

Az integrálszámítás alkalmazásai

Pallagi Bóbita

Matematika BSc, tanári szakirány

Szakdolgozat

Témavezető:

Valkó Éva

PhD hallgató

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2016.

Tartalomjegyzék

1. Fogalmi áttekintés, felhasznált tételek, definíciók	1
1.1. Jordan-mérték \mathbb{R}^p -n	1
1.2. A p -dimenziós integrálás	2
1.3. A Riemann-integrál legfontosabb tulajdonságai	3
1.4. Fubini tétele	5
2. Egy- és többváltozós integrálszámítás alkalmazásai	7
2.1. Végtelen sorok	7
2.2. A szalvétagyűrű-probléma	12
2.3. Young-egyenlőtlenség	14
2.4. Téglalap lefedése	16
3. Buffon tűproblémája	18
3.1. Klasszikus eset	18
3.1.1. Rövid tű	18
3.1.2. Hosszú tű	20
3.2. Laplace-féle speciális eset	22
3.2.1. Rövid tű	22
3.2.2. Hosszú tű	24
3.2.3. Extra hosszú tű	27
Irodalomjegyzék	29

Bevezetés

Sokszor felmerül matematika tanulása közben a kérdés, hogy „Ezt miért tanuljuk?” vagy „Hol fogjuk ezt használni?”. Tanárként szeretném, ha tudnám motiválni a diákokat azzal is, hogy megmutatom nekik, mire jó az, amit tanulunk és hány különböző területen tudjuk az adott témakörbeli tudásunkat alkalmazni, akár ott is, ahol egyáltalán nem szembeötlő, hogy ezzel a megközelítéssel is megoldható egy feladat. Szeretném, ha nem csak egyféle menetre korlátozódna egy probléma megoldása, hanem a matematika összefüggéseinek megértésével többféleképp is neki tudnának állni egy feladatnak. Ezzel szeretném önállóságra és kreativitásra ösztönözni a diákokat, valamint fejleszteni a problémamegoldó készségüket.

Szakedzőzetem célja bemutatni az integrálszámítás alkalmazásait a matematika különböző területein. Egy rövid fogalmi áttekintés, és a felhasznált tételek ismertetése után először az egyváltozós, majd a többváltozós integrálszámítás alkalmazásaira mutatok érdekes példákat. Végül önálló fejezetben bemutatom Buffon tűproblémáját, aminek különböző változatait és aleteit részletesen ismertetem.

Az 1. fejezetben a felhasznált definíciók és tételek áttekintéséhez Sikolya Eszter analízis jegyzetét [1], valamint Laczkovich Miklós és T. Sós Vera Valós analízis könyveit [2, 3] vettem segítségül.

A 2. fejezetben bemutatott példák közül a végtelen sorokhoz a *Bizonyítások a Könyvből* [4] című könyvet, a szalvétagyűrű-problémához Keith Devlin Mathematical Association of America oldalán közzétett cikkét [5], a téglalap lefedésénél pedig Stan Wagon cikkét [6] használtam fel.

A 3. fejezetben a klasszikus Buffon-tűproblémával a korábban említett *Bizonyítások a Könyvből* [4] olvasása közben ismerkedtem meg, az ott található tételeket (rövid és hosszú tű eseteire vonatkozóan) viszont másképp vezettem le, mint ahogy a könyvben szerepel. Ezután a tűprobléma egyik speciális esetével, a Laplace–Buffon-tűproblémával foglalkoztam, amihez Barry J. Arnow cikkét [7] használtam fel, itt viszont a hosszú tű esetére vonatkozó bizonyítások nem szerepeltek, ezeket önállóan dolgoztam ki.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Valkó Évának a rengeteg támogatásáért és kitartó munkájáért, ami nélkül nem jöhetett volna létre a dolgozatom. Köszönöm, hogy felkeltette érdeklődésemet a téma iránt az Analízis 3-4 gyakorlatokon, hogy bármikor fordulhattam hozzá segítségért, mindig elérhető volt. Köszönöm a folyamatos biztatást és bátorítást, ami miatt mindig szívesen foglalkoztam a dolgozatommal.

Szeretném megköszönni Busai Ágotának is, aki alaposan átnézte a dolgozatom, hogy formailag is megfeleljen a követelményeknek, és segített a \LaTeX helyes használatában.

Végezetül szeretném megköszönni családom és barátaim támogatását és segítségét is.

1. fejezet

Fogalmi áttekintés, felhasznált tétel, definíciók

1.1. Jordan-mérték \mathbb{R}^p -n

Tekintsük a sík koordinátatengelyekkel párhuzamos, $\frac{1}{2^n}$ oldalhosszúságú négyzetekre való rácsfelbontását, a megfelelő négyzetek területe $\frac{1}{4^n}$. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, nemüres halmaz. Jelölje \overline{H}_n azon zárt négyzetek unióját a rácsból, melyek belemetszenek H -ba, \underline{H}_n pedig azon zárt négyzetek unióját, melyek részei H -nak. Ezek területét jelölje $\text{ter}(\overline{H}_n)$ illetve $\text{ter}(\underline{H}_n)$, és értelmezzük a következőképp: az unióban szereplő négyzetek száma (ez véges, mivel H korlátos) szorozva $\frac{1}{4^n}$ -nel. Világos, hogy $\underline{H}_n \subset \overline{H}_n$, így

$$\text{ter}(\underline{H}_n) \leq \text{ter}(\overline{H}_n), n \in \mathbb{N}.$$

Az is könnyen látható, hogy ha n -et növeljük, akkor a rácsfelbontás sűrűsödik: az $n+1$ -edik lépésben az n -edik rácsfelbontáshoz tartozó kis négyzetek mindegyikét 4 egyenlő részre osztjuk. Így meggondolható, hogy

$$\underline{H}_n \subset \underline{H}_{n+1} \text{ és } \overline{H}_{n+1} \subset \overline{H}_n,$$

másrészt

$$\text{ter}(\underline{H}_n) \leq \text{ter}(\underline{H}_{n+1}) \text{ és } \text{ter}(\overline{H}_{n+1}) \leq \text{ter}(\overline{H}_n).$$

Ebből következik, hogy $\text{ter}(\underline{H}_n)$ monoton növekvő, $\text{ter}(\overline{H}_n)$ monoton fogyó, és a H halmaz korlátossága miatt korlátos sorozatok.

1.1.1. Definíció. A fentiek alapján definiálhatjuk tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz *belső*, ill. *külső mértékét* mint

$$\underline{m}(H) := \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ter}(\underline{H}_n), \quad \overline{m}(H) := \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ter}(\overline{H}_n).$$

Mivel $\text{ter}(\underline{H}_n) \leq \text{ter}(\overline{H}_n)$, ezért $\underline{m}(H) \leq \overline{m}(H)$.

1.1.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz. Azt mondjuk, hogy H *Jordan-mérhető*, ha belső, ill. külső mértéke megegyezik, azaz

$$m(H) := \underline{m}(H) = \overline{m}(H),$$

ahol $m(H)$ jelöli a H *Jordan-mértékét*.

A továbbiakban tetszőleges $p \in \mathbb{N}$ esetén bevezethetjük az m_p \mathbb{R}^p -beli Jordan-mértéket, ill. mérhetőséget a $p = 2$ esettel analóg módon.

1.1.3. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmazt *Jordan-mérhető halmaznak* nevezünk, ha belső és külső mértéke megegyezik, azaz

$$m_p(H) := \underline{m}_p(H) = \overline{m}_p(H)$$

és ezt a közös értéket a H halmaz *Jordan-mértékének* nevezzük.

1.2. A p -dimenziós integrálás

Az egyváltozós függvényeknél megismert Riemann-integrál fogalmát terjesztjük ki többváltozós függvényekre. Az egyváltozós Riemann-integrálhoz hasonlóan definiálni tudjuk az $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ (korlátos) függvény Riemann-integrálját a p -dimenziós Jordan-mérték segítségével.

1.2.1. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ nemüres Jordan-mérhető halmaz. Ennek egy *felosztása* $\Phi := H_1, H_2, \dots, H_n$, ahol H_1, \dots, H_n egymásba nem nyúló, mérhető halmazokból álló rendszer és

$$\bigcup_{i=1}^n H_i = H.$$

A H halmaz felosztásainak halmazát jelölje $\mathcal{F}(H)$.

