

EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi Kar, Matematika Intézet
Matematikatanítási és Módszertani Központ



SZAKDOLGOZAT

*Matematikai játékok és érdekességek a
Fibonacci-számok kapcsán*

Témavezető:
Török Judit PhD
Adjunktus

Készítette:
Nacsa Gellért
matematika BSc
tanári szakirány

Budapest
2016

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés.....	3
1.1	Köszönetnyilvánítás.....	3
1.2	Célkitűzés és motiváció.....	3
1.3	Dolgozat felépítése.....	4
2	Fibonacci-számok.....	4
2.1	Történeti áttekintés.....	4
2.2	Alappélda.....	5
2.3	Egyéb példák.....	6
2.4	Tulajdonságok.....	7
2.4.1	Érdekes tények:.....	7
2.4.2	Határérték.....	8
2.4.3	Oszthatóság, legnagyobb közös osztó.....	8
2.4.4	Fibonacci-sorozat összegeire vonatkozó állítások.....	10
2.4.5	Azonosságok:.....	14
2.4.6	Fibonacci szám indexének beazonosítása.....	16
2.4.7	Zeckendorf-tétel.....	17
2.4.8	Fibonacci-számrendszer, a Zeckendorf-reprezentáció.....	19
2.4.9	Pascal-háromszöggel való kapcsolat.....	21
2.4.10	Explicit képlet.....	23
2.4.11	Generátorfüggvény.....	24
2.4.12	Általánosítások.....	24
2.5	Kapcsolat az aranymetszéssel.....	26
3	Játékok.....	26
3.1	Fibonacci-nim.....	26
3.1.1	A játék leírása.....	26
3.1.2	Nyerő stratégia.....	27
3.2	Fibonacci 21 [©]	28
3.3	Fib-Fibonacci.....	29
3.4	2584 Puzzle.....	31
4	Fibonacci-számok alkalmazásai és megjelenései egyéb területeken.....	32
4.1	Kultúrában.....	32
4.1.1	Zene.....	32
4.1.2	Irodalom.....	32
4.1.3	Televízióban, moziban.....	32
4.1.4	Képzőművészet.....	33

4.1.5	Építészet.....	33
4.2	Természet.....	33
4.3	Rulett.....	34
4.4	Tőzsde.....	34
5	Összefoglalás	35
6	Bibliográfia	36
7	Ábra- és képjegyzék	38

1 Bevezetés

1.1 Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani mindenképp előttr konzulensemnek, dr. Török Judit adjunktusnak, aki felkeltette érdeklődésemet a téma mélyebb megismerése és tanulmányozása iránt, és a témában írt könyvével is sokat inspirált, illetve valaha volt oktatóimnak, tanítóimnak fejlődésemet elősegítéséért, s végül, de nem utolsósorban családomnak, barátaimnak és menyasszonyomnak, Rékának a folyamatos támogatásért.

1.2 Célkitűzés és motiváció

Eme dolgozatomban szeretnék bemutatni pár játékot, érdekességet, melyek a Fibonacci sorozathoz kapcsolódnak. Úgy vélem, mind a témakör, mind a játékok közvetlenül érintik a középiskolai matematika oktatást, hiszen egy fontos és különleges téma a Fibonacci sorozat és a játékoknak, érdekes meglátásoknak nagy szerepe van a diákok motiválásában. Szeretném, hogy ez a dolgozatom és az ahhoz kapcsolódó kutatómunkám később is hasznosnak bizonyuljon a tanítás folyamatában.



1. ábra: Leonardo Pisano

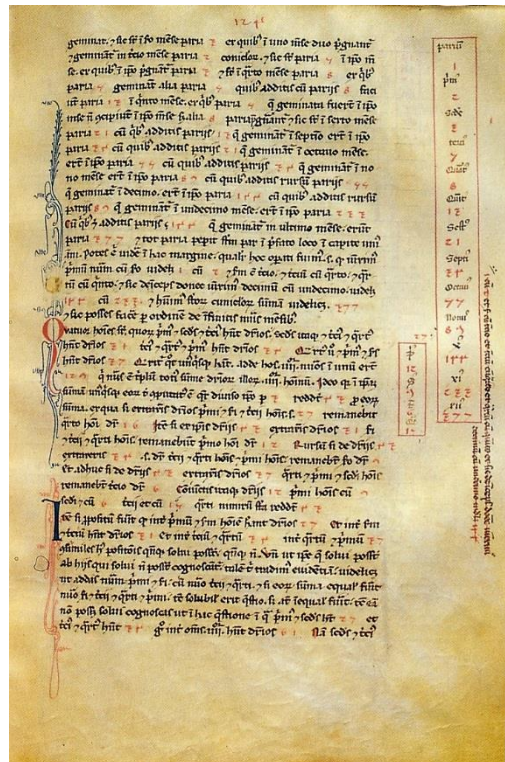
1.3 Dolgozat felépítése

A Fibonacci-sorozat bevezetése és kicsit mélyebb megismerése után megvizsgáljuk tulajdonságait, azonosságait, pár példával színesítve, illetőleg bizonyítunk pár érdekesebb fontosabb tételt és azonosságot, majd a játékokat nézzük át, s végül néhány érdekességgel, határterületen való előfordulásával, alkalmazással zárjuk.

2 Fibonacci-számok

2.1 Történeti áttekintés

Kr.e. 200 körül már az indiai Pingala szanszkrit nyelvű művében, a Chandahsāstrában fellelhető a Fibonacci-sorozat, melyet később több prozódiaival foglalkozó indiai tudós (nyelvész, illetve matematikus) is említ, mint például, Virahanka (Kr.u. VI. sz.), Gopala (1135 körül) vagy Hemachandra (1150 körül).¹ Számukra a legfontosabb kérdés az volt, hogy hogyan áll össze egy verssor időtartama, azaz hosszú és rövid szótagokkal kapcsolatos összegre bontási kutatás kapcsán bukkantak ezekre a különleges számokra. Európában Leonardo Pisano (1170-1250), ismertebb nevén Fibonacci, olasz matematikus munkássága kapcsán vált híressé a később róla elnevezett sorozat. Édesapja, az itáliai Pisából származó üzletember és kereskedő sok időt töltött Algírban, az ő munkájának köszönhetjük e remek gondolkodó elme megalapozását. A név, amelyen ma ismertté vált matematikusunk, szintén apjának tudható be, hiszen őt Guglielmo Bonaccionak hívták, így 'filius Bonacci' (azaz Bonaccio fia) rövidebb formája a Fi-bonacci. Az arab világban az ifjú Leonardo számokkal való ismerkedés közben a keleti gondolkodással és matematikával is kapcsolatba került. E módon találkozhatott ezzel a fontos sorozattal, kérdéskörrel is.



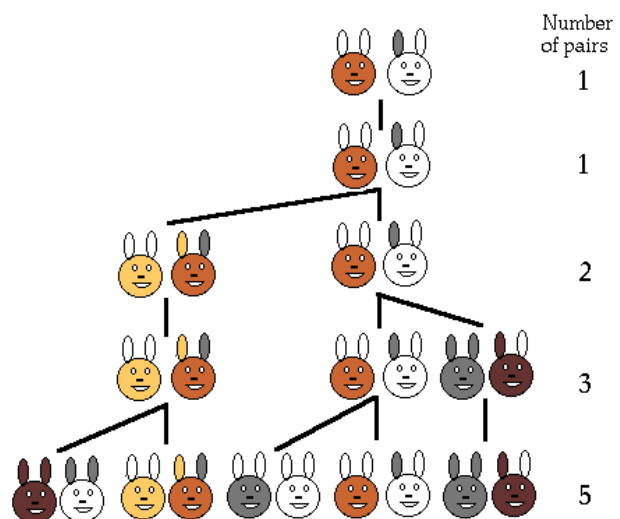
2. ábra: Liber Abaci vonatkozó oldala

¹ [8] alapján

Megszerzett tudását összefoglaló könyvében, a Liber Abaci (Könyv az abakuszról) című, 1202-ben megjelent művéből — amely irományában az indo-arab számjegyírást és a tízes számrendszert is népszerűsíti, — ismerhetjük meg részletesebben a sorozatot. 400 évvel később Johannes Kepler (1571-1630) szintén említi ezeket a nem mindennapi számokat az 1611. évi, A hatszögletű hópehelyről című könyvében, melyben a hópelyhek ágainak 60° -os hajlásszögeinek szabályosságát vizsgálta és taglalta. Azt, hogy a sok leírója közül pont Fibonacci kapcsán azonosítjuk a sorozatot Édouard Lucasnak (1842-1891) a Lucas-számokról (lásd: 2.4.12.) ismert francia matematikusnak köszönhetjük.

2.2 Alappélda

Fibonacci könyvében egy ideális nyúlcsalád szaporodásának kissé talán nyakatekert példájával illusztrálja a sorozat kérdéskörét. A feladat így hangzik: „Hány pár nyúl származhat egy évben egyetlen pártól, ha minden pár havonta új párnak ad életet, amely a második hónaptól lesz tenyészképes, és feltételezzük, hogy egy ivadék sem pusztul el?”



3. ábra: A nyulpárok szaporodása

Vizsgáljuk meg a helyzetet! Az első hónapban 1 pár nyulunk van, akik újszülöttek, hasonlóan a másodikban is. A harmadik hónapban ennek a párnak kölykei lesznek, így 2 pár nyulunk lesz. A negyedik hónapban az eredeti pár szintén kölyköket hoz a világra, de a harmadik hónapban született pár még ifjú. Ezt folytatva Fibonacci kérdésére megleljük a választ, amely így hangzik, a hónapok szerint:

n (hónapok száma)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n (nyulpárok száma)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

És így tovább. Ezeket - a főnti gondolatmenetet továbbgördítve - úgy kaphatjuk, ha észre vesszük, (mivel egy idő után túlzottan bonyolult lenne minden hónapra a leszámolás az elejétől,) hogy az adott hónap esetén meg kell vizsgálnunk a nálánál

eggyel korábbi hónapot, és venni a párokat, akik akkor éltek (hiszen nem pusztul el egy sem közülük). Most már csak a növekedés kérdéses, amelyről azt tudjuk, hogy azok a párok nemzőképesek, amelyek két hónappal korábban már éltek és ezek közül mind új párt hoz a világra. Ez alapján nincs is más dolgunk, mint összeadni az előző és az azelőtti hónap párjait, hogy megkapjuk a folyó hónap eredményét. Ezt a folyamatot, amelyben a korábbi elemeket felhasználva kapunk újabbakat, rekurzióknak hívjuk.

