Hogyan mérjünk radioaktivitást?

László Eszter

Matematika BSc

Szakdolgozat

Témavezető:
Szabó Csaba
Egyetemi tanár
Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Szakdolgozatomban olyan témát választottam, melynek a matematika mellett, köze van a másik szakomhoz, a kémiához is. A kémikusok sokszor olyan problémába ütköznek kísérleteik során, hogy egy-egy mérőműszer használata sokba kerül, vagy egy kísérlet túl hosszú ideig tart. Amikor a KöMaL Fórumon rátaláltam az általam választott feladatra, úgy gondoltam, hogy ennek a feladatnak a megoldását a kémiai mérések során is alkalmazni lehetne, ezzel időt spórolhatnánk és költségeket takaríthatnánk meg.

A feladat végiggondolása közben észrevettem, hogy köze van a gráfokhoz, melyekről véges matematikai tanulmányaim során már tanultam és ezeket már akkor érdekesnek találtam.

2. A feladat és annak megoldásai

A Középiskolai Matematikai Lapok Fórumán találtam rá a következő feladatra, mely felkeltette az érdeklődésemet.

A feladat:

2.1. Feladat: *Adott 15 biliárdgolyó, mely közül 2 radioaktív. Hány méréssel tudjuk megállapítani, hogy melyik két golyó sugárzó? Minimalizáljuk a szükséges mérések számát!*

A mérés: A folyamat abból áll, hogy valahány golyót behelyezünk egy műszerbe, mely egy gombnyomás után elvégzi a mérést és csipogással jelzi, ha radioaktivitást észlel. A tesztet követő hangjelzés egyforma egy illetve két aktív golyó esetén is.

2.2. Megoldások: A Középiskolai Matematikai Lapok Fórumát tovább olvasva találtam egy olyan megoldást, melynek az én elképzelésemmel szemben egyetlen problémája volt mégpedig az, hogy a szerző a levezetés után nem lát módot semmiféle általánosításra. Gondolatmenetem során szeretnék egy képletet felírni arra, hogy n számú golyó esetén hány mérés elegendő a 2 radioaktív golyó megtalálásához.

A Fórumon a következőképpen hangzik a megoldás:

1. Megoldás. Elgondolásunk során az az eset vezetett eredményre, amelynek első lépéseként két ötös csoportot helyeztünk a műszerbe és ezeknek van egy közös tagjuk. Legyen tehát A egy kitüntetett golyó; B_1, B_2, B_3, B_4, és $C_1, \dots C_4$ pedig $4-4$ másik golyó, és $D_1, \dots D_6$ a maradék 6 golyó.

A 15 golyóból a 2 golyót 105 féle módon tudjuk kiválasztani, melyet a következőképpen számolunk ki: $\binom{15}{2} = 105$. Ezeknek a lehetőségeknek a száma azonban túl magas, ezért tovább kell gondolnunk a megoldást. Érdemes számon tartanunk, hogy az egyes esetekben hány lehetőség marad meg, amely nem lehet 2^n-nél több, ahol n a még hátralévő lépések száma. Az látható, hogy ha tudjuk, hogy n golyó közt pontosan egy radioaktív van, akkor ezt $\lceil \log_2 n \rceil$ segítségével megtalálhatjuk.

Megoldásunk menete a következő:

1-2. mérés: Betesszük az $A, B_1, \ldots B_4$, illetve az $A, C_1, \ldots C_4$ golyókat a műszerbe, majd elvégezzük a mérést.

I. Tegyük fel, hogy az első mérés során a műszer jelez, a második mérésnél pedig nem. Ekkor két eset fordulhat elő. Az, hogy a B-vel jelölt golyók között van mindkét sugárzó, ez $\binom{4}{2}$ eset, ami 6, vagy a B-vel és a D-vel jelölt golyók közül $1-1$ radioaktív ez $4 \cdot 6$; összesen $6 + 24 = 30$.

Ekkor a 3. mérésünk a következő: 3. (D_1, D_2, D_3, D_4).

I/1. Amennyiben a 3. mérés negatív, a megmaradó esetek száma 14.

Ebben az esetben a 4. mérés a következő: 4. (D_5, D_6).

I/1/A. Ha a 4. mérés is negatív akkor a két sugárforrás a négy B jelű golyó között van. Ezek közül hármat egyenként tesztelünk a megmaradó három méréssel, ezek után a negyedik golyó radioaktívitása vagy annak kizárása az előző mérésekből már egyértelműen következik.

I/1/B. Ha a 4. mérés pozitív, akkor biztos, hogy a négy B jelű golyó és a D_5, D_6 jelű golyó között $1-1$ sugárforrás van. Ezeket már $2+1 = 3$ méréssel megtaláljuk.

I/2. Ha a 3. mérés pozitív: a $D_1, \ldots D_4$ golyók között van sugárzó ($4 \cdot 4 = 16$ eset). Ekkor e négy és a négy B jelű golyó közül $1-1$ sugárzó, melyeket $2+2 = 4$ méréssel kiválaszthatunk.

II. Tegyük fel, hogy az 1-2. mérésnél mindkét mérés pozitív volt. Ez 14 eset, amennyiben az A sugárzó, és $4 \cdot 4 = 16$ eset, ha nem. Legyen tehát a 3. mérés A.

II/A. Ha A nem sugárforrás és a B és a C jelű golyók között egy-egy radioaktív van, a két sugárzó golyót $2+2 = 4$ méréssel megtalálhatjuk.

II/B. Ha A radioaktív a maradék 14 golyó közül 4 lépésben felezéssel megkereshető a másik sugárzó.

III. Tegyük fel, hogy az 1-2. mérés negatív eredménnyel zárult. Ekkor a megmaradó hat D jelű golyó között van a két sugárzó. Ennek megtalálására 5 mérésünk van. Mérjünk le a hatból ötöt, az utolsó golyó radioktívitását már úgyis tudjuk az előzőkből!

2. Gondolatmenetünk ismertetése.

Gondolkozhatunk absztrakt módon, miszerint a feladatban szerepő golyók egy-egy csúcsot jelölnek egy gráfban, az élek pedig összekötik a csúcsokon lévő golyókat. Ha egy csúcs az öszes többivel összeköttetésben van egy teljes gáfról beszélünk. Mindezt lefordíthatjuk úgy, hogy a gráfnak azt az egy élét keressük, ami a két radioaktív golyót köti össze. Két golyót n darab golyóból $\binom{n}{2}$ féleképpen tudunk kiválasztani, ami megegyezik a gráfunk éleinek számával. Tehát a feladatban $\binom{n}{2}$ élből kell egyet kiválasztanunk. Méréseink során a golyókat (csúcsokat) mérjük, és azokat kell úgy kiválasztani, hogy a műszer jelzésétől függetlenül a mérés utáni két csoport élszáma fele akkora legyen, mint $\binom{n}{2}$. Érdemes számon tartanunk, hogy az egyes esetekben hány élünk marad meg a szétválasztás után, amely nem lehet 2^m-nél több, ahol m a még hátralévő mérések száma. Az látható, hogy ha tudjuk, hogy n golyó közt pontosan egy radioaktív van, akkor ezt $\lceil \log_2 n \rceil$ segítségével megtalálhatjuk, ennyi mérés mindig kell is. Látni fogunk a 3.3. Állításban a méréseink számára egy alsó becslést.

Vizsgáljuk meg a mi gondolatmenetünk szerint a KöMaL Fórumon talált megoldást!

Mutassuk meg, hogy a 15 golyóból 7 méréssel megtaláljuk a két radioaktív golyót! Ehhez gráfokban gondolkozva az éleink száma a teljes gráfunkban: $\binom{15}{2} = 105$.

Tegyük fel, hogy az első lépésben $(15-k)$ darab golyót helyezünk a műszerbe. Ekkor k-t csak úgy választhatjuk meg, hogy k darab golyó közül a két radioktív golyót maximum 6 méréssel meg tudjuk találni. A későbbiekben látni fogjuk, hogy 10 golyóból 6 méréssel meg tudjuk keresni a 2 radioatív golyót, ezért legyen $k = 10$. Ekkor az első mérésünk során 5 golyót helyezünk a gépbe. Ha a mérés nem jelez, a maradék 10 golyóból 6 méréssel megtalálhatóak a sugárzó golyók. Ha az 5 golyó mérése jelez, akkor vagy az 5 golyóban van mindkét keresett golyó, vagy az 5 és 10 golyó közt van egy-egy radioaktív. Ha mindkét sugárzó golyó az elsőként mért 5 golyóban van, akkor $\binom{5}{2} = 10$ féle eset lehetséges. Ha ebben az 5 golyóban és a másik 10 golyóban is van egy radioaktív, akkor $5 \cdot 10 = 50$ lehetőségünk van. Ha gráfként tekintünk rá, akkor ez összesen $\binom{5}{2} + 5 \cdot 10 = 60$ él. Ha k-t 9-nek választanánk, akkor $\binom{6}{2} + 6 \cdot 9 = 69$ élünk maradna, ami sok, mert az élek számának kisebbnek kell lennie 64-nél ahhoz, hogy a két sugárzó golyó kimérhető legyen 6 méréssel. Ezért az első mérés során 5 golyót tesztelhetünk csak, ellenkező esetben nem tudjuk kimérni 7 mérésből a 2 radioaktív golyót. Méréseink során arra törekszünk, hogy a gráfunk élei feleződjenek mégpedig úgy, hogy mindkét csoportban az élek száma kevesebb legyen kettő valahanyádik hatványánál.

