Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Paradoxonok

Diplomamunka

Kövesdi Péter

Matematika tanári szakirány

Matematika BSc

Témavezető:

Hermann Péter

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatom középpontjában az „aranycsináló”-paradoxonként elhíresült Banach – Tarski paradoxon áll. Ez szemléletesen megfogalmazva azt mondja ki, hogy ha egy tömör gömböt a megfelelő módszerrel feldarabolunk, akkor az így kapott részeket össze tudjuk úgy rendezni, hogy végeredményként két, az eredetivel azonos gömböt kapunk. Azaz a paradoxon szerint képesek vagyunk megkettőzni a tömör gömböt.

A témát csoportelméleti összefüggésben tárgyalva ez nem jelent mást, mint hogy egy halmazt, ami a gömb pontjait tartalmazza, egy módszer segítségével megkettőzzük, pontosabban látható lesz, hogy ekkor kétféle módon állítjuk elő. Azonban ezek belátásához szükség van a csoportelmélet ide vonatkozó összefüggéseinek ismeretére, melyeket a dolgozat elején összegyűjtöttem.

Az állítás paradox mivolta nem kérdéses, teljesen ellentmond a mindennapi életben tapasztaltaknak. Azonban nagyon érdekes, hogy a matematika megenged ilyen állításokat. Ennek az az oka, hogy ennél az állításnál felhasználjuk a kiválasztási axiómát, melyet már a dolgozat elején röviden ismertetni fogok.

Annak szemléltetésére, hogy nem az általam tárgyalt paradoxon nem az egyetlen ilyen "valótlanságot" igazoló állítás, az utolsó fejezetben megemlítek még ehhez hasonló érdekes matematikai következtetéseket.

2. Kiválasztási axióma

Mindenek előtt a legfontosabb az, hogy a halmazelmélet legvitatottabb axiómáját, a kiválasztási axiómát ismertessem, ugyanis ezen alapszanak a szakdolgozatomban tárgyalt paradoxonok. Először Ernst Zermelo mondta ki axiómaként a jólrendezési tétel bizonyításában, amit újra kellett fogalmaznia, mivel nagy vitát váltott ki a matematikusok körében. Amellett hogy sok pozitív, a tudományt előre vivő következménye volt, akadtak szép számmal olyanok is, amelyek a valóságnak ellentmondó állításokat eredményeztek. Erre jó példa a Banach-Tarski paradoxon. 1963-ban Paul Cohen igazolta, hogy független a többi axiómától, azokból nem lehet levezetni. Ezáltal a kiválasztási axiómát elfogadottnak tekinthetjük.

2.1. Kiválasztási axióma (Axiom of Choice - AC). *Ha $\{A_i : i \in I\}$ nemüres halmazok rendszere, akkor $\exists f$ függvény, amelyre $D(f) = I$ és $f(i) \in A_i$ $\forall i \in I$-re. Az f függvény neve kiválasztási függvény, minden A_i-ből kiválaszt egy elemet.*

2.1. Megjegyzés. *Az axióma egy ekvivalens megfogalmazása:*
Páronként diszjunkt halmazok bármely rendszeréhez létezik olyan halmaz, amelynek az összes nem üres halmazzal pontosan egy közös eleme van.

A dolgozat során a **4.1.1. Tétel** bizonyításánál, és annak következményeinél használom fel, amelyek a Haussdorff illetve a Banach-Tarski paradoxon igazolásához egyaránt szükségesek.

3. Csoportelméleti alapok

Ez a fejezet a probléma megértéséhez szükséges ismereteket tartalmazza, illetve foglalja össze, elindulva a csoportok definíciójától, egészen a szabad csoportok definíciójáig.

3.1. Csoport fogalma

Ebben a részben a témához szorosan kapcsolódó alapdefiníciókat csak felsorolás szintjén említem meg. Ezek az előadásokon tanultak szerint a következők:

3.1.1. Definíció (Csoport). *Legyen* $G :\neq \emptyset$ *halmaz, rajta egy művelet* $(\cdot)$*:* $\forall a, b \in G$*-re értelmezett* $a \cdot b \in G$ *úgy, hogy:*

1. *Asszociativitás:* $\forall a, b, c \in G : \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. *Egységelem:* $\exists e \in G : \forall x \in G \ e \cdot x = x \cdot e = x$
3. *Neutrális elem (inverz):* $\forall c \in G \ \exists c^{-1} \in G \ c \cdot c^{-1} = c^{-1} \cdot c = e$

3.1.1. Példa. *Vegyük az egész számok azon részhalmazát, melynek elemei a modulo 7 maradékosztályok, és lássuk el a + művelettel. Az így kapott halmaz csoportot alkot, melynek neve az egész számok mod 7 maradékosztályainak additív csoportja:* $Z_7^+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3.1.1. Megjegyzés. *Akkor beszélünk egységelemről, ha a művelet szorzás* $(\cdot)$*. Azonban a fenti példán jól látható, hogy a + kétváltozós művelettel ellátott halmaz is lehet csoport. Ebben az esetben a neutrális elem megnevezése nullelem.*

- *Szorzásnál: 1-gyel való szorzás nem változtatja meg az adott csoportelemet.*
- *Összeadásnál: az adott csoportelemhez 0-t adva nem változik.*

3.1.2. Megjegyzés. *Mivel a neutrális elem művelettől függően más lehet, így annak előállítása két csoportelem és a művelet segítségével is eltérő :*

- *Szorzásnál:* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ *inverz*
- *Összeadásnál:* $a + b = 0 => a = -b => b = -a$ *azaz* $a + (-a) = 0$ *ellentett*

A **3.1.1. Definícióban** nem tettük fel, hogy a művelet kommutatív. Ezt a tulajdonságot az alábbi definíció tartalmazza:

3.1.2. Definíció (Abel-csoport). *Azokat a csoportokat, amelyekben a művelet kommutatív, azaz $\forall a, b \in G$ esetén $a * b = b * a$ teljesül, Abel-csoportnak hívjuk.*

Ezen definíciók ismeretében kezdhető meg a bonyolultabb csoportelméleti összefüggések tárgyalása.