Definíció (rekurzió): algoritmus szerint ismétlődő lépésekből álló műveletsorozat, ahol az eredmény további műveletek kiindulópontjaként visszatér.²

A fentiek alapján létrehozott másodrendben rekurzív sorozatnak manapság közismert formája a következő:

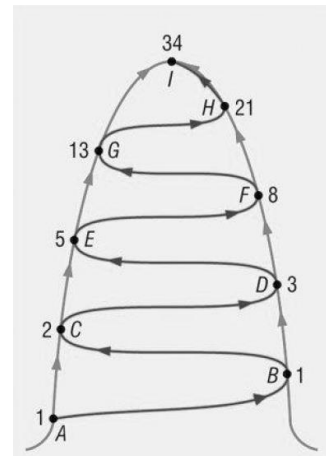
n = hónapok száma, F_n = n -edik hónapban létező nyulak száma, így $F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, ahol $n > 1$.

2.3 Egyéb példák³

Sok egyéb problémát ugyanezzel a gondolatmenettel és a Fibonacci-sorozattal tudunk megoldani, erre nézünk most néhány példát.

- Hányféle módon lehet följutni a hegy tetejére, ha a felvezető szerpentinén és a kanyarokban levágásokon is haladhatunk, illetve ezek közt tetszés szerint váltogathatunk?

Ahogy a mellékelt ábrán is láthatjuk, minden pontra a két korábbi helyről lehet eljutni, vagyis ahhoz, hogy megtudjuk, hányféleképpen juthatunk el az adott kanyarba azokat az értékeket kell összeadni, hogy hányféleképpen juthattunk el az előző két kanyarhoz.



4. ábra: Hegyre följutás lehetőségei

- Hányféleképpen fedhető le egy $2 * n$ -es téglalap $2 * 1$ -es kis téglalapokkal?
Itt is az előző gondolatmenetet követve az $1 * 2$ -t egy féle módon tudjuk

² [2] vonatkozó szócikke alapján

³ [22] alapján

lefedni, egy függőleges elemmel, míg a $2 * 2$ -t 2 féle módon (vagy két vízszintessel vagy két függőlegessel). És inentől kezdve minden következőt vagy az eggyel vagy a $2 * (n - 1)$ -hez egy függőlegest vagy a $2 * (n - 2)$ -höz két vízszintest adunk hozzá, vagyis az előző kettő összegét véve kapjuk meg az eredményt.

- Szintén ezt a választ fogjuk kapni arra a kérdésre is, hogy hány módon juthatunk fel egy n fokú lépcsőn, ha maximum kettő fokot léphetünk fölfelé egy lépéssel.
- Egy másik példa szerint hányféleképpen tölthetjük ki az utca egyik oldalát önálló családi- és ikerházakkal, ha az ikerházakhoz 2, a családi házakhoz 1 egységnyi hosszú utcafront szükségeltetik.
- Esetleg, ha arra lennénk kíváncsiak, hogy milyen lehetőségek vannak akkor, ha egy hajókészítő műhelyben a mester egy hónap alatt tud elkészíteni egy evezős hajót, és ha tovább dolgozik rajta, a második hónap végére elkészül belőle egy kis vitorlás. Milyen termékeink készülhettek el egymás után az első, második, harmadik, stb. hónap végére?
- Végül ugyanígy megoldható az a probléma is, hogy mennyi féle lehetőségünk van egy n emeletes épület lefestésére, ha két szín áll rendelkezésünkre, mondjuk zöld és fehér és nem állhat két zöld egymás fölött.

És még sokáig folytathatnánk a sort, újra és újra különböző köntösbe öltöztetve a problémát.

2.4 Tulajdonságok

2.4.1 Érdekes tények:

- Pontosan három négyzetszám van a Fibonacci-sorozatban: 0, 1, 144.
- Véges sok Fibonacci-szám van, ami teljes hatvány is.⁴
- Csak a 0, 1, 8 és a 144 teljes hatvány.⁵

⁴ [17]

⁵ [3]

- F_{10^n} számjegyeinek száma éppen $\frac{1}{\operatorname{arcsinh} 2 \log 10}$ tizedestört alakjának első n számjegye.
- F_n számjegyeinek száma pedig $\left[n * \lg(\phi) - \frac{\lg(5)}{2} + 1 \right]$, ahol a zárójel az egészrészt jelöli. Ez annak köszönhető, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$, ami a Binet-formulából (lásd: 2.4.10.) következik.
- Carmichael-tétel⁶: $\forall n \in \mathbb{Z}, n > 12: \exists p$ prím: $p \mid F_n \wedge p \nmid F_k, \forall k \in \mathbb{Z}, n > k$ esetén. Vagyis minden 12-nél nagyobb indexű Fibonacci-számnak létezik olyan prímosztója, amely nem oszt egyetlen kisebb Fibonacci-számot sem. $n < 12$ esetén a kivételek: 1, 8, 144.

2.4.2 Határérték⁷

Szomszédos Fibonacci-számok hányadosa az aranymetszés arányához $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ tart.

Bizonyítás: Legyen $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ és $q = \frac{\phi}{\phi'} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Ekkor a Binet-formula (lásd:

2.4.10.) alapján $F_n = \frac{\phi^n - \phi'^n}{\sqrt{5}}$, ahol $n \geq 1$. Ekkor $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\phi^{n+1} - \phi'^{n+1}}{\phi^n - \phi'^n} = \frac{(\phi^{n+1} - \phi'^{n+1}) + (\phi \phi'^n - \phi'^n \phi^{n+1})}{\phi^n - \phi'^n} = \phi + \frac{\phi'^n(\phi - \phi')}{\phi^n - \phi'^n} = \phi + \frac{\sqrt{5}}{q^n - 1}$. És mivel $|q| > 1$ definíció

alján, így $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\phi + \frac{\sqrt{5}}{q^n - 1} \right) = \phi$. □

Ennek következményeképp: $\frac{F_{n+\alpha}}{F_n} = \phi^\alpha$.

2.4.3 Oszthatóság, legnagyobb közös osztó⁸

Ehhez a témához bevezetőként nézzünk pár példát.

Példa: Hányadik helyen állnak a Fibonacci-sorozatban a kettővel, hárommal, tízzel oszthatóak? Ha van sejtésed, bizonyítsd!

Megoldás: Háromnál látható, hogy a maradékok periodikusak lesznek nyolcanként, viszont közte a negyedik is nulla, szóvak minden negyedik lesz osztható hárommal:

⁶ [4]

⁷ Bizonyítás: [26] alapján

⁸ Bizonyítás: [26] alapján

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$F_n \bmod 3$	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0

Kettőre és tízre is hasonlóan kell.

Példa: Mutasd meg, hogy minden pozitív egésznek van többszöröse a Fibonacci-sorozatban!

Megoldás: Egy k számmal osztva bármilyen pozitív egész számot, k féle maradékot kaphatunk. Az egymást követő Fibonacci-számok így k^2 féle maradék párt adnak. Mivel ez véges, a sorozat pedig végtelen, így mindenképpen kell lennie ugyanolyan maradékpárnak. Két ilyen maradékpár távolsága legyen d . Ekkor $k \mid F_d$, hiszen F_0 -nál 0 maradék lesz.

- [1] Ha két 2-nél nagyobb egész szám, akkor és csak akkor osztja egymást, ha a velük indexelt Fibonacci számok is, vagyis

$$\forall m, n > 2: m \mid n \Leftrightarrow F_m \mid F_n$$

Bizonyítás: Legyen $n = km - r$, ahol $0 \leq r < m$. Így, ha $m \mid n \Leftrightarrow r = 0$. Indukciós bizonyítást fogunk bemutatni. Legyen az állításunk új köntösben k -ra $r = 0 \Leftrightarrow F_m \mid F_{km-r}$.

$k = 1$ esetén $r = 0 \Leftrightarrow F_m \mid F_{m-r}$ helytálló, hiszen $F_{m-r} < F_m$, kivéve, ha $r = 0$.

Most feltesszük, hogy az állítás igaz, egy bizonyos k -ig minden pozitív egészre, és ebből következtetünk a $k + 1$ -re kimondott állítás valóságtartalmára. Szóval azt kell belátnunk, hogy: $(r = 0 \Leftrightarrow F_m \mid F_{km-r}) \Rightarrow (r = 0 \Leftrightarrow F_m \mid F_{km+m-r})$.

$F_{km+m-r} =$ (Nagyobb Fibonacci számok létrehozása kisebbekből című tétel alapján, lásd: 2.4.5./[14]) $= F_{m-1}F_{km-r} + F_mF_{km-r+1}$. Ebből amiatt, mert $F_m \mid F_mF_{km-r+1}$, az marad, hogy $r = 0 \Leftrightarrow F_m \mid F_{m-1}F_{km-r}$. Az egymást követő Fibonacci számokról tudjuk, hogy relatív prímelek (lásd: 2.4.3./[3]), vagyis $\text{lnko}(F_m; F_{m+1}) = 1$, amivel visszajutottunk az eredeti állításhoz, hogy akkor és csak akkor osztja F_m F_{km+m-r} -t, ha $r = 0$. \square

- [2] Két Fibonacci-szám legnagyobb közös osztója az a Fibonacci-szám, melynek indexe a két eredeti szám indexének legnagyobb közös osztója, vagyis:

$$\forall m, n > 2: \text{lnko}(F_m; F_n) = F_{\text{lnko}(m;n)}$$

Ez az előző állításból viszonylag egyszerűen következik.

- [3] Egymást követő Fibonacci-számok relatív prímeik:

$$\forall n \geq 2: \text{lnko}(F_n; F_{n+1}) = 1$$

Bizonyítás: Indukciót alkalmazunk itt is. Elsőként $n = 2$ esetben vizsgáljuk állításunkat: ahol $\text{lnko}(F_2; F_3) = \text{lnko}(2; 3) = 1$, vagyis megáll. Akkor nézzünk $n \rightarrow n + 1$ -re. $\text{lnko}(F_{n+1}; F_{n+2}) = \text{lnko}(F_{n+1}; F_{n+2} - F_{n+1}) = \text{lnko}(F_{n+1}; F_n)$ ami 1-gyel lesz egyenlő, hiszen pont ez az indukciós feltételünk. \square

2.4.4 Fibonacci-sorozat összegeire vonatkozó állítások⁹

- [4] Nem egymást követő Fibonacci-számok összege:

Tétel: Ha vesszük a Fibonacci-számok egy nem üres halmazát, amely nem tartalmazza $F_0 = 0$ -t, $F_1 = 1$ -t, sem egymást követő Fibonacci-számokat, akkor a legnagyobb elem utáni Fibonacci-szám nagyobb, mint a halmaz elemeinek összege. Vagyis ha a halmaz H és a legnagyobb elem F_H , akkor

$$\sum H < F_{H+1}$$

Bizonyítás: Indukciót fogunk használni. Alapvetésként megnézzük kis számra, például ha a $F_2 = 1$ az egyetlen eleme a halmazunknak, akkor az állítás igaz: $F_2 = 1 < F_3 = 2$.