Az áttekinthetőség miatt az 1. ábrán láthatjuk a méréseink után megmaradó éleink számát.

I. Az első mérésünk során 5 darab golyót teszünk a műszerbe.

I/1/A. Abban az esetben, ha ennél az 5 golyónál a tesztünk negatív, a maradék 10 golyó között van mindkét radioaktív golyó, melyeket még 6 méréssel megtalálhatunk.

I/1/B. Ha az első mérésünk pozitív, akkor a műszerbe helyezett 5 golyó között biztosan van egy radioaktív, a maradék 10 golyó között pedig maximum 1 darab sugárzó golyó lehet. Ebben az esetben a gráfunk maradék éleink száma: $\binom{5}{2} + 5 \cdot 10 = 60$.

Jelöljük A-val az ötelemű halmazt, melyet első lépésben vizsgáltunk, és B-vel a kimaradó 10 golyót. Legyenek a golyók a halmazok elemszámával egyenlők.

Teszteljünk a következőképpen:

Legyen $A = C \cup D$, $B = E \cup F$.

I/2/A. 2. mérésünk során tegyük a műszerbe a $D \cup F$ elemeit, ahol legyen $|D| = 1$, $|F| = 4$. A maradék golyóink legyenek $|C| = 4$, $|E| = 6$. Ha a 2. mérés negatív, akkor vagy a C golyók között van mindkettő radioaktív, vagy a 4 és a 6 golyó között is találunk $1 - 1$ aktív golyót.

A második mérés után a megmaradó éleink száma : $\binom{4}{2} + 4 \cdot 6 = 30$.

I/3/A. A 3. mérés során az E golyók közül válasszunk ki 4 darabot és ezeket teszteljük! Ha ez a mérés negatív, akkor gráfunk éleink száma már csak: $\binom{4}{2} + 4 \cdot 2 = 14$.

I/4/A. Következő - 4. - mérésünk a fennmaradó 2 golyó vizsgálata. Amennyiben ez a mérés negatív, akkor a két radioaktív golyó az első négy golyó között van. Négy golyó közül három méréssel könnyedén megtalálható a két aktív golyó.

I/4/B. Ha a 4. mérés pozitív, akkor a kiválasztott négy golyó között és a fennmaradó 2 golyó között egy-egy sugárforrás van. Ezeket felezéssel már $2 + 1 =$ 3 méréssel megtalálhatjuk.

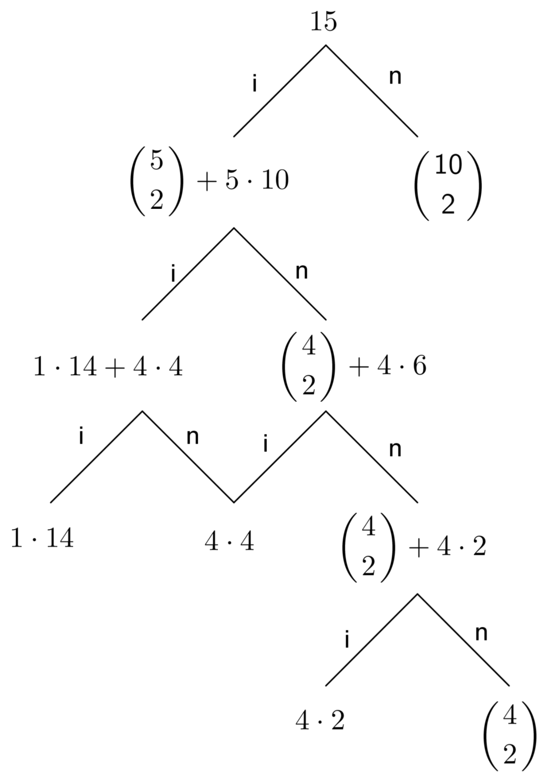
I/3/B. Ha a 3. mérésünk pozitív, akkor e négy és az elsőként mért négy golyó közt lehet $1 - 1$ radioaktív golyó, ezeket felezéssel, $2 + 2 = 4$ számú méréssel, keressük meg.

I/2/B. Ha az első két mérésünk pozitív, akkor a 3. mérés során teszteljük azt az egy golyót, melyet már mindkét mérésnél vizsgáltunk.

II/3/A. Ha ez a mérés negatív, akkor az ezzel az egy golyóval mért $4-4$ golyó közt van $1-1$ sugárforrás, melyek közül felezéssel, $2+2$ méréssel, megkapjuk a keresett 2 golyót.

II/3/B. Ha ez a mérés pozitív, akkor megtaláltuk az egyik radioktív golyót, a maradék 14 golyó közül 4 lépésben felezéssel megkereshető a másik radioaktív is.

Így a méréseink száma 15 golyó esetén - a 2 radioaktív golyó megtalálásához - maximum 7 mérés. (Lásd az 1. ábrán a megmaradó éleink számát egyes mérések után.)



1. ábra.

3. Általánosított feladat és annak néhány megoldása kis darabszámú golyó esetén

Először néhány állítást bebizonyítunk a mérésekkel kapcsolatban, melyekre a feladat megoldásakor a későbbiekben hivatkozni fogunk.

3.1. Állítás: *Tegyük fel, hogy n golyóból kimérhető m méréssel a 2 radioaktív golyó, akkor n-nél kevesebb számú golyóból is kimérhető m méréssel a 2 sugárzó golyó.*

Bizonyítás. Kevesebb számú golyóhoz hozzáteszünk annyit, hogy golyóink száma n darab legyen, ebből az állítás szerint a radioaktív golyók kimérhetők m méréssel. Ebből következik, hogy kevesebb számú golyóból is kimérhető m méréssel a 2 radioaktív golyó. $\square$

3.2. Állítás: *Ha $n-1$ darab golyóból kimérhető a 2 radioaktív golyó m méréssel, akkor n darab golyóból biztosan kimérhető $m+1$ méréssel a 2 sugárzó.*

Bizonyítás. Először mérjünk meg 1 darab golyót, ha a mérés nem jelez akkor az $n-1$ golyóból a feltétel szerint m mérés elég a 2 radioaktív golyó megtalálásához, ekkor ez $m+1$ mérés. Ha a mérés jelez akkor a másik radioaktív golyót a maradék $n-1$ golyóból felezéssel megtaláljuk, ez összesen $1+\lceil \log_2(n-1)\rceil$, ami kisebb vagy egyenlő $m+1$-nél. Tehát n golyóból $m+1$ méréssel kimérhető a 2 aktív golyó. $\square$

Az első mérés mindig a következőképpen kell, hogy kinézzen: megmérünk $n-k$ darab golyót, ahol k-t úgy választjuk meg, hogy abból $m-1$ méréssel ki tudjuk majd mérni a sugárzó golyót. Ekkor n golyóhoz $1+(m-1)$ mérés elegendő lesz, ami megegyezik m-mel. Abban az esetben, ha az $n-k$ darab golyó mérésénél a műszer nem jelez, akkor a két golyó, amit keresünk, a k-val jelölt golyók között van, melyből $m-1$ méréssel kimérhető a sugárzó golyó, így összességében mindkét golyó megtalálásához m mérés elegendő.

Megfigyelhetjük, hogy ha $\binom{n}{2} \leq 2^m$, és az első mérésben mért $n-k$ darab golyó tesztelésekor a műszer jelez, akkor a fennmaradó éleink száma a gráfunkban a következő: $\binom{n-k}{2}+(n-k)\cdot(k)$. Ennek kisebbnek vagy egyenlőnek kell lennie 2^{m-1}-nél, ahol $m=1,2,3\ldots$, n az összes golyó darabszáma, és k az első mérés során nem mért golyók száma.

3.3. Állítás: *Ha $\binom{n}{2} \geq 2^m$, akkor legalább m mérés kell n golyó esetén ahhoz, hogy megtaláljuk a 2 sugárzó golyót.*

Bizonyítás. A barkochba feladat alapján az élek a tárgyakat jelölik, ahol pontosan egy élt keresünk a többi közül. Egy elem kiválasztásához ekkor $\lceil \log_2 \binom{n}{2} \rceil = m$ mérés kell, ahol $\binom{n}{2}$ a golyókat összekötő élek száma. □

3.4. Állítás: *A mérések száma monoton növekvő.*

Bizonyítás. Mutassuk meg, hogy kevesebb mérés nem elég a 2 radioktív golyó megtalálásához! Mindig kiválasztható n golyó, amiből a radioaktív golyók meghatározásához m mérés kell, így vagy m vagy $m+1$ mérés szüséges $n+1$ golyóból a 2 radiokatív golyó megtalálásához. □

3.5. Következmény: *Ha m méréssel ki tudunk mérni n darab golyót, akkor az első mérésünk után a fennmaradó éleink száma x, ahol $x \leq 2^{m-1}$ kell, hogy legyen.*

Ezt, a 3.3. Állításnak a megfordítását, gyakran fogjuk használni.

Az alábbiakban néhány golyó esetén megmutatjuk, hogy hány mérésre van szükségünk a sugárzó két golyó megtalálásához.

$n = 1$ golyó esetén biztos, hogy ez az egy golyó radioaktív, mert alapesetünkben 2 radioaktív golyónk van.

$n = 2$ golyó az alapesetünk, tehát ezt nem kell vizsgálnunk.