3.2. Csoporthatás, paradox csoporthatás

Ahogy a bevezetőben írtam, szükség van halmazkettőző módszerre, ezért ebben a részben azt fogom megmutatni, hogy hogyan lehet egy halmazt megduplázni egy csoport segítségével. Pontosabban a halmaz egy-egy diszjunkt részéből hogyan hozható létre az eredeti halmaz csoport segítségével. A paradoxitás abban rejlik, hogy nem csak az egyik részből állítható elő a teljes halmaz, hanem az attól diszjunkt másik részhalmazból is.

Ennek alapján a csoport elemeinek H halmazbeli elemhez H-belit kell rendelni. Így a csoportelemeket tekinthetjük egy-egy $g : H \to H$ függvénynek. Pontosabban vannak olyan G-beli elemek, amik $H \supset A \to H$ függvények és olyanok, amelyek $H \supset B \to H$ függvények, ahol teljesül még, hogy $A \bigcup B = H$ (diszjunkt unió). Ezt követően definiálnunk kell, hogy miként tud hatni egy csoport egy halmazon/ részhalmazon. A csoport elemeinek hatását a halmazelemekre a csoportbeli művelettel értelmezzük ($*$). Azonban $*$ változói ebben az esetben nem két G-beli elem, hanem egy G-beli és egy H-beli elem. Ezért a továbbiakban a következő jelölést fogom használni:

$$\text{ha } g \in G \text{ és } h \in H : h * g := h^g$$

Ennek megfelelően:

$$\text{ha } a, b \in G \text{ és } x \in X : (h * a) * b = (h^a)^b$$

3.2.1. Definíció (Csoporthatás). *Legyen adott G csoport és H halmaz. Ekkor G hat H-n, ha: $\forall g \in G$ és $h \in H$ esetén $h^g \in H$ értelmezett úgy, hogy:*

1. *$\forall a, b \in G$ és $\forall h \in H$-re $h^{ab} = (h^a)^b$*
2. *$\forall h \in H$-ra $h^e = h$, ahol e a G egységeleme*

Mivel G csoport, így teljesülnie kell a 3.1.1-ben szereplő csoportaxiómáknak. Ezek közül 1) és 2) a csoporthatás definíciója alapján teljesül. Ezek mellett azonban G zárt kell hogy legyen az inverzképzésre:

$$\forall g \in G : \exists g^{-1} \in G : (h^g)^{g^{-1}} = (h^{g^{-1}})^g = h, \text{ ahol } h \in H$$

Az eddigiek alapján ez azt jelenti, hogy az egyes függvényeknek kölcsönösen egyértelműeknek kell lenniük. Azaz $D(g) = R(g^{-1})$ és $D(g^{-1}) = R(g)$ egyenlőségeknek teljesülniük kell. Ez szükséges és egyben elégséges feltétel az inverzfüggvény létezésére.

A későbbiekben szereplő **4.1.1. Tétel.** nem-triviális fixpont nélkül ható, paradox csoportra vonatkozik, melyhez szorosan kapcsolódik a csoporthatás stabilizátorának fogalma. Emellett a tétel bizonyításához definiálni kell a csoporthatás pályáját is.

3.2.2. Definíció (Csoporthatás pályája és stabilizátora). *Legyen G a H halmazon ható csoport, továbbá $g \in G$ és $h \in H$. Ekkor:*

1. *A h pont orbitja (pályája) G-nél $Orb_G(h) = \{h^g | g \in G\}$, vagyis azok a pontok, ahová h-t G elemei el tudják vinni.*
2. *A h stabilizátora G-ben $G_h = \{g \in G | h^g = h\}$, vagyis azok a csoportelemek, amik fixen hagyják h-t.*

3.2.1. Megjegyzés. *G hatása X-en tranzitív, ha csak egy pálya van. Ez azt jelenti, hogy $\forall h_1, h_2 \in H \quad \exists! g \in G$, amire $h_1^g = h_2$.*

3.2.2. Megjegyzés. *Speciális eset: amikor $G \leq S_H$.*
Itt S_H tetszőleges H halmaz bijektív leképezései, transzformációi.
S_H csoportot alkot a kompozíció műveletére nézve, ezt a H-n ható szimmetrikus csoportnak nevezzük, aminek G részcsoportja, úgynevezett transzformációcsoport (G elemei is transzformációk).

Maga a hatás már tisztázott, ami még maradt, az a paradoxitás kérdése. Ennek magyarázata az, ahogy azt már korábban megemlítettem, hogy G elemei között vannak olyanok, amelyek X elemeire hatva előállítják H halmazt. Legyenek ezek a függvények $a_1, ..., a_n \in G$. Hasonlóan találunk olyan G-beli elemeket, amik Y-on hatva előállítják H-t, ezek legyenek $b_1, ..., b_m \in G$.

3.2.3. Definíció (Paradox csoporthatás). *Legyen G csoporthatás L-en és $H \subseteq L$. Ekkor H halmaz G-paradox, ha $\exists n, m \in \mathbb{Z}^+$ és $\exists X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m \subseteq H$ ahol $\forall i, j \;:\; X_i \cap Y_j = \emptyset$ és $\exists a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in G$ esetén:*

$$H = \cup X_i^{a_i} \text{ és } H = \cup Y_j^{b_j}.$$

Összegezve az eddigieket, sikerült kétféleképp előállítani H halmazt, méghozzá G csoport segítségével.

3.3. Szabad csoportok

Ebben a részben egy új csoportkonstrukciót definiálok, az úgynevezett szabad csoportokat. Ezek segítségével konkretizálható, hogy milyen tulajdonságú csoportokkal hozhatunk létre paradox felbontást. Ezt a következő fejezet elején fogom részletezni, amihez az itt tárgyalt kétgenerátoros szabad csoportok ismerete szükséges.

