Matematika Bsc szak, Tanári szakirány

Molnár Nikolett

Néhány nem szokványos feladat a geometria területéről

Témavezető:

Hegyvári Norbert

Főiskolai tanár

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest

2016

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Őszintén be kell vallanom, hogy az általános iskolai és gimnáziumi éveim során a matematikán belül a geometria témaköre nem tartozott a kedvenceim közé. Valamiért nem találtam fogást rajta, pedig ez az ág pont azért különleges, mert belevihetjük a képzelőerőnket, lerajzolhatjuk ötleteinket, melyek remek kiindulási alapokat adnak egy-egy témakör feldolgozásához, vagy feladat megértéséhez. Mindezeken felül következtetésekkel és azok bizonyításaival remekül megvilágítható rengeteg kérdéses feladat.

Az utóbbi években, egyetemi tanulmányaim során viszont egy teljesen új világ tárult elém és magával ragadott a geometria sokszínűsége, így a szakdolgozatomban igyekeztem ezt bemutatni. Törekedtem rá, hogy többféle formában, stílusban feldolgozzam ezt, és hogy az egyszerűbb feladatoktól a mélyebb számolásokig mindenfélét belevigyek az alkotásomba.

Érdekes volt látni, ahogy egy-egy feladat sík- és térbeli típusára is megoldás született. Többször előfordult, hogy jó megérzések birtokában születtek a megoldások alapjai, máshol egyértelmű algebrai úton való számításokból adódtak a végeredmények. Dolgozatomban igyekeztem egyértelmű jelöléseket alkalmazni, vagyis leírtam és több esetben ábrával is szemléltettem őket a könnyebb megértés érdekében.

Több forrásból dolgoztam, de önálló ötletek is születtek egy-egy téma kiteljesedése közben, így főként a tételek használatakor a [Gard] és [Guy] könyvekben szereplő eredmények nyújtottak plusz segítséget, a feladatoknál pedig a szakdolgozat végén feljegyzett további források elképzelései is a kedvemre voltak, így azon munkák közül is kerültek felhasználásra.

Végül szeretném megragadni a lehetőséget, hogy őszinte tisztelettel megköszönhessem témavezetőmnek, Hegyvári Norbertnek, hogy tudásával és segítségével hozzájárult a dolgozatom létrejöveteléhez. Nagyon hálás vagyok a félév közben lebonyolított konzultációkért, hogy a felgyülemlő kérdések megvitatása sikeresen zárult, valamint a gyors és rugalmas elérhetőségért, ami a mindennapos munkám mellett megkönnyítette a szakdolgozatom írását.

1. fejezet

Feldarabolások

1.1. Feladat

Egy négyzetet szeretnénk felosztani n db kisebb négyzetre. Milyen következtetéseket vonhatunk le, vagyis milyen n pozitív egészekre darabolható fel?

Megoldás

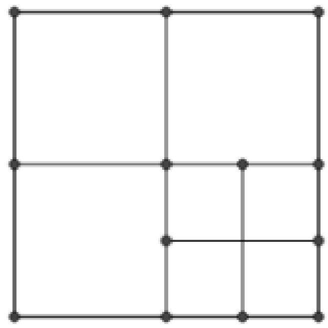
$n = 1$ triviális, hiszen ez a kiindulási négyzetünk

$n = 2$ és $n = 3$ minden kétséget kizáróan nem valósítható meg

$n = 4$ négyzetre már fel tudjuk darabolni, hiszen elegendő az oldalfelező merőlegeseket behúzni és kapunk 4 db feleakkora oldalhosszúságú négyzetet, mint az eredeti volt. Viszont ebben az esetben megállapíthatunk mást is, mégpedig, hogy ha n darabra feldarabolható, akkor $n + 3$-ra is ezzel a módszerrel, valamint itt $n = 1$ és $n = 4$ már megvalósult, így ha $k \geq 1$, akkor a $3k + 1$ alakú természetes számokra megoldható a feladat.

Nézzük tovább, $n = 5$-re nem tudjuk megoldani

$n = 6$ esetén már sikerrel járunk, hiszen ha két szomszédos oldalt felosztunk $3-3$ egyenlő részre és ezen oldalakkal a négyzeteket megrajzoljuk, akkor kapunk 5 db $\frac{1}{3}$ oldalhosszúságú négyzetet és 1 db $\frac{2}{3}$ oldalhosszúságú négyzetet. Viszont ebből kifolyólag a $3k$ alakú természetes számokra is megoldható,

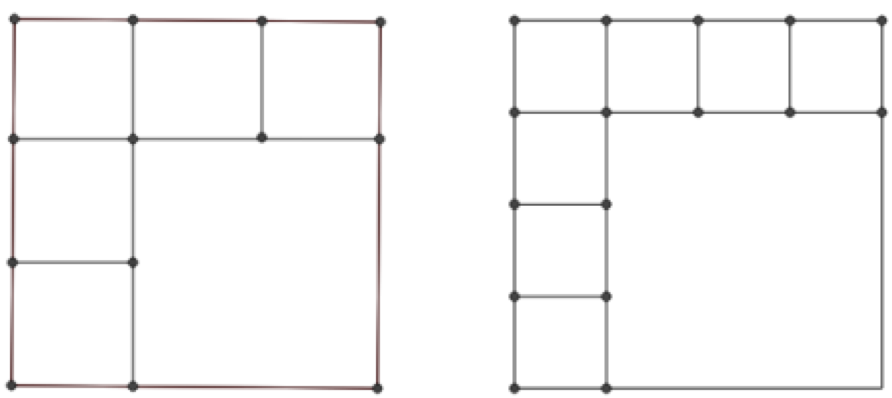


1.1. ábra.

ha $k \geq 2$.

$n = 7$ már teljesül, mivel $3k + 1$ alakú szám

$n = 8$ pedig az $n = 6$-hoz hasonló feldarabolási módszerrel kapható meg, ahol jelen esetben két szomszédos oldalt felosztunk 4-4 egyenlő részre, és az ehhez tartozó kicsi négyzeteket berajzoljuk. Ekkor keletkezik 7 db $\frac{1}{4}$ oldalhosszúságú négyzet és 1 db $\frac{3}{4}$ oldalhosszúságú négyzet. Tehát 8-ra is feldarabolható.



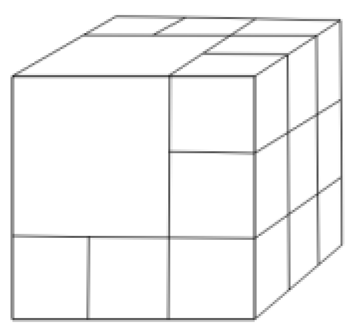
1.2. ábra.

Ebből következik, hogy $n \geq 6$ esetén bármilyen n-re elvégezhető a felosztás.

