték egyértelműen meghatározza  $\frac{\alpha}{2}$ -t. És mivel  $\frac{\pi}{p}$  és  $\frac{\alpha}{2}$  háromszögbeli szerepe szimmetrikus, ezért  $r$  és  $\frac{\alpha}{2}$  is egyértelműen meghatározza  $p$ -t.

Annak érdekében, hogy lássuk, mit mondhatunk  $p$  és  $\frac{\alpha}{2}$  ismeretében  $r$ -ről, alakítsuk át a (3) egyenletet:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \cosh r \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{p}$$

Ahogy arról már korábban szó esett, a kotangens függvény értelmezési tartománya esetünkben  $(0, \frac{\pi}{2})$ , ezért ezen az intervallumon invertálható, így ki tudjuk fejezni  $\frac{\alpha}{2}$ -t.

$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}^{-1} \left( \cosh r \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \right) \quad (4)$$

A (4) egyenlet alapján kijelenthetjük, hogy  $f_h(r) := \frac{\alpha}{2}$  függvény a  $(0, +\infty)$  intervallumon folytonos és szigorúan monoton csökkenő, mert a  $\cosh$  függvény folytonos és szigorúan monoton növekvő, és a  $\operatorname{ctg}^{-1}$  folytonos és szigorúan monoton csökkenő a  $(0, +\infty)$  intervallumon. Ami azt jelenti, hogy  $f_h(r)$  minden  $(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p})$  és 0 közötti értéket pontosan egyszer vesz fel. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ennek a megállapításnak igen lényeges szerepe van, mert ezek szerint  $\frac{\alpha}{2}$  0-hoz bármilyen közeli pozitív értéket felvehet. Az  $f_h(r)$  függvény alakjából tudjuk, hogy ennek ára az  $r$  növekedése. Az  $f_h(r)$  függvény folytonosságából és szigorú monotonitásából következik az invertálhatósága, aminek következtében bármely lehetséges  $p$  és  $\frac{\alpha}{2}$  értékekhez egyértelműen létezik  $r$ .

Természetesen ez a példa nem csak szemléltetés céljából állt itt, hiszen így közelebb jutottunk a szabályos sokszögek tulajdonságaihoz. A gömbi és a hiperbolikus síkgeometriában egyaránt érvényes, hogy az  $\alpha$ ,  $p$  és  $r$  paraméterek közül bármely kettő egyértelműen meghatározza a harmadikat.

Az euklideszi síkon azonban ez nem teljesül, ahogyan azt láthattuk is a példában,  $\alpha$  és  $p$  megadásával csak a hasonlóság garantált. A hiperbolikus síkon felvett szabályos sokszög adott  $p$  mellett bármely  $\alpha$  szöggel létezik, és tudjuk, hogy  $\alpha$  és  $r$  fordítottan arányosak. A fenti határérték-számítások alapján  $\alpha$ -t 0-hoz közelítve  $r$  a  $+\infty$ -be tart.

Ezekből a számunkra hasznos információ, aminek a későbbiekben hasznát vesszük, az eddigi jelöléseket és megkötéseket használó következő megállapítás.

**4.1. Tétel.** *A hiperbolikus és gömbi síkon bármely  $p$  és  $\alpha$  értékhez létezik  $r$ , amivel szabályos sokszöget kapunk. A  $p$  és  $\alpha$  által meghatározott szabályos sokszögek egybevágók.*

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy  $p$  és  $\alpha$  egybevágóság erejéig egyértelműen meghatároz egy szabályos sokszöget.

Az euklideszi síkon  $p$  és  $\alpha$  egyenértékű információ, ezért az állítás másképp hangzik.

**4.2. Tétel.** *Az euklideszi síkon bármely  $p$  (vagy bármely  $\alpha$ ) értékhez tetszőleges  $r$ -et választva szabályos sokszöget kapunk. A  $p$  (vagy  $\alpha$ ) által meghatározott szabályos sokszögek egymással hasonlóak.*

Tehát az euklideszi síkon  $p$  vagy  $\alpha$  hasonlóság erejéig egyértelműen meghatároz egy szabályos sokszöget.

## 5. A szabályos mozaikokról

**Definíció.** Egy síkon belül két sokszög szabályosan csatlakozik, ha

- nincs közös pontjuk, vagy
- egy közös pontjuk van, ami mindkettőnek egy-egy csúcsa, vagy
- egy közös szakaszuk van, ami mindkettőnek egy-egy (teljes) oldalszakasza, vagy
- egybeesnek.