$n = 3$ golyó esetén biztosan szükséges egy mérés, kérdésünk az, hogy elégségséges -e egy mérés?

Elsőként egy golyót érdemes tesztelnünk, mert két golyóban már biztosan van radioaktív. Ha a mérés nem jelez, akkor a maradék két golyó a radioaktív. Ha a teszt jelez, akkor szükség van még egy mérésre a második aktív golyó megtalálásához.

Ha a golyókra, mint egy gráf csúcsaira tekintünk, akkor a gráfban öszesen 3 élünk van, melyből a keresett egy él megtalálásához 2 mérésre van szükség.

Három golyó esetén tehát egy mérés nem elég az aktív golyók megtalálásához, de kettő már igen.

$n = 4$ golyó esetén a gráfunk éleinek száma: $\binom{4}{2} = 6$, de ahhoz, hogy két méréssel megtaláljuk a sugárzó golyókat éleink számának kevesebbnek kell lenni, mint 2^2 és mivel $2^2 \leq \binom{4}{2}$, ezért 3 mérés szüséges a keresett él megtalálásához.

Kétféleképpen gondolkozhatunk:

Elsőként hivatkozva a 3.2. Állításunkra, ha a 4 golyóból megmérünk egyet és a teszt nem jelez, akkor a maradék 3 golyó közül még 2 méréssel megtaláhatók a keresett golyók.

Másodikként teszteljük le az első három golyót egyenként! Ezek után az utolsó golyóról már biztosan tudjuk, hogy radioaktív-e.

$n = 5$ esetén gráfunk éleinek száma: $\binom{5}{2} = 10$, de $2^3 \leq 10$, ezért az előző eset alapján 4 mérés szüséges a keresett él megtalálásához.

Kétféleképpen gondolkozhatunk:

Elsőként hivatkozva a 3.2. Állításunkra, ha az 5 golyóból megmérünk egyet és ha a teszt nem jelez, akkor a maradék 4 golyó közül még 3 méréssel megtaláhatók a radioaktív golyók.

Másodikként teszteljük le az első négy golyót egyesével, ezek után az utolsóról már biztosan tudjuk, hogy radioaktív-e.

$n = 6$ esetén gráfunk éleinek számát tudjuk, ami: $\binom{6}{2} = 15$.

Tegyük fel, hogy az első lépésben $(6 - k)$ golyót teszünk a műszerbe. Ekkor $\binom{k}{2}$ és $15 - \binom{k}{2}$ egyaránt legfeljebb 8 lehet, de ilyen k értéket nem találunk. Tehát 6 golyóból csak 5 méréssel tudjuk kimérni a radioaktívakat.

Itt is kétféleképpen gondolkozhatunk:

Elsőként hivatkozva a 3.2. Állításunkra, ha a 6 golyóból megmérünk egyet és a teszt nem jelez, akkor a maradék 5 golyó közül még 4 méréssel megtaláhatók a radioaktív golyók. Ezek után az utolsó golyóról már biztosan tudjuk, hogy radioaktív-e.

Másodikként teszteljük le az első öt golyót egyesével, ezek után az utolsóról már biztosan tudjuk, hogy radioaktív-e.

$n = 7$ golyó esetén a gráfunk éleinek száma: $\binom{7}{2} = 21$.

Tegyük fel, hogy az első lépésben $(7 - k)$ golyót teszünk a műszerbe. Ekkor $\binom{k}{2}$ és $21 - \binom{k}{2}$ egyaránt legfeljebb 16 lehet, ez $k = 5$ esetén lehetséges. 7 golyóból így 5 méréssel megtaláljuk a 2 keresett golyót.

Tegyünk a műszerbe 2 golyót! Ha a mérés negatív, akkor a korábbiakban leírtak szerint a fennmaradó 5 golyóból 4 méréssel megtaláljuk a sugárzó golyókat. Amennyiben az első mérés pozitív a következő mérés az, hogy teszteljünk a már megmért két golyó közül egyet. Ha a mérés negatív, akkor nyilvánvaló, hogy a két golyó közül a másik a radioaktív. A maradék 5 golyóból felezéssel, 3 méréssel, már megtalálhatjuk a másik sugárzó golyót. Ha a második mérés pozitív akkor a 2. sugárzó golyó a maradék 6 golyó között van. Ebből felezéssel, 3 méréssel, megtaláljuk a keresett egy golyót.

$n = 8$ golyó esetén 5 méréssel megtalálhatjuk a 2 sugárzó golyót. Tudjuk gráfunk éleinek száma: $\binom{8}{2} = 28$.

Tegyük fel, hogy az első lépésben $(8-k)$ golyót teszünk a műszerbe. Ekkor $\binom{k}{2}$ és $28-\binom{k}{2}$ egyaránt legfeljebb 16 lehet, de ilyen k értéket nem találunk. Tehát 8 golyóból csak 6 méréssel tudjuk kimérni a 2 radioaktív golyót.

Teszteljünk az első mérésünk során 2 golyót! Ha tesztünk eredménye negatív akkor a maradék 6 golyóból 5 méréssel megtaláljuk a keresett golyókat. Ha az első mérés pozitív, akkor a tesztelt 2 golyó között biztosan van radioaktív. Ebben az esetben legyen a második mérésünk, hogy teszteljük a 2 golyó közül az egyiket. Ha a mérés negatív, akkor a másik golyó a radioaktív, így a maradék 6 golyóból felezéssel, 3 méréssel megtalálható a másik sugárzó golyó. Ha a második mérés pozitív akkor a maradék 7 golyó között van a keresett egy golyó. 7 golyóból felezéssel, még 3 méréssel, megtaláljuk a radioaktív golyót.

Megjegyzés: használhattuk volna a 3.2. Állításunkat is.

$n=10$ Nézzük meg, hogy 10 golyó esetén 6 mérésből megtaláljuk a 2 keresett golyót! Tudjuk az éleink számát, ami: $\binom{10}{2}=45$.

Tegyük fel, hogy az első lépésben $(10-k)$ golyót teszünk a műszerbe. Ekkor $\binom{k}{2}$ és $45-\binom{k}{2}$ egyaránt legfeljebb 32 lehet, és ez $k=7$ esetén teljesül. Tehát 10 golyóból 6 méréssel megtalálhatjuk a 2 radioaktív golyót.

Mérésünk folyamata az alábbi:

I. Első mérésre tegyünk a műszerbe 3 golyót, és teszteljük ezeket!

I/1/A. Ha a mérés negatív akkor a maradék 7 golyóból 5 méréssel megtaláljuk a keresett 2 golyót.

I/1/B. Ha tesztünk pozitív akkor második mérésként a 3 golyóból megmérünk egyet és a maradék 7 golyóból hármat.

I/2/A. Ha a mérés nem jelez akkor biztos, hogy az elsőként tesztelt három golyóból fennmaradt 2 golyó között van legalább egy radioaktív, de az is lehetséges, hogy mindkettő az, illetve a 7-ből a maradék 4 golyó között is lehet egy aktív golyó.

I/3 A 3. mérésünk legyen az előző mérésnél fennmaradt két golyóból egy.

I/3/A. Ha ez a teszt negatív, akkor a másik golyó a sugárzó. A maradék négy golyó közül felezéssel, még 2 méréssel, megtaláljuk a másik radioktív golyót.

I/3/B. Ha a 3. mérés pozitív, akkor a 4 és fennmaradt 2-ből még nem tesztelt 1 golyó, azaz 5 golyó között van a másik keresett golyó. A korábban leírtak alapján ennyiből 3 méréssel megtalálható a sugárzó golyó.

I/2/B. Tekintsük azt az esetet, hogy a 2. mérésünk pozitív!

II/3. Ekkor harmadik mérésként teszteljük az első mérésben mért 3 golyóból azt a kettőt, amit a 2. mérés során nem mértünk.

II/3/A. Ha a műszer nem jelez akkor a kimaradt egy golyó volt a radioaktív és a fennmaradó 7 golyó közül a korábban leírtak alapján 3 méréssel megtaláljuk a másik sugárzó golyót.

II/3/B. Ha a harmadik mérésünk pozitív akkor ebben a kettőben és a másodikra tesztelt $1 + 3$ golyóban van egy-egy radioaktív golyó. Egy méréssel a kettőből és 2 teszttel a 4 golyóból megtaláljuk a radioaktív golyókat.

$n = 11$ golyó esetén tudjuk az éleink számát, ami: $\binom{11}{2} = 55$.

Tegyük fel, hogy az első lépésben $(11 - k)$ golyót teszünk a műszerbe. Ekkor $\binom{k}{2}$ és $55 - \binom{k}{2}$ lesz az éleink száma, ami legfeljebb 32 lehet. A $k = 8$ kielégítené a feltételeket, de a korábban leírta alapján 8 golyóból nem találjuk meg a két radioaktív golyót 5 méréssel. Ezért 11 golyóból csak 7 méréssel találhatjuk meg a keresett 2 golyót.

Kétféleképpen gondolkozhatunk:

Elsőként hivatkozva a 3.2. Állításunkra, ha a 11 golyóból megmérünk egyet és a teszt nem jelez, akkor a maradék 10 golyó közül még 6 méréssel megtalához a radioaktív golyók.