Következmény

Elgondolkodhatunk, hogy mi a helyzet, ha nem a síkban, hanem a térben vizsgálódunk. Mint a négyzet felbontásánál, itt is könnyen látható, hogy ha n részre felbontottuk a kockát és fel tudjuk bontani k és m részre is, akkor van felbontása $n+m-1, n+k-1$ és általában van $n+a(k-1)+b(m-1)$ részre is, ahol a, b nemnegatív egészek. Feladatomban tehát be fogom mutatni , hogy milyen megállapításokat tehetünk, ha egy kockát több kicsi kockára darabolunk.

Egyértelműen látható, hogy a kockát fel tudjuk bontani pl. $n = 1, 8, 20, 27$ részre. ($8 = 2\times2\times2$, $27 = 3\times3\times3$, a 20-at pedig úgy, hogy a 27 felbontásában a "sarokban levő" $2 \times 2 \times 2$-es kockát egy kockának tekintjük).



1.3. ábra.

Megjegyzés

Pontos válasz is adható a felbontások számáról:

Tétel:[Gardner] Bármely $n \geq 48$ természetes szám esetén létezik a kockának n részkockára való felbontása.

(A bizonyítás megtalálható [Gard]-ban.)

A következő feladatban egy gyengébb, de rövidebb úton igazolható állítást bizonyítunk.

1.2. Feladat

Bármely $n \geq 110$ természetes szám esetén létezik a kockának n részkockára való felbontása.

Megoldás:

Szükségünk lesz a Frobenius-tól származó úgynevezett "The Postage Stamp Problem" egy speciális esetére.

"The Postage Stamp Problem.": Legyen A, B két relatív prím egész. Ekkor bármely $n \geq (A-1)(B-1)+1$ szám felírható $n = Ax + By$ alakban, ahol x, y nemnegatív egész számok.

(Ez abból következik, hogy mivel A, B két relatív prím egész, így pl. $A, 2A, \ldots, (B-1)A$ az összes nem nulla maradékot kiadja $modB$. Részletes bizonyítás és kapcsolódó kérdés a [Guy]-ban található).

Ebből és a fentiekből arra a következtetésre jutunk, hogy bármely $n \geq (7-1)(19-1)+1 = 109$ szám felírható $7k + 19m$ alakba és emiatt (mivel $n = 1$-re felbontható a kocka) $n = 110$-től kezdve bármely n-re is.

2. fejezet

Színezések

2.1. Feladat

Színezzük a sík ($\mathbb{R}^2$) pontjait két színnel (piros és kék). Az állítjuk, hogy $\forall a > 0$ távolsághoz $\exists P$ és Q egyszínű pontok, hogy $\bar{PQ} = a$.

Megoldás

Ezt az a távolságot akárhogyan is választjuk meg, egyértelműen lesz ilyen, és itt elég csak a szabályos háromszögre gondolnunk, hiszen ha az egyik csúcs piros, a másik kék, akkor a harmadik csúcs biztos, hogy vagy kék vagy piros lesz, így az állításunk igaz.

2.2. Feladat

Az előző feladathoz hasonlóan mi a helyzet akkor, ha három színnel színezünk (piros, kék és zöld). Az állításunk szerint bárhogyan is színezünk $\exists$ 2 egyszínű pont, hogy a távolságuk a.

Megoldás

Az előző esetből kiindulva vegyünk egy szabályos háromszöget, melynek minden csúcsa más színű, mert egyébként készen vagyunk. Az egyik oldaltól elindulva felvehetünk egy újabb szabályos háromszöget (lásd az ábrát). Az előző gondolatmenetből következően egy olyan rombuszt kapunk, melynek két legtávolabb levő csúcsa egyszínű, legyenek ezek X, Y. A rombuszt X körül olyan helyzetbe forgassuk el, amelyben az YY' távolsága éppen a.

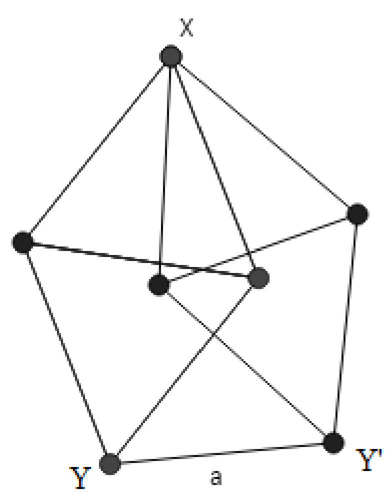
Megjegyzés A lenti ábrát szokás Moser-gráfnak is nevezni.

2.3. Feladat

Adott a síkon az $ABC\Delta$, amelynek pontjait pirossal és kékkel színezzük. Ha nincs egy adott távolságú piros pontpár, akkor létezik az $ABC\Delta$-gel egybevágó kék háromszög.

Megoldás

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az adott távolság egység, azaz nincs két piros pont, melynek távolsága egységnyi. Először bizonyítjuk, hogy létezik egységnyi oldalú szabályos kék háromszög. Indirekt tegyük fel, hogy nem létezik ilyen. Ekkor egy szabályos háromszögnek egy csúcsa piros, a másik kettő kék. Egészítsük ki ezt egy Moser-gráffá (lásd az ábrát).



2.1. ábra.

Ekkor az X, Y, Y' piros, ám YY' távolsága egységnyi. Ez egy ellentmondás.

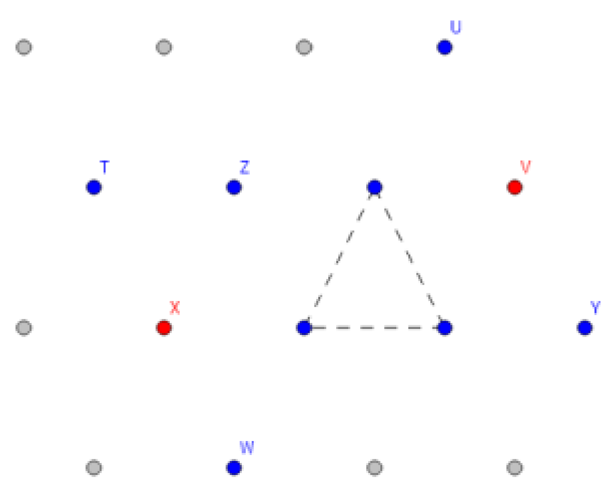
Tehát létezik egy egységnyi oldalú szabályos háromszög, melynek minden csúcsa kék. Toljuk el ezt a kékszínű háromszöget $\vec{AB}$ és $\vec{AC}$ vektorokkal. Így további két szabályos háromszöget kaptunk. Ezek megfelelő csúcsai három, az $ABC\Delta$-gel egybevágó háromszöget alkotnak. A két eltolt szabályos háromszögnek legfeljebb 1-1 pontja lehet piros a feltétel miatt. Ezért a három $ABC\Delta$-gel egybevágó háromszög közül legalább az egyiknek minden csúcsa kék. Ezt kellett bizonyítanunk.