**Definíció.** Síkbeli szabályos mozaiknak nevezzük az egybevágó szabályos sokszögek által alkotott olyan rendszert, amelyben teljesül, hogy

- együtt lefedik a síkot, és
- bármely kettő szabályosan csatlakozik.

A fenti definíciók mindhárom síkgeometriában értelmezhetőek, ezért az ezekből levont következtetések is egyaránt érvényesek a gömbi, az euklideszi és a hiperbolikus síkgeometriában. Érdeemes megtartani a korábban a szabályos sokszögek belső szögére bevezetett  $\alpha$  jelölést, hiszen ez a mozaik egy jellemző paramétere, mivel a szabályos sokszögeink egybevágók. A szabályos mozaik definíciójából következik, hogy az egy csúcsban található szögek mind egyenlőek, és az összegük  $2\pi$ . Tehát egy adott szabályos mozaikban bármely csúcsban egyenlő számú sokszög csatlakozik, ami függ  $\alpha$ -tól, mégpedig  $q = \frac{2\pi}{\alpha}$ , ahol  $q$  az egy csúcs körüli sokszögek száma.

A sík lefedéséhez szükséges sokszögek számában a gömbi sík jelentősen eltér a másik két síkgeometriától, hiszen a gömbi sík korlátosságából fakadóan a gömbi mozaik véges sok sokszögből áll. Ezzel szemben az euklideszi és hiperbolikus mozaikok végtelen sok sokszögből épülnek fel.

Ha  $p$  jelöli a szabályos sokszög oldalszámát, akkor a szabályos mozaikok jellemzésére alkalmas  $S = (p, q)$  szimbólumot vezethetjük be. Az eddigiekből adódóan persze mindhárom síkgeometriában  $p, q \geq 3$ .

### **A dualitás**

A dualitás jelensége egyaránt érvényes a gömbi, az euklideszi és a hiperbolikus mozaikok esetében is. Ha adott egy szabályos mozaik, akkor ebből származtatni lehet a duálisát, ami szintén szabályos mozaik lesz. A származtatás a következőképpen történik. Jelöljük  $r$ -rel az eredeti mozaik sokszögei köré írható kör sugarát. Ha az eredeti mozaik valamely  $P$  csúcsa körül  $r$  sugárral kört rajzolunk, akkor az átmegy a  $P$ -ben található sokszögek középpontjain, amik a kört egyenlő ívekre osztják. Az egy körön található középpontoknak a konvex burka a duális mozaik egy sokszöge, amiről rögtön látszik, hogy szabályos is (az egyenlő ívek miatt). Az így kapható  $S_P$  sokszögek rendszerét az eredeti szabályos mozaik duálisának nevezzük. Két tulajdonságot kell ellenőriznünk, hogy lássuk, a duális valóban szabályos mozaik.

#### *Lefedi a síkot*

Mivel az eredeti mozaik mindegyik sokszöge le van fedve az ő csúcsaihoz tartozó  $S_P$ -k által, és az eredeti mozaik lefedi a síkot, így világosan látszik, hogy az  $S_P$  sokszögek is mindent lefednek.

#### *Szabályos csatlakozás*

Ha  $P$  és  $Q$  az eredeti mozaik két szomszédos csúcsa, akkor  $S_P$  és  $S_Q$  közös oldal mentén csatlakozik. Ha  $P$  és  $Q$  az eredeti mozaik valamelyik sokszögében két nem szomszédos csúcs, akkor  $S_P$ -nek és  $S_Q$ -nak egyetlen közös csúcsa van. Ha pedig nincs olyan sokszög az eredeti mozaikban, amely  $P$ -t is és  $Q$ -t is tartalmazza, akkor  $S_P$  és  $S_Q$  diszjunkt.

Tehát a szabályos mozaik duálisa valóban szabályos mozaik.

Ha az eredeti sokszög szimbóluma  $(p, q)$ , akkor a duális mozaiké  $(q, p)$ , továbbá a duálisnak a duálisa az eredeti.