Második lépésként feltesszük, hogy az állításunk igaz mindazokra a fent definiált (továbbiakban: megfelelő) halmazokra, amelyeknek az n -edik, vagy annál kisebb Fibonacci-szám a legmagasabb tagja. Harmadik lépésként ebből a feltételből bizonyítjuk az indukciós lépést, hogy azokra a halmazokra is igaz lesz, amelyeknek az $n + 1$ -edik Fibonacci-szám a legmagasabb tagjuk. Legyen G egy olyan megfelelő halmaz, amelynek a legnagyobb tagja F_{n+1} , és legyen $G' = G \setminus \{F_{n+1}\}$. Mivel G nem tartalmazhat egymást követő Fibonacci-számokat, így F_n -t sem, vagyis a G' legmagasabb eleme kisebb vagy egyenlő F_{n-1} -gyel. Így a feltételünk alapján (hiszen G' -re is vonatkozik, mivel legnagyobb eleme kisebb, mint az n -edik Fibonacci-szám) $\sum G' < F_n$. Ezek alapján, ha mindkét oldalhoz hozzáadjuk F_{n+1} -et, a következőket kapjuk: $\sum G' + F_{n+1} = \sum G < F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, ami pont a bizonyítandó állításunk

⁹ Bizonyítás: [26] alapján

$n + 1$ -re. □

Ez az állítás a következő két állításból is bizonyítható.

[5] Páros indexű Fibonacci-számok összege $n \in \mathbb{N}^+$ -nál:

$$\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

Bizonyítás: Az indukció első lépéseként $n = 1$ -nél vizsgáljuk, ahol $F_2 = 1 = F_3 - 1$, ami igaz. Most feltesszük, hogy k -ra igaz az állítás, ebből bizonyítjuk $k + 1$ -re:

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i} = \sum_{i=1}^k F_{2i} + F_{2(k+1)} = F_{2k+1} - 1 + F_{2k+2} = F_{2k+3} - 1$$

□

[6] Páratlan indexű Fibonacci-számok összege $n \in \mathbb{N}^+$ -nál:

$$\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$$

Bizonyítás: Az indukció első lépéseként $n = 1$ -nél vizsgáljuk, ahol $F_1 = 1 = F_2$, ami igaz. Most feltesszük, hogy k -ra igaz az állítás, ebből bizonyítjuk $k + 1$ -re:

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^k F_{2i-1} + F_{2k+1} = F_{2k} + F_{2k+1} = F_{2k+2}$$

□

[7] Fibonacci-számok összegképlete:

$$\forall n \geq 2: \sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

Bizonyítás: Az indukció első lépéseként $n = 2$ -nél vizsgáljuk, ahol $F_1 + F_2 = 2 = F_4 - 1$, ami igaz. Most feltesszük, hogy k -ra igaz az állítás, ebből bizonyítjuk $k + 1$ -re:

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = \sum_{i=1}^k F_i + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$$

□

- [8] Rekurzív képlet az Fibonacci-számok összegére: ha g_n az első n Fibonacci-szám összege, akkor

$$\forall n \geq 2: g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + 1$$

Ez az összefüggés viszonylag könnyedén belátható az előzőből, hiszen $F_{n+2} - 1 = (F_{n+1} - 1) + (F_n - 1) + 1$, de indukcióval is bizonyítható. \square

- [9] Egymást követő Fibonacci-számok szorzatainak összege:

$$(1) \sum_{i=1}^{2n-1} F_i F_{i+1} = F_{2n}^2$$

$$(2) \sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i+1} = F_{2n+1}^2 - 1$$

Bizonyítás: Elsőként nézzük az (1) állítást, bizonyítsuk induktívan. $n = 2$ helyen ez $F_1 F_2 = 1 * 1 = 1 = F_2^2$, ami helytálló. Mindezek után feltesszük az állítás helyességét k -ra, és megnézzük, következik-e ebből $k + 1$ -re is:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2k+1} F_i F_{i+1} &= \sum_{i=1}^{2k-1} F_i F_{i+1} + F_{2k} F_{2k+1} + F_{2k+1} F_{2k+2} \\ &= F_{2k}^2 + F_{2k} F_{2k+1} + F_{2k+1} F_{2k+2} \\ &= F_{2k} (F_{2k} + F_{2k+1}) + F_{2k+1} F_{2k+2} = F_{2k} F_{2k+2} + F_{2k+1} F_{2k+2} \\ &= F_{2k+2} (F_{2k} + F_{2k+1}) = F_{2k+2}^2 \end{aligned}$$

vagyis következik, igaz az (1) állítás. A (2)-t lássuk alább, az (1) segítségével:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i+1} &= \sum_{i=1}^{2n-1} F_i F_{i+1} + F_{2n} F_{2n+1} = F_{2n}^2 + F_{2n} F_{2n+1} = F_{2n} (F_{2n} + F_{2n+1}) \\ &= F_{2n} F_{2n+2} = F_{2n+1}^2 - 1 \end{aligned}$$

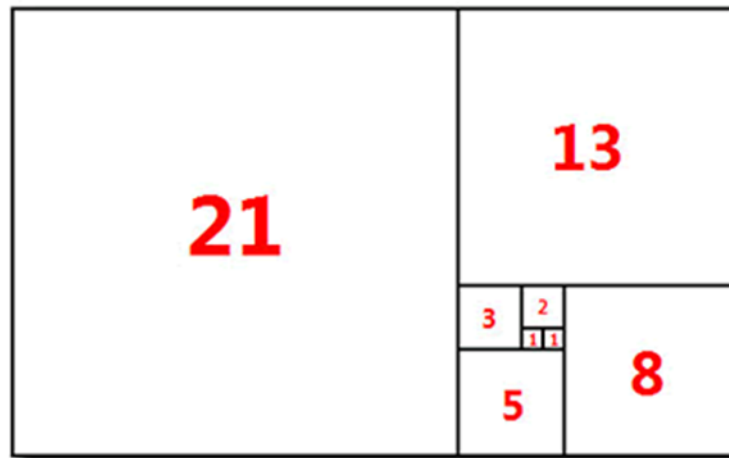
Itt az utolsó lépésben — amellyel kijött az állítás valós mivolta, — a Cassini-azonosságot használtuk föl (lásd: 2.4.5./[18]). \square

Fibonacci-számok négyzetösszege:

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

Ennek az összefüggésnek a geometriai megjelenése, hogy egy téglalapot, amely oldalainak mérőszámai egymást követő Fibonacci-számok, fel lehet

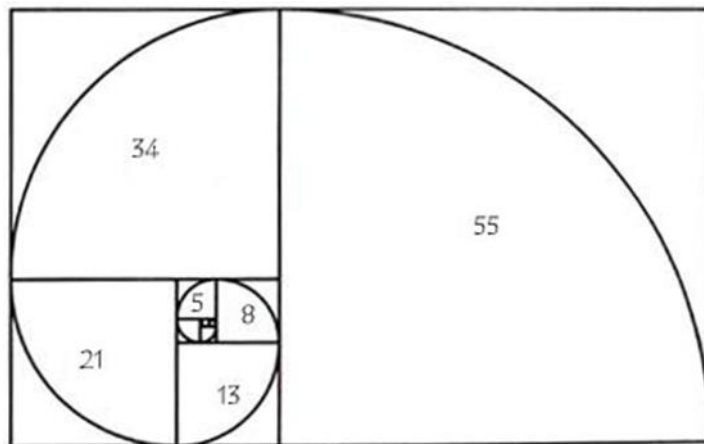
bontani a nagyobb számnál kisebb Fibonacci-számok oldalnagyságú négyzetekre.



5. ábra: Első n Fibonacci-szám négyzetösszege

Nagyon izgalmas, hogy ezt a folyamatot kellően sokáig végezve aranytéglalapokat kapunk, hiszen az oldalak arányai pont az egymást követő Fibonacci-számok arányaival lesznek egyenlők, ami ϕ -hez tart (lásd: 2.4.2.).

Ezekbe a négyzetekbe rajzolt logaritmikus spirált Fibonacci-spirálnak nevezzük. Ez a spirál negyedfordulat alatt ϕ -szeresére nő, ahogy az alább is látszik:



6. ábra: Fibonacci-spirál

[10] Reciprokösszeg konvergens:¹⁰

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{-1} = 3,359885666243177553172011302918 \dots$$

¹⁰ [10]

Erre zárt képletet egyelőre nem ismerünk, az viszont már bizonyított, hogy irracionális.¹¹

[11] Egy érdekes összeg eredményeképp, amelybe a Fibonacci-sorozat négyzetösszege van beágyazva, az aranymetszés is megjelenik:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sum_{j=1}^k F_j^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

[12] Millin-sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}$$

2.4.5 Azonosságok:¹²

[13] Nagyobb Fibonacci számok létrehozása kisebbekből:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^+: F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1}$$

Bizonyítás: Indukció n -re. $n = 1$ esetben a $F_{m+1} = F_{m-1} F_1 + F_m F_2$ definíció szerint igaz. $n = 2$ esetben a $F_{m+2} = F_{m-1} F_2 + F_m F_3$, ami szintén helytálló a képzési szabály alapján szerint. Most feltesszük, hogy egy bizonyos k -ig minden pozitív egész számra igaz az állítás, és meg kell mutatnunk, hogy ebből következik, hogy $k + 1$ -re is az. Definíció alapján $F_{m+k+1} = F_{m+k} + F_{m+k-1} = F_{m-1} F_k + F_m F_{k+1} + F_{m-1} F_{k-1} + F_m F_k = F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_k + F_{k+1}) = F_{m-1} F_{k+1} + F_m F_{k+2}$ amit be kellett látnunk.