2.4. Feladat

A sík pontjait kékkel és pirossal színezzük. Ha nem létezik piros egységnyi távolságra levő pontpár, akkor létezik négy kék kollineáris pont (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), melyek egységnyi távolságra vannak egymástól, azaz $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3Q_4}$.

Megoldás

Az előző feladat miatt létezik egységnyi oldalú szabályos kék háromszög. Egészítsük ki ezt a háromszögrács X, Y, Z, T, U, V, W pontjaival (lásd az ábrát). Az X, Y közül az egyik piros, mert egyébként készen vagyunk. Legyen X a piros. Ekkor Z, W, T kékek. De ebből következik, hogy V piros, az U pedig kék. Így viszont megkaptuk a négy kollineáris pontot (U és W a két szélső pont és a kék háromszög két pontja a két belső pont).



2.5. Feladat

Színezzük a tér ($\mathbb{R}^3$) pontjait kékkel és pirossal. Ekkor a térben bármely $a > 0$ számhoz találunk egy a oldalú szabályos háromszöget, melynek csúcsai azonos színűek.

Megoldás:

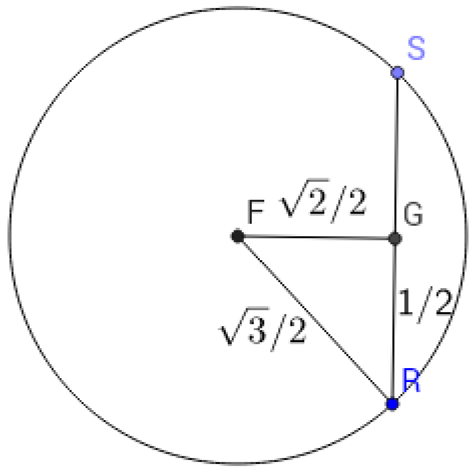
Elég a bizonyítást $a = 1$-re elvégezni.

Az előző feladat miatt létezik P és Q két olyan pont melyek távolsága 1 és azonos színűek, mondjuk piros. Tekintsük azt a kört melynek F középpontja az PQ szakasz felezőpontja, síkja merőleges PQ-ra és sugara $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ekkor egy olyan kört kapunk melyek pontjai a P és Q pontokkal szabályos háromszöget alkotnak. Ha e körnek van olyan pontja, amelyik piros, nyilván készen vagyunk. Tehát legye e kör minden pontja kék. Vegyünk fel e kék körön egy tetszőleges RS húrt, melynek hossza 1. Tekintsük most azt a kört melynek középpontja az RS szakasz G felezőpontja, síkja merőleges RS-re és sugara $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Hasonlóan az előzőekhez, ennek a körnek minden pontja piros (ellenkező esetben megint kész vagyunk). Ezt a gondolatmenetet tetszőleges R S párra elvégezhettük, a piros körök egy tórusz felületét adják. E tórusz sugara FG melyet a Pitagorász tétel segítségével számolhatunk ki: itt $\overline{FR} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{RG} = \frac{1}{2}$ így

$$\overline{FG} = \sqrt{\overline{FR}^2 - \overline{RG}^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

E tórusz mellék körének sugara $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Jegyezzük meg, hogy ez a tórusz nem "gyűrű" alakú, hanem itt a belső gyűrű sugara 0).

A tórusz felületének minden pontja piros, teljes átmérője $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 1$. Ezért a tórusz felületén ki tudunk jelölni egy egységnyi oldalhosszú szabályos háromszög három csúcsát, melynek csúcspontja piros színűek. Ezt kellett bizonyítani.



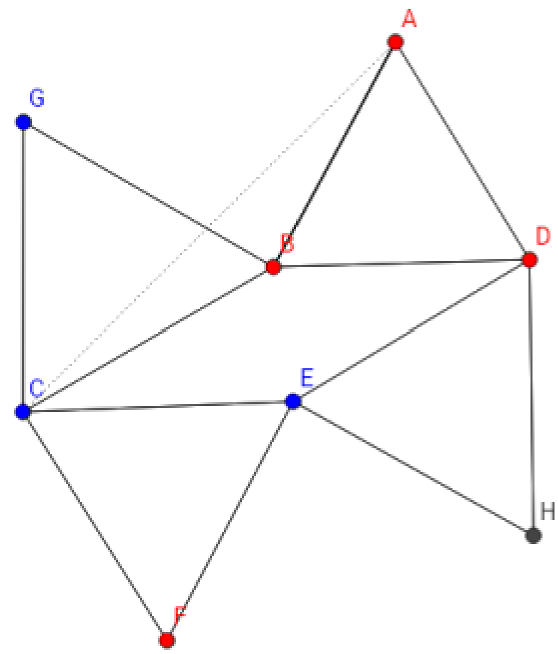
2.2. ábra.

2.6. Feladat

Legyen ABC a sík egy tetszőleges háromszöge (lehet elfajult is). Ekkor a tér bármely két színezése esetén létezik az ABC háromszöggel egybevágó egyszínű háromszög.

Megoldás

Az előző feladat miatt tudjuk, hogy a térben létezik az ABD egyszínű háromszög. Készítsük el az alábbi ábrát, ahol ABC a megadott háromszög, és rendre CBG, CFE, EHD szabályos háromszögek, ahol az ABD legyen piros. A C legyen kék, mert különben készen vagyunk. Hasonlóan a G is kék. Mivel a GCF egybevágó ABC-vel, ezért legyen F piros. Az FED is egybevágó ABC-vel és F, D piros, ezért legyen E kék. A CEH is egybevágó ABC-vel, így ha H kék, akkor CEH egyszínű, ha H piros, akkor az ABC-vel egybevágó ADH háromszög lesz piros.



2.3. ábra.

2.7. Feladat

1-től 9-ig a természetes számokat két színnel színezve (pirossal és kékkel) lesz egyszínű háromtagú számtani sorozat.

Megjegyzés

Ez tulajdonképpen a van der Waerden tétel speciális esete.