Adódik a kérdés, hogy mi lehet a kapcsolat a síkgeometriák sajátosságai és a  $(p, q)$  számpárok között. Ehhez szükségünk van a sokszögek belső szögösszegére vonatkozó összefüggésekre. Az euklideszi síkon jól ismert képletet szabályos sokszögre vonatkoztatva:

$$p \cdot \alpha = (p - 2)\pi$$

A korábbiakból következik, hogy a gömbi és hiperbolikus sokszögek szögösszegére nem tudunk egyenletet felírni, csak egyenlőtlenség jöhet szóba, mégpedig:

A gömbi síkon egy szabályos sokszög belső szögeinek összege:

$$p \cdot \alpha > (p - 2)\pi$$

Hiperbolikus síkon egy szabályos sokszög belső szögeinek összege:

$$p \cdot \alpha < (p - 2)\pi$$

A sokszögek belső szögösszegére vonatkozó összefüggések tehát a különböző síkgeometriákban különböző módon teljesülnek, melyekből  $\alpha$ -t kifejezve a következő képletekhez jutunk.

gömbi sík	euklideszi sík	hiperbolikus sík
$\frac{(p-2)\pi}{p} < \alpha$	$\frac{(p-2)\pi}{p} = \alpha$	$\frac{(p-2)\pi}{p} > \alpha$

Ahogy arról már szó esett, a szabályos sokszögek egymáshoz illesztésekor teljesül, hogy  $q \cdot \alpha = 2\pi$ , ezért  $\alpha = \frac{2\pi}{q}$  helyettesítés, és némi átrendezés után egy jól kezelhető alakot kapunk.

gömbi sík	euklideszi sík	hiperbolikus sík
$\frac{(p-2)\pi}{p} < \alpha$	$\frac{(p-2)\pi}{p} = \alpha$	$\frac{(p-2)\pi}{p} > \alpha$
$\frac{(p-2)\pi}{p} < \frac{2\pi}{q}$	$\frac{(p-2)\pi}{p} = \frac{2\pi}{q}$	$\frac{(p-2)\pi}{p} > \frac{2\pi}{q}$
$q(p - 2) < 2p$	$q(p - 2) = 2p$	$q(p - 2) > 2p$
$(q - 2)(p - 2) < 4$	$(q - 2)(p - 2) = 4$	$(q - 2)(p - 2) > 4$

Tehát ha létezik egy  $(p, q)$  számpár által meghatározott szabályos mozaik, akkor a táblázat utolsó sorában lévő képletek alapján egyértelműen eldönthető, hogy melyik geometriában van. A  $(p, q)$  számpárhoz tartozó szabályos mozaikok létezését még meg kell vizsgálni külön-külön a geometriákban. Ebben tehát segítségünkre lesz az  $S = (p, q)$  szimbólum és a táblázat, hogy az egyes mozaikok melyik síkgeometriában jöhetnek szóba.

**5.1. Tétel.** *Bármely  $p, q \geq 3$  esetén egybevágóság erejéig egyértelműen létezik a  $(p, q)$  számpár által meghatározott szabályos mozaik, mégpedig*

*ha  $(q - 2)(p - 2) < 4$ , akkor a gömbi,*

*ha  $(q - 2)(p - 2) = 4$ , akkor az euklideszi,*

*ha pedig  $(q - 2)(p - 2) > 4$ , akkor a hiperbolikus geometriában.*

A tétel alapján tehát kijelenthetjük, hogy bármely szabályos sokszöghöz létezik egy szabályos mozaik, ami a vele egybevágó példányokból épül fel. És erről a mozaikról egyértelműen megmondható, hogy melyik síkgeometriában valósul meg. A következő táblázat szemléltetés céljából áll itt. Különböző árnyalattal jelöltem a számpárokat aszerint, hogy az általuk meghatározott mozaik melyik síkgeometriában létezik (gömbi, euklideszi, hiperbolikus). Mivel  $p$  és  $q$  bármely 2-nél nagyobb természetes számot felvehet, a  $(p, q)$  számpárok csak igen kis hányadát láthatjuk a táblázatban. De persze nyilvánvaló, hogy az összes gömbi, és összes euklideszi esetet felsoroltuk, így jól látszik, hogy a hiperbolikus síkon tényleg végtelen sok szabályos mozaik létezik.