Másodikként tegyünk a műszerbe két golyót! Ha a teszt eredménye negatív akkor a maradék 9 golyóból 6 méréssel megtaláljuk a keresett golyókat. Ha az első mérés után a műszer jelez, akkor következő lépésként a 2 golyóból megmérünk egyet. Amennyiben a mérés negatív a másik golyó volt radioaktív. A maradék 9 golyóból felezéssel, még 4 méréssel, megtalálható a másik radioaktív golyó. Ha a második mérés pozitív akkor a maradék 10 golyó között van a keresett egy golyó, amiből felezéssel, 4 méréssel, megtaláljuk a radioaktív golyót.

15 golyóra a dolgozat elején már bemutattam egy lehetséges megoldást, melyben a 7 mérés elegendő volt a két radioaktív golyó megtalálásához, ezért ezt nem vezetem le még egyszer.

Minél nagyobb az n értéke annál bonyolultabbak lesznek a méréseink a későbbiekben. Mivel az eredeti feladatból tudjuk, hogy 15 golyóból megtaláljuk a keresett 2 golyót 7 méréssel, most azt szeretnénk bizonyítani, hogy 16 golyó esetén 7 mérés már nem elegendő.

A következő táblázatot a későbbiekben a bizonyítások folyamán használni fogjuk, mert ebből láthatjuk, hogy hogyan kell kiválasztani n golyóból k darab golyót úgy, hogy az összes mérésünk száma: m legyen, k pedig mérhető legyen $m - 1$ mérésből.

21 golyóig az alábbi táblázatban összefoglaljuk az elégséges mérések számát.

golyók száma	mérések száma
2	0
3	2
4	3
5	4
6-7	5
8-10	6
11-15	7
16-21	8

1. táblázat.

$n = 16$ golyó mérése.

Tegyük fel, hogy 16 golyó esetén elég a 7 mérés. Az éleink száma: $\binom{16}{2} = 120$.

Ekkor az első lépésben $(16 - k)$ golyót teszünk a műszerbe. Ebben az esetben $\binom{k}{2}$ és $120 - \binom{k}{2}$ lesz az éleink száma, ami legfeljebb 64 lehet. Ilyen k érték nincsen, ezért 16 golyóból csak 8 méréssel találhatjuk meg a keresett 2 golyót.

Kétféleképpen gondolkozhatunk:

Először hivatkozzunk a 3.2. Állításunkra! Ha a 16 golyóból megmérünk egyet és a teszt nem jelez, akkor a maradék 15 golyó közül még 7 méréssel megtalálhatók a radioaktív golyók.

Másik megoldásunk során tegyünk először a műszerbe $(16 - k)$ golyót. Ekkor k golyónak maximum 7 mérésből mérhetőnek kell lennie. Legyen $k = 14$ golyó!

Ekkor elsőként mérjünk meg 2 golyót, ha a mérés nem jelez, akkor a maradék 14 golyóból 7 méréssel megtaláljuk mindkettő radioatív golyót. Ha ez a mérés jelez, akkor a fentmaradó éleink száma: $\binom{2}{2} + (2) \cdot (7) = 15$. Legyen a második mérésünk a 2 golyóból az egyik. Ha ez a mérés nem jelez, akkor a másik golyó a radioaktív. Ebben az esetben a 2. sugárzó golyó a maradék 14 golyó között van, amiből felezéssel, 4 méréssel, megtalálhatjuk a keresett golyót. Ha a második mérésünk jelez, akkor a maradék 15 golyó között van a másik keresett golyó, ezt felezéssel, még 4 méréssel, megtalálhatjuk. Így összesen 8 méréssel megtalálható a két radioaktív golyó.

Az fent leírtak miatt igaz, hogy 16 golyóból a keresett 2 radioaktív golyó 7 méréssel nem mérhető ki, de 8-cal már igen.

Vajon meddig elég számunkra ez a 8 mérés?

$n = 21$-re még biztosan elég a 8 mérés, ezt most be is bizonyítjuk. (a 2. ábrán a megmaradó éleink számát láthatjuk az egyes mérések után)

Az első mérést úgy kell megválasztanunk, hogy ha az negatív eredménnyel végződik, akkor a maradék golyókból 7 méréssel megtalálható legyen a 2 radioaktív golyó.

Ezen kívül szeretnénk, hogy az $\binom{n-k}{2} + (n-k) \cdot (k) < 2^7$, ahol k-ból 7 méréssel megtalálható legyen a 2 golyó.

Ezeknek a feltételeknek a következők tesznek eleget:

$(n-k) = 6$ és $k = 15$, ez $\binom{6}{2} + 6 \cdot 15 = 105$

$(n-k) = 7$ és $k = 14$, ez $\binom{7}{2} + 7 \cdot 14 = 119$, ez közel van a 128-hoz, ezért első esetet választjuk, hátha ezzel hamarabb megoldásra jutunk.

I. Legyen az 1. mérésünk 6 golyó, ha ez a mérés negatív, akkor a maradék 15 golyóból 7 méréssel megtaláljuk a keresett golyókat.

I/2 Ha az első mérés pozitív, akkor a 2. mérésünk legyen a 15 golyóból 8.

I/2/A. Ha ez a mérés is pozitív akkor a 6 és 8 golyó között van $1-1$ radioaktív, ezeket felezéssel, $3 + 3$ méréssel, keressük meg.

I/2/B. Ha az első mérésünk pozitív, de a második nem jelez, akkor az első 6 golyó közt biztosan van radioaktív golyó és a maradék 7 golyó között legfeljebb egy golyó lehet sugárzó. Ekkor a gráfban a maradék éleink száma: $\binom{6}{2} + 6 \cdot 7 = 57$

I/3 Legyen a 3. mérésünk a 6 golyóból 1, a másik 7 golyóból pedig 3.

I/3/A. Ha ez a mérés negatív, akkor marad a 6 golyóból 5 illetve a 7 golyóból 4 golyónk.

I/4 Ekkor a 4. mérés legyen az ötből 1, a négyből pedig 2 golyó.

I/4/A. Ha a 4. mérés is negatív, akkor megmérjük a maradék 2 golyót a négyből (5. mérés).

I/5/A. Ha ez a teszt is negatív, akkor az első 4 golyó között van mindkét radioaktív golyó, amit még 3 méréssel megtalálunk.

I/5/B. Ha az 5. mérésünk pozitív, akkor ebben, illetve az első 4 golyóban vannak a keresett golyók, melyek felezéssel megtalálhatók, $1 + 2$ méréssel.

I/4/B. Ha a 3. mérés negatív, de a 4. mérés jelez akkor az 1 és 2 golyók között van radioaktív.

II/5 Az 5. mérés legyen ugyanez az 1 golyó és a 4 utolsó golyóból a maradék kettő (ezeket eddig nem mértük).

II/5/A. Ha az 5. mérés jelez, akkor a 4. mérésben már tesztelt 1 golyó biztosan radioaktív, mert a 4 golyó között maximum 1 lehet csak az, így nem lenne pozitív mindkét esetben a mérésünk eredménye. Miután tudjuk, hogy az 1 golyó radioaktív, a maradék 8 golyóból felezéssel megtalálható a keresett másik golyó még 3 méréssel.

II/5/B. Ha az 5. mérésünk negatív, akkor csak a 4 utolsó golyóból már tesztelt 2 golyó között lehet a radioaktív, amit felezéssel, 1 további méréssel, megtalálunk. A másik radioaktív golyó pedig csak az első 4 golyó között lehet, ami szintén felezéssel, 2 méréssel, megtalálható.

I/3/B. Ha az első mérés során mért 6 golyónál a műszer jelzett, a második mérés során mért 8 gyólyónál pedig nem, és a 3. mérésünk pozitív, akkor a 4. mérésünk a következő:

II/4 Teszteljük a 2 golyót az eddig nem mért első 6 közül és a 4 golyót, ami a 7-ből a maradék.

II/4/A. Ha a 4. mérés negatív, akkor marad $4+3$ golyónk, ahol tudjuk, hogy az $1+3$ golyóban van radioaktív.

III/5 Az 5. mérésünk legyen 2 golyó a 4-ből, amit eddig még nem mértünk.

III/5/A. Ha az 5. mérés nem jelez, akkor legyen a 6. mérés, hogy megmérjük a maradék 1 golyót!

III/6/A. Ha a 6. mérés is negatív, akkor az $1+3$-ból az 1 biztosan radioaktív, a 3-ból pedig felezéssel, 2 méréssel, megtaláljuk a másik sugárzó golyót.

III/6/B. Ha a 6. mérés pozitív, akkor a maradék négy golyót felezzük, ami még 2 mérés.