1.2.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ nemüres Jordan-mérhető halmaz és $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ha Φ egy felosztása H -nak, akkor f Φ felosztáshoz tartozó *alsó* ill. *felső közelítőösszege*

$$s(f, \Phi) := \sum_{i=1}^n \left(\inf_{H_i} f \right) m_p(H_i)$$

ill.

$$S(f, \Phi) := \sum_{i=1}^n \left(\sup_{H_i} f \right) m_p(H_i).$$

1.2.1. Állítás. Bármely Φ, Ψ felosztásokra $s(\Phi) \leq S(\Psi)$.

1.2.3. Definíció. Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ nemüres, Jordan-mérhető halmaz, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor f

alsó Riemann-integrálja:

$$\int_H f := \sup\{s(f, \Phi) \in \mathbb{R} : \Phi \in \mathcal{F}(H)\},$$

felső Riemann-integrálja:

$$\overline{\int}_H f := \inf\{S(f, \Phi) \in \mathbb{R} : \Phi \in \mathcal{F}(H)\}.$$

A fentiekből nyilvánvaló: $\int_H f \leq \overline{\int}_H f$.

Ezek alapján definiálhatjuk az \mathbb{R}^p -beli Riemann-integrálhatóságot.

1.2.4. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ nemüres, Jordan-mérhető halmaz, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható H -n, ha

$$\int_H f = \overline{\int}_H f.$$

A közös értéket jelölje $\int_H f$ és ezt nevezzük az f függvény Riemann-integráljának a H halmazon. A H halmazon Riemann-integrálható függvények halmazát jelölje $R(H)$.

1.3. A Riemann-integrál legfontosabb tulajdonságai

1.3.1. Tétel. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ nemüres Jordan-mérhető halmaz, $f, g \in R(H)$, $c \in \mathbb{R}$.

1. Ekkor $f + g \in R(H)$ és $c \cdot f \in R(H)$, valamint

$$\int_H (f + g) = \int_H f + \int_H g,$$

$$\int_H c \cdot f = c \cdot \int_H f.$$

2. Ha $f \leq g \in R(H)$, akkor

$$\int_H f \leq \int_H g.$$

1.3.2. Tétel. Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^p$ egymásba nem nyúló mérhető halmazok, $f|_A$ integrálható A -n és $f|_B$ integrálható B -n. Ekkor f integrálható $A \cup B$ -n is és

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

A következő tétel fontos következménye, hogy minden integrál tekinthető téglalap alakú tartományon vett integráltnak.

1.3.3. Tétel. Legyen $T \subset \mathbb{R}^p$ téglalap alakú tartomány, $H \subset T$ mérhető halmaz, $f \in R(H)$. Ekkor az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \in H \\ 0 & \text{ha } x \in T \setminus H \end{cases}$$

módon definiált $\tilde{f} : T \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható T -n és

$$\int_T \tilde{f} = \int_H f.$$

1.3.1. Állítás. Legyenek $B \subset A$ mérhető halmazok, f integrálható A -n. Ekkor $f|_B$ integrálható B -n.

1.3.4. Tétel. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető sorozatkompakt (azaz korlátos és zárt) halmaz, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f Riemann-integrálható H -n.

A következő tételek arról szólnak, hogy mi köze egy korlátos halmaz mértékének az integrálhoz.

1.3.5. Tétel. Legyen $H \subset T \subset \mathbb{R}^p$, ahol H tetszőleges (korlátos) halmaz, T tégl. Jelölje

$$\chi_H := \begin{cases} 1, & x \in H \\ 0, & x \in T \setminus H \end{cases}$$

a H halmaz karakterisztikus függvényét T -n. Ekkor

$$\underline{m}_p(H) = \int_T \chi_H,$$

$$\overline{m}_p(H) = \int_T \chi_H.$$

1.3.1. Következmény. Egy $H \subset T$ (korlátos) halmaz pontosan akkor mérhető, ha a χ_H karakterisztikus függvénye Riemann-integrálható T -n. Ekkor

$$m_p(H) = \int_T \chi_H.$$

1.4. Fubini tétele

Fubini tétele az integrálás sorrendjének felcserélhetőségéről szól, a továbbiakban ezt vizsgáljuk meg 2-dimenziós esetben. A tétel általánosítható tetszőleges $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre.

1.4.1. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ és $[c, d]$ korlátos és zárt intervallumok, jelölje $[a, b] \times [c, d]$ a megfelelő téglalapot.

(A) Tegyük fel, hogy f -re teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\begin{cases} f \in R([a, b] \times [c, d]), \text{ és} \\ \forall x \in [a, b] \text{ esetén az } y \mapsto f(x, y), y \in [c, d] \text{ ún. „szekciófüggvény”} \\ \text{Riemann-integrálható } [c, d]\text{-n.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\varphi(x) := \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]$$

jelöléssel φ Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, emellett

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

(B) Tegyük fel, hogy f -re teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\begin{cases} f \in R([a, b] \times [c, d]), \text{ és} \\ \forall y \in [c, d] \text{ esetén az } x \mapsto f(x, y), x \in [a, b] \text{ ún. „szekciófüggvény”} \\ \text{Riemann-integrálható } [a, b]\text{-n.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\psi(y) := \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

jelöléssel ψ Riemann-integrálható $[c, d]$ -n, emellett

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_c^d \psi = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

1.4.1. Következmény. Ha f -re teljesülnek az (A) és (B) változat feltételei, akkor

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy,$$

vagyis az x és y változók szerinti integrálás sorrendje felcserélhető.

1.4.2. *Megjegyzés.* Ez mindig teljesül, ha f folytonos $[a, b] \times [c, d]$ -n.

A következő állítások a Fubini-tétel következményei.

1.4.3. Definíció. Legyenek $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a, b]$ folytonos függvények, $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ minden $t \in [a, b]$ esetén. *Kétdimenziós normáltartomány* alatt a következő alakú korlátos és zárt halmazokat értjük:

$$H = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \text{ } y \text{ irányú normáltartomány,}$$

vagy

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b] : \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\} \text{ } x \text{ irányú normáltartomány.}$$

1.4.1. Állítás. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ x irányú vagy y irányú normáltartomány, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\int_H f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy, \text{ ha } H \text{ } x \text{ irányú normáltartomány,}$$

$$\int_H f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx, \text{ ha } H \text{ } y \text{ irányú normáltartomány.}$$

1.4.2. Állítás (Cavalieri-elv). *Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$ 3 dimenziós mérhető halmazok, és tegyük fel, hogy minden $z \in [0, +\infty)$ esetén a z magasságban vett, xy síkkal párhuzamos síkmetszetük területe megegyezik, vagyis minden $z \in [0, +\infty)$ esetén*

$$\varphi_A(z) := m_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}),$$

$$\varphi_B(z) := m_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in B\}), \text{ és}$$

$$\varphi_A(z) = \varphi_B(z).$$

Ekkor $m_3(A) = m_3(B)$, vagyis a két halmaz mértéke is megegyezik.

2. fejezet

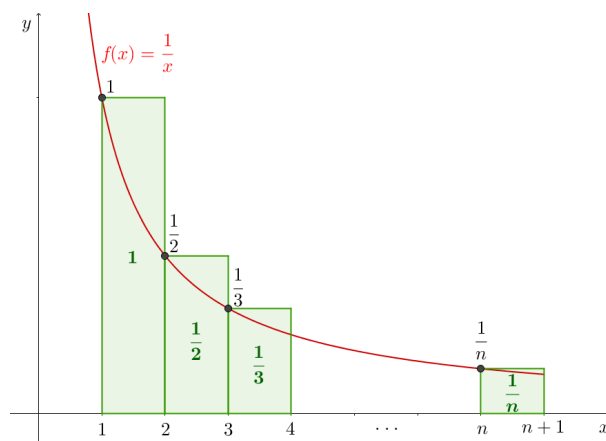
Egy- és többváltozós integrálszámítás alkalmazásai

2.1. Végtelen sorok

2.1.1. Tétel.

$$A \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ sor divergens.}$$

Bizonyítás. Tekintsük az $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt. Osszuk fel az $[1, n+1]$ intervallumot n egyenlő részre és emeljünk a szomszédos osztópontok által meghatározott szakaszok fölé téglalapokat a 2.1. ábrán látható módon.



2.1. ábra. A $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ sor n . részletösszege

Az i . téglalap magassága $\frac{1}{i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), szélessége 1 hosszú, mivel n egyenlő részre osztottuk fel az n hosszú intervallumot.

Ezért az i . téglalap területe $\frac{1}{i}$.