	$q$	3	4	5	6	7	8	9
$p$	$(p, q)$							
3		(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)	(3, 9)
4		(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)	(4, 9)
5		(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)	(5, 9)
6		(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	(6, 7)	(6, 8)	(6, 9)
7		(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)	(7, 6)	(7, 7)	(7, 8)	(7, 9)
8		(8, 3)	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)	(8, 7)	(8, 8)	(8, 9)
9		(9, 3)	(9, 4)	(9, 5)	(9, 6)	(9, 7)	(9, 8)	(9, 9)

A következőekben sorra vesszük a síkgeometriákat, és belátjuk, hogy az ott lehetséges mozaikok valóban léteznek. És ezzel bizonyítjuk a tételt.

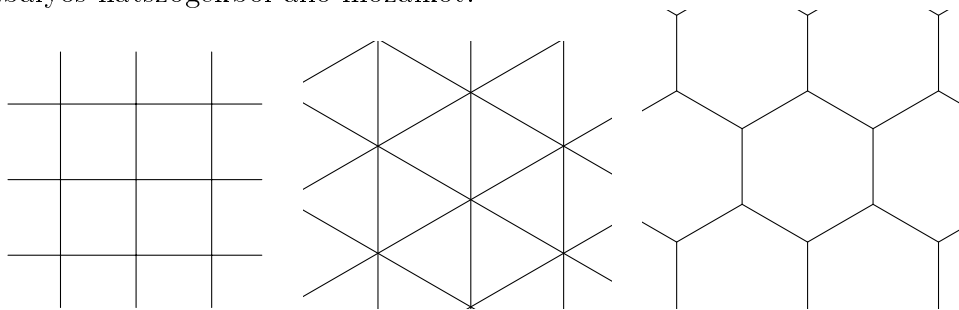
## 5.1. Euklideszi síkon

Az euklideszi síkon  $(q - 2)(p - 2) = 4$  miatt csak az  $S = (4, 4)$ ,  $S = (3, 6)$  és  $S = (6, 3)$  számpárok jöhetnek szóba. Különös magyarázatot nem igényel, hogy miért léteznek ezek a szabályos mozaikok.

Az  $S = (4, 4)$  szimbólum esetében egybevágó szabályos négszögekről van szó, amiket úgy illesztünk, hogy egy csúcs körül 4 darab sokszög helyezkedik el. Ami persze nem más, mint egy négyzetháló. Hiszen az  $S = (4, 4)$  mozaikra tekinthetünk úgy, mint amelynek előállításának alapja két egymással  $\frac{\pi}{2}$  szöget bezáró egyenes. Majd úgy húzunk ezekkel párhuzamos egyeneseket, hogy bármely két párhuzamos közötti távolság  $k \cdot a$ , ahol  $k$  egész szám,  $a$  pedig egy négyzet oldalhossza.

Az  $S = (3, 6)$  esetén szabályos háromszögeket illesztünk, és egy csúcsban 6 darab találkozik. Az előző konstrukció elve itt is érvényes annyi különbséggel, hogy eredetileg három egyenesünk van, amelyek közül bármely kettő hajlásszöge  $\frac{\pi}{6}$ , és  $a$  nem a szabályos háromszög oldalhosszával, hanem a magasságával egyezik meg.

Az  $S = (6, 3)$  szabályos hatszögekből álló mozaikot jelent, ahol egy csúcs körül 3 darab sokszög van. Az előbbi meg gondolást itt nem tudjuk használni, de az  $S = (3, 6)$  mozaik megfelelő oldalait kitörölve valóban megkapjuk a szabályos hatszögekből álló mozaikot.



A dualitás definíciója alapján rögtön látszik, hogy  $(3, 6)$  és  $(6, 3)$  számpárokkal jelölt mozaikok egymás duálisai, és a  $(4, 4)$ -mozaik duálisa vele egybevágó.

## 5.2. Gömbi síkon

A gömbi síkon  $(q - 2)(p - 2) < 4$  miatt csak az  $S = (3, 3)$ ,  $S = (3, 4)$ ,  $S = (4, 3)$ ,  $S = (3, 5)$  és  $S = (5, 3)$  számpárok jöhetnek szóba. Hogy az általuk meghatározott mozaikok valóban léteznek is, a következő gondolatmenet során válik világossá. Ahogyan azt geometriai előismereteinkből tudjuk, összesen 5 féle szabályos poliéder létezik, a tetraéder, az oktaéder, a hexaéder, az ikozaéder és a dodekaéder. Ha egy szabályos poliéder lapjait a köréírható gömbjének középpontjából annak a felületére kivetítjük, akkor éppen egy gömbi szabályos mozaikot kapunk.