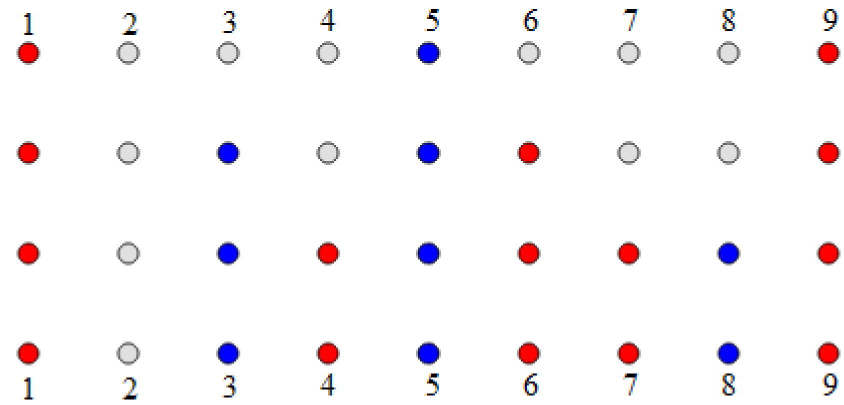
Megoldás

Tekintsük az 1,5,9 számokat. Ha ezek egyszínűek, akkor készen vagyunk. A szimmetria miatt elég tekinteni a következő eseteket:

1. eset: az 1,9 azonos színű (piros), az 5 másik színű (kék)

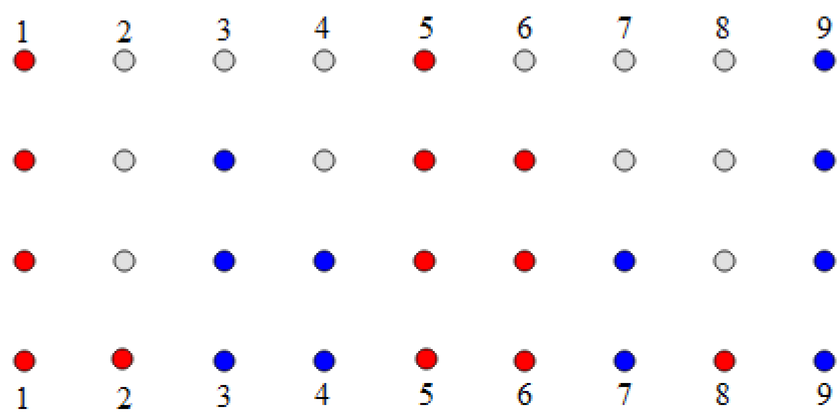
2. eset: az 1,5 azonos színű (piros), 9 a másik színű (kék)

1. eset: a 4-es és 6-os közül az egyik piros (egyébként 4,5,6 kék színű számtani sorozat lenne). Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy a 6-os piros. A 3,6,9 számtani sorozat, ha a 3 piros készen vagyunk, legyen



1. eset

tehát kék. Ebből a 4-esre és a 7-esre adódik, hogy piros, egyébként készen vagyunk. A 8-as kék kell, hogy legyen, mert a 4,6,8 piros színű számtani sorozat lenne. Végül, ha a 2-es kék, akkor 2,5,8 kék számtani sorozat, ha a 2-es piros, akkor a 2,4,6 piros számtani sorozat.



2. eset

2. eset: Ekkor a 3 kék lesz, különben készen vagyunk. A 6-os piros egyébként a 3,6,9 kék számtani sorozat lenne. Ebből következik, hogy a 4-es

és a 7-es kék. Ebből következőleg a 2-es 8-as piros (egyébként a 2,3,4 és 7,8,9 kék lenne). De így a 2,5,8 piros számtani sorozatot alkot.

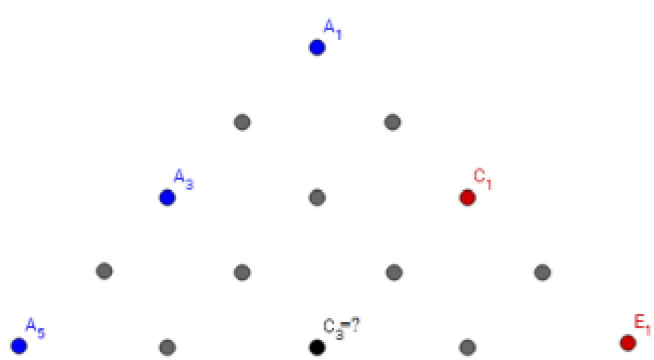
2.8. Feladat

Adott egy T tetszőleges háromszög. A sík pontjait kékkel és pirossal színezve létezik egy olyan egyszínű háromszög, amelyik a $T, 2T, 3T, 4T$ háromszögek valamelyikével egybevágó.

Megoldás

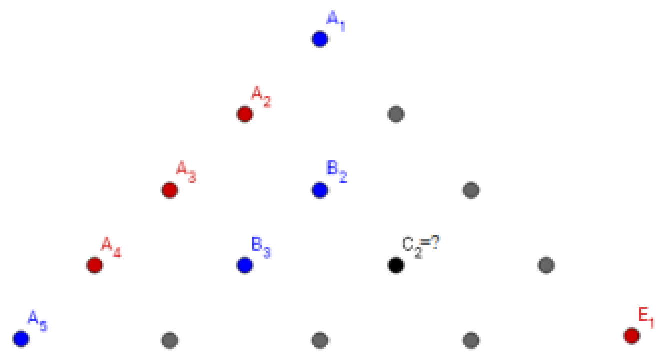
Tekintsük az alábbi ábrát (ahol $A_1A_2B_1\Delta = T$-vel, $A_1A_3C_1\Delta = 2T$-vel és így tovább $A_1A_5E_1\Delta = 4T$-vel egybevágó). A megoldást ezen a véges ponthalmaz színezésén mutatjuk meg. Indirekt tegyük fel, hogy ennek a 15 pontnak van olyan színezése, hogy a $T, 2T, 3T, 4T$ háromszögek közül egyikkel sincs egybevágó egyszínű háromszög.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy A_1, A_5 kék és E_1 piros. Most megmutatjuk, hogy A_3 piros. Ha mondjuk A_3 kék lenne, akkor C_1 csak piros lehet (ellenkező esetben $A_1A_3C_1\Delta = 2T$ kék lenne). Ekkor azonban, ha a C_3 kék, akkor $A_5A_3C_3\Delta = 2T$ kék lenne, ha C_3 piros, akkor viszont a $C_3E_1C_1\Delta = 2T$ lenne piros.



2.4. ábra.

Ha most A_2, A_3, A_4 mindegyike piros, akkor ebből következőleg B_2 kék (ellenkező esetben $A_3B_2A_2\Delta = T$ piros lenne. Hasonlóan a B_3 is kék. Végül ha a C_2 kék, akkor a $B_3C_2B_2\Delta = T$ kék lenne, ha a C_2 piros, akkor az $A_4C_2A_2\Delta = 2T$ lenne piros, ellentmondásra jutottunk tehát az indirekt feltevéssel.



2.5. ábra.

Tehát vagy A_2 vagy A_4 kék. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel, hogy A_2 kék. Ez viszont már egyértelmű kitöltését adja az ábrának: D_1 kék, A_3 piros, B_3 és B_4 kék, C_3 piros, B_2 kék, viszont C_1 ha kék, akkor $C_1C_2D_1\Delta = T$ kék háromszög, ha pedig C_1 piros, akkor $C_1C_3E_1 = 2T$ piros háromszög. Ekkor is ellentmondásra jutottunk, bizonyítva az állítást.