Az n darab téglalap területének összege (ld. 2.1. ábra), azaz a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ sor n . részletösszege, alulról becsülhető a következő módon:

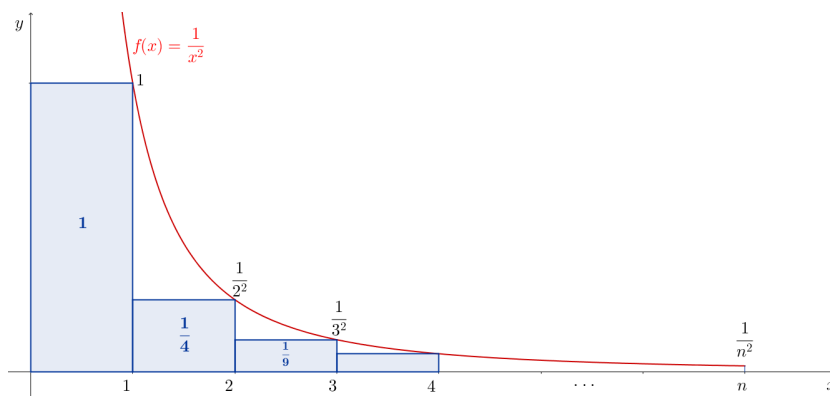
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, a részletösszegek sorozata alulról becsülhető egy ∞ -hez tartó sorozattal, ezért a sor divergens. \square

2.1.2. Tétel.

$$A \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ sor konvergens.}$$

Bizonyítás. Tekintsük az $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvényt. Osszuk fel a $[0, n]$ intervallumot n egyenlő részre és emeljünk a szomszédos osztópontok által meghatározott szakaszok fölé téglalapokat a 2.2. ábrán látható módon.



2.2. ábra. A $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sor n . részletösszege

Az i . téglalap magassága $\frac{1}{i^2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), szélessége 1 hosszú, az i . téglalap területe tehát $\frac{1}{i^2}$. Az n darab téglalap területének összege (ld. 2.2. ábra), azaz a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sor n . részletösszege, felülről becsülhető a következő módon:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 + \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^n = 1 + \frac{-1}{n} + 1 = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

A részletösszegek sorozata monoton növekvő és felső korlátja 2. Felhasználva a tételt, miszerint ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens, a sorozat konvergens. Tehát a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens. \square

2.1.3. Tétel.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz az

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$$

kettős integrált számítjuk ki kétféleképpen.

Vegyük észre, hogy $|xy| < 1$, mivel $x, y \in (0, 1)$. Felhasználva, hogy $\sum q^n = \frac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$, a következőt mondhatjuk:

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{n \geq 0} (xy)^n.$$

Ezt behelyettesítve:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n \geq 0} (xy)^n dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n \geq 0} x^n y^n dx dy = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 y^n \int_0^1 x^n dx dy = \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_0^1 x^n dx \int_0^1 y^n dy = \sum_{n \geq 0} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Másrészt az I integrál számításához a következő helyettesítést vezessük be:

$$u := \frac{x+y}{2} \text{ és } v := \frac{y-x}{2}.$$

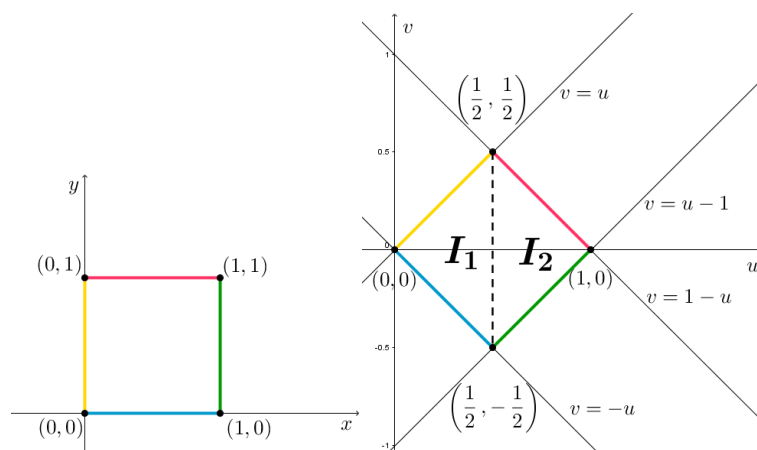
A koordináta-transzformáció Jacobi mátrixának determinánása:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

A 2.3. ábrán látható módon az integrálási tartományt két részre osztjuk, és külön-külön határozzuk meg a két tartományon az integrál értékét. Jelölje I_1 a $(0, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ háromszög-tartományon vett integrálját a függvénynek.

Az I_1 integrál kiszámítása:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-u}^u \frac{1}{1-u^2+v^2} \cdot 2 dv du = \int_0^{\frac{1}{2}} 2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \arctan \left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right]_{-u}^u du = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \left(\arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) - \arctan \left(\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right) du. \end{aligned}$$



2.3. ábra. A koordináta-transzformáció

Felhasználva, hogy az arctan függvény páratlan (azaz $\arctan(-x) = -\arctan(x)$), a fenti integrál:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot 2 \cdot \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du.$$

Vezessük be az $u = \sin \theta$ helyettesítést. Ekkor $\frac{du}{d\theta} = \cos \theta$, tehát:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cdot \arctan\left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}\right) \cdot \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \cdot \arctan\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \cdot \theta d\theta = 4 \cdot \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 = \frac{2\pi^2}{36}. \end{aligned}$$

A 2.3. ábra alapján jelölje I_2 az $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ háromszög-tartományon vett integrálját a függvénynek.

Az I_2 integrál kiszámítása:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{u-1}^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} \cdot 2 \, dv du = \int_{\frac{1}{2}}^1 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \left[\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right) \right]_{u-1}^{1-u} du = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \left(\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) - \arctan\left(\frac{u-1}{\sqrt{1-u^2}}\right) \right) du. \end{aligned}$$

Ismét kihasználva, hogy az arctan függvény páratlan:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \left(\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) + \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) \right) du = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du. \end{aligned}$$

Vezessük be az $u = \cos \theta$ helyettesítést, ekkor $\frac{du}{d\theta} = -\sin \theta$, tehát:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \cdot \arctan \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \right) \cdot (-\sin \theta) d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \cdot \arctan \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \cdot \arctan \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \cdot \frac{\theta}{2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\theta d\theta = [\theta^2]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 - 0 = \frac{4\pi^2}{36}. \end{aligned}$$

A két rész összege adja az I értékét:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2\pi^2}{36} + \frac{4\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Összevetve a két eredményt adódik:

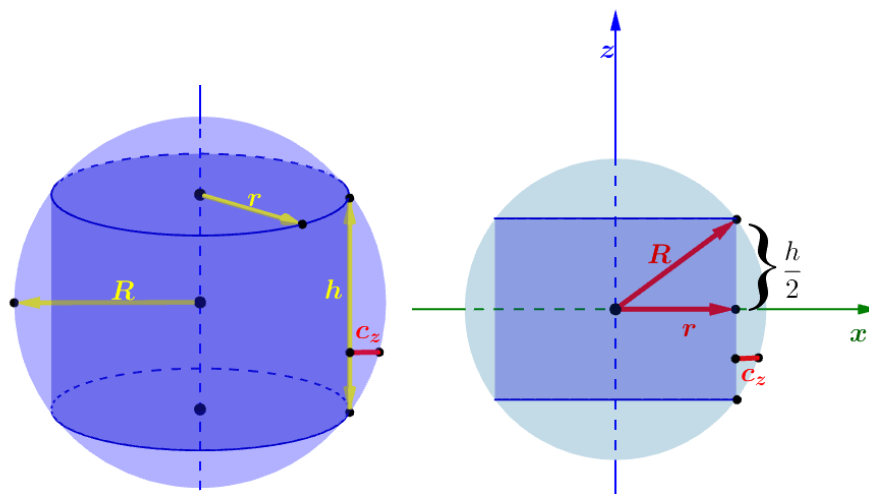
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ezzel igazoltuk a tételt. \square

2.2. A szalvétagyűrű-probléma

2.2.1. Definíció. Tegyük fel, hogy egy körhenger tengelye átmegy az R sugarú gömb középpontján, továbbá a gömb érinti a beleírt henger alap- és fedőlapját. A gömbből kivágva a hengert, valamint a henger alap- és fedőlapja által határolt gömbszeleteket, az ily módon keletkező testet nevezzük *szalvétagyűrűnek*.