$S = (3, 3)$ , tetraéder



$S = (3, 4)$ , oktaéder



$S = (4, 3)$ , hexaéder (kocka)



$S = (3, 5)$ , ikozaéder



$S = (5, 3)$ , dodekaéder



Így tehát beláttuk, hogy a gömbi geometriában valóban léteznek az  $S = (3, 3)$ ,  $S = (3, 4)$ ,  $S = (4, 3)$ ,  $S = (3, 5)$  és  $S = (5, 3)$  szimbólumok által meghatározott mozaikok.

A gömbi mozaikok esetében a dualitás ugyanaz, mint a szabályos poliéderek körében ismert dualitás: a tetraéder duálisa tetraéder, a kocka és az oktaéder, valamint a dodekaéder és az ikozaéder duális párokat alkotnak. A kivetítéssel a duális poliéderekből duális gömbi mozaikok keletkeznek.

### 5.3. Hiperbolikus síkon

A hiperbolikus sík szabályos mozaikjainak létezésére vonatkozó szükséges feltétel:  $(q - 2)(p - 2) > 4$ . Ez azt jelenti, hogy az eddig fel nem sorolt  $(p, q)$  számpárokra kell belátni, hogy az általuk meghatározott szabályos mozaikok valóban léteznek. Ám ebben a geometriában kevésbé magától értetődő a szabályos mozaikok létezésére elégséges feltételt találni. Az euklideszi szabályos mozaikok esetében az euklideszi párhuzamosság könnyítette meg a dolgot, amit a hiperbolikus síkon persze nem használhatunk. A gömbi szabályos mozaikok létezésének belátása is kézenfekvő volt, mivel lehetőségünk nyílt a konkrét mozaikok bemutatására, ami részben a gömbi geometria kézzelfoghatóságának, részben a mozaikot alkotó sokszögek véges darabszámának köszönhető.

A hiperbolikus sík sajnos egyikkel sem szolgál. Nem nyilvánvaló, hogy ha elkezdjük felépíteni a mozaikot sokszögről sokszögre haladva, akkor nem ütközünk valamilyen hibába. Hiba alatt azt értjük, hogy a szabályos mozaikok definíciójának nem eleget tevő jelenséggel találkozunk. Erre kétféle módon kerülhet sor. Az egyik, ha a sokszögek nem fedik le maradék nélkül a síkot, a másik, ha van két olyan sokszög, amelyek nem szabályosan csatlakoznak.

Az adott hiperbolikus szabályos mozaikok létezését egy konstrukció kialakításával fogjuk belátni, ami során bizonyos szabályok betartásával elkezdjük felépíteni a mozaikot. A sokszögek lerakásának sorrendjét úgy szabjuk meg, hogy ezáltal a hibákat garantáltan elkerüljük. Hasznosnak tartom a konstrukció menetét nagyvonalakban vázolni, ezzel szemléletesebbé téve a bizonyítást. Legyen  $S$  a  $p$  oldalú,  $\frac{2\pi}{q}$  szögű szabályos sokszög. Erről már korábban beláttuk, hogy egybevágóság erejéig egyértelműen létezik. Vesszük ennek egy példányát, majd körberakosgatjuk a hozzá csatlakozó és tőle nem diszjunkt példányokkal. Így egy nagyobb sokszöget kapunk, melyet aztán a következő lépésben ismét növelünk az  $S$  példányainak előző módon való hozzácsatolásával. Ezt folytatva minden lépés után egy új, az előzőnél nagyobb sokszöget

kapunk. A konstrukció kulcsa az, hogy arra tudunk vigyázni, hogy minden újonnan előálló sokszög konvex legyen, ez pedig garantálni fogja a szabályos csatlakozást a későbbi lépésekben.

A konstrukció precíz és részletes leírása előtt azonban definiáljunk egy fogalmat, amelyet a bizonyítás során használni fogunk.

**Definíció.** Legyen  $H$  tetszőleges ponthalmaz a síkon, és  $d$  tetszőlegesen adott pozitív szám, ekkor a  $H$  halmaz  $d$  sugarú környezetén azoknak az  $X$  pontoknak a halmazát értjük, amelyekhez található olyan  $Y \in H$  pont, amelyre az  $XY$  távolság legfeljebb  $d$ . Jelölés:  $B(H, d)$

Tehát például ha  $H$  egyetlen pont, akkor  $B(H, d)$  a  $H$  középpontú,  $d$  sugarú körlap.