Megjegyzés

Amennyiben a T elfajult (a három pontja egy egyenesre esik), akkor a fenti ábra egy megfelelő paraméterezésével és alkalmas egyenesre való vetítésével igazolható ez az eset is.

3. fejezet

Távolság

Az aritmetikából ismert

$$1 + 2 + ... + (n-1) = \binom{n}{2},$$

másfelől például $n = 3$ esetén a három általános helyzetű pont két egyenlő és egy ezektől különböző távolságot határoz meg. (lásd az ábrát)

3.1. Feladat

a. Adjunk meg $n = 4$ esetén hasonló konfigurációt, azaz ahol egy távolság háromszor, egy ettől különböző távolság kétszer és az előzőektől különböző távolság egyszer.

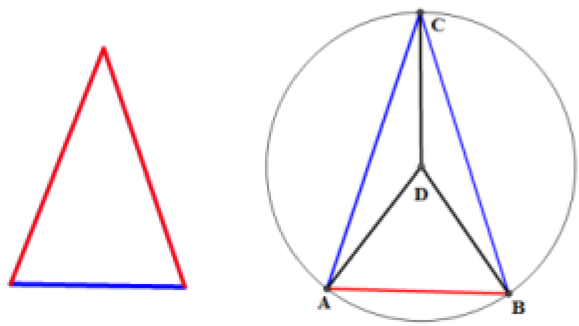
b. Adjunk meg $n = 5$ esetén hasonló konfigurációt, azaz ahol egy távolság négyszer, egy ettől különböző távolság háromszor, ezektől különböző távolság kétszer és mindegyiktől különböző egyszer.

a. Megoldás

Az $ABC\Delta$ egy egyenlőszárú háromszög, D pont a körülírható kör középpontja. Itt

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD};$$

$$\overline{AC} = \overline{BC}; \quad \overline{AB}$$

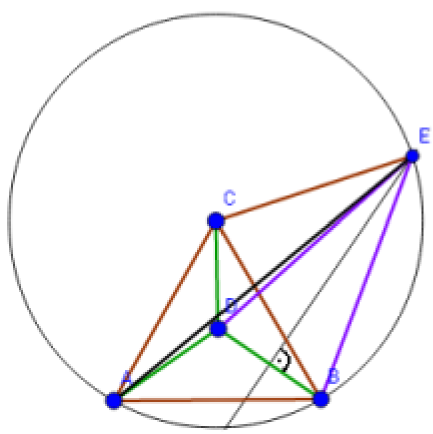


3.1. ábra.

a kívánt távolságok.

b. Megoldás

Itt az adott konfiguráció az ABC szabályos háromszög, D a háromszög körülírható körének középpontja, E-t a C középpontú $\overline{CB}$ sugarú körből a DB szakasz felező merőlegese metszi ki (lásd az ábrát).



3.2. ábra.

Itt

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{CE}$$

$$\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{DC}; \quad \overline{DE} = \overline{DB}; \quad \overline{AE}.$$

3.2. Feladat

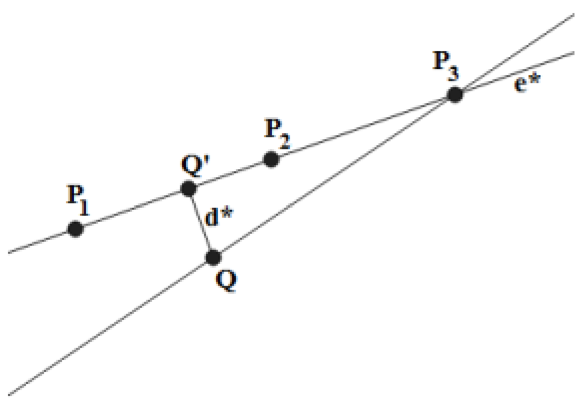
a) Adott n pont a síkon, nincs mindegyik egy egyenesen. Állítás: $\exists e$ egyenes, melyen az adott pontok közül pontosan kettő van.

b) Ha adott n pont a síkon és minden p_i, p_j által meghatározott egyenesen létezik p_k, ahol i, j, k különbözőek, akkor minden pont egy egyenesen van.

Bizonyítsuk be, hogy a két megfogalmazás ekvivalens egymással.

Megoldás

a) Legyen a Q az e_{ij} egyeneshez eső legközelebbi pont, ahol e_{ij} a P_iP_j pontokat köti össze, de Q nem eleme e_{ij}, valamint $d_{ij} > 0$. Válasszuk ki a minimális $d_{i_0j_0}$ távolságot és jelöljük ezt d_*-gal, $e_{i_0j_0}$-t pedig jelöljük e_*-vel, és legyen Q' a Q merőleges vetülete erre az egyenesre. Tegyük fel, hogy ezen az e_* egyenesen van három pont: P_1, P_2, P_3 és az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel azt is, hogy P_2 a $Q'P_3$ szakaszon fekszik. Ekkor azonban a P_2 a QP_3 egyenestől egy olyan d távolságra van, amelyik a d_*-nál kisebb ellentmondásként.



3.3. ábra.

a) $\Rightarrow$ b) Ha nem feküdne mindegyik egy egyenesen, akkor az a) feladat miatt létezne olyan egyenes, amelyen pontosan két pont fekszik.

Megjegyzés: Végtelen sok pont esetén nem igaz (rácspontok).

4. fejezet

Konvex négyszög

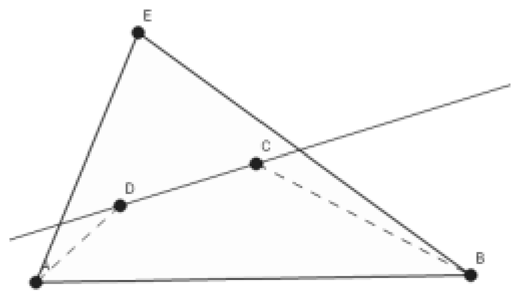
4.1. Feladat

Minimum hány általános helyzetű pontból (semelyik három nincs egy egyenesen) lehet kiválasztani egy konvex négyszöget? És egy általános n szöget?

Megoldás

$n = 4$ általános helyzetű pont természetesen nem elég, hiszen a pontok helyzetétől függően nem feltétlenül lesz konvex a lerajzolt négyszög.