□

[14] Kisebb Fibonacci számok létrehozása nagyobból:

$$\forall m, n : F_{m-n} = (-1)^{n+1} F_{m-1} F_n + (-1)^n F_m F_{n-1}$$

Bizonyítás: Ez következik az előző állításból: $F_{m-n} = F_{m+(-n)} =$ (az előző bizonyítás alapján) $= F_{m-1} F_{-n} + F_m F_{-n+1} =$ (a Fibonacci kiterjesztése negatív számokra) $= (-1)^{n+1} F_{m-1} F_n + (-1)^n F_m F_{n-1}$ □

Ennek ismert és elterjedt formája a d'Ocagne-azonosság:

$$(-1)^n F_{n-m} = F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n$$

[15] $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

¹¹ [1]

¹² Bizonyítás: [26] alapján

$$[16] F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

[17] Cassini-azonosság:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Bizonyítás: Teljes indukció. Könnyen látható, hogy

$$F_0F_2 - F_1^2 = 0 * 1 - 1 = -1 = (-1)^1$$

vagyis $n = 1$ esetben igaz, és úgyszintén $n = 2$ esetben, mivel:

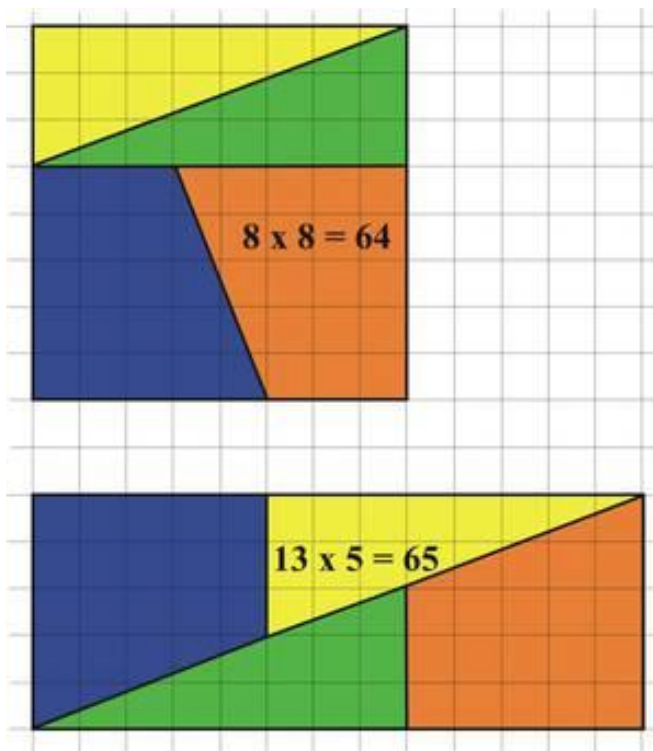
$$F_1F_3 - F_2^2 = 1 * 2 - 1 = 1 = (-1)^2$$

Mindezek után feltesszük az állítás helyességét $n = k$ -ig, és megnézzük, következik-e ebből $k + 1$ -re is.

$$\begin{aligned} F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 &= (F_k + F_{k+1})F_k - F_{k+1}^2 = F_k^2 + F_{k+1}F_k - F_{k+1}^2 \\ &= F_k^2 + F_{k+1}F_k - F_{k+1}(F_k + F_{k-1}) \\ &= F_k^2 + F_{k+1}F_k - F_{k+1}F_k - F_{k+1}F_{k-1} = F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1} \\ &= (-1)(F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2) = (-1)(-1)^k = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

□

Ez a tétel a kulcs a közismert megtévesztéshez, amikor például egy 8x8-as négyzetet darabolunk trapézokra és háromszögekre, majd 5x13-as téglalappá illesztjük össze a darabokat és 64-ből 65 területegység lesz. Ha az átlókat közelebről megvizsgáljuk rá fogunk jönni, hogy ott jelen van az egy egységnyi hiány, mivel az átlók nem fognak illeszkedni, hiszen a $3/8$ és a $2/5$ csak közeli arányok, nem azonosak. Érdekes tény, hogy a négyzet téglalappá darabolásakor kizárólag azon esetben lesz a terület megegyező ilyen módon, ha pontosan az aranymetszés arányával dolgozunk. Ezt könnyen beláthatjuk: hiszen ha a négyzet területe $(a + b)^2$, a téglalapé $a(2a + b)$, akkor a területkülönbség $= a(2a + b) - (a + b)^2 = a^2 - ab - b^2$. Mi azt az esetet keressük, amikor ez nulla. Rövid átgondolás után rájöhethetünk, hogy $\frac{a}{b}$ -re az egyenlet pozitív gyöke nem lesz más, mint $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, vagyis az aranymetszés pozitív gyöke!



7. ábra: $64=65?$

[18] Catalan-azonosság (a Cassini-azonosság általános formája):

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r}F_r^2$$

[19] Vajda-azonosság (a Catalan-azonosság még általánosabb formája):

$$F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} = (-1)^nF_iF_j$$

2.4.6 Fibonacci szám indexének beazonosítása

Képzeld el valamelyik fenti (lásd: 2.2, 2.3) példát fordítva, meg van adva, hogy hányféle módon juthatunk fel a hegy tetejére, no de hány kanyar alatt? Vagy hány nap alatt növekedett ekkorára a nyúlpopuláció? Vagy egyáltalán, hogy Fibonacci-szám-e az adott pozitív egész szám? Erre is van megoldás, csak akkor Fibonacci-szám x , ha $5x^2 + 4$ vagy $5x^2 - 4$, esetleg mindkettő teljes négyzet. Ennek az okát, és megoldásunkat a Binet-formula (lásd: 2.4.10.) átrendezéséből kapjuk:

$$n = \log_{\phi} \left(\frac{F_n \sqrt{5} + \sqrt{5F_n^2 \pm 4}}{2} \right)$$

2.4.7 Zeckendorf-tétel

Édouard Zeckendorf (1901-1983), belgiumi katoniorvos a második világháború idején foglalkozott a Fibonacci-számokkal, és az itt következő tétel az ő tollából származik.

Tétel: Minden természetes szám előáll különböző Fibonacci-számok összegeként.

Bizonyítás: A teljes indukció eszközét használjuk. Mivel az egytagú összeget is összegnek vehetjük, így könnyű belátni, hogy

$$n = 1 \text{ esetén } n = F_1,$$

$$n = 2 \text{ esetén } n = F_2,$$

$$n = 3 \text{ esetén } n = F_3,$$

$$n = 4 \text{ esetén } n = F_1 + F_3,$$

és így tovább, feltéve, ha jelen bizonyításunkhoz az $F_1 = 1, F_2 = 2, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ felírását használjuk a Fibonacci-sorozatnak.

Az induktív bizonyítás második részeként feltesszük, hogy egy bizonyos n -re és az annál kisebb n számokra igaz az állítás, és ebből vezetjük le, hogy $n + 1$ -re is az. Ha ez a következtetés helytálló, úgy az egész állítás az lesz, hiszen az $n = 1, 2, 3, 4$ -re megnéztük, és onnan az n -t folyamatosan növelve 1-el tetszőleges nagy számot elérhetünk. Szóval, ha igaz az, hogy n -ig minden pozitív egész szám, az n -t is beleértve előáll különböző Fibonacci-számok összegeként, akkor nézzük meg, mi történik $n + 1$ -nél. Ezen a ponton két lehetőségünk van. Ha $n + 1$ Fibonacci-szám lesz, akkor előáll önmagában, egytagú összegként. Ha nem, akkor nevezzük k -nak azt a pozitív egész számot, melyre teljesül, hogy $F_k < n + 1 < F_{k+1}$, vagyis a legnagyobb, $n + 1$ -nél kisebb Fibonacci-szám sorszám. Ekkor $n + 1$ előáll F_k és egy n -nél kisebb pozitív egész szám összegeként, amit nevezzünk n' -nek, azaz $n + 1 = F_k + n'$. Ekkor tudjuk, hogy n' is előáll Fibonacci-számok összegeként, hiszen n' egy $n + 1$ -nél kisebb pozitív egész, amelyekre ezt feltettük. Már csak az a kérdés, hogy n' felbontásában benne van-e F_k vagy sem, hiszen ha benne lenne, akkor nem beszélhetnénk különböző Fibonacci-számokból álló felbontásról. Könnyű belátni, hogy nincs, hiszen ha benne lenne, akkor n' nagyobb lenne F_k -nál, ami lehetetlen, hiszen n' kisebb F_{k-1} -nél. Ez utóbbit onnan tudjuk, hogy ha nem lenne kisebb, akkor $F_k + F_{k-1} = F_{k+1} < n$ teljesülne, ami a definiálásunk alapján lehetetlen. \square

Ahogy az előző bizonyításban láthattuk tehát, minden természetes szám felírható Fibonacci-számok összegeként. Ugyanakkor a sorozat képzésének köszönhetően a számok többféleképpen is felírhatóak. Például $8 = 8 = 5 + 3 = 5 + 2 + 1$. Emiatt az egyszerűség jegyében keressünk olyan összeget, amely egyértelmű felírás, vagyis ami kevesebb tagból áll, optimálisabb. A Zeckendorf-tétel II. része azt mutatja meg, hogy ha egymást követő Fibonacci-számokat nem tartalmaz a felírás, az is lehetséges minden számra, és egyértelmű is.

Tétel: Felbontható úgy is, hogy nem áll 2 db 1-es egymás után, és így egyértelmű a felbontás. (Feltéve, ha a Fibonacci-sorozatot csak a 3. tagtól kezdve vizsgáljuk. Értelemszerűen a 0 és mindkét 1-es számjegy használata kizárja az egyértelműséget, hiszen a felbontásban a 0 hozzávétele vagy elhagyása, illetőleg a $F_1 = 1$, vagy az $F_2 = 1$ felcserélésével könnyedén juthatunk ugyanarra az eredményre különböző felbontással.)

Bizonyítás: Elsőként mutatunk egy módszert arra, hogyan is lehet jó felbontáshoz jutni. Ahogy bármely természetes szám hatványaira való felbontásnál itt is azt alkalmazzuk, hogy elsőként vesszük a legnagyobbat, az adott számnál nem nagyobb Fibonacci számok közül, majd különbségük maradékával megismételjük ezt a műveletet újra és újra, amíg nullát nem kapunk. Az eljárás során ahhoz, hogy tételünk első felét – a felbonthatóságot – bizonyítsuk, azt kell megfigyelnünk, hogy nem szerepelnek majd egymás utáni Fibonacci-számok a felbontásban. Ez amiatt történik, mert ha szerepelne két egymást követő Fibonacci-szám, akkor az összegük, ami a definíciónk alapján szintén Fibonacci-szám, korábban kiválasztható lenne az algoritmusunk során. Ez az eset tehát csak akkor állhat elő, ha nem a fent leírt algoritmus alapján haladunk.

Már csak a felbontás egyértelműsége van hátra. Ehhez indirekten tegyük fel, hogy létezik két különböző felbontás n pozitív természetes számra. Az legyen G és H az a két egymástól különböző halmaz, amely tartalmazza a két különböző felbontás Fibonacci-számainak. Ekkor legyen $G' = G \setminus H$ és $H' = H \setminus G$. Mivel G és H elemeinek összege egyenlő volt (n), így G' és H' elemeinek összege is egyenlő lesz, hiszen ugyanúgy a kettő halmaz metszetében lévő elemeket vettük el az összegből. Mindezek miatt, ha G' üres lenne, akkor H' -nek is üresnek kell lennie, ami az indirekt feltevésünk miatt lehetetlen. Tehát mindkét halmaznak van eleme. Ezen elemek közül ekkor létezik legnagyobb is, amelyeket nevezzük rendre F_G -nek és F_H -nak. Az általánosság

megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $F_G > F_H$. Viszont a Nem egymást követő Fibonacci-számok összegére vonatkozó tétel (lásd: 2.4.4./[4]) azt állítja, hogy $\sum H' < F_{H+1}$, ugyanakkor tudjuk azt is, hogy $\sum H' = \sum G'$. Ezzel önellentmondásra jutottunk, hiszen hogyan lehetne ugyanakkora a két halmaz elemeinek összege, ha az egyik halmaz elemeinek összege kisebb, mint a másik halmaz legnagyobb eleme. Így — mivel az indirekt feltevés hamis, — az egyértelműséget igazoltuk. \square

2.4.8 Fibonacci-számrendszer, a Zeckendorf-reprezentáció¹³

Bár Fibonaccinak nagy érdeme volt abban, hogy Európában is elterjedt a számrendszerben való számolás, mégis a Fibonacci-számok számrendszere Edouard Zeckendorfnak köszönhető.