2.2.2. Tétel. A szalvétagyűrű térfogata független az eredeti gömb sugarától, csak a henger magasságától függ.



2.4. ábra. A henger és a gömb helyzete, jelölések

Bizonyítás. Feltehető, hogy az R sugarú gömb középpontja az origó, valamint, hogy a henger tengelye a Descartes-féle koordináta-rendszer z tengelye. Jelölje h a gömbbe beírt henger magasságát, alapkörének sugarát pedig r . Határozzuk meg először az alapkör r sugarát h függvényében! A Pitagorasz-tételt felhasználva, ahogy a 2.4. ábrán is látható: $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$.

A $z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ magasságban vett, xy síkkal párhuzamos síkmetszeten fekvő, az r sugarú henger és R sugarú gömb által meghatározott körgyűrű vastagságát jelölje c_z . A síkmetszet területe:

$$(r + c_z)^2 \pi - r^2 \pi.$$

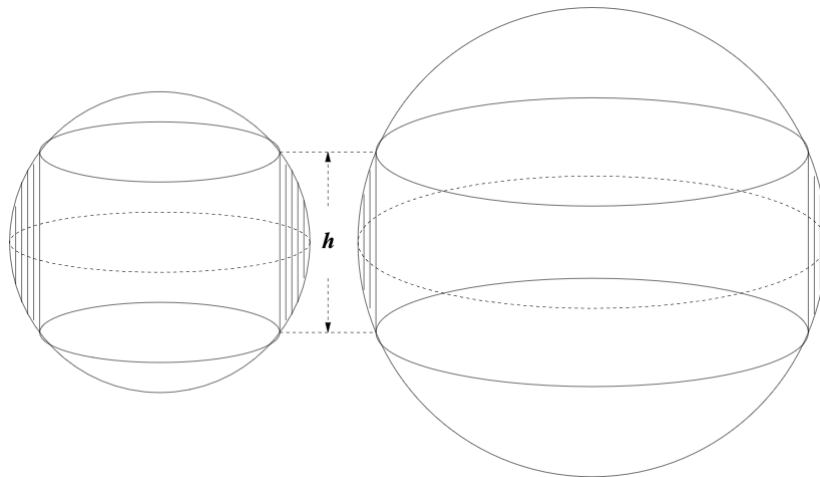
Az ábra alapján ismét a Pitagorasz-tételt felhasználva: $(r + c_z)^2 = R^2 - z^2$. Ezt a terület képletébe behelyettesítve:

$$\begin{aligned} (R^2 - z^2) \pi - r^2 \pi &= \pi(R^2 - z^2 - r^2) = \pi \left(R^2 - z^2 - R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right) = \\ &= \pi \left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right). \end{aligned}$$

A gömbből a henger, valamint a megfelelő gömbszeletek elhagyásával keletkező test térfogatát úgy kaphatjuk meg, ha az összes xy síkkal párhuzamos síkmetszet területét integráljuk a $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ intervallumon. Tehát:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) dz = \pi \cdot \left[z \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 - \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \\ &= \pi \left(\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \left(- \left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(- \frac{h}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3} \right) \right) = \\ &= \pi \left(2 \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^3 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right) = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^3 = \\ &= \pi \cdot \frac{h^3}{6}. \end{aligned}$$

A keletkező test térfogata tehát csak a henger magasságától függ, a gömb sugarától független. \square



2.5. ábra. A két szalvétagyűrű térfogata megegyezik

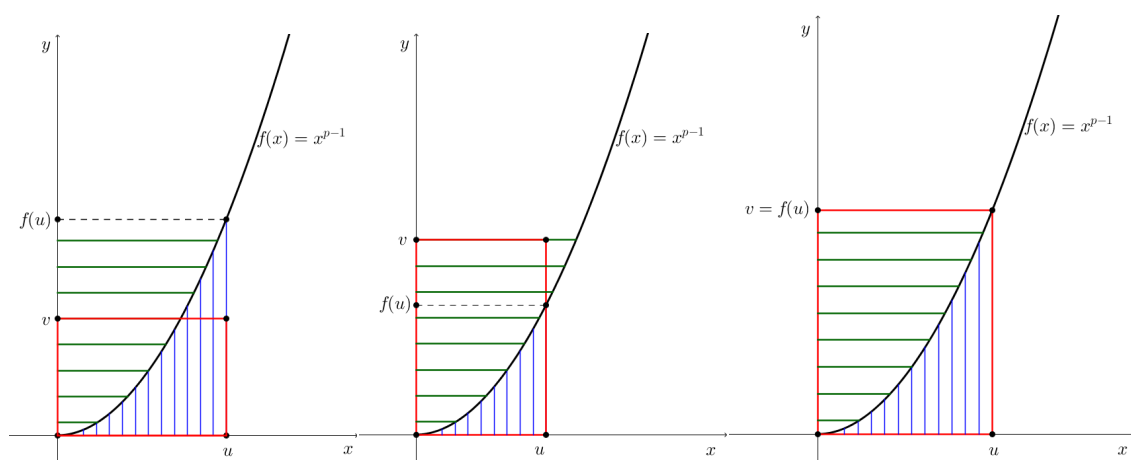
2.2.3. *Megjegyzés.* A Cavalieri-elv alapján a keletkező szalvétagyűrű minden $z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ magasságban vett, xy síkkal párhuzamos síkmetszetének területe megegyezik egy $\frac{h}{2}$ sugarú gömb megfelelő síkmetszetének területével. A keletkező test térfogata tehát egy $\frac{h}{2}$ sugarú gömb térfogatával azonos.

2.3. Young-egyenlőtlenség

2.3.1. Tétel (Young-egyenlőtlenség). Tegyük fel, hogy $u, v \geq 0$, $p, q > 0$ valós számok és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy p és q közül az egyik legalább 2. Jelölje az egyszerűség kedvéért p ezt a 2-nél nagyobb vagy egyenlő értéket. Legyen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f(x) = x^{p-1}$. Az alábbi lehetséges eseteket vizsgáljuk v és $f(u)$ kölcsönös helyzete szerint (ld. 2.6. ábra): $v < f(u)$, $f(u) < v$, $v = f(u)$.



2.6. ábra. A három eset: $v < f(u)$, $f(u) < v$, $v = f(u)$

Ahogy a 2.6. ábrán is látható, az első és második esetben az u és v oldalú téglalap területe ($u \cdot v$) kisebb, mint az f függvény alatti terület $x = 0$ és $x = u$ között és a függvény feletti terület $y = 0$ és $y = v$ között. Ezeket pedig integrálással kapjuk x és y szerint:

$$\int_0^u x^{p-1} dx = \left[\frac{x^p}{p} \right]_0^u = \frac{u^p}{p}.$$

Ahhoz, hogy az f függvény feletti területet kiszámoljuk $y = 0$ és $y = v$ között, vennünk kell f inverz függvényét: $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$.

$$\int_0^v y^{\frac{1}{p-1}} dy = \left[y^{\frac{p}{p-1}} \cdot \frac{p-1}{p} \right]_0^v = v^{\frac{p}{p-1}} \cdot \frac{p-1}{p}.$$

A tétel feltétele szerint $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ezt átalakítva: $\frac{p}{p-1} = q$ adódik, amit behelyettesítve az integrálás eredményébe:

$$v^{\frac{p}{p-1}} \cdot \frac{p-1}{p} = \frac{v^q}{q}.$$

A két terület összege tehát nagyobb, mint az u és v által meghatározott téglalap területe:

$$u \cdot v < \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

A harmadik esetben az egyenlőtlenség két oldalán álló kifejezések egyenlőek, mivel v és $f(u)$ egybeesik, tehát a két integrálással kapott terület összege megegyezik az u és v által meghatározott téglalap területével.

Ezzel igazoltuk, hogy a tétel feltételei mellett

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

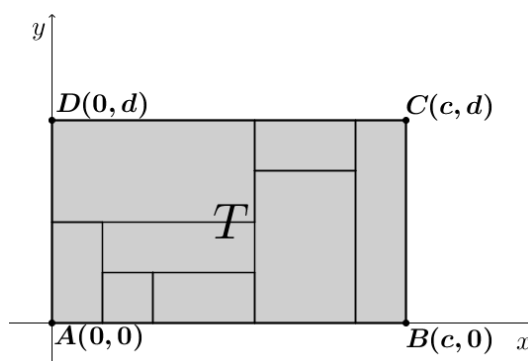
□

2.4. Téglalap lefedése

2.4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy U egy n -elemű téglalapokból álló lefedése a T téglalapnak, ha $\forall u_i \in U, i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $u_i \subseteq T, \bigcup_{i=1}^n u_i = T$ és $u_i \cap u_j = \{\emptyset, \text{vagy egy pont, vagy egy szakasz}\}$, ha $i \neq j, j \in \{1, \dots, n\}$.