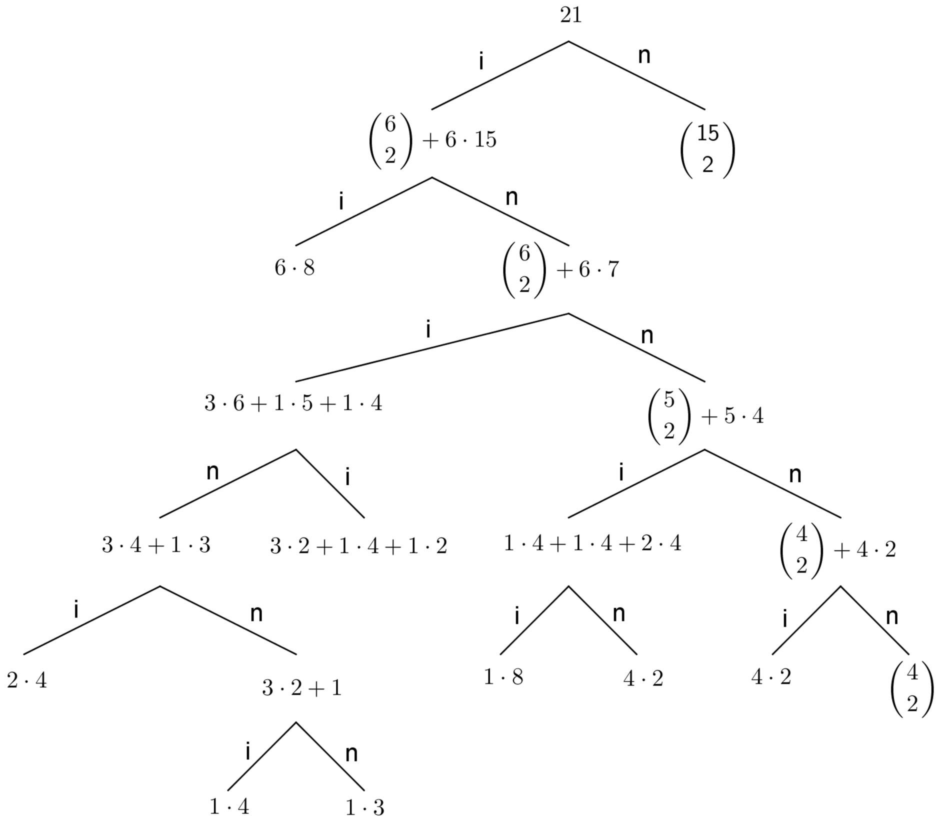
III/5/B. Ha 5. mérés pozitív, akkor még 1 méréssel megvan az ezek között lévő sugárzó, és az $1+3$ maradék golyóból pedig 2 méréssel megtaláljuk a keresett golyót.

II/4/B. Ha a 4. mérés pozitív, akkor a 3. mérés során mért $1+3$ golyók és a 4. mérésben mért $2+4$ golyók közt van egy-egy radioaktív.

IV/5 Legyen ekkor az 5. mérésünk a 3. mérés során 6 golyóból már tesztelt egy golyó.

IV/5/A. Ha a mérés nem jelez, akkor a másik 3 golyó között van egy radioaktív, és a 4. mérés során mért golyók közül csak a 6 golyóból kivett 2 golyó között lehet a másik. Ez felezéssel, $2+1$ méréssel, megtalálható.

IV/5/B. Ha az 5. mérés jelez, akkor megtaláltunk egy radioaktív golyót, a másik pedig a 4. mérés során mért 6 golyó között van, amiből felezéssel, még 3 méréssel, megtalálható a keresett golyó.



2. ábra.

Bizonyítsuk be, hogy $n = 22$ golyóra már nem lesz elegendő a 8 mérés, ehhez már 9 mérésre van szükség!

Tegyük fel, hogy 22 golyóból 8 méréssel megtaláljuk a 2 radioaktív golyót. Az éleink száma: $\binom{22}{2} = 231$.

Az első mérést úgy kell megválasztanunk, hogy ha az negatív, akkor a maradék golyókból 7 méréssel megtalálható legyen a 2 radioaktív golyó.

Ezen kívül szeretnénk, hogy az $\binom{n-k}{2} + (n-k)\cdot(k) < 2^7$, ahol k-ból 7 méréssel megtalálható legyen a 2 golyó.

Ezeknek a feltételeknek a következő tesz eleget: $(n-k) = 7$ és $k = 15$, ez $\binom{7}{2} + 7\cdot 15 = 126$

Legyen $a = c + d$, $b = e + f$, ahol a, b, c, d, e, f a golyók darabszámát jelöli és $a = 7$, $b = 15$.

Ekkor az első mérésünk során tegyünk a műszerbe 7 darab golyót (a), ha ez a teszt nem jelez akkor a maradék 15 golyó közül (b), a 2 radioaktív golyót még 7 méréssel megtaláljuk. Ha az első mérésünk jelez, akkor a fentmaradó éleink száma a következő: $\binom{7}{2} + 7 \cdot 15 = 126$ és van még 7 darab mérésünk.

Ebben az esetben a következő mérés legyen $d + f$! Ez a második mérésünk, ha ez a teszt negatív, akkor $62 \leq \binom{c}{2} + c \cdot e \leq 64$ lehet. Lehetőségek:

$c = 7$, $e = 6$;

$c = 6$, $e = 8$;

$c = 4$, $e = 14$

Az első lehetőség $c = 7$, $e = 6$ esetén, ekkor a második mérésünk során a 15 golyóból mérjünk meg 9 darab golyót! Ha ez a mérés jelez, akkor tudjuk, hogy a 7 illetve 9 golyók között egy-egy radioaktív golyó van, melyekből a későbbiekben láthatjuk, hogy $(7, 9)$ kimérhető 6 méréssel, ez összesen 8 mérés.

Ha a második mérés során a 9 golyó tesztelése nem jelez, akkor az első 7 golyó között biztosan van radioatív, illetve a 15 golyóból még nem mért 6 golyó között lehet maximum egy radioaktív golyó. Ekkor a fentmaradó éleink száma a következő: $\binom{7}{2} + 7 \cdot 6 = 63$ és van még 6 darab mérésünk.

Legyen $c = i + k$, $e = j + l$, ahol c, e, i, j, k, l a golyók darabszámát jelölik $c = 7$ $e = 6$.

Ekkor a harmadik mérésünk legyen $k + l$ golyó, ez a harmadik mérésünk, ha ez negatív, akkor az éleink száma $31 \leq \binom{i}{2} + i \cdot j \leq 32$ lehet. Ezt a feltételt csak az $i = 2$ és $j = 15$ lehet, de azt tudjuk, hogy $j \leq 6$, ezért nem tudjuk a megmaradt 6 mérésből a 2 radioaktív golyót megtalálni. Ennél a lehetőségnél tehát a 22 golyóból nem mérhető ki 8 méréssel a 2 radioaktív golyó.

A második lehetőség $c = 6$, $e = 8$ esetén, a második mérésünk során a 7 golyóból (a) egy és a 15 golyóból (b) nyolc darab golyót mérünk meg. Ha ez a teszt nem jelez, akkor az első 7 golyóból (a) a maradék 6 között biztosan van radioatív, illetve a 15 golyóból (b) a még nem tesztelt 7 golyó között is lehet maximum egy radioaktív golyó. Ekkor a fentmaradó éleink száma a következő: $\binom{6}{2} + 6 \cdot 7 = 63$ és van még 6 darab mérésünk. Az előző lehetőség során láttuk, hogy ez a 6 mérés nem elegendő a két radioaktív golyó megtalálására.

A lehetőségek közül az utolsó, $c = 4$ és $e = 14$, valószínűtlennek tűnik, mert a mérések jelzésétől függően a 126 élt 62 illetve 64 élre bontja. A maradék 6 mérés során csak felezhetnénk a maradék 64 élt, ez pedig nem vezet eredményre.

A fentiekből látható, hogy 22 golyó nem mérhető ki 8 méréssel, de a 3.2. Állítás szerint 9-cel már igen.

3.6. Állítás: *Az n golyóból két radioaktív golyó megtalálásához egy alsó határt tudunk megadni, $\left\lceil \binom{n}{2} \leq 2^m \right\rceil$, ahol m a mérések számát jelöli.*

4. Megfigyeléseink a mérések során

Látható, hogy a méréseink során vannak ismétlődő helyzetek.

Az első, mikor a mérésünk rögtön jelez. Ekkor tudjuk, hogy az első csoport golyói között van legalább egy radioaktív golyó, a még nem mért golyók közözött pedig legfeljebb egy lehet az.

A második, amikor két különböző csoportot tesztelünk egy-egy méréssel és a mérések mindkét esetben jeleznek. Ekkor azt tudjuk, hogy a két csoportban lévő golyók mindegyikében van egy radioaktív golyó.

4.1. Megfigyelés: Vizsgáljuk meg először az első esetünket!

Van n darab golyónk, amit felbonthatunk a következőéppen: $a + b = n$, ahol a és b a golyók darabszámát jelöli. Ekkor az első mérésünk a tesztelése. Mivel a mérésünk pozitív, tudjuk, hogy ebben a csoportban van radioaktív golyó, a még nem mért golyók között pedig csak egy lehet. Ebben az esetben a lehetőségeink száma $\binom{a}{2} + a \cdot b$, hiszen vagy a golyók között van mindkettő keresett golyó, vagy a és b golyók között van egy-egy radioaktív golyó.

A következőkben $a + b$-vel fogjuk jelölni azt az esetet, amikor az a golyók között biztosan van radioaktív golyó.

Nézzük azt az esetet, ha $b = 1$. Ekkor $a + 1$ darab az összes golyónk száma, erre pedig a megoldást 21 darab golyóig az 1. táblázatban megtaláljuk.

Tegyük fel, hogy $b \geq 2$, és $a = 1$, akkor a feltétel pontosan azt jelenti, hogy a különálló elem radioaktív. Ekkor a következő képletet tudjuk használni: $\lceil \log_2 b \rceil$.