A fentebbi tételben kifejtettek alapján, ha az optimális összegeket vesszük, és az egyes helyiértékeket a Fibonacci számokkal azonosítjuk, máris előáll a számrendszerünk, amelyben a kettes számrendszer mintájára az egyes helyiértékek 0 és 1 számjegyeket tartalmaznak aszerint, hogy az adott szám tartalmazza-e a helyiértéknek megfelelő Fibonacci-számot az optimális összegre-bontásában. Jelölésként használjuk az F betűt alsó indexben, vagyis $100101001001_F = 315_{10}$, ahogyan a lenti táblázat második sorában is láthatjuk.

Definíció (számrendszer): olyan rendszer, amely egységes szabályok alapján meghatározza, hogy számjegyek sorozata milyen számokat jelenít meg, az alapszám hatványainak függvényében.

¹³ [13] alapján

Példák:

233	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	=144+21+8+3=176
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	=233+55+21+5+1=315
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	=233+89+34+13+5+2=376
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	=8+3=11
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	=144+55+1=200
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	=144+55+21+8+3+1=232

Érdekes megfigyelnünk, hogy a fentebb bizonyítottakat támasztja alá például az utolsó sor, ahol minden második helyiértéken áll 1-es, és az eredményünk pont a következő Fibonacci-számnál egyel kisebb lesz.

Az átírás a következőképpen működik: Fibonacci-számrendszerből 10-es számrendszerbe: Vesszük az adott helyiértékeket jelentő Fibonacci-számokat és ahol egyes van, azokat összeadjuk. 10-esből Fibonacci-számrendszerbe: a számnál nem nagyobb Fibonacci számok közül kivonjuk a legnagyobbat és egy egyest írunk arra a helyiértékre, amely a vonatkozó Fibonacci-számot jelenti, majd ezt ismételjük, amíg nullát nem kapunk.

Mi kulturálisan teljesen a tízes számrendszerbe vagyunk begyökerezve, de felmerül a kérdés, vajon ez a számrendszer praktikusabb lenne? Végleges választ nem igazán tudunk adni, hiszen kiskorunk óta ujjainkkal számolunk, melyekből tíz van, de a számrendszer hatékonyságát meg tudjuk nézni egy szempontból, hogy hány darab kártyára van szükség minden szám megjelenítésére, mondjuk 1000-ig.

Példa: Mindenki tippeljen arra, melyik a leghatékonyabb számrendszer e tekintetben! Számold ki annak a számrendszernek a hatékonyságát, amelyikre tippeltél, majd hasonlítsuk össze őket!

A 10-esben ez 10^3 , vagyis $10 * 3 = 30$ kártya kell, míg a 2-es számrendszerben, vagy a 4-esben elegendő $2 * 10 = 4 * 5 = 20$ tábla. Ehhez a Fibonacci-számrendszerénél a 15 számjegyű számokra is szükség lesz, vagyis 14 db 0 és 7 db 1-es elegendő lesz, vagyis 21 kártyával megoldható. A Fibonacci számrendszer hatékonysága ilyen

szempontból vizsgálva a 8-aséhoz közelít, 10-esnél jobb, 2-esnél gyengébb. Az ideális e tekintetben az e alapú lenne.

Természetesen léteznek egyéb Fibonacci alapú számrendszerek, mint az aranymetszés pozitív gyökére épített számrendszer, melyben az alapszám a $\phi = +1,618 \dots$, és rendre használjuk a pozitív, negatív és nulladik hatványát. Mivel itt két egymást követő hatvány összege a rájuk következő lesz, ezért a fenti példákhoz hasonlóan csak 0 és 1 számjegyek fognak szerepelni. Például $2_{10} = 10,01_\phi = \phi + \phi^{-2} = 1,618 \dots + 0,382 \dots$. Kissé bonyolultabb, de a aranymetszés negatív gyökére is lehet Fibonacci-s számrendszert építeni.

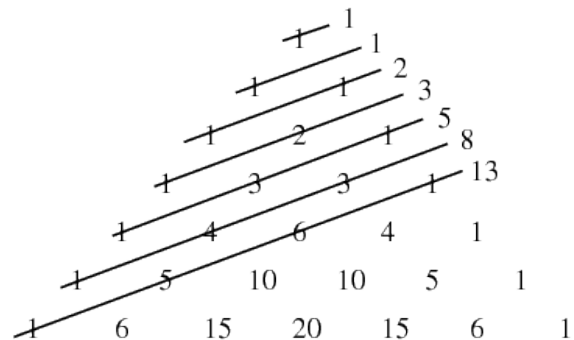
Ezeknek a számrendszereknek tanítás közbeni bevezetését, megértését és elmélyítését segítettően lehet használni a következő példát:

Példa: Milyen súlyokra van szükség a Fibonacci mérőszámok készletből, ha 1 és 100 között mindent szeretnénk egységre pontosan mérni? Próbálkozz! Hogyan rakod ki belőle a 88-at mondjuk? Hányféleképpen tudsz kirakni egy számot?

És természetesen ezen kívül más hasonló példát, illetve az átváltás feladatait is fontos gyakorolni.

2.4.9 Pascal-háromszöggel való kapcsolat

A Fibonacci-számok meglepő módon és igencsak nehezen észre vehetően, de jelen vannak a Pascal-háromszögben is, méghozzá a ferde átlókban szereplő számok összegeként.



8. ábra: Fibonacci a Pascal-háromszögben

Ha megvizsgáljuk a Pascal-háromszögben szereplő számok binomiális együtthatókkal való felírását, akkor a következő összefüggésre juthatunk:

Tétel:

$$\forall n: F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k}$$

Bizonyítás: Indukcióval bizonyítjuk. Ennek első lépéseként megvizsgáljuk $n = 1$ esetet, amelyre $1 = \binom{0}{0}$ helytálló, illetve $n = 2$ esetet, amelyre $1 = \binom{1}{0}$ szintén. Második lépésként feltesszük, hogy egy bizonyos n -ig igaz (jelen esetben az $n - 1$ -et és az n -t fogjuk felhasználni), hogy ebből bizonyítsuk, hogy az állításunk $n + 1$ -re is igaz. Mivel feltettük, hogy $n - 1$ -re és n -re igaz az állítás, ezért kihasználhatjuk a Fibonacci-sorozat képzési szabályát, miszerint:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-k-2}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k} =$$

(ha n páros)

$$= \binom{n-1}{0} + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \left[\binom{n-(k-1)-2}{k-1} + \binom{n-k-1}{k} \right] =$$

(ami a Pascal-szabály binomiális leírása miatt)

$$= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

vagyis pont azzal egyenlő, amit keresünk. Ha n páratlan, akkor pedig

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n-k-2}{k} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k-1}{k}$$

$$= \binom{n-1}{0} + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} \left[\binom{n-(k-1)-2}{k-1} + \binom{n-k-1}{k} \right] + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} =$$

(ami a Pascal-szabály binomiális leírása miatt ugyanúgy)

$$= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n-k}{k} + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

□

Példa: Egy példával is szemléltetjük: mi a valószínűsége, hogy egy n állításból álló igaz-hamis teszt során, ha véletlenszerűen, azonos eséllyel lesz egy kérdésre a válasz

igaz vagy hamis, akkor nem lesz egynél hosszabb sorozat hamis tartalmú állításokból?¹⁴

Megoldás: A számunkra megfelelő tesztek számát számíthatjuk a szokásos Fibonacci-s képlettel is, de most használjuk újonnan szerzett információinkat! Egy jó teszten k darab hamis és $n - k$ igaz állítás van. A hamis állítások az igaz állítások között, és a teszt két szélén lehetnek $n - k + 1$ helyen, amiből k -t kell kiválasztanunk, vagyis

$$t_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}$$

Mivel 2^n lehetőség van, így $p = \frac{F_{n+2}}{2^n}$.

2.4.10 Explicit képlet

Az eddigi példáinkban csak 1000 alatti Fibonacci-számokat hoztuk fel, de a nagy számoknál már felmerül a jogos igény, hogy jó lenne zárt alakban előállítani őket. Erre a problémára a megoldást Jacques Philippe Marie Binet-nek, francia matematikusnak köszönhetjük, aki a számelmélet területén alkotott.

Tétel: $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Ezt hívjuk Binet-formulának.

Bizonyítás: Azt tudjuk a Fibonacci-sorozatról, hogy $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Ezt, ha átírjuk $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$ alakban, majd egy oldalra rendezzük: $q^n - q^{n-1} - q^{n-2} = 0$, és egyszerűsítünk q^{n-2} -vel, akkor ezt kapjuk: $q^2 - q - 1 = 0$. Ennek gyökei: $q_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ és $q_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$. Így az ilyen típusú rekurziót mutató sorozatok általános képlete: $F_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$. Mivel $F_0 = 0$ és $F_1 = 1$, ezért $0 = \alpha + \beta$ és $1 = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$. Ebből rövid úton következik, hogy $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ és $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vagyis az explicit képlet: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$. □

¹⁴ [20] alapján

2.4.11 Generátorfüggvény

Az explicit alak a generátorfüggvény segítségével is létrehozható. A Fibonacci-sorozat generátorfüggvénye:¹⁵

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$$

Képzési szabállyal:

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = \\ &= x + \sum_{k=0}^{\infty} (F_{k-1} x^k + F_{k-2} x^k) = x + x \sum_{k=0}^{\infty} F_{k-1} x^{k-1} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} F_{k-2} x^{k-2} = \\ &= x + xF(x) + x^2 F(x) \\ F(x) &= \frac{x}{1-x-x^2} \end{aligned}$$

zárt alakba írható (ha $|x| < \frac{1}{\phi}$)

A nevezőt szorzattá alakítva lehet levezetni az explicit képletet.