3.3.1. Definíció. *Legyen G csoport és $g \in G$. Ekkor g elem egész kitevőjű hatványaiból álló részcsoportot a g elem által generált részcsoportnak nevezzük, jele: $\langle g \rangle$.*

3.3.2. Definíció. *Tetszőleges G csoport esetén az $X \in G$ által generált részcsoport a legszűkebb X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele: $\langle X \rangle$. Az X halmazt G generátorrendszerének nevezzük (X generálja G-t), ha $\langle X \rangle = G$.*

3.3.1. Megjegyzés (Legszűkebb elem). *Olyan halmaz a halmazrendszerben, ami a halmazrendszer minden elemének részhalmaza ($\neq$ minimális elem: ez a legszűkebb halmaz a halmazrendszerben).*

3.3.1. Tétel. *Legyen G csoport és $X \subseteq G$. Ekkor $\langle X \rangle$ a G azon elemeiből áll, melyek fölírhatók az X elemeiből és azok inverzéből képzett akárhány tényezős szorzatként.*

A tétel alapján írjuk fel az X halmaz által generált $\langle X \rangle$ részcsoportot. Ehhez venni kell $\forall x \in X$-hez x^{-1} elemet úgy, hogy $x \neq x^{-1}$ és $x^{-1} \notin X$. Legyen S az a halmaz, ami a rendelkezésre álló x és x^{-1} "betűkből" álló "szavakat" tartalmazza. Ezek a szavak olyan véges sorozatok, melyeknek minden eleme x vagy x^{-1}.
Ha például $X = \{x, y\}$, akkor egy lehetséges szó:

$$xxyxxxxy^{-1}y^{-1}y^{-1}y^{-1}x^{-1}x^{-1}yyyxy^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1},$$

amit összevonásokkal rövidebb alakban felírva: $x^2yx^4y^{-4}x^{-2}y^3xy^{-1}x^{-3}$

A következő lépésben be kellene látni, hogy ezekből a szavakból álló halmaz csoportot alkot, bizonyos feltételek mellett. Ehhez teljesítenie kell a csoport-axiómákat.
Első lépésben nevezzük "üres szó"-nak azt az elemet, aminek egyetlen betűje sincs. A csoportot el kell látni egy asszociatív művelettel, legyen ez a halmazban szereplő szavak $s, t \in S$ szorzata $s \cdot t$, ami a szavak ebben a sorrendben történő egymás után írásával képezhető. Látható, hogy az üres szó erre a műveletre kétoldali neutrális elem, jelöljük 1-gyel.
Már csak az inverzképzésre való zártság szükséges, ehhez azt szeretnénk, ha x és x^{-1} egymás inverzei lennének. Ebből az következne, hogy $x \cdot x^{-1} = 1$, ami a csoportelemeket tekintve komoly változásokat jelent. Tekintsük például

$xyy^{-1}x^{-1}x$ és $y^{-1}yx$ szavakat. Az eddigiek alapján ezek egyenlők, hiszen az inverzek miatt mindkettő az x szóvá egyszerűsödik. Az így leegyszerűsödött szavakat **redukált szavak**nak nevezzük.

3.3.1. Állítás. *Egy adott szót akárhogy egyszerűsítünk, mindig ugyanazt a redukált szót kapjuk.*

3.3.1. Következmény. *A 3.3.1. Állítás. miatt ezek a redukált szavak egyértelműen meghatározottak.*

Az ily módon előállított elemek már csoportot, úgynevezett *szabad csoportot*) alkotnak.

3.3.3. Definíció (Szabad csoport). *G szabad csoport, ha minden eleme pontosan egyféleképpen áll elő az $X \subseteq G$ halmaz elemeiből és azok inverzéből (az egységgel való bővítéseket leszámítva). Azaz $\forall g \in G$-hez $\exists!\ a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{Z}$ kitevők, hogy $x, y \in X$ esetén: $g = x^{a_1}y^{b_1}x^{a_2}y^{b_2}...x^{a_n}y^{b_n}$, ahol $\forall a_i, b_j \neq 0$ (kivéve a_1, b_n).*

3.3.2. Megjegyzés. *A levezetésben két elem generálja a részcsoportot, ez a kétgenerátos szabad csoport, jele: F_2.*

4. Haussdorff-paradoxon

Ebben a fejezetben felhasználva az eddig megismert csoportelméleti fogalmakat, további tételek és következtetések segítségével juthatunk el a Haussdorff-paradoxonig. Ehhez a térbeli forgatások mátrixokkal való leírását is részletezni fogom, mivel a paradoxon a térbeli, origón áthaladó egyenesek körüli forgatások szabad csoportjára (SO_3) vonatkozik.

4.1. Paradoxitás és szabad csoportok

A következő állítás tárgyalása előtt vizsgáljuk meg a csoporthatás egy speciális esetét. Válasszuk a 2.2.1. definícióban szereplő H halmazt úgy, hogy csoport legyen, pontosabban annak a G csoportnak, ami éppen eredetileg H-n hat. Azaz G csoport hasson önmagán a definícióban leírtak szerint:

1. $\forall a, b, c \in G : c^{ab} = (c^a)^b$

2. $\forall c \in G : c^e = c,$ *ahol G egysgeleme e.*

4.1.1. Megjegyzés. *G elemei ebben az esetben is bijektív leképezések az inverzre való zártság miatt.*

4.1.2. Megjegyzés. *Az így definiált hatás tetszőleges csoport esetén természetes hatás önmagán.*

Ahhoz, hogy közelebb kerüljünk célunkhoz, azt kell megvizsgálni, hogy mely csoportok esetén áll elő az adott csoport paradox módon, amikor önmagán hat. Ehhez jó kiindulópont az alábbi állítás:

4.1.1. Állítás. *Egy F szabad csoport, melynek rendje 2 akkor F-paradox, ha F bal szorzással hat önmagán.*

Bizonyítás: Mivel $|F| = 2$, így két elem generálja, legyenek ezek x és y. Tekintve, hogy F kétgenerátoros szabad csoport, így előáll x és y elemekből és inverzeikből, azaz x, x^{-1}, y, y^{-1} betűk szorzatából (egymás után írásából). Ha az s ezen négy betű valamelyike, akkor jelentse $W(s)$ halmaz az F csoport azon elemeit, amelyek s-sel kezdődnek. Például:

$$yx^{-1}yyxy^{-1} \in W(y) \text{ vagy } x^{-1}yxxy^{-1}y^{-1}x^{-1} \in W(x^{-1}).$$