A bizonyítás eszköze  $n$  szerinti teljes indukció. Adott  $(p, q)$  számpárhoz (ahol  $(p - 2)(q - 2) > 4$ ) akarjuk létrehozni a  $(p, q)$ -mozaikot. Hogy a konstrukciót egységes formában el tudjuk mondani, átmenetileg megkötést kell tennünk  $p$ -re és  $q$ -ra, mégpedig legyen  $p > 3$  és  $q > 4$ . Ez persze maga után vonja, hogy külön meg kell majd vizsgálnunk  $p = 3$ ,  $q = 3$  és  $q = 4$  eseteket, hogy minden  $(p - 2)(q - 2) > 4$  egyenlőtlenségnek eleget tevő  $(p, q)$  számpárhoz tartozó mozaik létezését belássuk.

**Ha  $p > 3$  és  $q > 4$**

Tehát adottak  $p, q$  számok, amelyekre teljesül, hogy  $(p - 2)(q - 2) > 4$ , valamint tegyük fel, hogy  $p > 3$  és  $q > 4$ . Az általuk meghatározott mozaikot a következőképpen állítsuk elő.

### **A konstrukció**

Rekurzióval definiálunk egy sokszögekből álló  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  végtelen sorozatot (és velük együtt mindegyik  $P_n$ -nek egy felbontását  $S$ -sel egybevágó sokszögekre) úgy, hogy a következő három tulajdonság érvényes legyen:



1. Minden  $P_n$  véges sok, egymáshoz páronként szabályosan csatlakozó,  $S$ -sel egybevágó sokszög egyesítéseként van előállítva.
2.  $P_n$  minden szöge  $k \left( \frac{2\pi}{q} \right)$  nagyságú, ahol  $k = 1$  vagy  $k = 2$ . (Ezzel garantáljuk  $P_n$  konvexitását, mert  $q > 4$  miatt még  $\frac{4\pi}{q}$  is konvex.)
3. Létezik olyan pozitív  $d$  távolság, hogy minden  $n > 1$  esetén  $B(P_{n-1}, d) \subseteq P_n$ .

Legyen  $P_1$  az  $S$  szabályos sokszög egy tetszőleges példánya, amire persze a három tulajdonság nyilvánvaló módon teljesül.

Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a  $P_1, \dots, P_n$  sokszögeket úgy, hogy mindegyikükre érvényes az (1), (2) és (3) tulajdonság. Ekkor  $P_{n+1}$ -et úgy kapjuk, hogy hozzáillesztünk még néhány  $S$ -sel egybevágó sokszöget. Ezek kétféle típusúak lehetnek a  $P_n$ -hez való csatlakozásuk szerint.

- Az első típusúak  $S$  azon példányai, amelyeket  $P_n$  minden oldalához kifelé hozzáillesztünk.

Ezután  $P_n$  minden csúcsánál kifelé szabadon marad egy-egy szögtartomány, amelynek a nagysága  $2\pi - \left( 2 \left( \frac{2\pi}{q} \right) + \alpha \right)$ , ahol  $\alpha$  a  $P_n$  szöge ebben a csúcsban. Az indukciós feltevés (2) állításából tudjuk, hogy  $\alpha = \frac{2\pi}{q}$  vagy  $\alpha = \frac{4\pi}{q}$ , ezért a szabadon maradó szögtartomány mértéke  $m \left( \frac{2\pi}{q} \right)$ , ahol  $m$  pozitív egész.

- A második típusúak  $S$  azon példányai, melyeket ezekbe a szögtartományokba illesztünk be úgy, hogy bármelyiknek a csúcsa  $P_n$  valamely csúcsához csatlakozik, és egy-egy szögtartományba  $m$  darab kerül.

A  $P_{n+1}$  sokszöget tehát úgy kapjuk, hogy  $P_n$ -et egyesítjük az összes első típusú és az összes második típusú hozzáillesztett sokszöggel. Az így előállított  $P_{n+1}$  tulajdonságait kell megvizsgálnunk, hogy belássuk, hogy az (1), (2) és (3) állítások  $n$  helyett  $(n + 1)$ -re is igazak.

1. Az egyetlen, ami magyarázatot igényel, a szabályos csatlakozás. Természetesen az  $S$  azon példányai, melyek  $P_n$ -nek részét képezik, az indukciós feltevés miatt páronként szabályosan csatlakoznak. Továbbá az is nyilvánvaló  $P_n$  konvexitása miatt a konstrukcióból, hogy a  $P_n$ -hez újonnan hozzávett sokszögek szabályosan csatlakoznak bármelyik  $P_n$ -belihez.