2.4.2. Tétel. Legyen adott egy T téglalap, melynek U egy n -elemű lefedése. Ha $\forall u_i \in U$ résztéglalapra igaz, hogy legalább az egyik oldalának hossza egész szám, akkor az eredeti T téglalap legalább egyik oldalának hossza is egész szám.

Bizonyítás. Feltehető, hogy T az első síknegyedbe esik, oldalai párhuzamosak az x és y tengellyel, egyik csúcsa az origó, a többi: $(0, d), (c, d), (c, 0)$.



2.7. ábra. A T téglalap egy 8-elemű téglalapokból álló lefedése

A bizonyításhoz először lássuk be a következő lemmát:

2.4.1. Lemma. $\int_a^b \sin 2\pi x dx = 0$ pontosan akkor igaz, ha $a + b$ vagy $a - b$ egész szám.

Bizonyítás.

$$\int_a^b \sin 2\pi x dx = \left[\frac{-\cos 2\pi x}{2\pi} \right]_a^b = \frac{-\cos 2\pi b + \cos 2\pi a}{2\pi} = 0$$

$$-\cos 2\pi b + \cos 2\pi a = 0, \text{ azaz}$$

$$\cos 2\pi a = \cos 2\pi b$$

Ez két esetben teljesül:

1. eset

$$2\pi a = 2\pi b + 2k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}$$

$$a = b + k$$

$$a - b = k,$$

tehát $a - b$ egész szám.

2. eset

$$2\pi a = 2\pi - 2\pi b + 2k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}$$

$$a = 1 - b + k$$

$$a + b = k + 1$$

Mivel k egész, ezért $k + 1$ is az, tehát $a + b$ egész szám.

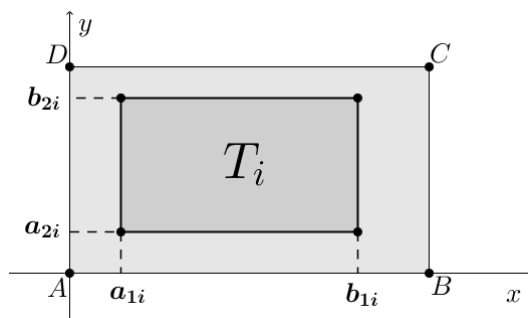
□

Ezek után tekintsük az $f(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény fenti T téglalapon vett integrálját:

$$\int_0^c \int_0^d \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) dy dx.$$

Az integrál additivitása miatt ez az integrál felbontható, mint a résztéglalapokon vett integrálok összege. Jelölje T_i az i . fedő téglalapot, melynek csúcsai:

$$(a_{1i}, a_{2i}), (b_{1i}, a_{2i}), (b_{1i}, b_{2i}), (a_{1i}, b_{2i}).$$



2.8. ábra. Az i . fedő téglalap: T_i

A T_i téglalapon vett integrálja f -nek:

$$\int_{a_{1i}}^{b_{1i}} \int_{a_{2i}}^{b_{2i}} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) dy dx = \int_{a_{1i}}^{b_{1i}} \sin 2\pi x dx \cdot \int_{a_{2i}}^{b_{2i}} \sin 2\pi y dy.$$

A feltétel szerint minden résztéglalap legalább egyik oldala egész (azaz $b_{1i} - a_{1i}$ vagy $b_{2i} - a_{2i}$ egész), ezért a 2.4.1. lemma miatt a szorzat legalább egyik tagja 0, tehát az f függvény T_i -n vett integrálja 0. Mivel az f függvény minden résztéglalapon vett integrálja 0, a T-n vett integrál pedig ezeknek az összege, adódik, hogy

$$\int_0^c \int_0^d \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) dy dx = \int_0^c \sin 2\pi x dx \cdot \int_0^d \sin 2\pi y dy = 0.$$

Ebből következik, hogy $c = 0$ vagy $d = 0$ egész szám, azaz az eredeti téglalap legalább egyik oldala egész szám. □

3. fejezet

Buffon tűproblémája

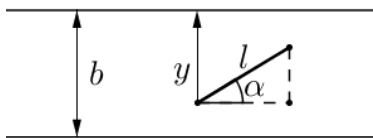
1777-ben Buffon grófja az alábbi problémát vetette fel: *Ha leejtünk egy rövid tűt egy vonalas lapra, mi a valószínűsége annak, hogy a tű keresztezni fog egy vonalat?* [4] Ebben a fejezetben ezzel az eredeti Buffon-tűproblémával, valamint ennek általánosított változatával, az ún. Laplace–Buffon problémával foglalkozunk. Általános, minden esetet taglaló bizonyítást adok a Laplace–Buffon problémára, továbbá minden esetben vizsgálom az egyes valószínűségi függvények (mint a tű hosszának függvénye) viselkedését határérték illetve monotonitás szempontjából.

3.1. Klasszikus eset

3.1.1. Rövid tű

3.1.1. Tétel. *Ha egy rövid, l hosszú tűt leejtünk egy egyenlő, $b \geq l$ távolságú közzel vonalazott papírlapra, akkor annak a valószínűsége, hogy a tű keresztezni fogja valamelyik vonalat*

$$p = \frac{2l}{\pi b}.$$

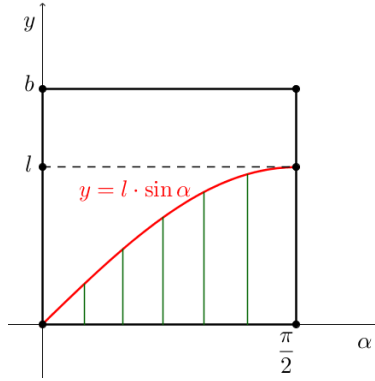


3.1. ábra. A klasszikus Buffon tűprobléma

Bizonyítás. Feltehető, hogy a vonalak vízszintesen helyezkednek el. Vizsgáljuk ekkor a tű vízszintessel bezárt szögét, jelöljük ezt α -val. Továbbá feltehető, hogy $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, mivel a szimmetria miatt az $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ és $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ esetek valószínűsége megegyezik.

Jelölje y a 3.1. ábra alapján az adott sávba eső tű, és a felső rácsvonal közti legnagyobb távolságot ($y \in [0, b]$). Ekkor a tű elhelyezkedése az adott sávban leírható, mint α és y függvénye, azaz tetszőleges esetben a tű pozíciója megfeleltethető egy (α, y) pontpárnak, ahol $(\alpha, y) \in ([0, \frac{\pi}{2}] \times [0, b])$.

A tű azokban az esetekben metszi a felső rácsvonalat, amikor $y \leq l \cdot \sin \alpha$. Az (α, y) síkban ábrázolva a keresett tartományt:



3.2. ábra. A rövid tű metszését reprezentáló tartomány

A valószínűség geometriai kiszámításához a területek arányát használjuk. Ezek Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt alkotnak az alábbi módon: jelölje (Ω, \mathcal{A}, P) hármas a valószínűségi mezőt és legyen $A \in \mathcal{A}$ esemény. Ekkor

$$P(A) = \frac{t(A)}{t(\Omega)}.$$

Annak a valószínűségét tehát, hogy a tű elmetszi az adott rácsvonalat, a következőképp határozhatjuk meg: annak a síkidomnak a területét, melyet az $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, és $y = l \cdot \sin \alpha$ határol, elosztjuk a $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, b]$ téglalap területével. A keresett tartomány területét a következő integrálással kapjuk:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{l \cdot \sin \alpha} 1 dy d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cdot \sin \alpha d\alpha = [l \cdot (-\cos \alpha)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-l) = l.$$

Ezek alapján tehát a keresett valószínűség:

$$p = \frac{l}{b \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{b}.$$

□

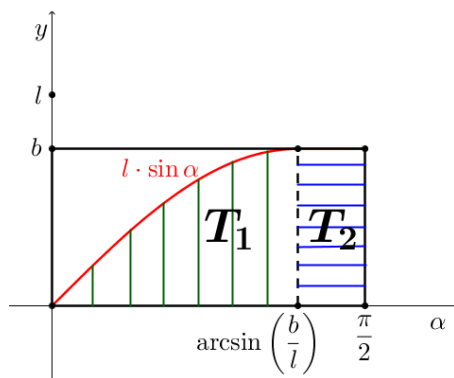
3.1.2. Hosszú tű

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha egy hosszú (a vonalak b távolságánál nagyobb hosszúságú) tűt ejtünk a vonalas lapra!