Ekkor az F csoport előáll a következő alakban:

$$F = 1 \cup W(x) \cup W(x^{-1}) \cup W(y) \cup W(y^{-1}),$$

ahol 1 az üres szó, a további halmazok pedig az adott betűvel kezdődő redukált szavakat tartalmazzák. Ezek egymástól páronként diszjunkt részhalmazok, hiszen a négy különböző kezdőbetű szerint válogattuk szét a szavakat. Továbbá megmutatható, hogy

$$F = W(x) \cup xW(x^{-1}) \text{ és } F = W(y) \cup yW(y^{-1})$$

is teljesül. Ennek igazolásához elég belátni a két felbontás közül az egyiket, a másik elem szerinti felosztást ennek mintájára el lehet végezni. Tekintsük az $F = W(y) \cup yW(y^{-1})$ esetet, ahol mint ismert a $W(y)$ az y-nal kezdődő szavakat tartalmazó részhalmaz. A ... ábrán jól látható, hogy az F csoport elemei előállíthatók y-nal és nem y-nal kezdődő redukált szavakból. Tehát a feladatunk az, hogy az $yW(y^{-1})$ halmazról kell megmutatnunk, hogy tartalmazza az összes nem y-nal kezdődő redukált szót. Ehhez vegyük a $h \in F \backslash W(y)$ elemket, így ezekre biztosan igaz, hogy nem y-nal kezdődnek. Hasson ezen h szavakra az F csoport y^{-1} eleme balról. Az így kapott szavakat biztosan nem tudjuk egyszerűsíteni, mivel nem y-nal (hanem y^{-1}, x, x^{-1} betűkkel) kezdődnek, emiatt $y^{-1}h \in W(y^{-1})$, azaz ily módon létrehoztuk az y^{-1}-zel kezdődő redukált szavak részhalmazát. Ha ezekre $y \in F$ elem hat balról, akkor teljesül: $h = y(y^{-1}h) \in yW(y^{-1})$, tehát megmutattuk, hogy a nem y-nal kezdődő szavak benne vannak az $yW(y^{-1})$ részhalmazban. Tudjuk tehát, hogy $W(y)$ és $yW(y^{-1})$ halmazok együttesen tartalmazzák az összes lehetséges x és y által redukált szót, továbbá a két halmaz diszjunkt, ennek alapján: $F = W(y) \cup yW(y^{-1})$ teljesül. Hasonlóan belátható az $F = W(x) \cup xW(x^{-1})$ egyenlőség is.

A paradoxitás könnyen ellenőrizhető felidézve a 3.2.2. Definíciót és kéttagú unióra felírva:

$$H = X_1^{a_1} \cup X_2^{a_2} = Y_1^{b_1} \cup Y_2^{b_2}$$

Ha vesszük $a_1 = 1, X_1 = W(x), a_2 = x, X_2 = W(x^{-1})$ és $b_1 = 1, Y_1 = W(y), b_2 = y, Y_2 = W(y^{-1})$ helyettesítéseket, akkor éppen **??**-et kapjuk. Ez pedig azt jelenti, hogy F halmaz F paradox.

Hasonlóan belátható, ha a csoport jobbról hat.

4.1.3. Megjegyzés. *Ha egy G csoport balról hat önmagán, és ekkor G csoport G paradox, akkor azt mondjuk G csoport paradox.*

4.1.4. Megjegyzés. *Az eddigiek alapján a 4.1.1. Állítás:*
Az $F_2 = \langle x, y \rangle$ csoport paradox.

A következő tétel mérföldkőnek tekinthető, mivel maga a tétel és következményei adják a további tételek bizonyításainak alapját. Kimondása előtt idézzük fel a **3.3** részben szereplő stabilizátor fogalmát, melynek segítségével azt mondhatjuk, hogy egy G csoport *nemtriviális fixpont nélkül hat* egy H halmazon (azaz $\forall h \in H$-ra $h^g = h \iff g = e \in G$), ha $\forall h \in H$ esetén $G_h = \{e\}$. Vagyis ekkor a stabilizátor egyetlen elemet, G egységelemét tartalmazza.

4.1.1. Tétel. *Ha G paradox csoport hat a H halmazon, továbbá $\forall h \in H$ $G_h = \{e \in G | e :egységelem\}$, akkor H halmaz G-paradox.*

Bizonyítás: Mivel G paradox, így önmagán hatva előáll a következő alakban: $G = \cup X_i^{a_i} = \cup Y_j^{b_j}$, ahol $a_i, b_j \in G$ és $X_i, Y_j \subseteq G$ $\forall i = 1...n$ és $\forall j = 1...m$-re.
Használjuk fel a **3.2.2. Definíció.**-t. ami alapján egy $h \in H$ pont pályája $Orb_G(h) = \{h^g \mid g \in G\}$. Ezek a pályák páronként diszjunktak vagy megegyeznek, ugyanis tegyük fel, hogy:

$$\exists h_1, h_2, h^* \in H \text{ melyre teljesül } h^* \in Orb_G(h_1) \text{ és } h^* \in Orb_G(h_2)$$
$$\exists a, b \in G\text{: } h^* = h_1^a = h_2^b$$

Ezt $b-1$-gyel megszorozva jobbról $h_1^{ab^{-1}} = h_2$ adódik, így mivel G csoport, ezért $ab^{-1} \in G$. Azaz h_1-re hat egy G-beli elem, ekkor egy h_1 pályabeli elemet kapunk. Összegezve $h_2 \in Orb_G(h_1)$.
Vegyük tehát az összes $h \in H$ elemhez tartozó $Orb_G(h)$ halmazokból álló páronként diszjunk halmazrendszert. A kiválasztási axióma miatt $\exists M$ halmaz, aminek az összes orbittal pontosan egy közös eleme van. Hasson erre az M halmazra $\forall g_1, ..., g_k \in G$ jobbról. Az így kapott halmazok uniójára $\bigcup M^{g_i} = H$ teljesül.
Mivel $\forall h \in H$ $G_h = \{e\}$, azaz G nem-triviális fixpont nélkül hat H-n, ezért

$\forall a, b \in G$, azt kapjuk, hogy $M^a \cap M^b = \emptyset$. Ugyanis tegyük fel indirekt, hogy $\exists m_1, m_2 \in M$, amikre $m_1^a = m_2^b$. Hasson ezekre jobbról b^{-1}, ekkor $m_1^{ab^{-1}} = m_2$, azaz ugyanabban az orbitban vannak. Tehát igaz az, hogy $m_2 = m_1^c$, ahol $c \in G$. Ezt behelyettesítve a feltételbe, miszerint $m_1^a = m_2^b$, a következő adódik $m_1^a = (m_1^c)^b = m_1^{cb}$, ekkor ha a^{-1} hat jobbról, akkor $m_1 = m_1^{bca^{-1}}$ azaz lenne olyan $e \neq g = bca^{-1} \in G$, ami m_1-et helyben hagyná, ez pedig ellentmond azzal, hogy G nem-triviális fixpont nélkül hat.