Így tehát csak az újak egymáshoz való szabályos csatlakozását kell belátni. Az első típusúak egymás közt megint csak  $P_n$  konvexitása miatt csatlakoznak szabályosan ( $q > 4$  miatt a szomszédos oldalakra illesztett sokszögek csúcsban találkoznak, egyébként diszjunktak).

A második típusúak  $P_n$  egy-egy csúcsánál halmazokat alkotnak, amikben belül nyilván nincs gond a szabályos csatlakozással. Mivel  $p > 3$ -at előre feltettük, ezért kijelenthetjük, hogy a különböző halmazok egymástól és az első típusúaktól diszjunkt szögtartományokban fekszenek. Ebből persze következik, hogy a különböző halmazban levő második típusúak is, illetve az első és második típusúak is egymáshoz szabályosan csatlakoznak.

Ezzel tehát beláttuk, hogy a  $P_{n+1}$ -et alkotó szabályos sokszögek páronként szabályosan csatlakoznak egymáshoz.

2. Mivel  $p > 3$ , ezért  $P_{n+1}$  bármelyik csúcsa esetén csak a következő két lehetőség jöhet szóba:

- vagy egyetlen újonnan  $P_n$ -hez illesztett sokszögnek az egyik csúcsa tölti ki,  $\left(\frac{2\pi}{q}\right)$
- vagy pedig két darab (két második típusú, vagy egy első és egy második típusú) sokszög egy-egy csúcsának az egyesítése tölti ki.  $\left(2 \cdot \frac{2\pi}{q}\right)$

Ezért a (2) tulajdonság érvényes  $P_{n+1}$ -re.

3. Az állítás belátásához találnunk kell egy alkalmas  $d$  távolságot. Ennek a meghatározásához előbb vegyünk fel a síkon egy  $S$  oldalhosszával egyenlő hosszúságú  $AB$  szakaszt. Erre illesszük rá  $S$  egy-egy példányát, hogy  $A$  és  $B$  éppen a sokszögek két-két szomszédos csúcsára illeszkedjen, majd az  $A$  és  $B$  végpontok körül üresen maradt szögtartományokba illesszük csúccsal  $S$  egybevágó példányait úgy, hogy a szögtartományt teljesen kitöltsük. Így a  $2q - 2$  darab sokszög (mivel  $q$  darab kerül egy pont köré, és van kettő, ami közös) egyesítésével egy  $T$  sokszög áll elő. Ekkor  $AB$  szakasz  $T$  belsejében van, ezért az  $AB$  szakasz távolsága a  $T$  határától pozitív szám, ez legyen  $d$ . (Két ponthalmaz távolságán azt a két pont közötti legkisebb távolságot értjük, ahol az egyik pont az egyik, a másik pont a másik halmazban van.) Tehát úgy is fogalmazhatunk, hogy ha  $P$  az  $AB$  szakasz tetszőleges pontja, és  $Q$  tetszőleges olyan pont, amely nincs  $T$  belsejében, akkor  $P$  és  $Q$  távolsága legalább  $d$ . Ezzel a  $d$  távolsággal már nyilvánvaló a (3) állítás  $P_{n+1}$ -re, hiszen  $P_n$  minden oldalszakasza köré a fenti módon előállított  $T$  benne fekszik  $P_{n+1}$ -ben.

Ezzel a  $P_n$ -ek definíciója készen van minden  $n$ -re, a rekurzió végigmegy az összes természetes számon.

### Valóban szabályos mozaik?

Tekintsük ezután a síkon a  $P_n$ -beli sokszögek halmazainak az unióját minden  $n$ -re. Erről akarjuk belátni, hogy ez egy  $S$ -sel egybevágó sokszögekből felépülő szabályos mozaik. Ehhez kell, hogy  $S$  bármely kettő példánya szabályosan csatlakozzon, és hogy  $S$  összes felhasznált példánya együtt lefedje a síkot.

#### *Szabályos csatlakozás*

A szabályos csatlakozás nyilvánvaló, hiszen a sokszögek rendszerében bármely kettőről meg tudjuk mondani, melyik  $P$  sokszögben van. Legyen az egyik  $P_m$ -ben, a másik  $P_n$ -ben, ahol  $m \geq n$ , ekkor persze  $P_m$  mindkettőt tartalmazza, és az (1) tulajdonságból tudjuk, hogy akkor azok szabályosan csatlakoznak.