2.4.12 Általánosítások¹⁶

Kiterjesztés az egész számokra: Ha a kisebb Fibonacci-számokat fejezzük ki a nagyobbakból, akkor az $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ képlettel leírható. Ekkor $n = -1, -2, -3 \dots$ esetén $F_n = -1, 2, -3, 5, -8, 13, \dots$, vagyis pozitív n esetén $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$.

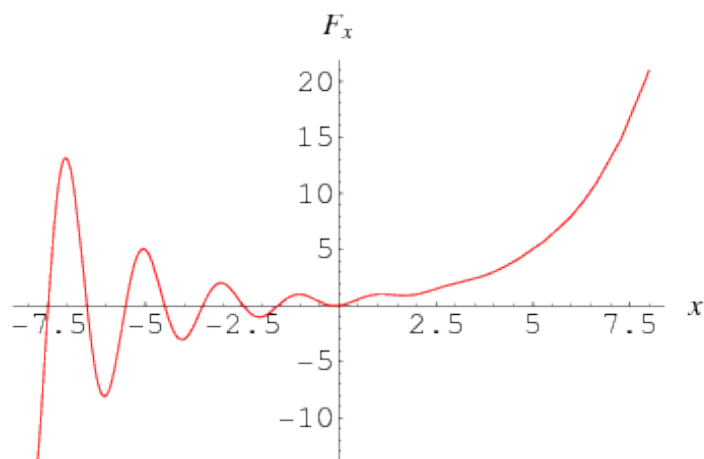
A Binet-formulából kiindulva a valós számokon értelmezett függvénnyé is kiterjeszthető a természetes számokon alapuló sorozat. A függvény a következő lesz:

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x - \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^x \cos(x\pi) \right]$$

amely a következőképpen néz ki:

¹⁵ [18] alapján

¹⁶ [7], [24], [27] alapján



9. ábra: Függvény a valós számokon

Általánosítani nem csak az értelmezési tartomány, hanem a fogalomkör bővítésével is lehet, például, ha minden sorozatot Fibonacci-típusú sorozatként azonosítunk, amelynél harmadik tagtól kezdve minden elem az előző két tag összegeként előáll. Például az 1, 1, 2, 3, 5, 8... vagy 3, 1, 4, 5, 9, 14... esetleg a 14, 32, 46, 78, 124, 202... A Fibonacci-típusúakra egy híres példa a Lucas-számok. $L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$

Tétel: $\phi^n = \frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2}$, ami nagy jelentőséget kölcsönöz a sorozatnak.

Tétel: A Lucas-számok előállnak Fibonacci-számok összegeként: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

Bizonyítás: Indukcióval fogjuk bizonyítani. $n = 1: L_1 = 2 = 0 + 2 = F_0 + F_2$ igaz, szóval most nézzük a $i \leq k$ -ra igaz $\rightarrow k + 1$ -re is igaz következtetést: $L_{k+1} = L_k + L_{k-1} = (F_{k-1} + F_{k+1}) + (F_{n-2} + F_k) = (F_{k-1} + F_{k-2}) + (F_k + F_{k+1}) = F_k + F_{k+2}$. \square

Tétel: A Fibonacci-típusú sorozatok összege és különbsége is Fibonacci-típusú.

Bizonyítás: Ez a definícióból adódik, hiszen ha g és h sorozat is Fibonacci-típusú, vagyis $g_{n+2} = g_{n+1} + g_n$ és $h_{n+2} = h_{n+1} + h_n$, akkor $(g + h)_{n+2} = g_{n+2} + h_{n+2} = g_{n+1} + g_n + h_{n+1} + h_n = (g_{n+1} + h_{n+1}) + (g_n + h_n) = (g + h)_{n+1} + (g + h)_n$ \square

Ebben a témakörben például elgondolkoztató kérdés lehet a következő, az adott évre aktualizálva:

Példa: Hány olyan pozitív egészből álló Fibonacci-típusú sorozat van, amelynek 7. eleme 2016?¹⁷

¹⁷ [9] alapján

Még bővebben értelmezve a Fibonacci-sorozatot jutunk a Polibonacci-számokhoz (például: tribonacci, tetranacci, etc.), amelyeknél az előző kettő szám összege helyett az első n számét vesszük. Ez lehet a megoldása sok az alappéldánkhöz hasonló, de más kondíciókkal rendelkező probléma megoldásához.

2.5 Kapcsolat az aranymetszéssel

Dolgozatomban többször előkerült már az aranymetszés, és annak kapcsolata a Fibonacci-sorozattal. A kérdés, amelyet eredetileg föl tettek, hogy hogyan aránylik a egy szakasz kisebb része a nagyobbhoz, ha a nagyobb pont ugyanúgy az egészhez, vagyis $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Erre az egyre növekvő Fibonacci-számok is választ tudnak adni, hiszen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A két témakör kapcsolatának gazdagságát jól mutatja, hogy ezen dolgozatban is előkerült több ízben is, mint az egymást követő számok határértéke, a négyzetösszegnél, a négyzet téglalappá darabolásakor, a számrendszereknél (2.4.2., 2.4.4./[10] és [12], 2.4.5/[18], illetve 2.4.8.).

3 Játékok

3.1 Fibonacci-nim¹⁸

3.1.1 A játék leírása

Definíció: Nim-nek nevezzük azokat a kétszemélyes, stratégiai játékokat, melyekben egy vagy több kupacból kavicsokat kell elvenniük a játékosoknak bizonyos szabályok alapján, és az nyer, aki az utolsót veszi el (vagy bizonyos változatokban, aki elkerüli az utolsó elvételt).

Vélhetően igen régóta ismeri és játssza az emberiség ezt a játékot, sok változata kialakult, melyek többségének van ismert megoldása nyerő stratégiára.

A nim-játékok közül egy speciális, általunk tárgyalt fajta a Fibonacciról elnevezett típus, amelyet két játékos játszik, egy kupac kavicsal, melynek számosságát a játékosok ismerik. A kezdő játékosnak tetszőleges számú kavicsot kell elvennie, amelynek legalább egy darabnak, de az összes kavicsnál kevesebbnek kell lennie. Innentől minden további lépésben az aktuális játékos minimum egyet, maximum az

¹⁸ [5], [15], [20], [21], [25] alapján

előző lépés kétszeresét veheti el a kavicsok közül. Az a játékos nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

3.1.2 Nyerő stratégia

Kezdjük a kis kavics számtól: $n = 2$ -nél a menetrend a szabályok miatt egyértelmű, a kezdőnek egyet minimum el kell vennie, de nem veheti el mind, szóval elvesz 1 kavicsot, a második pedig a másik és egyben utolsót. $n = 3$ esetben a kezdő elvesz egyet vagy kettőt, a második pedig a többi, hiszen a 2 kavics elvétele is megengedett a kezdő elvétele után. Vagyis a kezdő mindenképpen veszít ezekről a pozíciókról. Ha $n = 4$ kavics van, akkor a kezdő 1 kavics elvételével az előbb tárgyalt vesztes szituációba tudja vinni a másodikat, így nyerhet. 5-nél, ha szintén 3-at akar elérni a kezdő, akkor a kettő kavics elvevése után lehetőséget ad a másodiknak elvenni a maradék hármat, ha pedig csak egyet vesz el, átadja ellenfelének a nyerő pozíciót 4 kaviccsal. Ugyanígy átgondolható $n = 6, 7, 8$ -ra is. Meglepődve fogjuk tapasztalni, hogy ha ügyesen játszott, a kezdő, akkor 5 és 6 kezdő kaviccsal is ő nyert, de 8 kavicsnál veszített, hisz ellenfele is résen van. Feltűnhet, hogy ahogyan a játék nevéből is sejthető, a Fibonacci-számok lesznek azok, amelyekben a kezdő nem tud nyerni.

Állítás: Minden (egynél nagyobb) Fibonacci-szám vesztes pozíció a kezdő számára.

Bizonyítás: Teljes indukció. $n = 2, 3, 5$ -re fent láttuk. Tegyük fel, hogy egy bizonyos n -ig minden F_n vesztes volt. F_{n+1} -re kell most megnéznünk. Azt tudjuk, hogy F_{n-1} -re vesztes volt az első. Vagyis a második ügyes stratégiával F_{n+1} -ről el tudja juttatni a játékot F_n -re, úgy hogy onnan a kezdő játékosnak kelljen lépnie, hiszen a második játékos vette el az utolsót. És F_n -t pedig tudjuk, hogy vesztes pozíció. \square

Állítás: Minden nem Fibonacci-számú kezdő kavics esetén képes a kezdő játékos nyerni. Azaz ha a kupac elemszáma Fibonacci-szám, akkor a második játékosnak, míg ha ez nem teljesül, a kezdő játékosnak lehet nyerő stratégiája.

Bizonyítás: Itt most visszaemlékszünk, hogy korábban tárgyaltuk a Zeckendorf-tételt (lásd: 2.4.7.) és a Fibonacci-számrendszert (lásd: 2.4.8.). Ezekben a fejezetekben arról volt szó, hogy minden pozitív egész szám felírható páronként különböző, nem egymást követő Fibonacci számok összegeként, úgy, hogy a számból mindig a legnagyobb, nála kisebb vagy egyenlő Fibonacci-számot vonjuk ki. Ugyanezt fogjuk itt is alkalmazni. Mivel a célunk egy Fibonacci-számra juttatni ellenfelünket, ezért a legközelebbit kiválasztjuk. Ez sokszor nem lehetséges egyből anélkül, hogy legalább

az összes kavics harmadát elvegyük, ezért a célunkat kivonva az összesből, a maradékban lévő legnagyobb Fibonacci-számot célozzuk, és így tovább. Vagyis létrehozuk a szám Zeckendorf reprezentációját, és a benne szereplő legkisebb helyiértékű egyest fogjuk nullázni. Mivel az ellenfél utánunk maximum kétszer annyit vehet el, mint mi, így ő nem fogja tudni elvenni a legkisebb helyiértékű egyessel azonos mennyiséget, hiszen nem állhat egymás mellett két egyes és $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = F_n + F_{n-1} + F_n > 2 * F_n$. Ezért az elvételével létre fog hozni egy általunk eltüntethető legkisebb egyest a szám Fibonacci-számrendszerbeli alakjában.

Változat: Ugyanezt a játékot nagyszerűen ki lehet váltani egy természetes számokat tartalmazó számegyenesen való lépegetéssel, ahol szintén ugyanezek a szabályok uralkodnak.

3.2 Fibonacci 21^{©19}

Ez egy speciálisan a Fibonacci-számok köré kitalált játék, a játékban kettes, hármas, ötös, nyolcas, tizenhármas és huszonegyes kártyák vannak. Összesen 89 db kártyával játszunk. 4 db 2, 3, 5, 8, 13, 21 számjegyű Alapkártyával, 12 db 2, 3, 5, 8, 13 számjegyű sima kártyával, 3 db jokerrel (helyettesítővel) és két bónuszkártyával. 2, 3 vagy 4 játékos játszhatja.