$n = 5$ eset már átértékelendő, hiszen vegyük szemügyre az eseteinket. Előfordulhat a legjobb eset, miszerint ezen pontok konvex burkának 4 vagy 5 csúcsa van, mellyel már sikerrel jártunk, hiszen akkor kiválasztva a pontok közül 4-et már megvan a konvex négyszögünk. Viszont ha a felállás szerint a konvex burok egy háromszög, akkor egyértelműen következik, hogy a másik két pont a háromszög belsejében helyezkedik el. Ekkor, ha a két belső ponton át egy egyenest húzunk, akkor a maradék 3 pont két félsíkban helyezkedik el, még pedig az általános helyzetű tulajdonság miatt az egyikben egy pont lesz, a másikban pedig kettő. Ekkor a két belső pontot összekötjük azon két ponttal, amelyek egy félsíkban találhatóak, így minden esetben egy konvex négyszöget kapunk.



4.1. ábra.

Tehát 5 pont elegendő ahhoz, hogy egy konvex négyszöget kiválaszthassunk.

4.2. Feladat

Adott n általános helyzetű pont a síkon. Ekkor ezek közül kiválasztható legalább $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$ konvex négyszög.

Megjegyzés

Ez a feladat az előző feladat közvetlen következménye.

Megoldás

Válasszunk ki egy tetszőleges ötpontot az n pont közül. Ezt $\binom{n}{5}$-féleképpen tehetjük meg. Minden egyes ötösből kiválasztható egy konvex négyszög. Egy rögzített konvex négyszög legfeljebb $n-4$ kiválasztott ötöshöz tartozhat (valóban, az ötödik pontot $n-4$-féleképpen választhatom hozzá a konvex négyszöghöz).

Így a konvex négyszögek száma legalább

$$\frac{\binom{n}{4}}{n-4} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot 4!}}{n-4} = \frac{1}{5}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{1}{5}\binom{n}{4}$$

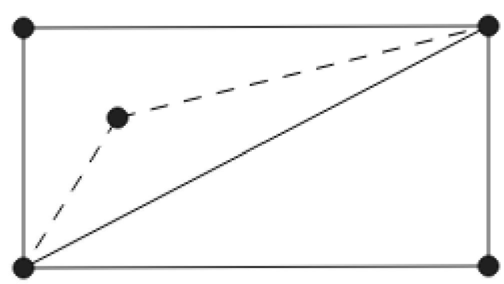
4.3. Feladat

5 általános helyzetű síkbeli pontból mindig kiválasztható egy tompaszögű háromszög három csúcsa.

Megoldás

Megint vegyük az öt pont konvex burkát. Ha ez egy ötszög, akkor a belső szögek összege $3 \cdot 180°$, ezért van olyan belső szög, amelyik nagyobb, mint $\frac{3 \cdot 180°}{5} > 90°$. Ekkor nyilván kaptunk egy tompaszögű háromszöget.

Ha a konvex burok egy négyszög, akkor a belső szögek összege $360°$. Így tehát, ha van $90°$-nál kisebb szöge, akkor nyilván van $90°$-nál nagyobb szöge is, ami megint biztosít egy tompaszögű háromszöget. Ha mindegyik szöge $90°$-os, akkor húzzuk be a téglalap egyik átlóját. Az átló két háromszögre bontja a téglalapot, melyek egyike tartalmazza az ötödik pontot (lásd az ábrát). Ekkor az átló két végpontja és az ötödik pont alkot egy tompaszögű háromszöget.



4.2. ábra.

Végül ha a konvex burok egy háromszög, akkor a 4.1-es feladat bizonyítása szerint egy olyan konvex négyszöget kapunk, amelyik nem téglalap. Ebből az előzőek szerint kiválasztható egy tompaszögű háromszög.

5. fejezet

Néhány feladat a háromszög metrikus tulajdonságairól

5.1. Feladat

Jelölje R az ABC háromszög körülírható körének sugarát, ϱ a beírható körének sugarát. K,L,M rendre az oldalfelező pontok, x,y,z az ezekből állított merőleges szakaszok hosszai (lásd 5.1. ábra).

Bizonyítsuk be, hogy $xyz = \frac{1}{2}R\varrho^2$.

A bizonyítást a következő feladatok sorozatán keresztül látjuk be.

5.2. Feladat

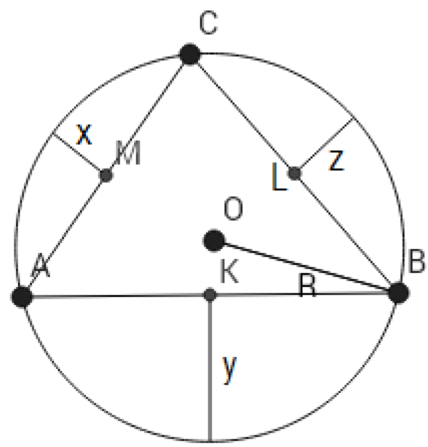
Bizonyítsuk be, hogy

$$p = 4R\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2).$$

Megoldás

Kövessük az ábra jelöléseit. Mivel az OKB egy derékszögű háromszög, használva a kerületi és középponti szögek tételét, a KOB szög γ. Így, a többi oldalra is használva

$$a = 2R\sin\alpha \quad b = 2R\sin\beta \quad c = 2R\sin\gamma$$



5.1. ábra.

Így $p = R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) = R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin(180^{\circ}-(\alpha+\beta))$, mivel a háromszög szögeinek összege 180°. Az addíciós képlet alapján, valamint, hogy $\sin(180^{\circ}-x) = \sin x$ azt kapjuk, hogy $p = R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$. Tehát

$$p = R(\sin\alpha(1+\cos\beta)+\sin\beta(1+\cos\alpha)).$$

Mivel $\cos^2(x/2) = \frac{1+\cos x}{2}$, így

$$p = 2R(\sin\alpha\cos^2(\beta/2)+\sin\beta\cos^2(\alpha/2)) =$$

$$= 4R(\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\cos^2(\beta/2)+\sin(\beta/2)\cos(\beta/2)cos^2(\alpha/2) =$$

$$= 4R\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)(\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)+\sin(\beta/2)\cos(\alpha/2) =$$

$$= 4R\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\sin((\alpha+\beta)/2) = 4R\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\sin(90^{\circ}-\gamma/2) =$$

$$= 4R\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2).$$

5.3. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

$$T = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

ahol T a háromszög területe.

Megoldás

Megint használjuk, hogy

$$a = 2R\sin\alpha \quad b = 2R\sin\beta,$$

továbbá, hogy $2T = ab\sin\gamma$. Így

$$2T = ab\sin\gamma = 2R\sin\alpha 2R\sin\beta\sin\gamma.$$

2-vel leosztva kapjuk az eredményt.

5.4. Feladat

$$T = \varrho p$$

5.5. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

$$\varrho = 4R\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2).$$

Megoldás

Az 5.3-as, 5.4-es és az 5.2-es feladatok miatt

$$\varrho p = \varrho 4R\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2) = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma =$$

$$= 2R^2 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) 2\sin(\beta/2)\cos(\beta/2) 2\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2).$$

Egyszerűsítve négyszer a koszinuszok szorzatával kapjuk az állítást.