4.1. Állítás: *Ha $a = 2$, akkor méréseink száma: $\lceil \log_2(b + 1) \rceil + 1$, kevesebb nem lehet, mert $\binom{2}{2} + 2 \cdot (b)$ lehetőségünk van.*

Bizonyítás. A 2 golyóból tesztelünk 1-et, ezzel megtaláljuk az egyik radioaktív golyót, a maradék $b + 1$ golyó közül pedig felezéssel találjuk meg a másik sugárzó golyót. □

Ha $a = 2$, $b = 2$, akkor 3 mérés elegendő.

Az előző állítást használva: $\lceil \log_2(2+1) \rceil + 1 = 2 + 1 = 3$

Ha $a = 2$, $b = 5$, akkor 4 mérés elegendő.

Az előző állítást használva: $\lceil \log_2(5+1) \rceil + 1 = 3 + 1 = 4$

Ha $a = 2$, $b = 7$, akkor 4 mérés elegendő.

Az előző állítást használva: $\lceil \log_2(7+1) \rceil + 1 = 3 + 1 = 4$

Ha $a = 3$, $b = 2$, akkor 4 mérés elegendő.

Mérés: Teszteljünk 1-et a 3 golyóból, ha a teszt nem jelez, akkor ez a $2+2$- es eset, ami még plusz 3 mérés. Ha a műszer jelez, akkor felezéssel, még 2 mérés szükséges.

Ha $a = 3$, $b = 4$, akkor 4 mérés elegendő.

Ezt két módón is beláhtatjuk.

Először nézzük meg hogyan tudjuk kimérni! Teszteljünk $1-1$ golyót a háromból és a négyből is! Ha a műszer nem jelez, akkor ez a $2+3$ estre visszavezethető, ahol 3 mérés már elegendő a sugárzó golyó megtalálásához. Tegyük fel, hogy a mérés jelez! Ekkor teszteljük az első 3 golyóból a maradék 2 elemet. Ha a mérés pozitív, akkor ebben a párban és a korábban tesztelt párban is van $1 - 1$ radioaktív golyó. Ekkor felezéssel $1 + 1$ méréssel megtalálhatjuk a radioaktív golyókat. Ha a 2. mérés nem jelzett, akkor a 3 golyóból megvan a radioaktív, ami az első méréskor tesztelt golyó. A maradék két lépesben a 4 golyóból felezéssel megkeressük a sugárzót.

Másik módón haználhatjuk a 3.1. Állítást, ha $3 + 5$ golyóból megtalálható a 2 keresett golyó 5 méréssel, akkor ez $3 + 4$ golyóra is igaz.

Ha $a = 3$, $b = 5$, akkor 5 mérés elegendő.

Mérés: Teszteljünk 1-et a 3-ból! Ha a műszer nem jelez, akkor ezt visszavezethetjük $2 + 5$ esetre, melyben 4 mérésből megtaláljuk a 2 aktív golyót. Ha a műszer jelez, akkor felezéssel, még 3 mérést használunk fel az aktív golyók megtalálására.

Ha $a = 4$, $b = 2$, akkor 4 mérés elegendő.

Mérés: Teszteljük a b-ben lévő 2 darab golyót! Ha ez negatív, akkor a 4 golyóból még 3 méréssel megtaláljuk a 2 radioaktívat. Ha a mérés pozitív, akkor tudjuk, hogy 4-ben és 2-ben is van egy-egy radioaktív elem. Ekkor mindkettőből felezéssel megtalálható sugárzó golyó még 3 méréssel.

Ha $a = 4$, $b = 3$, akkor 5 mérés elegendő.

Mérés: Teszteljünk 2 golyót a 4-ből! Ha a műszer nem jelez, akkor ezt az esetet visszavezetjük $2 + 3$ esetre, melyből 3 méréssel megtalálhatjuk a 2 keresett golyót. Ha a műszer jelez, akkor $2+5$ esetre vezetjük vissza, amelyben még 4 mérés szükséges a sugárzó golyók megtalálásához.

Ha $a=4$, $b=5$, akkor 5 mérés elegendő.

Mérés: Az első mérésünk során megmérjük a $b=5$ golyót és ez a mérés jelez, akkor a 4 és 5 golyók között egy-egy darab radioaktív golyó van. Ebben az esetben azonban felezéssel még $2+3$ mérés kellene a sugárzó golyók megtalálásához, ami 6 mérést eredényezne. Ezért itt a felezés nem működik.

Így a következő képpen fogjuk tesztelni a golyókat. Teszteljünk az első mérés során 2 golyót a 4-ből, ha a műszer nem jelez, akkor ezt visszavezetjük $2+5$ esetre és még 4 mérésre van szülségünk az aktív golyók megtalálásához. Ha a műszer jelez, akkor ebben a kettőben biztos, hogy van radioaktív golyó. A megmaradó két golyóban a négyből, illetve az öt golyóban még lehet egy radioaktív. Ekkor a megoldásunkat visszavezetjük $2+7$ esetre, ahol 4 mérés elegendő az aktív golyók megtalálására.

Ha $a=5$, $b=2$, akkor 5 mérés elegendő.

Mérés: Teszteljük a b-ben lévő 2 darab golyót! Ha a teszt negatív, akkor az 5 golyóból 4 mérésel megtalálható a 2 radioaktív golyó. Ha a mérés pozitív, akkor tudjuk, hogy az 5 és 2 golyók között is van egy-egy sugárzó, melyből felezéssel, még 4 méréssel megtaláljuk a radioaktív golyókat.

Ha $a=5$, $b=4$, akkor 5 mérés elegendő.

Mérés: Teszteljünk 2 golyót az 5-ből, ha a műszer nem jelez, akkor ezt az esetet visszavezetjük $3+4$ esetre, melyben 4 méréssel megtalálhatjuk a 2 sugárzó golyót. Ha a műszer jelez, akkor a $2+7$ esetre vezetjük vissza, ahol szintén 4 méréssel találhatjuk meg a radioaktív golyókat.

4.2. Megfigyelés: Most nézzük meg a második esetünket! Az első mérés során beteszünk a műszerbe a darab golyót. Ha a teszt pozitív, akkor a második mérésünk legyen a következő: tegyünk a még nem mért golyókból b darab golyót a műszerbe, ahol $a+b \leq n$ és n az összes golyónk száma. Ha a mérés jelez, akkor tudjuk, hogy mindkét csoportban pontosan egy darab radioaktív golyó van és a lehetéges éleink száma: $a \cdot b$. Az ilyen esetekben könnyedén felezéssel kerestük meg a radioaktív golyókat, de vannak olyan számpárok, melyeknél már eggyel kevesebb méréssel megtaláljuk a sugárzó golyókat.

Amikor felezünk, akkor arra hivatkozunk, hogy ha van a golyónk, abból egy sugárzó megtalálható $\lceil \log_2(a) \rceil$-val, tehát b-re is igaz, hogy $\lceil \log_2(b) \rceil$-vel megtalálhatjuk. Ekkor tudjuk, hogy összesen $\lceil \log_2(a) \rceil + \lceil \log_2(b) \rceil$ mérés biztosan elég. Azt állítjuk mégis, hogy nekünk $\lceil \log_2(a \cdot b) \rceil$ mérés is elégséges lehet.

Általában a két szám ugyanaz, de vannak esetek, ahol a $\lceil \log_2(a \cdot b) \rceil$ eggyel kevesebb, mint $\lceil \log_2(a) \rceil + \lceil \log_2(b) \rceil$. Az a és b párokat jelöljük a következőképpen: (a, b).

Vizsgáljunk meg olyan eseteket, amikor a kettő nem egyenlő egymással és kevesebb mérés is elegendő!

$(3, 5)$ eset során a $\lceil \log_2(3) \rceil + \lceil \log_2(5) \rceil = 2 + 3 = 5$, de a $\lceil \log_2(3 \cdot 5) \rceil = \lceil \log_2(15) \rceil = 4$.

Ekkor felezéssel 5 mérésből megtalálható a két radioaktív golyó. Lássuk be, hogy a 4 mérés is elégséges lesz!

Tegyünk a gépbe $1-1$ golyót az 5-ből és a 3-ból, (1. mérés) ha a műszer jelez, akkor itt biztosan van legalább egy radioaktív golyó. Legyen a 2. mérés az, hogy teszteljük az első 5 golyóból a maradék 4-et. Ha ez a mérés nem jelez, akkor tudjuk, hogy az ötödik golyó volt a keresett. A másik sugárzó golyó csak a 3 között lehet, amit felezéssel, 2 méréssel megtalálunk. Ha a 2. mérésben mért 4 golyónál a teszt jelzett, akkor tudjuk, hogy itt van egy radioaktív golyó, illetve az elsőként mért 2 golyó közül csak a 3-ból kivett lehetett a másik radioaktív. A 4 golyóból felezéssel, még 2 méréssel, megtalálható a sugárzó golyó. Így tehát elegendő a 4 mérés a két aktív golyó megtalálásához.

$(6, 5)$ eset során a $\lceil \log_2(6) \rceil + \lceil \log_2(5) \rceil = 3 + 3 = 6$, de a $\lceil \log_2(6 \cdot 5) \rceil = \lceil \log_2(30) \rceil = 5$.

Ekkor felezéssel 6 mérésből megtalálható a két radioaktív golyó. Lássuk be, hogy a 5 mérés is elégséges lesz!