3.1.2. Tétel. *Ha egy hosszú, l hosszúságú tűt leejtünk egy egyenlő, $b \leq l$ távolságú közőkkel vonalazott papírlapra, akkor annak a valószínűsége, hogy a tű keresztezni fogja valamelyik vonalat*

$$p = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right) - \arcsin \frac{b}{l} \right). \quad (3.1)$$

Bizonyítás. Ha α a tű vízszintessel bezárt szöge, akkor az előző bizonyításhoz hasonlóan a szimmetria miatt elég a $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ esetet vizsgálnunk. Biztosan metsz a tű vonalat, ha $b \leq l \cdot \sin \alpha$, azaz $\arcsin \left(\frac{b}{l} \right) \leq \alpha$. Kisebb α szögek esetén metszésről továbbra is akkor beszélhetünk, ha $y \leq l \cdot \sin \alpha$ (ld. 3.3. ábra).



3.3. ábra. A hosszú tű metszését reprezentáló tartomány

Az összes lehetőség száma a jelölt $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, b]$ téglalap területe, a kedvező esetek száma pedig az ábrázolt tartomány területe, ekkor metszi a tű a vonalat. Ezt az ábrán látható módon két részre bontva integráljuk:

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^{\arcsin(\frac{b}{l})} \int_0^{l \cdot \sin \alpha} 1 dy d\alpha = \int_0^{\arcsin(\frac{b}{l})} l \cdot \sin \alpha d\alpha = [l \cdot (-\cos \alpha)]_0^{\arcsin(\frac{b}{l})} = \\ &= l \left(-\cos \left(\arcsin \left(\frac{b}{l} \right) \right) + 1 \right) = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right), \\ T_2 &= b \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{l} \right). \end{aligned}$$

A keresett valószínűség tehát a következő:

$$p = \frac{l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right) + b \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{l} \right)}{b \cdot \frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right) - \arcsin \frac{b}{l} \right).$$

Ezzel igazoltuk a tételt. \square

3.1.3. *Megjegyzés.* A (3.1) képlettel definiált valószínűség 1-hez tart, ha $l \rightarrow \infty$, azaz rögzített rácstávolság mellett a tű hosszát folyamatosan növelve a metszés valószínűsége 1-hez tart.

Vizsgáljuk meg a zárójelben lévő kifejezést!

$$\frac{l}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right) = \frac{\left(\frac{l}{b} - \sqrt{\frac{l^2}{b^2} - 1} \right) \cdot \left(\frac{l}{b} + \sqrt{\frac{l^2}{b^2} - 1} \right)}{\frac{l}{b} + \sqrt{\frac{l^2}{b^2} - 1}} = \frac{1}{\frac{l}{b} + \sqrt{\frac{l^2}{b^2} - 1}}.$$

Mivel $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{l}{b} + \sqrt{\frac{l^2}{b^2} - 1}} = 0$ és $\lim_{l \rightarrow \infty} \arcsin \frac{b}{l} = 0$, ezért

$$\lim_{l \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right) - \arcsin \frac{b}{l} \right) = 1.$$

3.1.4. *Megjegyzés.* A (3.1) képlettel definiált valószínűség l -ben szigorúan monoton növekvő.

Ennek bizonyításához felhasználjuk, hogy ha a függvény folytonosan differenciálható és deriváltja mindenhol pozitív, akkor a függvény szigorúan monoton nő.

$$\left(\frac{l}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right) - \arcsin \frac{b}{l} \right)' = \frac{l\sqrt{l^2 - b^2} - l^2 + b^2}{lb\sqrt{l^2 - b^2}} > 0.$$

Mivel a nevező $l > b > 0$ miatt pozitív, ezért a tört akkor és csak akkor pozitív, ha a számláló is pozitív, azaz:

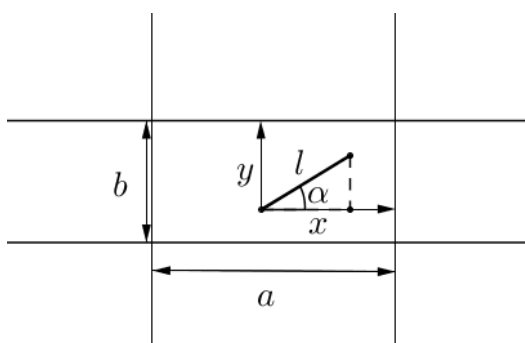
$$l^2 - b^2 < l\sqrt{l^2 - b^2} \text{ vagyis } b^2 < l^2.$$

Ez pedig teljesül, mivel $0 < b < l$.

3.2. Laplace-féle speciális eset

A továbbiakban a Buffon-tűprobléma egyik speciális esetét vizsgáljuk, amely Laplace nevéhez fűződik: *Ha leejtünk egy tűt egy téglalapokkal lefedett lapra, mi a valószínűsége annak, hogy a tű keresztezni fog legalább egy vonalat?* Laplace esete tehát annyiban különbözik a klasszikustól, hogy nem csak vízszintesen, hanem függőlegesen is vonalazott a lap, amire a tűt ejtjük.

Legyen a klasszikus esethez hasonlóan l a tű hossza, b a vízszintes vonalak távolsága, a függőleges vonalak távolságát pedig jelöljük a -val. Jelölje y a 3.4. ábra alapján az adott sávba eső tű, és a felső rácsvonal közti legnagyobb távolságot, ($y \in [0, b]$), x pedig jelölje az adott sávba eső tű és a jobboldali rácsvonal közti legnagyobb távolságot ($x \in [0, a]$).



3.4. ábra. Laplace-Buffon tűprobléma

3.2.1. Rövid tű

Vizsgáljuk először a rövid tű esetét, mikor $l < a$ és $l < b$. Külön-külön meghatározzuk, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a tű vízszintes vonalat, függőleges vonalat, vagy vízszintes és függőleges vonalat is metsz.

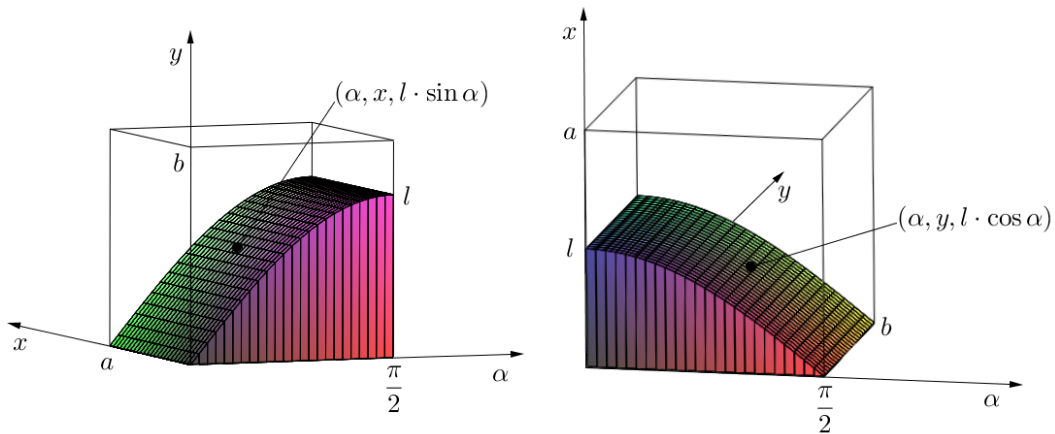
A valószínűség geometriai kiszámításához a térfogatok arányát használjuk. Ezek Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt alkotnak az alábbi módon: jelölje (Ω, \mathcal{A}, P) hármas a valószínűségi mezőt és legyen $A \in \mathcal{A}$ esemény. Ekkor

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}.$$

Vízszintes metszés

Hasonló a klasszikus esethez rövid tűre, mivel az $l < b$ és az a paramétertől független a vízszintes metszés. Tehát a vízszintes metszés valószínűsége:

$$P_v = \frac{2l}{\pi b}.$$



3.5. ábra. Vízszintes, ill. függőleges metszés tartománya

Függőleges metszés

Függőleges vonalat akkor metsz a tű, ha $x \leq l \cdot \cos \alpha$. A kedvező esetek száma tehát a 3.5. ábrán látható második hasáb térfogata, aminek alapja az a síkidom, amit az $\alpha = 0$, $x = 0$ egyenesek, valamint $x = l \cdot \cos \alpha$ görbe határol:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{l \cdot \cos \alpha} 1 dx d\alpha = \int_0^{\pi/2} l \cdot \cos \alpha d\alpha = [l \cdot \sin \alpha]_0^{\pi/2} = l.$$