Ha ezt beláttuk, akkor vegyük $X_i^* = \bigcup\{M^g | g \in X_i\}$ és $Y_j^* = \bigcup\{M^g | g \in Y_i\}$. Ekkor mivel H paradox felbontásában $\forall i, j \;:\; X_i \cap Y_j = \emptyset$, emiatt $X_i^* \cap Y_j^* = \emptyset$. Továbbá $X_i^* \cup Y_j^* = \bigcup\{M^g | g \in G\} = H$.

Mivel $G = \cup X_i^{a_i} = \cup Y_j^{b_j}$ és G hat a $H = X_i^* \cup Y_j^*$ halmazon, ezért H előáll:

$$H = \bigcup (X_i^*)^{a_i} \text{ és } H = \bigcup (Y_j^*)^{b_j}$$

alakban, ami azt jelenti, hogy H halmaz G-paradox.

4.1.1. Következmény. *A H halmaz F-paradox, ha az F kétgenerátoros szabad csoport nem-triviális fixpont nélkül hat H-n.*

4.1.2. Következmény. *Legyen G csoport és $R \subseteq G$ részcsoport. Ekkor ha R paradox, akkor G is paradox.*

4.1.3. Következmény. *Legyen G csoport és $F \subseteq G$, ahol $|F| = 2$ szabad részcsoport. Ekkor G paradox.*

4.2. Független forgatások

4.2.1. Definíció. *Legyen G szabad csoport és $S \subseteq G$, továbbá $H = \langle S \rangle$. Ekkor ha $\forall K \subseteq S$-re $\langle K \rangle \neq H$ teljesül, akkor S halmaz független.*

4.2.1. Tétel. *Ha $\exists x, y \in SO_3$ független forgatások $\Longrightarrow$ SO_3-ban van kétgenerátoros szabad részcsoport.*

Bizonyítás

Létezés: Vegyük az x és y tengey körüli arccos $\frac{1}{3}$szöggel történő forgatásokat. Jelölje ezeket x és y. Lineáris algebrában tanultak alapján x-nek és y-nak megfeleltethető egy 3x3-as mátrix, amik a következő alakúak:

$$x^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ és } y^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

A negatív szöggel történő forgatás x^{-1} és y^{-1} $\Rightarrow$ így $xx^{-1} = 1 = yy^{-1}$ teljesül. Ennek alapján az üres szó az $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ lesz.

A mátrixokat normál esetben nagy betűkkel kell jelölni, azonban azért használom ezt a jelölést, hogy eddig leírtakhoz

Az ily módon definiált betűkből létrejövő szavak nem lesznek mások, mint 3x3-as mátrixok szorzatai, melyek eredményeként szintén 3x3-as mátrixot kapunk.

Meg szeretnénk mutatni, hogy nincs olyan a triviálistól eltérő, $x^{\pm 1}$, $y^{\pm 1}$ betűkből álló redukált szó, ami az identitás lenne.

Ha létezne ilyen alak:

$$x^i y^j = e \ / \cdot y^{-j}$$
$$x^i = y^{-j}$$

Így az egyik hatványából megkaptuk y egy hatványát, amiből y további hatványai is kifejezhetők, vagyis x generálná y-t is.

Ennek alapján, ha nincs olyan x, y betűkből képzett w redukált szó, ami az egység lenne (triviális esettől eltekintve), akkor igaz a tétel.

Az y elemmel való konjugálás: ySy^{-1} konjugálást S szóra nem változtatja meg a szót, nincs hatással a végeredményre, mert az elején + irányba, végén − irányba forgat, ezért vehetjük azokat a szavakat, amik $y^{\pm 1}$-gyel kezdődnek.

Indirekt:

Ahhoz, hogy ellentmondást kapjunk tegyük fel, hogy w egy ilyen $x^{\pm 1}$-gyel kezdődő szó, ami megegyezik az identitással.

Megköveteljük, hogy (1, 0, 0)w éppen (a, b, $\sqrt{2}$c)/3^k alakú, ahol a, b, c $\in \mathbb{Z}$ és $3 \nmid c$.

Ez maga után vonja azt, hogy (1, 0, 0)w $\neq$ (1, 0, 0) és (1, 0, 0)w = (a, b, $\sqrt{2}$c)/3^k, mivel ekkor c$\sqrt{2}$ adódna, ezért $3 \nmid c$, azaz w nem lehet identitás.

Be kell még látni azonban azt, hogy (1, 0, 0)w valóban (a, b, $\sqrt{2}$c)/3^k alakú. Ezt w szó hossza szerinti teljes indukcióval végezzük el.

1. Legyen w hossza1, ekkor $w = x^{\pm 1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{\pm 1} =$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mp 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2. Tegyük fel, hogy k-1 hosszú v szóra teljesül az állítás, azaz ahol w=v$\cdot x^{\pm 1}$ vagy w=v$\cdot y^{\pm 1}$ és (1 0 0)v=$\frac{1}{3^{k-1}}$(a', b', c'$\sqrt{2}$)

3. Kell, hogy k hosszú w szóra is teljesül.
   Az előző pont alapján, mivel:
$$w = v \cdot x^{\pm 1} = \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix} a' & b' & c'\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{a'}{3^{k-1}}; & \frac{1}{3^{k-1}}(\frac{1}{3}b' \pm \frac{c'\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{3}); & \frac{1}{3^{k-1}}(\mp\frac{2\sqrt{2}}{3}b' + \frac{1}{3}c'\sqrt{2}) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{a'}{3^{k-1}}; & \frac{1}{3^k}(b' \pm 4c'); & \frac{1}{3^k}(\sqrt{2}(\mp 2b' + c')) \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} 3a' & b' \pm 4c' & \sqrt{2}(c' \mp 2b') \end{pmatrix}$$

$$w = v \cdot y^{\pm 1} \rightarrow \begin{pmatrix} a' & b' & c'\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a' \pm \frac{2\sqrt{2}c'\sqrt{2}}{3} & b' & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3}a' + \frac{1}{3}c'\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a' \pm 4c' & 3b' & \sqrt{2}(c' \mp 2a') \end{pmatrix}$$
Látható, hogy megfelelő egészeket kaptunk.