#### *Sík lefedése*

Jelöljük  $O$ -val az első sokszög (azaz  $P_1$ ) középpontját. Ekkor a (3) tulajdonság ismételt alkalmazásával következik, hogy minden  $n > 1$ -re az  $O$  körüli  $(n-1)d$  sugarú körlap benne fekszik  $P_n$ -ben. És mivel a rekurzió végigmegy az összes természetes számon, a sík tetszőlegesen adott pontjához van olyan  $n$ , hogy a pontot az  $O$  körüli  $(n-1)d$  sugarú körlap tartalmazza.

### Ha $p = 3$

Tekintsük azokat a  $(p, q)$  szabályos mozaikokat, ahol  $p = 3$ . Ez azt jelenti, hogy  $S$  háromszög, és mivel a hiperbolikus síkon vagyunk,  $q > 6$ . A fenti konstrukció alkalmazásához módosítanunk kell rajta, ehhez pedig sorra kell venni, hol használtuk ki a  $p > 3$  feltevést.

Az (1) bizonyításában (szabályos csatlakozás) ez a feltevés biztosította, hogy a második típusú hozzácsatolt sokszögeknek a különböző csúcsokhoz tartozó halmazai diszjunkt szögtartományokban fekszenek, ezért diszjunktak. Ha  $p = 3$ , akkor tehát nem feltétlenül diszjunktak, de a lehetséges közös pont csak a csúcsa lehet mindkettőnek (mégpedig csakis akkor, ha a szóban

forgó két halmaz a  $P_n$  sokszög két szomszédos csúcsához tartozik, és éppen közrefog egyet az első típusú háromszögek közül), ami szintén szabályos csatlakozásnak számít.

A (2) bizonyításában meghatároztuk  $P_{n+1}$  szögeit. Ebben az esetben a  $3\left(\frac{2\pi}{q}\right)$  összeget is kaphatjuk szögmértéknek, ha három darab háromszög fut össze (a közös csúcs az első típusú hozzáillesztett háromszögek külső csúcsánál lehetséges). Mivel  $q > 6$ , ez a szög még mindig konvex szög. Tehát egy kevés módosítás elegendő az indukciós feltevésben. Mégpedig az, hogy  $p = 3$  esetén a (2) állításban meg kell engedni a  $k = 3$  lehetőséget is. Más módosítás azonban nem kell, így a bizonyítás összeáll a  $p=3$  esetre is.

**Ha  $q = 3$  vagy  $q = 4$**

Ebben az esetben, mivel az hiperbolikus síkon vagyunk, teljesül, hogy  $p > 6$  illetve  $p > 4$ . Ezért a bizonyítás már tisztázott része alapján létezik a  $(q, p)$  szimbólumú mozaik. Ahogyan arról már korábban szó esett, egy szabályos mozaik duálisa is szabályos mozaik, ezért a  $(p, q)$  által meghatározott szabályos mozaik is létezik.

Ezzel a bizonyítás végére értünk, hiszen beláttuk, hogy minden,  $(p - 2)(q - 2) > 4$  egyenlőtlenségnek eleget tevő  $(p, q)$  számpár által meghatározott szabályos mozaik valóban létezik.

## 6. Befejezés

Dolgozatom során bemutattam a szabályos mozaikokat, ezen keresztül pedig szemléltettem a gömbi, az euklideszi és a hiperbolikus sík néhány különbségét. A legjelentősebb megállapítás a szabályos mozaikokkal kapcsolatban, hogy bármely szabályos sokszögből ki lehet rakni szabályos mozaikot, és pusztán a sokszög oldalszámát és szögét ismerve egyértelműen eldönthető, hogy melyik síkgeometriában alkot mozaikot. A szakdolgozat másik fontos eredménye, hogy a témán keresztül viszonylag könnyen érzékeltethetőek a hiperbolikus sík különlegességei, legalábbis olyan mélységben, amely egy matematika fakultációt látogató, lelkes diák számára még befogadható. Ugyanis nem tartom kizártnak (pontosabban reménykedem benne), hogy tanári pályám során találkozom olyan matematika iránt érdeklődő fiatalokkal, akik nem elégszenek meg az előírt törzsanyaggal.