Teszteljünk 3 golyót a 6-ból (1. mérés). Ha a teszt negatív, akkor biztosan tudjuk, hogy a még nem mért golyók között van mindkét sugárzó. Ekkor esetünket visszavezetjük a (3,5) párra, aminél a keresett golyók megtalálásához 4 mérés elegendő volt. Ha az első mérés pozitív, akkor tudjuk, hogy ebben a 3-ban és a másik 5 golyóban van egy-egy sugárzó. Ismételten a (3,5) párra vezetjük vissza ezt az esetet is, így tehát elegendő az 5 mérés a sugárzó golyók megtalálásához.

$(7, 9)$ eset során a $\lceil \log_2(7) \rceil + \lceil \log_2(9) \rceil = 3 + 4 = 7$, de a $\lceil \log_2(7 \cdot 9) \rceil = \lceil \log_2(63) \rceil = 6$.

Ekkor felezéssel 7 mérésből megtalálható a két radioaktív golyó. Lássuk be, hogy a 6 mérés is elégséges lesz!

I. Legyen az első mérésünk, hogy 9-ből kiveszünk egy a 7-ből pedig három golyót és ezeket megmérjük.

I/1/A. Ha az első mérés nem jelez, akkor a maradék $4+8$ golyóból 5 méréssel megtalálható a radioaktív.

I/1/B. Ha a mérés jelzett akkor a maradék éleink száma 31, mivel a mért 1 golyó össze van kötve a másik 7 golyóval, (7 darab él) a másik 3 golyó pedig az első 9-cel (27 darab él). Ebből 3 él kétszer van bele számolva az élekbe, ezért az összes élünk száma $7 + 27 - 3 = 31$

I/2 A második mérésünk ezek után legyen 5 golyó a 9-ből.

I/2/A Ha ez a mérés nem jelez, akkor a maradék éleink $3 \cdot 3 + 1 \cdot 7 = 16$

I/3 A 3. mérés legyen a 3 golyóból 2.

I/3/A. Ha ez nem jelez, akkor mérjük meg a 3. golyót (4. mérés)

I/4/A. Ha a 3. golyó mérése nem jelez, akkor az első mérés során a 9 golyóból mért 1 golyó radioaktív volt. A 7 golyó közül pedig 4 golyó marad csak, amiből 2 méréssel megtalálható a másik keresett golyó is.

I/3/B. Ha a 3. mérés során tesztelt 2 golyó mérése jelez, akkor teszteljük közülük az egyiket, így megtalálhatjuk a radioaktív golyót. A másik keresett golyó a 9 golyóból a 4 golyó között lehet csak, amiből 2 méréssel megtaláljuk azt.

I/2/B Ha az öt golyó tesztje pozitív volt, akkor $5 \cdot 3 = 15$ élünk maradt. Ekkor a megoldást vissza tudjuk vezetni az $(5, 3)$ esetre, ahol elegendő volt 4 mérés.

5. Hasonló feladatok

Az átdolgozott feladatra sajnos nem sikerült olyan megoldást találni, amellyel bármennyi golyóra tudnánk a megoldást. Ezért nézzünk olyan feladatokat, amelyek sokban hasonlítanak.

5.1. Feladat: *Az átdolgozott feladatban egy n csúcsú teljes gráfról beszélünk, aminek egy élét keressük. Most nézzük meg mi történik, ha egy n hosszú út két pontját összekötő élt szeretnénk megtalálni úgy, hogy egyszerre több csúcsot is tudunk mérni a műszerünkkel, a csúcsok ebben a feladatban is a golyókat jelölik!*

5.1. Állítás: *Egy n csúcsú útnak pontosan $n - 1$ éle van.*

5.2. Állítás: *Egy csúcs mérésekor, ha az nem a szélső, összesen 2 élt tudunk megvizsgálni.*

5.2. Megoldások: Az alábbiakban néhány csúcs esetén megmutatjuk, hogy hány mérésre van szükségünk a keresett él megtalálásához.

$n = 2$ esetén 1 darab élünk van, ami a keresett él.

$n = 3$ esetén 2 darab élünk van. Ebben az esetben mérjük meg az egyik szélső csúcsot! Ha ez a mérés negatív, akkor a másik a kerrsett él ha a mérés pozitív, akkor ezt az élt kerestük, ez összesen 1 mérés.

$n = 4$ esetén 3 darabb élünk van. Mérjük meg valamelyik szélső csúcsot! Ha a mérés jelez, megvan a keresett él. Ha nem jelez, akkor a maradék élek közül 1 méréssel megtaláljuk a keresettet, így összesen 2 mérésre van szükségünk az aktív él megtalálásához.

$n = 5$ esetén 4 darab élünk van, ha megmérjük a második csúcsot és a mérés jelez, akkor ebben a 2 élben van a keresett. Ha nem jelez, akkor a másik 2 élben található az aktív él. Mindkét esetben még egy mérés elegendő a kereserr él megtalálásához. Tehát 5 csúcs estén 2 mérés szükséges.

$n = 6$ esetén 5 darab élünk van. Ha megmérjük a második csúcsot, akkor az öt él hosszúságú út szétesik, egy 2 és egy 3 hosszúságú útra. Ha ez a mérés jelez, akkor eközött a 2 él között van a keresett, melyet még egy méréssel megtalálunk. Ha az első mérés nem jelez, akkor a 3 hosszúságú út valamelyik élét keressük. Ezt $n = 4$-nél korábban már láttuk. Ebből következik, hogy 6 csúcshoz nem elegendő 2 mérés, de 3 már igen.

Vajon meddig lesz elegendő a 3 mérés?

Válasszuk meg úgy az első mérésünket, hogy egymás melletti csúcsokat tesztelünk úgy, hogy a csúcsok az összes élünk számának a felét fogják le! Ekkor az első mérésünk után az útunk 2 újabb útra esik szét. Ha a csúcsaink száma páros, akkor az éleink száma páratlan, és az első mérés után egy páros- illetve egy páratlan hosszúságú útra bomlik az eredeti út. Tehát 3 mérés addig elegendő, amíg a szétesett utakat maximum 2 méréssel meg tudjuk mérni. Korábban láttuk, hogy 2 méréssel legfeljebb a 4 élhosszúságú utat tudjuk tesztelni, azaz összességében a $4 + 4$ hosszúságú utat tudjuk 3 méréssel kimérni, ahol a csúcsaink száma 9.

Minden mérés során a meglévő útunk felezéséhez a $\lceil \log_2(n-1) \rceil$-et használhatjuk, ahol $n - 1$ az útunk hossza.

Tehát egy n hosszú útban a keresett él megtalálásához a következő képletet tudjuk felírni: $2^{m-1} + 1 \leq n \leq 2^m$, ahol m az elégséges mérések számát, n pedig az élek számát jelöli.

5.3. Állítás: *Ha $n \leq 2^m$, akkor a keresett él megtalálásához m mérés biztosan elég.*

Bizonyítás. Egy n hosszú útnak $n+1$ darab csúcsa van, melyek mérésekor a két szélső kivételével a melettük lévő két élt tudjuk vizsgálni. Méréseink során a csúcsokat úgy választjuk meg, hogy azok egy újabb összefüggő utat fogjanak le. Ebben az útban a csúcsokat jelöljék balról jobbra számok 1-től egészen az $n+1$ csúcsig.

Ha az éleink száma páratlan, akkor vizsgáljunk meg minden páros számú csúcsot egészen addig, míg el nem jutunk a csúcsok feléig, azaz $\frac{n+1}{2}$-ig! A megmért út páros hosszúságú, mégpedig $\frac{n+1}{2}$. Ha ez a mérés nem jelez, akkor a még nem mért páratlan $\frac{n-1}{2}$ hosszúságú útban lesz a keresett él. Ebben az esetben ugyanezzel az eljárással folytatjuk a mérést, amíg meg nem találjuk az aktív élt. Ha az első mérésünk jelez, akkor a következő mérésnél, amikor megfelezzük megmaradó éleinket, két újabb páros hosszúságú utat vizsgálunk. Ezek közül pedig további felezésel megtalálható a keresett él.

Tehát n darab él közül a keresett él felezéssel megtalálható. $\lceil \log_2(n) \rceil$, ami m-mel megegyezik. $\square$

5.3. Feladat: *A következőben annyit módósítunk a feladaton, hogy nem egy útnak, hanem egy n csúcsú körnek keressük az egyik élét. A gép most is egyszerre több csúcsot tud vizsgálni.*

5.4. Állítás: *Egy n csúcsú kör éleinek száma is n.*

5.5. Állítás: *Egy csúcs mérésekor, minden esetben, összesen 2 élt tudunk megvizsgálni.*

5.4. Megoldások: Csúcsaink számától függetlenül válasszuk meg az első mérésünket úgy, mint az előző feladatban! A mérés során egymás melletti csúcsokat tesztelünk úgy, hogy a csúcsok az összes élünk számának a felét fogják le. A teszt után a vizsgált kör 2 darab útra esik szét, melyek közül már biztosan tudjuk, hogy melyikben van a keresett él. Ha a csúcsaink száma páros, akkor két egyenlő hosszúságú útra, ha páratlan, akkor egy páros- illetve egy páratlan hosszúságú útra bomlik a kör.

Mivel az első mérés után itt is utakról beszélünk, úgy mint az előző feladatban, megoldásunkat visszavezethetjük az 5.1. Feladat megoldására. Ebben az esetben is ugyanazt a képletet tudjuk felírni, mint ott. Tehát egy n csúcsú körben a keresett él megtalálásához $2^{m-1}+1 \leq n \leq 2^m$, ahol m az elégséges mérések számát, n pedig az élek számát jelöli.