Már csak az maradt, hogy $3 \nmid c$.
Ennek minden k hosszúságú szónál teljesülnie kell, ezért beláttuk, hogy igaz w k hosszúságúra, igaz v k-1 hosszúságúra, azonban meg kell vizsgálnunk a 3. rákövetkező elemet is, hogy biztosan kijelenthessük $3 \nmid c$. Azaz vennünk kell még a k-2 hosszú u-val jelölt szavakat, melyek a következő alakúak:

$$(1\ 0\ 0)\text{u}=(\text{a}'', \text{b}'', \text{c}''\ \sqrt{2})/3^{k-2}$$

Az utolsó koordinátáról csak w hosszú szó esetén jelentettük ki, hogy nem osztható 3-mal, ezért ezekre kell visszavezetni a k-2 hosszú u szavakat is, azaz megvizsgálni, hogy w miként állhat elő u típusú szavakból.
Négy különböző esetet kapunk:

1. $w = u \cdot x^{\pm 1} \cdot y^{\pm 1}$
2. $w = u \cdot y^{\pm 1} \cdot x^{\pm 1}$
3. $w = u \cdot x^{\pm 1} \cdot x^{\pm 1}$
4. $w = u \cdot y^{\pm 1} \cdot y^{\pm 1}$

Ebben a négy esetben a $k-1$ hosszú v szavakhoz hasonlóan eljárva, a megfelelő mátrixszorzásokat elvégezve megkaphatók az egyes koordináták alakja. Az eljárást elvégezve minden esetben $3 \nmid c$ teljesülni fog a kívánt koordinátára.

A következő tételt nem használjuk fel a paradoxonok bizonyításánál, de további érdekes állításokat fogalmaz meg független forgatásokról, ezért bizonyítás nélkül kerül csak megemlítésre.

4.2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy x és y S^2-beli azonos α szögű forgatások. Ekkor x és y függetlenek, ha:*

- *tengelyek merőlegesek és* $\cos\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\}$ *vagy*
- *a tengelyek különbözőek és a tengelyek által bezárt szög koszinusza transzcendens.*

Ennek alapján jól látható, hogy az előző (4.2.1)tétel bizonyításában szereplő $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$ helyett a tétel bármely $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$-től különböző racionális szám esetén is igaz. Továbbá, ha nem merőlegesek a tengelyek, akkor az általuk bezárt φ szög koszinusza transzcendens legyen, például $\varphi := \arccos\sqrt{2}$.

A 4.2.1 tételben előállított x, y forgatások szabad csoportja legyen F. Ennek elemei egyes $\mathbb{R}^3$-beli pályákon minden pontot helyben hagynak, így a 4.1.1 tétel még nem alkalmazható.

Azonban ha vesszük S^2 egységgömbhéját, akkor a rajta ható F csoportban minden, az identitástól eltérő forgatásnak két fixpontja lesz S^2-vel. Nevezetesen a forgatás tengelyének a gömbhéjjal való metszéspontjai. Legyen az összes ilyen pontot tartalmazó halmaz D. Ekkor mivel F megszámlálható, így D halmaz is megszámlálható. Ha vesszük $S^2 \setminus D$ pontok halmazát, (melyekre F csoport hat,) akkor ebben az esetben F már nem-triviális fixpont nélkül hat.

Ez abból látszik, hogy ha vesszük a $P \in S^2 \setminus D$ pontot, amire $x \in F$ hat, akkor $P^x \in S^2 \setminus D$, mivel ha $\exists y \in F$, amire $(P^x)^y = P^x$, akkor ha jobbról x^{-1} hat:

$$((P^x)^y)^{x^{-1}} = P^{xyx^{-1}} = P^{xx^{-1}} = P$$

Így P fixpont lesz xyx^{-1}-nél, azaz $P \in D$, ami ellentmond annak, hogy $P \in S^2 \setminus D$. Továbbá mivel F paradox csoport, így 4.1.1 alapján $S^2 \setminus D$ halmaz

F paradox. Ennek egy bővített változatát fogalmazza meg a Haussdorff-paradoxon.

4.3. Haussdorff-paradoxon

4.3.1. Tétel. *Haussdorff-paradoxon* $\exists D \leq S^2$*megszámlálható részhalmaz, melyre az* $S^2 \setminus D$ *halmaz* SO_3*-paradox.*

A tétel igazolásához az eddig leírtak mellett két, korábbi állítást/ tételt kell csak felhasználnunk. Azt tudjuk, hogy $S^2 \setminus D$ F-paradox. A 4.1.1 tétel miatt $F_2 \subset SO_3$, mellett a 4.1.3 következmény miatt, mivel F_2 paradox, így SO_3 is paradox $\Rightarrow S^2 \setminus D$ SO_3-paradox.

5. Banach-Tarski paradoxon

5.1. Átdarabolhatóság általános értelemben

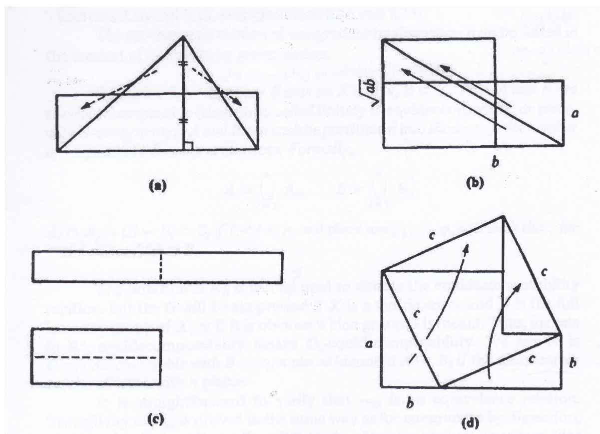
5.1.1. Definíció. *Két sokszög általánosabb értelemben véve átdarabolható, ha az egyikük szétbontható véges sok sokszög darabra, majd ezeket távolságtartó leképezések felhasználásával átrendezve a másik sokszöget kapjuk.*

Az efféle átdarabolhatóság tranzitív művelet, mivel ha A átdarabolható B-be és B átdarabolható C-be, akkor A átdarabolható C-be.
A sokszögek átdarabolhatóságával kapcsolatos tétel Bolyai Farkas nevéhez fűződik.