A játék célja, hogy minél hamarabb összegyűjtsünk egy 21-es kártyát és 5 db Alapkártyával kezdődő halmazt, amelyben a számok összege 21-et ad. Ez alapjáraton a kártyákból 12 féleképpen lehetséges, de így, hogy megkülönböztetjük a kezdő elemet

(Alapkártyával jelölve) 37 lehetőségünk lesz. Mindenki hét kártyát kap kezdésként.

21						
13	8					
13	5	3				
13	3	3	2			
8	13					
8	8	5				
8	8	3	2			
8	5	5	3			
8	5	3	3	2		
8	3	3	3	2	2	
5	13	3				
5	8	8				
5	8	5	3			
5	8	3	3	2		
5	5	5	3	3		
5	5	3	3	3	2	
5	3	3	3	3	2	2
3	13	5				
3	13	3	2			
3	8	8	2			
3	8	5	5			
3	8	5	3	2		
3	5	5	5	3		
3	8	5	3	2		
3	5	5	3	3	2	
3	3	5	5	3	2	
3	5	3	3	3	2	2
3	3	5	3	3	2	2
3	3	3	3	3	2	2
2	13	3	3			
2	8	8	3			
2	8	5	3	3		
2	8	3	3	3	2	
2	5	5	3	3	3	
2	5	3	3	3	3	2
2	3	5	3	3	3	2

10. ábra: 37 lehetőségünk

¹⁹ [6] alapján

Középen van húzó és a legfelső lap felfordításával jelzett dobó pakli. Minden körben, aki jön, az kettőt húz a pakliból, lepakolhat az asztalra, vagy felvehet maga elé onnan (csak sima lapot), és egyet lapot eldob. Mielőtt halmazokat lehetne lerakni a sima kártyákból, egy körben le kell helyezni 3 Alapkártyát (2-13 számmal) és egy 21-es kártyát. A Bónusz és a joker kártya használható Alapkártyának. Az Alapkártyák kezdenek egy-egy halmazt, sima tagként nem lehet őket használni. Minden játékosnál csak egy halmaz kezdődhet egy fajta Alapkártyával. Amikor egy halmaz összege eléri a 21-et, akkor be lehet zárni összegyűjtésükkel, lefordításukkal, de nyitva is hagyható. A zárt halmaz elemeit már nem lehet mozgatni. A többiek ideje alatt is lehet mozgatni a lapokat a halmazok között, de lerakni vagy felvenni nem szabad. A joker bármilyen számot felvehet (2, 3, 5, 8, 13, 21 közül), és meg kell nevezni, amikor lekerül az asztalra, de később új számot is felvehet, hogy létrejöjjön a 21 összegként. A jokert is lehet mozgatni a nyitott halmazok közt. Az Alapkártyákat ezzel szemben nem szabad mozgatni, de a jokert, amit korábban Alapkártyaként használtunk, ki lehet cserélni egy valódira. Ha a játékos mind a hat halmazát lezárta, onnantól minden körben húzás nélkül eldob egy lapot, egészen addig, amíg el nem fogy, és ki nem megy. Ekkor van vége a játéknak.

Pontozás: a győztes 200 pontot kap, 20-at minden lezárt halmazért, és 80-at a kimenetelért. A többiek is 20-at kapnak minden lezárt halmazért, mínusz a nyitott halmazok összege, mínusz kétszer a kézben levők. A joker alapjáraton 50-et, a bónusz kártya 8-at ért, kézben dupla.

Egyéb variációk is léteznek ezekkel a kártyákkal: lehet pasziánszozni vagy kanasztázni is.

3.3 **Fib-Fibonacci**²⁰

Ez egy kétszemélyes játék, melyet Eric Treadwell és T.J. Highley talált ki. Az alapötletet az adta, hogy mit lehet játszani egy pakli kártya fel nem használt lapjaival, míg a többivel mások egy euchre nevű játékot játszanak. A pakli itt 26 kártyából áll: 2 jokerből, és 4 db kettesből, hármassból, ötösből, nyolcassból és 2db négyesből, illetve hatosból. Kezdeként mindkét játékos kap 5 lapot a kezébe, a többit a pakliban hagyjuk. A játék célja: megszabadulni az összes kártyától. A játékosok felváltva

²⁰ [16] alapján

jönnek, egy körben vagy húznak, vagy szabályosan kijátszik lapokat. Pár dolgot előre definiálnunk kell:

Függőleges és vízszintes: ezek írják le a lapok irányát. A függőleges az egyik játékostól a másikig tart az asztalon, míg a vízszintes erre merőlegesen, a játékosokat elválasztva.

Sor: lapok egymásutánja, amik követik a Fibonacci képzési szabályt, mindegyik lap értéke az előző kettő összege. A sor függőlegesen van kijátszva és a benne lévő lapok értéke függőlegesen növekszik.

Alap: egy olyan kártya, ami nem része a sornak, de már előttük ott kell lennie. Az alapot vízszintesen kell kijátszani.

Szabályos kijátszások:

1. Ha már nincs kártya az asztalon, akkor csak a Jokert lehet kijátszani. Amikor a Jokert valaki kijátszotta, az lesz az Alap, sor indulásának lehetőségével, minkét játékos irányában. Ilyenkor a kijátszó játékosnak lehetősége van egy bónusz lapot is (maximum hármast) letenni, amivel elindít egy sort.
2. Kettest vagy hármast ki lehet játszani, mint egy olyan sor első eleme, ami Alapról indul.
3. Kettest vagy ötöst ki lehet játszani, mint egy sor második eleme, de hármast csak akkor, ha a kezdő elem nem az. (Vagyis az első kettő lehet 2-3, 2-5, 3-5.)
4. Egy kártyát ki lehet játszani a sor harmadik vagy negyedik tagjaként, ha az előző kettő kártya összege a kijátszandó kártya értékével egyenlő. Például, ha az első két kártya 2-3, akkor a harmadiknak 5-ösnek, a negyediknek 8-asnak kell lennie. Általában a sor nem éri el a négy elemet.
5. (kis helyettesítő) A négyest ki lehet cserélni bármelyik felfordított lappal az asztalon. Ez esetben a helyettesített kártya a kijátszó kezébe kerül. Ilyenkor a négyes felveszi a kicserélt kártya értékét, hogy tudni lehessen, milyen értéket képvisel a sorban. A négyes helyettesítő, mivel bármi helyére megfelelő. Ugyanakkor két körbe kerül, mire a megszerzett kártyát ki lehet játszani.
6. (nagy helyettesítő) A hatos kijátszható bármilyen nullánál nagyobb vagy egyenlő természetes számként. Ugyanakkor az megköti, hogy miként játsszák ki. Ha ez az első kártya a sorban, akkor értéke csak 0, 1, 2 vagy 3 lehet, ha a második, akkor

3,4 vagy 5 lehet, és ha harmadik, esetleg negyedik a sorban, akkor a szabály szerint az előbbi kettő összege. Így az első két lapra 11 lehetőség lesz: 0-3, 0-4, 0-5, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, bár ezek többsége szinte soha nem kerül elő.

7. (nagy helyettesítő) A hatos használható még arra is, hogy a nulláról újraindítsunk vele egy sort. Ilyenkor a hatos Alapnak számít és vízszintesen kell lerakni, hogy újra lehessen indítani egy sort, de ilyenkor a kijátszónak nincs lehetősége a plusz egy (sorindító) kártya kijátszására. A kártya a kijátszó felőli oldalon indítja újra a sort, a szemközti oldalon nem befolyásol.
8. Ha a másik játékos legutóbbi körében egy hetest vagy egy nyolcast játszott ki, és egy azonos színű nyolcast vagy hetest tartjuk a kezünkben, akkor ez függőlegesen lesz kijátszva, de a sorból oldalra kimozdítva, hogy egyértelmű legyen: nem része a sornak. Ezt a játszma során mindenki csak egyszer játszhatja ki, később, ha lehetősége lenne rá, akkor sem.

Fontos megjegyezni, hogy az asztal rendszerint úgy néz ki, hogy oszlopban vannak kártyák középen jokerrel, mindkét irányba sorral (itt most a játék terminológiája szerinti sorral). Az Alap kártya mindkét oldalán lévő sorok közös tulajdont képeznek, bármelyik játékos hozzátehet bármelyik oldalon lévő sorhoz. Ha a pakli – ahonnan húzni lehet, - kiürül, akkor az asztalról össze kell szedni a befejezett (minimum hetest tartalmazó) sorokat és hozzájuk tartozó Alapokat, illetve a kirakott Alapokat, amelyeknél még nincs sor-kezdemény, és mindezt összekeverni, hogy új húzó paklink legyen.

3.4 2584 Puzzle

A közismert 2048 nevű internetes és telefonos játéknak is létezik Fibonacci-s verziója. Ebben egy 4x4-es rácson jelennek meg négyzet alakú szám-csempék, melyeken a Fibonacci-számok vannak. Az sorozatban egymás mellett álló számok csempéinek egymásra húzásával meg lehet kapni a következőt a képzési szabály alapján. Csakhogy a nehézséget az adja, hogy a koordináta-rendszer négy irányába való húzogatása a csempéknek egyformán hat minden csempére. A cél elérni a 2584-es csempét. Kissé más logikát kíván, mint a 2048 nevű játék, ahol ugyanez a 2 hatványaival megy, mivel ott az azonosakat kell egymásba juttatni a nagyobb szám érdekében, itt pedig az egyel nagyobb vagy kisebb Fibonacci-számot.

4 Fibonacci-számok alkalmazásai és megjelenései egyéb területeken

4.1 Kultúrában²¹

4.1.1 Zene²²

Sok különböző módon felfedezhető a sorozat a zenében, mint a pentaton hangközeinek félhangban mért távolságában, egy-egy zenemű tételeinek ütemek szerinti hosszában, vagy egyéb módon. Például a méltán híres Kodály *Psalmus Hungaricus* című zeneműjének csúcspontja az aranymetszetébe esik. Vagy *Zene húros hangszerekre, ütőkre és cselesztára* című Bartók Béla műben az első tétel 88 ütemes, melyben a csúcspont az 55. ütemben jön el, a harmadik tétel fő témája a zeneszerző kedvelt 3+3+2 nyolcados ritmusában íródott, s még sorolhatnánk. Lendvai Ernő – híres Bartók-kutató és a fentiek föltárója szerint – a művész sokszor ösztönösen alkalmazta ezeket az arányokat műveiben.

4.1.2 Irodalom

Dan Brown: *A da Vinci-kód*, Esterházy Péter: *Harminchárom változat Haydn-koponyára* és Kontra Ferenc: *Angyalok regénye* című művekben vagy szintén Kontra Ferenc tollából származik *A Fibonacci-sor* című novella is, illetve több másik könyvben is jelentős szerepet játszik a sorozat, de ezekre külön nem térek ki.