Beláthatjuk tehát, hogy a méréseink során hasonlóan, mint az 5.1. Feladatnál, az élek számának felezésével megtaláljuk a radioaktív élt.

6. Érdekességek

Vizsgáljuk meg, hogy a szabályos testek egy adott élének megtalálásához legkevesebb hány mérésre van szükszégünk!

1.) Tetraéder

Tudjuk, hogy egy csúcsban 3 él fut össze, azaz egy csúcs megmérésével egyszerre 3 él radioaktivitását vizsgáljuk. Ezen kívül azt is tudjuk, hogy az összes éleinek száma 6.

Legyen az első mérésünk 1 csúcs vizsgálata. Ha ez a mérés jelez, akkor tudjuk, hogy az ehhez a csúcshoz tartozó 3 él közül valamelyik radioaktív. Ekkor még két mérést kell elvégeznünk ahhoz, hogy biztosan tudjuk melyik a keresett élünk.

Ha az első mérés nem jelez, akkor a tetraéderből csak egy háromszög marad, melyben egy él megtalálásához 2 mérésre van szükség.

A tetraéder egy keresett éle tehát összesen 3 méréssel megtalálható.

2.) Kocka

Tudjuk, hogy egy csúcsban 3 él fut össze, azaz egy csúcs megmérésével egyszerre 3 él radioaktivitását vizsgáljuk. Ezen kívül még tudjuk azt is, hogy az összes éleinek száma 12.

Legyen az első mérésünk, hogy a síkban egymással szemközt elhelyezkedő csúcsot mérjük meg, ez összesen 6 él mérése egyszerre. Ha ez a mérés jelez, akkor ebben a 6 élben van a keresett él. Második mérésünk ekkor legyen az, hogy megmérjük 2 csúcs közül az egyiket, ha ez a mérés jelez akkor ebben a 3 élben van a keresett, aminek a megtalálásához még 2 mérés szükséges. Ha a 2. mérésben a csúcs nem jelez, akkor tudjuk, hogy a másik csúcsnál összefutó 3 élben van a keresett él, ami szintén két méréssel megtalálható.

Ha az első mérés során mért 2 csúcs nem jelez, akkor a maradék 6 él között lehet a keresett él. Mérjünk meg másodikként egy csúcsot, ami az első körben mért egyik csúcshoz képest a síkban átlósan helyezkedik el. Ekkor ismételten egy olyan csúcsot mérünk meg, amihez 3 él fut. Ha ez a mérés jelez, a 3 élből 2 méréssel megvan a keresett él. Ha a mérés nem jelez, akkor a másik 3 élből is megtalálható a keresett él 2 méréssel.

Tehát a kocka egy keresett éle összesen 4 méréssel megtalálható.

3.) Oktaéder

Tudjuk, hogy egy csúcsban 4 él fut össze, azaz egy csúcs megmérésével egyszerre 4 él radioaktivitását vizsgáljuk. Ezen kívül még azt is tudjuk, hogy az összes éleinek száma 12.

Az első mérés során tegyünk a műszerbe egy csúcsot, ezzel 4 és 8 élre vágtuk a testet. Ha az első mérés jelez, akkor ez között a 4 él között van a keresett élünk. Ekkor második mérésben mérjünk meg 2 olyan csúcsot, mely az élek másik vége lehet. Ha a mérés jelez, akkor megmérjük az egyik csúcsot, ebből a mérésből biztosan tudjuk, hogy melyik a keresett él. Ha a második mérés nem jelez, akkor a másik 2 él között van a keresett, ami plusz egy méréssel megtalálható.

Ha az első mérés során a műszer nem jelez, akkor 8 élünk marad úgy, hogy ezek egy gúlát alkotnak. Ekkor a második mérés legyen a gúla csúcsa, mert így 4 élt tesztelünk egyszerre. Ha ez a mérés jelez akkor ebben a négyben van a keresett él, és a keresett él megtalálásához még két mérés szükséges. Ha a 2. mérés nem jelez, akkor a másik 4 él között van a keresett él, és ez a négy él egy négyzetet ad. Egy négyzet egy élét 2 méréssel lehet megtalálni.

Az oktaéder egy keresett éle tehát összesen 4 méréssel megtalálható.

4.) Dodekaéder

Tudjuk, hogy egy csúcsban 3 él fut össze, azaz egy csúcs mérésével egyszerre 3 él radioaktivitását vizsgáljuk. Ezen kívül azt is tudjuk, hogy az összes éleinek száma 30. Öt mérés elégséges a keresett él megtalálásához. Ennek bemutatására a 3. ábra lesz segítségünkre.

I. Az első mérés során tegyünk a gépbe 7 csúcsot, ezeket kékkel jelöltük és a kék éleket fogják le, ami összesen 15.

I/1/A. Ha ez a mérés jelez, akkor a B jelű dodekaéderen a zöld (7 darab) illetve a kék (8 darab) élek maradtak.

I/2 Legyen a 2. mérésünk a 3 darab kék csúcs (B).

I/2/A. Ha ez jelez, akkor a C jelű dodekaéderen már csak a zöld, illetve kék éleink vannak. A 2 darab kék csúcsot tegyük be a gépbe a 3. mérés során.

I/3/A. Ha a mérés jelez, akkor a 4 darab kék élből 2 méréssel megtaláljuk a keresettet.

I/3/B. Ha 3. mérés nem jelez, akkor a 3 darab zöld él marad, amiből szintén 2 méréssel megvan a keresett él (megmérjük a 2 zöld csúcsot külön-külön).

I/2/B. Ha a 2. mérésben a kék csúcsok nem jeleztek (B dodekaéder), akkor a C-n lévő lila élek maradnak.

II/3 Legyen a 3. mérésünk az, hogy teszteljük a 2 darab lila csúcsot, ez összesen négy él.

II/3/A. Ha ez a mérés jelez, akkor 2 méréssel megtaláljuk a keresett élt úgy, hogy megmérjük a rózsaszín csúcsot. Ha ez a mérés jelez, akkor a két él valamelyike a keresett, ha nem jelez, akkor a másik két él valamelyike a radioaktív.

II/3/B. Ha a 3. mérés nem jelez, akkor 3 élünk marad, amiből 2 méréssel megvan a keresett él.

I/1/B. Ha az első mérésünk nem jelez, akkor a D dodekaéder kék és zöld élei jöhetnek csak szóba.

II/2 Ekkor legyen a 2. mérésünk a 4 darab kék csúcs (D), ez összesen 8 darab él.

II/2/A. Ha ez a mérés jelez, akkor a E dodekaéderen a kék és a zöld élek maradnak.

III. 3. mérés legyen a 2 darab sötétebb kék csúcs mérése (E), ez összesen 4 darab él.

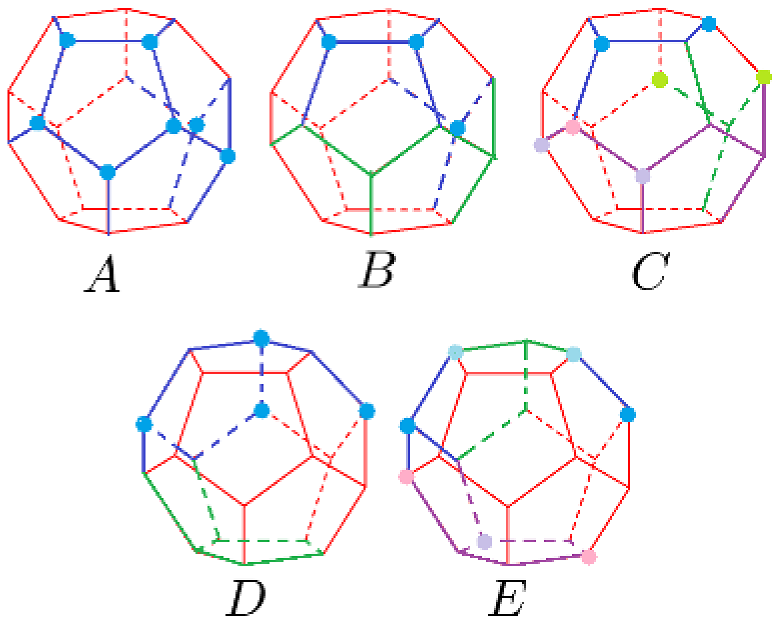
III/3/A. Ha a mérés jelez, akkor a 4 darab kék él marad, ebből két méréssel megtaláljuk a keresettet. Megmérjük a két halványkék csúcsot, és ha ez a mérés jelez ebben a két élben van a keresett, ha nem, akkor a másik kettőben van a radioaktív.

III/3/B. Ha a 3. mérés nem jelez, akkor a 4 zöld él marad, ezután megmérjük a két halványkék csúcsot, ami után két-két élt kell vizsgálnunk, amiből még egy méréssel megvan a keresett él.

II/2/B. Ha a 2. mérés nem jelez, akkor a lila élek maradnak, és ha megmérjük a lila csúcsot 3 és 4 élt kell vizsgálnunk, melyek mindegyike 2 méréssel mérhető.

A dodekaéder egy keresett éle tehát összesen 5 méréssel megtalálható.

Az 3. ábrán látható, hogyan esik szét a dodekaéder egyes mérések során.



3. ábra.

Hivatkozások

[1] Középiskolai Matematikai Lapok Fóruma