5.1.1. Tétel (Bolyai - Gerwien). *Két sokszög általánosabb értelemben véve átdarabolható egymásba* $\iff$ *a sokszögek azonos területűek.*

Bizonyítás: A tétel $\Longrightarrow$ iránya könnyen látható, ugyanis - ahogy az a definícióban szerepel - az átrendezés során csak távolságtartó leképezéseket használunk fel, melyeknek pontosan az a lényege, hogy az alakzat pontjai közti távolságot nem változtatja meg, ezáltal az adott sokszög darab területét sem.

A $\Longleftarrow$ iránynál a tranzitivitás miatt elegendő azt megmutatni, hogy bármely sokszög átdarabolható egy vele megegyező területű négyzetbe. Ennek igazolásához alábbi ábra nyújt segítséget.



Az (a) rész azt mutatja, hogy bármely háromszög átdarabolható egy téglalapba. (Konkáv szögű háromszög esetén a konkáv szögből húzott magasság felezőpontján keresztül menő, a szöggel szemközti oldallal párhuzamos egyenes esetén megoldható.)
A (b) ábra szemlélteti azt, hogy minden olyan téglalap, melynek hosszabb oldala legfeljebb négyszerese a rövidebb oldalnak, az megfelelően szétbontva négyzetté alakítható.
Abban az esetben, amikor nem teljesül a $b \leq 4a$ feltétel, a (c) ábrán látható módon a téglalapot félbe vágva és a hosszabb oldalak mentén összeillesztve kedvezőbb oldalarányú téglalapot kapunk. Ezzel az eljárással kialakítható a kívánt alakzat.
Az utolsó ábrán a Pitagorasz-tétel igazolása látható. Eszerint két négyzet megfelelő darabokra bontásával ezek a darabok átrendezhetők egy, a kiindulási négyzetek területösszegével azonos területű négyzetté. ($c^2 = a^2 + b^2$)
Ezek ismeretében a bizonyítás lépései a következők:

1. Az adott sokszöget háromszögekre bontjuk $\Rightarrow$ n csúcs esetén n-2 darab háromszögre

2. Minden háromszögből kialakítható a vele megegyező területű téglalap. ((a)ábra)

3. Tetszőleges téglalapot szét tudunk úgy bontani, hogy a darabjaiból egy négyzetet kapjunk. ((b)-(c) ábrák)

4. A sikeresen négyzetté rendezett darabokat egyetlen nagy négyzetté alakítjuk. ((d) ábra)

Ennek alapján az eredeti sokszög átdarabolható a kapott négyzetbe (és visszafelé hasonlóan).

5.1.1. Megjegyzés. *A tétel állítása térben nem igaz.*

5.2. Átdarabolhatóság halmazelméletben

A tágabb értelemben vett átdarabolás halmazelméleti megfelelőjét egy tetszőleges csoporthatással összefüggésben lehet meghatározni.

5.2.1. Definíció. *Legyen G csoporthatás H halmazon, és $X, Y \subseteq H$. Ekkor X és Y G-átbarabolhatók, ha:*

$$X = \bigcup X_i \text{ és } Y = \bigcup Y_i \quad \forall i = 1, ..., n$$

$X_i \cap X_j = \emptyset = Y_i \cap Y_j$ ha $i < j \leq n$ és $\exists g_1, ..., g_n \in G$, melyekre $\forall i \leq n$ esetén $X_i^{g_i} = Y_i$.

5.2.1. Megjegyzés. *Szavakkal kimondva: X és Y egymásba G-átdarabolhatók, ha X és Y feloszthatők megegyező, véges számú G-kongruens darabra.*

5.2.2. Megjegyzés. *Mivel $\sim_G$ ekvivalencia reláció, így - hasonlóan a szétmetszés kongruenciához - $\forall A, B, C$ halmaz esetén teljesül rá:*

1. $A \sim_G A$ (reflexív)

2. *Ha $A \sim_G B$, akkor $B \sim_G A$ (szimmetria)*

3. *Ha $A \sim_n B$ és $B \sim_m C$, akkor $A \sim C$ legfeljebb $n \cdot m$ darabot használva (tranzitív)*

Ezek ismeretében rövidebben megfogalmazható, hogy egy H halmaz mikor G paradox:

5.2.2. Definíció. *Legyen G csoport hatással L halmazon. Ekkor a $H \subseteq L$ halmaz G paradox $\iff \exists X, Y \subseteq H$, ahol $X \cap Y = \emptyset$, melyekre $X \sim_G H$ és $Y \sim_G H$ teljesül.*

5.2.1. Tétel. *Legyen G csoporthatás L halmazon, továbbá $H, H' \subseteq L$, melyekre $H \sim_G H'$. Ekkor ha H halmaz G paradox, akkor H' is.*

5.2.2. Tétel. *Ha $D \subseteq S^2$ megszámlálható részhalmaz $\Rightarrow S^2$ és $S^2 \setminus D$ SO_3-átdarabolható.*
Jelöléssel: $S^2 \sim_{SO_3} S^2 \setminus D$

Bizonyítás:

1. Keressünk olyan $x \in SO_3$ forgatást a gömbfelületen, melyre a $D, D^x, D^{x^2}, ...$ halmazok páronként diszjunktak. Ha ez létrehozható, akkor innentől $S^2 = \bar{D} \bigcup (S^2 \setminus \bar{D}) \sim (\bar{D})^x \bigcup (S^2 \setminus \bar{D}) = S^2 \setminus D$ teljesül, ahol $\bar{D} = \bigcup \{D^{x^n} | n = 0, 1, ...\}$

2. x szerkezetének megadása
Legyen l egy origón áthaladó egyenes, ami nem tartalmazza D megszámlálható halmazt.
Legyen A az olyan θ szögek halmaza, melyekhez $\exists n > 0$ és $\exists P \in D$, hogy $(P)^x \in D$, ahol x az l egyenes körüli forgatás n θ radiánnal.
Mivel A megszámlálható, így választhatunk egy $\theta \notin A$ szöget, emellet legyen x továbbra is a megfefelő forgatás l körül. Ekkor $(D)^{x^n} \bigcap D = \varnothing$, ha $n > 0$ (azaz az elforgatott pont D-n kívülre fog esni), amiből az következik, hogy $\forall 0 \leq m < n$-re $(D)^{x^m} \bigcap (D)^{x^n} = \varnothing$, ami pontosan a keresett feltétel.