A hasáb alapterülete tehát l , a testmagassága pedig b , így a térfogata $l \cdot b$. Az összes lehetőség száma, a téglatest térfogata $a \cdot b \cdot \frac{\pi}{2}$, tehát annak a valószínűsége, hogy a tű függőleges vonalat metsz:

$$P_f = \frac{l \cdot b}{a \cdot b \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{a}.$$

Dupla metszés

Mivel kétszer számoltuk azt a lehetőséget, mikor vízszintes és függőleges vonalat is metszünk (egyszer a vízszintesnél, egyszer a függőlegesnél), ezért ennek a dupla metszésnek a valószínűségét ki kell vonnunk a keresett valószínűségből. Dupla metszés azokban az esetekben fordulhat elő, amikor $x \leq l \cdot \cos \alpha$ és $y \leq l \cdot \sin \alpha$, azaz a keresett duplametszetnek megfelelő pontok alkotta test térfogata a $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, a] \times [0, b]$ paramétertérben:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{l \cdot \sin \alpha} \int_0^{l \cdot \cos \alpha} 1 dx dy d\alpha = \int_0^{\pi/2} l^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha d\alpha = l^2 \cdot \left[\frac{\sin^2 \alpha}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{l^2}{2}.$$

Annak a valószínűsége tehát, hogy függőleges és vízszintes vonalat is metsz a tű:

$$P_d = \frac{\frac{l^2}{2}}{a \cdot b \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{l^2}{a \cdot b \cdot \pi}.$$

A keresett valószínűség tehát:

$$p = P_v + P_f - P_d = \frac{2l}{a\pi} + \frac{2l}{b\pi} - \frac{l^2}{ab\pi} = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}.$$

3.2.1. *Megjegyzés.* Ha $a \rightarrow \infty$, azaz a függőleges rácok távolságát végtelen nagyra növelve, az eredeti Buffon túproblémát kapjuk vissza:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab} = \frac{2l}{\pi b} + 0 - 0 = \frac{2l}{\pi b}.$$

3.2.2. Hosszú tű

I. eset ($b < l < a$)

Vízszintes metszés Hasonló a klasszikus esethez hosszú tűre, mivel $b < l$ és a vízszintes metszés a függőleges rácok a távolságától független. Tehát a vízszintes vonal metszésének valószínűsége:

$$P_v = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right) - \arcsin \frac{b}{l} \right).$$

Függőleges metszés Mivel $l < a$, b -től pedig független a függőleges vonal metszésének a valószínűsége, ezért a Laplace-féle speciális esethez hasonlóan számolható, azaz:

$$P_f = \frac{2l}{a\pi}.$$

Dupla metszés Dupla metszésről akkor beszélünk, ha $x \leq l \cdot \cos \alpha$ és $y \leq l \cdot \sin \alpha$. Mivel $b < l$, $\arcsin(\frac{b}{l})$ -nél nagyobb szögek esetén már biztosan metsz a tű vízszintes vonalat. Ezért tehát a $[0, \arcsin(\frac{b}{l})]$ intervallumon és az $[\arcsin(\frac{b}{l}), \frac{\pi}{2}]$ intervallumon külön számoljuk a kedvező eseteknek megfelelő tesztek térfogatát (V_1 és V_2).

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^{\arcsin(\frac{b}{l})} \int_0^{l \cdot \cos \alpha} \int_0^{l \cdot \sin \alpha} 1 dy dx d\alpha = \int_0^{\arcsin(\frac{b}{l})} l^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha d\alpha = \\ &= l^2 \cdot \left[\frac{\sin^2 \alpha}{2} \right]_0^{\arcsin(\frac{b}{l})} = \frac{b^2}{2}, \\ V_2 &= \int_{\arcsin(\frac{b}{l})}^{\pi/2} \int_0^{l \cdot \cos \alpha} \int_0^b 1 dy dx d\alpha = l \cdot b \cdot [\sin \alpha]_{\arcsin(\frac{b}{l})}^{\pi/2} = lb - b^2. \end{aligned}$$

A két térfogat összege adja a dupla metszésnek megfelelő esetek számát, mikor függőleges és vízszintes vonalat metsz a tű. Ezt elosztva az összes lehetséges eset számának megfelelő téglatest térfogatával, megkapjuk a dupla metszés P_d valószínűségét:

$$P_d = \frac{\frac{2lb-b^2}{2}}{\frac{ab\pi}{2}} = \frac{2l-b}{a\pi}.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy legalább egy vonalat metszünk azzal a tűvel, melynek hossza b -nél nagyobb, de a -nál kisebb:

$$p = P_v + P_f - P_d = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right) - \arcsin \frac{b}{l} \right) + \frac{2l}{a\pi} - \frac{2l-b}{a\pi} =$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right) - \arcsin \frac{b}{l} \right) + \frac{b}{a\pi} = P_v + \frac{b}{a\pi}.$$

3.2.2. *Megjegyzés.* Amennyiben $a \rightarrow \infty$, azaz a függőleges rácsok távolságát végtelen nagyra növelve, a klasszikus Buffon-problémát kapjuk hosszú tűre:

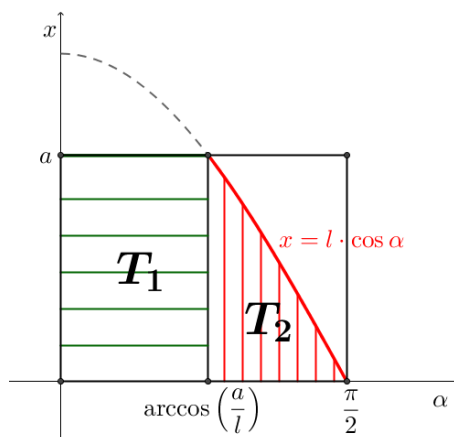
$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(P_v + \frac{b}{a\pi} \right) = P_v + 0 = P_v = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right) - \arcsin \frac{b}{l} \right).$$

II. eset ($a < l < b$)

Vízszintes metszés Hasonló a klasszikus esethez rövid tűre, mivel $l < b$, és az a paramétertől független a vízszintes metszés. Tehát a vízszintes metszés valószínűsége:

$$P_v = \frac{2l}{\pi b}.$$

Függőleges metszés Függőleges metszésről abban az esetben beszélünk, ha $x \leq l \cdot \cos \alpha$. Mivel $a < l$, ezért $\arccos\left(\frac{a}{l}\right)$ -nél kisebb szögek esetén biztosan lesz metszés, így az integrálást ismét két részre bontjuk, T_1 -re és T_2 -re (ld. 3.6. ábra).



3.6. ábra. Függőleges metszés

$$\begin{aligned} T_1 &= a \cdot \arccos\left(\frac{a}{l}\right), \\ T_2 &= \int_{\arccos\left(\frac{a}{l}\right)}^{\pi/2} \int_0^{l \cdot \cos \alpha} 1 dx d\alpha = [l \cdot \sin \alpha]_{\arccos\left(\frac{a}{l}\right)}^{\pi/2} = l - l \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{a}{l}\right)\right) = \\ &= l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right). \end{aligned}$$

Függőleges vonal metszésének a valószínűsége tehát:

$$P_f = \frac{b \left(a \cdot \arccos \frac{a}{l} + l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) \right)}{ab \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) + a \cdot \arccos \frac{a}{l} \right).$$

Dupla metszés Dupla metszésről akkor beszélünk, ha $x \leq l \cdot \cos \alpha$ és $y \leq l \cdot \sin \alpha$. Mivel $a < l$, $\arccos\left(\frac{a}{l}\right)$ -nél kisebb szögek esetén már biztosan metsz a tű függőleges vonalat. Ezért tehát a $[0, \arccos\left(\frac{a}{l}\right)]$ intervallumon és az $[\arccos\left(\frac{a}{l}\right), \frac{\pi}{2}]$ intervallumon külön számoljuk a kedvező eseteknek megfelelő testek térfogatát (V_1 és V_2).