Az 5.1-es feladat megoldása

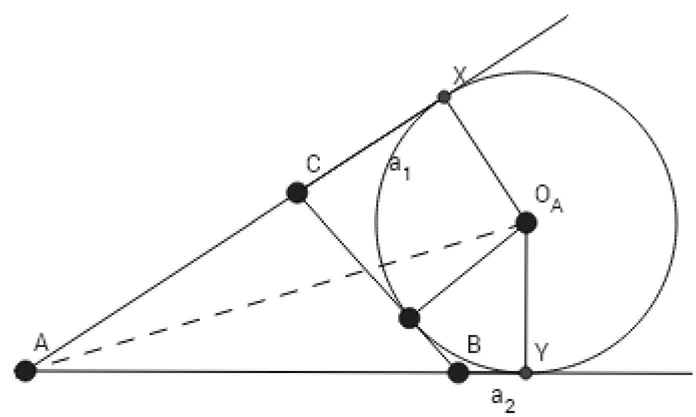
$\cos z = \cos^2(z/2) - \sin^2(z/2) = 1 - 2\sin^2(z/2)$. Így $2\sin^2(z/2) = 1 - \cos^2 z$. Használjuk az ábra jelöléseit. Mivel $OK = R\cos\gamma$, így $y = R - R\cos\gamma = R(1-\cos\gamma) = 2R\sin^2(\gamma/2)$ az előző sor miatt. Hasonlóan $x = 2R\sin^2(\beta/2)$, $z = 2R\sin^2(\alpha/2)$. Szorozzuk össze e három egyenletet.

$$xyz = 8R^3\sin^2(\alpha/2)\sin^2(\beta/2)\sin^2(\gamma/2) = \frac{1}{2}R\Big(4R\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)\Big)^2$$

Az 5.4-es feladat miatt $\Big(4R\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)\Big)^2 = \varrho^2$. Behelyettesítve kapjuk az állítást.

5.6. Feladat

Jelölje r_a, r_b, r_c az ABC háromszög hozzáírt körének sugarait, ϱ pedig a beírt kör sugarát.



5.2. ábra.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{\varrho}.$$

Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit. Vegyük észre, hogy az $AO_AX\Delta$ és az $AYO_A\Delta$ egybevágó derékszögű háromszögek.

Az $ABC\Delta$ területe

$$T = \frac{1}{2}(pr_a - 2r_a a_1) + \frac{1}{2}(pr_a - 2r_a a_2) = pr_a - r_a a = r_a(p-a).$$

Hasonlóan $T = r_b(p-b) = r_c(p-c)$.

Így

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{T} = \frac{3p-2p}{T} = \frac{p}{T} = \frac{1}{\varrho}$$

Egy hasonló feladat

5.7. Feladat

Jelölje m_a, m_b, m_c az ABC háromszög magasságait, ϱ pedig a beírt kör sugarát.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} = \frac{1}{\varrho}.$$

Megoldás

Mivel $2T = am_a = bm_b = cm_c$, ezért

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} = \frac{a+b+c}{2T} = \frac{2p}{2T} = \frac{1}{\varrho}.$$

Az 5.6-os feladat kapcsán megkérdezhetjük, hogy van-e végtelen sok olyan háromszög, melyben a beírható és hozzáírható körök sugarai egész számok. Tehát kérdezzük, hogy van-e természetes számokból álló megoldása a

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{\varrho} \tag{$*$}$$

diofantikus egyenletnek. Nyilván van egy triviális megoldás, mégpedig

$$\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k}=\frac{1}{k}.$$

Természetesen olyanokat keresünk, amelyek nem triviális megoldásokat adnak. Induljunk ki abból, hogy $\frac{1}{k}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}$. Használjuk fel, hogy

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Így

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k(2k+1)}.$$

Tehát keresünk olyan háromszögeket, amelyre igaz, hogy $\varrho=k$; $r_a=2k$; $r_b=2k+1$; $r_c=2k(2k+1)$; $k\in\mathbb{N}$.

Ahhoz, hogy ezt a vizsgálódást teljessé tegyük, a következő feladatra van szükségünk.

5.8. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

$$p=\sqrt{\frac{r_ar_br_c}{\varrho}}.$$

Megoldás

Elég azt bizonyítani, hogy $r_ar_br_c=pT$. Valóban, mivel a $T=\varrho p$, így $r_ar_br_c=p^2\varrho$, amiből az állításunk kapható.

Induljunk ki a $T=r_b(p-b)=r_c(p-c)$ azonosságból. Ebből

$$r_ar_br_c=\frac{T^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Egy későbbi feladatban bizonyítani fogjuk a Heron-képletet: $T^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Innen $\frac{T^2}{p}=(p-a)(p-b)(p-c)$. Ezt az előző egyenletbe behelyettesítve

$$r_ar_br_c=\frac{T^3}{\frac{T^2}{p}}=pT.$$

Ekkor $(*)$ miatt

$$p = \sqrt{\frac{r_a r_b r_c}{\varrho}} = \sqrt{\frac{(2k)(2k+1)2k(2k+1)}{k}} =$$

$$= \frac{2k(2k+1)}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{k}(2k+1).$$

5.9. Feladat

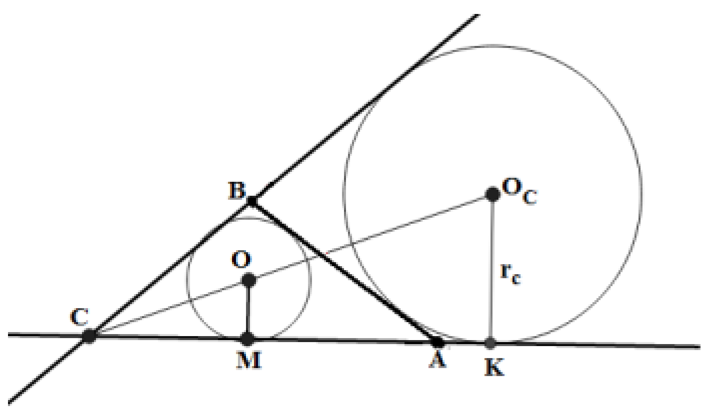
Legyen $\varrho = k$. Ekkor létezik olyan ABC háromszög, melynek beírható körének sugara k és $r_a = 2k,\ r_b = 2k+1,\ r_c = 2k(2k+1)$.

Megoldás

A bizonyítást több lépésben fogjuk elvégezni.