5.3. Banach - Tarski paradoxon

Ezen fejezet végére sikerült az összes olyan definíciót, tételt összegyűjteni, melyek segítségével a dolgozat csúcspontját jelentő Banach-Tarski paradoxon megérthető és igazolható. Nem maradt más hátra, ismerkedjünk meg a paradoxonnal.

5.3.1. Tétel. *S^2 gömbhéj SO_3 paradox, csakúgy mint bármely origó középpontú gömbhéj.*
Továbbá bármely $\mathbb{R}^3$-beli tömör gömb G_3 paradox és $\mathbb{R}^3$ önmagán is paradox.

Bizonyítás: A 4.4.1 tétel (Haussdorff-paradoxon) állítása szerint az $S^2 \setminus D$ halmaz SO_3 paradox, ha $\exists D \leq S^2$ megszámlálható részhalmaz, ami a térbeli forgatások fixpontjait tartalmazza.
Ha ehhez hozzávesszük az 5.2.2 tétel állítását, miszerint S^2 és $S^2 \setminus D$ egymásba SO_3-átdarabolhatók ($S^2 \sim_{SO_3} S^2 \setminus D$), akkor az 5.2.1 tétel miatt azt kapjuk, hogy S^2 SO_3-paradox.

Az eddigi eredmények egyike sem függött a gömbhéj méretétől, ezért tetszőleges sugarú gömbhéjra belátható a paradox felbontás.

Az állítás második részét elég az O origó középpontú B-vel jelölt gömbökre belátni, mivel G_3-ban benne van az összes térbeli eltolás is. Tekinthetjük továbbá az egységgömböt, mivel a bizonyítás alkalmazható lesz tetszőleges méretű gömbre. Mivel $SO_3 \subset G_3$, így a tétel első feléből következik, hogy S^2 is G_3 paradox.
Vegyük azt a bijekciót, ami $\forall P \in S^2$ ponthoz hozzárendeli a P-hez tartozó sugarat: $P \longrightarrow \{\alpha P : 0 < \alpha \leq 1\}$, a hozzárendelésből kihagyjuk a gömb középpontját. Így azt kaptuk, hogy $B \setminus \{0\}$ G_3-paradox. Ekkor ha belátjuk, hogy $B \sim_{G_3} (B \setminus \{0\})$, akkor 5.2.1. tétel alapján B halmaz G_3 paradox, amivel megkaptuk a tételünket.
Tekintsük a $P = (0, 0, 1/2)$ ponton áthaladó olyan egyenest, ami nem tar-

talmazza O-t. Legyen x ezen egyenes körüli, racionális szögű x forgatás. Ha vesszük $D = \{x^n(O) | n \geq 0\}$, akkor $(D)^x = D \setminus \{O\}$.
Így mivel $x \in G_3$, ezért teljesül $B \sim_{G_3} (B \setminus \{0\})$.

Ha a sugár szerinti megfeleltetésnél S^2 pontjainál az összes $\mathbb{R}^{\nvDash} \setminus \{O\}$ pontot vesszük, akkor $\mathbb{R}^{\nvDash} \setminus \{0\} \sim_{G_3} \mathbb{R}^{\nvDash}$ teljesül.

Ennek alapján egy térbeli tömör gömböt feldarabolva, majd a darabokat eltolva, elforgatva két gömböt kaptunk végeredményül.

5.3.1. Megjegyzés. *Csak távolságtartó transzformációkat használtunk, melyek nem változtatják meg a térfogatot sem.*

6. További érdekesség

6.1. Laczkovich M. - Kör négyszögesítése

Alfred Tarski problémája Laczkovich Miklós megoldása előtt bebizonyítatlanul állt, miszerint ha egy kör és egy négyzet területe megegyező, akkor felbonthatóak véges sok, diszjunkt, páronként egybevágó részhalmazra.

A kör négyszögesítésének alapproblémája egy szerkesztési feladat, mely során egy adott területű körrel egyenlő területű négyzet szerkesztendő. A szerkesztési problémák nagy arányban megoldhatatlanok a szerkesztés adta szűkös eszköztár következményeképp. Lackovich megoldásához a sokszögek átdarabolása nyújt segítséget. Síkban két azonos területű sokszög véges sok sokszögre felbontható, ekkor a sokszögeket alkotó elemek páronként egybevágónak kell lenniük. Ezen megoldás transzformálható-e sokszögek helyett görbékre? Ehhez szükséges, hogy az eddigi módszerrel járó pontkettőzés helyett minden pontot kizárólag egyszer vegyünk számításba. A kérdés, hogy így is megvalósítható-e az átdarabolás. Ekkor kap szerepet a levezetésben a Banach-Tarski-paradoxon, de használható-e a síkban? A síkban és térben való különböző viselkedést a csoportelmélet magyarázza. Szükséges volna, hogy egymásba átdarabolható tér-, síkbeli alakzatok területe megegyezzen, azonban ez csak térben érvényesül. Tehát az átdarabolhatóságot alkalmazva a kéréds, hogy létezik-e olyan felbontás adott, azonos területű körlemez és négyzetlap esetén diszjunkt részhalmazokra, hogy azok páronként egybevágóak legyenek. A bizonyításhoz Laczkovich csak az eltolást használta, forgatás nem szüséges a levezetéshez és a részhalmazokat nem határzta meg benne, csak ennek létezését bizonyította. A felvetést azonban kiterjesztette sima ívekkel és egynes szakaszokkal határolt síkidomra is.

Hivatkozások

[1] Stan Wagon - The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press, 1985

[2] Kiss Emil - Bevezetés az algebrába, Typotex 2007

[3] www.wikipedia.hu

[4] $www.brody-bp.sulinet.hu/pub/Tananyag/Matematika/Geom/cikk1.htm$

[5] $www.math.u-szeged.hu/\ hajnal/courses/Univ_Halmazelmelet/halmaz99/axiomak.htm$