$$V_1 = \int_0^{\arccos\left(\frac{a}{l}\right)} \int_0^a \int_0^{l \cdot \sin \alpha} 1 dy dx d\alpha = al [-\cos \alpha]_0^{\arccos\left(\frac{a}{l}\right)} = a \cdot l - a^2,$$

$$V_2 = \int_{\arccos\left(\frac{a}{l}\right)}^{\pi/2} \int_0^{l \cdot \cos \alpha} \int_0^{l \cdot \sin \alpha} 1 dy dx d\alpha = l^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2\left(\arccos\left(\frac{a}{l}\right)\right)}{2} \right).$$

Mivel $l > a$, ezért

$$\sin^2\left(\arccos\left(\frac{a}{l}\right)\right) = \left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}}\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{l^2}.$$

Ezt behelyettesítve V_2 -be, a következőt kapjuk:

$$V_2 = \frac{a^2}{2}.$$

A dupla metszés valószínűsége tehát:

$$P_d = \frac{V_1 + V_2}{ab\frac{\pi}{2}} = \frac{al - a^2 + \frac{a^2}{2}}{ab\frac{\pi}{2}} = \frac{2l - a}{b\pi}.$$

Vagyis a keresett valószínűség:

$$p = P_v + P_f - P_d = \frac{2l}{\pi b} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) + a \cdot \arccos \frac{a}{l} \right) - \frac{2l - a}{b\pi} =$$

$$\frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) + a \cdot \arccos \frac{a}{l} \right) + \frac{a}{b\pi} = P_f + \frac{a}{b\pi}.$$

3.2.3. *Megjegyzés.* Amennyiben $b \rightarrow \infty$, vagyis a vízszintes rácok távolságát végtelen nagyra növelve, $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{a}{\pi b} = 0$, így $\lim_{b \rightarrow \infty} p = P_f$, vagyis a klasszikus eset elforgatottját kapjuk.

3.2.3. Extra hosszú tú

Tegyük fel, hogy a tú hossza ebben az esetben mind a vízszintes rácsvonalak b , mind a függőleges rácsvonalak a távolságánál nagyobb ($a < l$ és $b < l$).

Az esetszétválasztások helyett most annak a valószínűségét számoljuk ki, hogy a tú nem metsz rácsvonalat. Ezt követően felhasználjuk a valószínűségszámításból ismert összefüggést, miszerint $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, azaz egy esemény valószínűségét megkaphatjuk úgy is, hogy 1-ből kivonjuk a negáltja valószínűségét.

Mivel $\sqrt{a^2 + b^2} \leq l$ esetén (azaz ha a tú egy rácsstéglalap átlójánál is hosszabb) biztosan lesz metszés, ezért vizsgáljuk az $l \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ esetet. Akkor nem metsz a tú vonalat, ha $l \cdot \cos \alpha < x < a$ és $l \cdot \sin \alpha < y < b$ teljesül. Mivel $a < l$, $\arccos \frac{a}{l}$ -nél kisebb szögek esetén biztosan metsz függőleges vonalat a tú, $b < l$ miatt pedig $\arcsin \frac{b}{l}$ -nél nagyobb szögek esetén vízszintes vonalat metsz. Ezért tehát az $[\arccos \frac{a}{l}, \arcsin \frac{b}{l}]$ intervallumon számoljuk annak az esetnek megfelelő test térfogatát, amikor se függőleges, se vízszintes rácsvonalat nem metsz a tú:

$$\begin{aligned} \int_{\arccos \frac{a}{l}}^{\arcsin \frac{b}{l}} \int_{l \cdot \sin \alpha}^b \int_{l \cdot \cos \alpha}^a 1 dx dy d\alpha &= \int_{\arccos \frac{a}{l}}^{\arcsin \frac{b}{l}} (a - l \cdot \cos \alpha) \cdot (b - l \cdot \sin \alpha) d\alpha = \\ &= \left[ab\alpha + al \cos \alpha - bl \sin \alpha + \frac{l^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2} \right]_{\arccos \frac{a}{l}}^{\arcsin \frac{b}{l}} = \\ &= ab \left(\arcsin \frac{b}{l} - \arccos \frac{a}{l} \right) + l \left(a \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} + b \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) - \left(\frac{l^2 + a^2 + b^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy az $l < \sqrt{a^2 + b^2}$ hosszú tú nem metsz rácsvonalat:

$$\bar{p} = \frac{ab \left(\arcsin \frac{b}{l} - \arccos \frac{a}{l} \right) + l \left(a \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} + b \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) - \left(\frac{l^2 + a^2 + b^2}{2} \right)}{a \cdot b \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

Ezt 1-ből kivonva megkapjuk az eredeti kérdésre a választ, vagyis annak a valószínűsége, hogy a tú metszeni fog legalább egy vonalat:

$$p = 1 - \frac{ab \left(\arcsin \frac{b}{l} - \arccos \frac{a}{l} \right) + l \left(a \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} + b \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) - \left(\frac{l^2 + a^2 + b^2}{2} \right)}{a \cdot b \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

Vizsgáljuk az $l = \sqrt{a^2 + b^2}$ esetet!

Azt az eredményt kell kapnunk, hogy a keresett valószínűség 1-gyel egyenlő, hiszen az átló hosszúságú tú biztosan metsz rácsvonalat.

$$\begin{aligned}
p &= 1 - \frac{ab \left(\arcsin \frac{b}{l} - \arccos \frac{a}{l} \right) + l \left(a \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} + b \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) - \left(\frac{l^2 + a^2 + b^2}{2} \right)}{a \cdot b \cdot \frac{\pi}{2}} = \\
&= 1 - \left(\frac{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{a \cdot \sqrt{a^2} + b \cdot \sqrt{b^2} - (a^2 + b^2)}{a \cdot b \cdot \frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= 1 - \frac{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{\pi}{2}} - \frac{a^2 + b^2 - a^2 - b^2}{ab \frac{\pi}{2}} = \\
&= 1 - \frac{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Felhasználva az $\arccos(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ összefüggést,

$$\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ezt behelyettesítve a $p = 1 - \frac{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{\pi}{2}}$ formulába:

$$\frac{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Tehát a metszés valószínűsége 1. Ezt az eredményt vártuk, mivel az átló hosszúságú tű esetén a rácsvonal metszése biztos esemény. Nyilvánvaló, hogy ennél hosszabb tű is biztosan metszeni fog rácsvonalat. A keresett valószínűség tehát az átlónál rövidebb tű esetén nem triviális, ekkor az eredmény

$$p = 1 - \frac{ab \left(\arcsin \frac{b}{l} - \arccos \frac{a}{l} \right) + l \left(a \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} + b \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) - \left(\frac{l^2 + a^2 + b^2}{2} \right)}{a \cdot b \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

Összefoglalás

Dolgozatomban igyekeztem minél sokszínűbb felhasználási területét megmutatni az integrálszámításnak. Geometriai, algebrai, és valószínűség számítási feladatok során láthattuk, hogy mennyire különböző problémák megoldásánál alkalmazható.

Buffon tűproblémája talán a legkiemelkedőbb, amiről először a *Bizonyítások a Könyvből* [4] című könyvben olvastam és nagyon megtetszett a gondolat, hogy integrálszámítással oldjuk meg az egyébként nem nehéz valószínűség számítási feladatot. A könyvben csak a klasszikus eset megoldása szerepelt (amit máshogy bizonyítottam végül), viszont ezután elmélyedtem a tűprobléma Laplace-féle változatában, amiről csak angol nyelvű irodalmat találtam, abban is csak a rövid tű esetét vizsgálták. Ezért kidolgoztam a hosszú tű három különböző esetét is.

Az ábrákat a GeoGebra és Maple programokkal készítettem, kivéve a 2.5. ábrát, ez a Wikipédiáról van (https://en.wikipedia.org/wiki/Napkin_ring_problem).

Irodalomjegyzék

- [1] Sikolya Eszter: *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet a BME Tankönyvtárában, 2013. (<http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/161.pdf>, letöltés ideje: 2015.05.31., 16:21)
- [2] Laczkovics Miklós, T.Sós Vera: *Valós analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2012.
- [3] Laczkovics Miklós, T.Sós Vera: *Valós analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2013.
- [4] Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Bizonyítások a Könyvből*, Typotex, Budapest, 2013.
- [5] Keith Devlin: *The Napkin Ring Problem*, Mathematical Association of America, 2008. (<http://www.webcitation.org/60rIio0jC>)
- [6] Stan Wagon: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 94, No. 7 (Aug. - Sep., 1987), pp. 601-602.
- [7] Barry J. Arnow: *The College Mathematics Journal*, Vol. 25, No. 1. (Jan., 1994), pp. 40-43.