1. Lépés

Megszerkesztjük az $r_c = 2k(2k+1)$ sugarú kört. Ehhez a körhöz megszerkesztjük a $p = 2\sqrt{k}(2k+1)$ hosszúságú két külső érintőt (lásd az ábrát). Az LCK szögszárak közé megszerkesztjük a k sugarú beírható kört, majd megszerkesztjük e két kör közös külső érintőjét (ebből 2 is van, amelyek a CO_C-re tükrös).



5.3. ábra.

2. Lépés

Meg kell mutatnunk, hogy ez a külső érintő valóban szerkeszthető, azaz a beírható kör és a hozzáírható kör nem metszi egymást. Ehhez elég bizonyítani, hogy az $\overline{OO_C} > \varrho + r_c$. Kiszámítjuk az $\overline{OO_C}$ szakaszt. Mivel a $CMO\Delta$ hasonló a $CKO_C\Delta$-höz, ezért

$$\overline{CO} = \frac{\varrho}{r_c}\overline{CO_C} = \frac{k}{2k(2k+1)}\overline{CO_C} = \frac{1}{2(2k+1)}\overline{CO_C}.$$

$$\overline{OO_C} = \overline{CO_C} - \overline{CO} = \overline{CO_C}\Big(1 - \frac{1}{4k+2}\Big).$$

Most kiszámoljuk az $x = \overline{CO_C}$ szakaszt a Pitagorász-tétel alapján.

$$x^2 = r_c^2 + p^2 = 4k^2(2k+1)^2 + 4k(2k+1)^2$$

amiből

$$x = 2k(2k+1)\sqrt{1+\frac{1}{k}}.$$

Tehát

$$\overline{OO_C} = 2k(2k+1)\sqrt{1+\frac{1}{k}}\Big(1 - \frac{1}{4k+2}\Big).$$

Szerkesztésünk tehát korrekt, ha

$$\overline{OO_C} = 2k(2k+1)\sqrt{1+\frac{1}{k}}\Big(1 - \frac{1}{4k+2}\Big) > \varrho + r_c =$$

$$= k + 2k(2k+1) = k(4k+3).$$

Tehát ha

$$(4k+2)\sqrt{1+\frac{1}{k}}\Big(\frac{4k+1}{4k+2}\Big) > 4k+3.$$

Rendezve az egyenlőtlenséget igazolnunk kell, hogy

$$1 + \frac{1}{k} > \Big(1 + \frac{2}{4k+1}\Big)^2.$$

Ez átrendezve a

$$(4k+1)^2 > 4k(4k+2)$$

alakot veszi fel, ami könnyen igazolhatóan igaz.

3. Lépés

A fentiekből következik, hogy a $\varrho = k$, $r_c = 2k(2k+1)$ és $p = 2\sqrt{k}(2k+1)$ adatokból (a tükrözés erejéig az $ABC\Delta$ egyértelműen megszerkeszthető). Tehát az a, b, c szakaszhosszak egyértelműek. Így a $T = \varrho p = r_a(p-a) = r_b(p-b)$ adatokból az r_a és r_b sugarak is egyértelműek. Azaz $r_a = 2k$ és $r_b = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N})$, amit bizonyítani akartunk.

5.10. Feladat

Bizonyítsuk be a Heron-képletet, azaz: $T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Megoldás

A szokásos jelöléseket használva és a koszinusztétel miatt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Ebből a

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Továbbá

$$T = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ab}{2}\sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{ab}{2}\sqrt{(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)}$$

Beírva a koszinuszra adódó kifejezés

$$1-\cos\gamma = \frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{2ab}; 1+\cos\gamma = \frac{-c^2+a^2+b^2+2ab}{2ab}.$$

Így

$$1-\cos\gamma = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}; 1+\cos\gamma = \frac{-c^2+(a+b)^2}{2ab}$$

Ebből

$$1-\cos\gamma = \frac{[c-(a-b)][c+(a-b]}{2ab}; 1+\cos\gamma = \frac{[a+b-c][a+b+c]}{2ab}.$$

Itt $c-(a-b) = c-a+b = 2p-2a = 2(p-a)$.

Továbbá $c+a-b = 2(p-b)$, $a+b-c = 2(p-c)$, végül $a+b+c = 2p$.

Ezt beírva a terület képletbe adódik az állítás.

Előzmény

Jelölje r_a, r_b, r_c a háromszöghöz hozzáírt körök sugarait, T a területet, valamint p a félkerületet. A számtani-mértani közepek közötti összefüggés miatt($\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ahol $x, y \geq 0$):

$$\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_a r_c} \leq r_a + r_b + r_c$$

Feladatunkban ezt fogjuk élesíteni.

5.11. Feladat

Lássuk be, hogy:

$$\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_a r_c} \leq \sqrt{3} \cdot p \leq r_a + r_b + r_c$$

Megoldás

1.Lépés

Használjuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

Így

$$\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_a r_c} \leq \sqrt{3}\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c}$$

Az 5.6-os feladat miatt $r_a = \frac{T}{p-a}$, $r_b = \frac{T}{p-b}$ és $r_c = \frac{T}{p-c}$. Ezért és a Heron-képlet miatt:

$$r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c = \frac{T^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{T^2}{(p-b)(p-c)} + \frac{T^2}{(p-a)(p-c)} =$$

$$= p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) = p(3p - (a+b+c)) = p(3p - 2p) = p^2$$

Így $\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c} = \sqrt{p^2} = p$. Az első becslés kész.

2. Lépés

A másik becsléshez tudjuk, hogy $xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2$. Így

$$3r_ar_b + 3r_br_c + 3r_ar_c \leq r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + 2r_ar_b + 2r_br_c + 2r_ar_c = (r_a + r_b + r_c)^2$$

Így $\sqrt{3}p = \sqrt{3(r_ar_b + r_br_c + r_ar_c)} \leq \sqrt{(r_a + r_b + r_c)^2} = r_a + r_b + r_c$.

Kiegészítés

$$xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2$$

Irodalomjegyzék

1. [RG] Réti Géza: Euklidészi-Ramsey problémákról, ELTE 1998, Témavezető: Hegyvári Norbert

2. [Gard] Gardner, M. Fractal Music, Hypercards, and More: Mathematical Recreations from Scientific American Magazine. New York: W. H. Freeman, pp. 297-298, 1992.

3. [Guy] Guy, R. K. "The Postage Stamp Problem." §C12 in Unsolved Problems in Number Theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, pp. 123-127, 1994.

4. [SCsJ] D. Sklajarszkij- N. Csencov-I. Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 2/2; Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték feladatok, Tankönyvkiadó 1973

5. [CTK] "Cut The Knot"; Relations between various elements of a triangle; http://cut-the-knot.org/triangle/RelationsInTriangle.shtml#r4R

6. [PJ] Pach J., "Happy-End Probléma; A kombinatorikus geometria kezdetei" MTA Rényi Intézet, kézirat