Nagy László verseiben is — ki Bartók zenéjéből tanult szerkeztés-tant, — többször kerül a csúcspont a vers aranymetszésébe.

4.1.3 Televízióban, moziban

A 21, *Pi*, *Da Vinci-kód*, *Nimfomániás* c. filmekben is szerepel, de több sorozatban is feltűnik, mint a *Gyilkos számokban* vagy a *Gyilkos elmékben*.

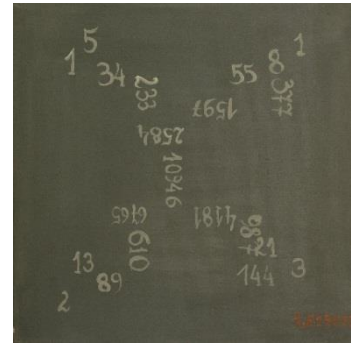
²¹ [20], [23] alapján

²² [14] alapján

4.1.4 Képzőművészet

Jó példa Saxon-Szász János művészete, akiről Pernecky Géza írt könyvet, melyben részletesen taglalja a sorozat megjelenését Saxon-Szász művészetében. De ugyancsak említhetném Marisa Ferreirát, vagy Martina Schettinát is.

Klasszikusabb példák közül Leonardo Da Vincit és Albrecht Dürert fontos kiemelni, elsősorban az arany metszés arányaival dolgoztak sokat.



11. ábra: Martina Schettina: *Fibonacci's Dream*, 2008

4.1.5 Építészet

A Parthenon megszámlálhatatlan helyen, módon kínálja az arany metszés arányait, de a Kheopsz-piramis vagy Michelangelo Szent Péter bazilika tervei is a szem által természetesen legszebbnek vélt arányt hozza.

4.2 Természet²³

Sokféle módon felfedezhető a Fibonacci-sorozat a természetben, például a levelek elfordulása a növény szárán a legtöbb esetben $\frac{F_n}{F_{n+2}}$ -ed része a teljes körnek: $\frac{1}{3}$ a bükknek, mogyorónak, szedernek, $\frac{2}{5}$ a tölgynek, almának, cseresznyének, $\frac{3}{8}$ a nyárnak, rózsának, baracknak, $\frac{5}{13}$ a fűznek, mandulának. A virágszirmok száma is gyakran Fibonacci-szám: vadrózsa 5, szarkaláb 8, körömvirág 13, őszirózsa 21, útilapu 34, százszorszép-fajták 55 vagy 89. Fibonacci-spirált formálnak a tobozok, ananászok pikkelyei, napraforgó szemei, kaktusztüskék.

²³ [24] alapján

4.3 Rulett²⁴

Előfordulnak különböző nyerési stratégiák a rulett játékban, amik a Fibonacci-sorozatra épülnek. Ezek közül a legegyszerűbb és híresebb, amikor színeket megtéve játszunk, és elsőként felrakunk 1 egységnyi tétet, ha nyerünk, akkor nincs semmi. Ha nem, a következőre felrakunk megint 1 egységet, majd 2, 3, 5, stb. Ha a sor közben valamikor nyerünk, akkor a nyeremény értékével, azaz kettő előző elemmel visszább lépünk a sorban.

Ennek némiképp bonyolultabb a három tucatos stratégia, amikor párhuzamosan játszunk a fent leírt stratégiát mindhárom tucatra (harmadra). Ennél még kiegyensúlyozottabb játékhoz vezet, ha 6 tucatra játszunk, azaz a 3 oszlopra és a 3 harmadra egyszerre.

4.4 Tőzsde²⁵

A tőzsde világában is fontos szerepe van a Fibonacci-számoknak, négy különböző elképzelés is ismert, bár ezek többnyire csak ábrázolás tekintetében különböznek. A Fibonacci típusú ívek, vonalak, legyezők és időzónák közül a legszélesebb körben elterjedt használatnak a Fibonacci-vonalak örvendenek. Itt lényegében az történik, hogy egy grafikon két extrém pontját vesszük: a lokális mélypontot 100%-nak és a lokális maximumot 0%-nak, majd berajzolunk még vonalakat aszerint, hogy minden vonal az előző vonal százalékbeli értékének a 1,618-ada legyen, vagyis 61,8; 38,2 és 23,6 %-hoz. Ezeknél a számoknál ugye mindegyik az előző kettő összege lesz. Ugyanígy növekedési értéknél a 161,8%-ot kell venni. Ezek sokszor támaszként vagy ellenállási szintként működhetnek a grafikon számára. Nyilvánvalóan jósolni ezzel sem lehet, és megosztja a szakértőket, mivel számos pro és kontra példát lehet felhozni, ugyanakkor meglepő gyakorisággal működnek. Habár felmerül a kérdés, hogy valódi törvényszerűségről van-e szó, avagy ez is egy önbeteljesítő jóslat csupán.

²⁴[12] alapján

²⁵[11], [19], [28] alapján

5 Összefoglalás

Nagyon érdekes tapasztalatot és jó élményt adott a témában való elmélyülés, mélyebb ismeretszerzés. Bízom benne, hogy a sorozatról elsajátított ismereteket később is hasznosíthatom.

6 Bibliográfia

- [1] Andre-Jeannin, R.: *Irrationalite de la somme des inverses de certaines suites recurrentes*. C. R. Acad. Sci. Paris t. 308, serie I. 1989:539-41.
- [2] Bakos Ferenc szerk.: *Idegen szavak és kifejezések szótára*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.
- [3] Bugeaud, Y; Mignotte, M. és Siksek, S.: *Fibonacci numbers at the most on away from a perfect power*. 2008.
<http://homepages.warwick.ac.uk/~maseap/papers/fnpm.pdf>
- [4] Carmichael, Robert Daniel: *On the numerical factors of the arithmetic forms $\alpha n + \beta n$* , 1913, (Ann. Math. Vol. 15, no. 1/4: 30 – 70)
http://www.jstor.org/stable/1967797?seq=8#page_scan_tab_contents
- [5] Csákány Béla: *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon Kiadó, Szeged, 1998.
- [6] Fibonacci Game nevű honlap: <http://fibonaccigame.com/>
- [7] Gerőcs László: *A Fibonacci-sorozat általánosítása*, Scolar Kiadó, Budapest, 1998.
- [8] Hall, Rachel: *Math for Poets and Drummers*. 2005:
<http://people.sju.edu/~rhall/Rhythms/Poets/arcadia.pdf>
- [9] Hegyvári Norbert, Hraskó András, Korándi József, Török Judit: *Elemi matematika feladatgyűjtemény* (szerk.: Hraskó András), ELTE, 2013.
<http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/78.pdf>
- [10] The Online encyclopedia of integer sequences: <https://oeis.org/A079586>
- [11] Internetsuli: *36. A technikai elemzés alapjai II*.
<http://www.internetsuli.hu/curriculum.php?id=38>
- [12] Kerekes Ervin: *Fibonacci 3 tucatra*
http://rulett.biz/fibonacci_3_tucatra.htm
- [13] Kovács Ádám, Dr. Vámos Attila: *Aranyháromszög (Aranymetszés, Fibonacci-sorozat, Szabályos ötszög)*, Műszaki Kiadó, Budapest, 2007.
- [14] Lanczendorfer Orsolya: *Matematika a zenében vagy zene a matematikában c. szakdolgozata*, ELTE, 2010.

- [15] Nyitrai Orsolya Katalin: *Matematikai játékok* c. szakdolgozata, ELTE, 2014.
- [16] Pagat.com CARD GAME RULES c. honlap *Fib-Fibonacci* oldala:
<http://www.pogat.com/invented/fib-fibonacci.html>
- [17] Pethő Attila: *Full Cubes in the Fibonacci Sequences*, Publ. Math. Debrecen, 1983:
https://vm.mtmt.hu/search/slist.php?nwi=1&initied=1&ty_on=1&url_on=1&cite_type=2&orderby=3D1a&location=mtmt&stn=1&AuthorID=10000413&Scientific=1
- [18] Piliszky András: *A sorozatok az egyetemen és a középiskolákban* c. *szakdolgozata*, ELTE, 2014.
- [19] Portfolio: *A Fibonacci számok tőzsdei használata*, 2002.
http://www.portfolio.hu/vallalatok/technikai_elemzes/fibonacci_a_techikai_elemzesben_onmagat_beteljesito_joslat.10.22883-2.html
- [20] Török Judit: *A Fibonacci-sorozat*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.
- [21] University of Hawai‘i Department of Mathematics: *Fibonacci Nim*
http://superm.math.hawaii.edu/_pdfs/lessons/k_five/SuperM_Nim.pdf
- [22] University of Surrey: *Easier Fibonacci puzzles*
<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles.html>
- [23] Wikipédia *Fibonacci number* című angol szócikke:
https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number
- [24] Wikipédia *Fibonacci-számok* című magyar szócikke:
<https://hu.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-számok>
- [25] Wikipédia *Nim* című magyar szócikke: <https://hu.wikipedia.org/wiki/Nim>
- [26] WikiProof nevű honlap: <https://proofwiki.org/>
- [27] Wolfram Mathworld *Fibonacci Number* című szócikke
<http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html>
- [28] Zabás: *TUDÁSTÁR: Fibonacci és a tőzsde /Kecskeméti/*
<http://stockland.hu/blog/show/433>

7 Ábra- és képjegyzék

1. ábra: Leonardo Pisano 3
<https://www.fibonacci.com/wp-content/uploads/2015/03/Fibonacci-leonardo-pisa.jpg>
2. ábra: Liber Abaci vonatkozó oldala..... 4
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/04/Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg
3. ábra: A nyúlpárok szaporodása..... 5
<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibrab.gif>
4. ábra: Hegyre följutás lehetőségei..... 6
5. ábra: Első n Fibonacci-szám négyzetösszege 13
<http://darcy.rsgc.on.ca/ACES/ICS4U/images/Fibonacci240H.gif>
6. ábra: Fibonacci-spirál 13
<http://www.podles.org/dialogue/wp-content/uploads/Fibonacci-spiral.jpg>
7. ábra: $64=65?$ 16
<https://www.cb.hs-mittweida.de/typo3temp/pics/2d0b6133de.jpg>
8. ábra: Fibonacci a Pascal-háromszögben 21
http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/FibonacciShallowDiags_1000.gif
9. ábra: Függvény a valós számokon 25
http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/Fibonacci_1000.gif
10. ábra: 37 lehetőségünk 28
<http://fibonaccigame.com/>
11. ábra: Martina Schettina: Fibonacci's Dream, 2008..... 33
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/43/Fibonacci_Traum.jpg