Geometriai egyenlőtlenségek a gömbfelületen

Szakdolgozat

Készítette: RÁCZ KRISZTINA

Matematika BSc Tanári szakirány

Témavezető: KERTÉSZ GÁBOR

Egyetemi adjunktus

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Geometriai Tanszék

Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

1. Fejezet

Bevezetés

A dolgozatom különböző geometriai egyenlőtlenségek gömbfelületen való vizsgálatáról szól; gömbháromszögek tulajdonságaiból kiindulva, felvetve az általánosítás lehetőségét bármilyen n-szög, vagy akár gömbi konvex lemez esetére.

Azért ezt a témakört választottam, mert a geometria mindig is közel áll hozzám, azonban gömbi geometriával eddigi tanulmányaim során csak érintőlegesen találkoztam, így sok újdonságot, felfedeznivalót találtam benne. Igyekeztem a síkon közismert egyenlőtlenség és szélsőérték problémákat újraértelmezni gömbfelületen, vizsgálva a síkkal való kapcsolatot, illetve különbségeket. Azt gondolom, hogy ez a másfajta megközelítés segíthet az eddig tanultaktól elvonatkoztatni, újfajta gondolkodásmódot kialakítani, és mégis, éppen a több különböző szemlélet által mélyebben megérteni a korábban tanultakat is. Tanár szakosként próbáltam egyes feladatokat és bizonyításokat többféleképpen megközelíteni, az elemi geometriai módszerektől kezdve az analitikus szélsőérték vizsgálatig.

A dolgozat a gömbháromszögek tulajdonságainak áttekintésével kezdődik, alapfogalmak és állítások kimondásával, majd a síkon is ismeretes egyszerű egyenlőtlenségekkel (mint például a háromszög egyenlőtlenség). Ezután is a síkon ismert feladatok következnek, azonban az ott megszokottól különböző eredményt adnak (például a Lexell-körök fogalmának megismerése, a gömbháromszög oldalának és középvonalának kapcsolata).

A harmadik fejezetben tovább haladunk a gömbi konvex sokszögek felé, kezdve a legtöbbször csak említés szintjén előkerülő Hajós-lemmával, majd a síkon is ismert izoperimetrikus egyenlőtlenség gömbi megfelelőjével, és annak bizonyításával, amihez tisztáznunk kell néhány ismert fogalomnak a gömbi megfelelőjét (konvexitás, dualitás, paralleltartományok).

Végül gömbháromszögre vonatkozó szélsőérték feladatok és megoldásaik szerepelnek (maximális terület vagy minimális kerület kiszámítása). Ahol lehetséges, a síkkal való kapcsolatra is rámutatva.

Szeretném megköszönni Kertész Gábor tanár úrnak a dolgozat felépítésében való segítséget, a segédanyagokat, és a rendszeres konzultációt.

2. Fejezet

Gömbháromszögek esete

2.1. Alapfogalmak és összefüggések

A dolgozatban szereplő állításokat, tételeket és bizonyításokat, illetve feladatmegoldásokat mind egységsugarú gömbön nézzük, azonban ezek természetesen bármilyen nem egységsugarú gömbön is érvényben maradnak, a bennük szereplő távolságokat megfelelő λ skaláris szorzóval ellátva.

Gömbháromszög

Tudjuk, hogy a gömbi egyeneseket két rajtuk lévő pontjuk két darab véges hosszú ívre osztja fel, ezek közül azonban csak a rövidebbet nevezzük szakasznak. Ez alapján a síkkal ellentétben 3 pont között összesen $2^3 = 8$ darab véges hosszú ív fut, gömbháromszögnek viszont csak a köztük lévő szakaszok által meghatározott sokszöget nevezzük, így ez gömbön is egyértelmű. Ilyen (konvex) háromszögeknél az oldalakra és szögekre igaz, hogy:

$$0 < a, b, c, \alpha, \beta, \gamma < \pi$$

Az oldalak összegére az alábbi egyenlőtlenség teljesül, ami bármilyen konvex n-szög esetén is érvényes marad:

$$0 < a + b + c < 2\pi$$

Girard-tétele

A gömbháromszögek területe az alábbi képlet alapján számolható ki:

$$T = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Később látni fogjuk, hogy konvexnek azokat a sokszögeket nevezzük, amiknek a területe félgömbnél, azaz 2π-nél kisebb. Ez alapján, illetve a területképletből a szögek összegére teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$$

A területképlet általánosítása bármilyen konvex n-szög esetére:

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - (n - 2)\pi$$

Polárháromszög

A gömbháromszög polárháromszögének csúcsai úgy kaphatóak meg, hogy az eredeti háromszög oldalaihoz tartozó főkörök póluspontjai közül mindig azt vesszük, ami azonos félgömbön van a háromszög harmadik csúcsával. (Tehát például a polárháromszög A' csúcsa az eredeti háromszög BC ívhez tartozó főkörének az A csúccsal egy félgömbre eső pólusa.) A polárháromszög polárháromszöge az eredeti gömbháromszög.

Összefüggések a gömbháromszög és polárháromszöge között (legyenek ezek oldalai és szögei rendre: a, b, c, α, β, γ és a', b', c', α', β', γ', illetve területük t és t'):

$$a' = \pi - \alpha \qquad \alpha' = \pi - a$$
$$b' = \pi - \beta \qquad \beta' = \pi - b$$
$$c' = \pi - \gamma \qquad \gamma' = \pi - c$$
$$t = \alpha + \beta + \gamma - \pi \qquad t' = (\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) - \pi$$

Trigonometriai összefüggések a gömbháromszögben

Gömbi szinusz-tétel: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

Koszinusz-tétel szögekre: $\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c$

Koszinusz-tétel oldalakra: $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$

Speciális eset derékszögű háromszögre: $\cos c = \cos a \cdot \cos b$

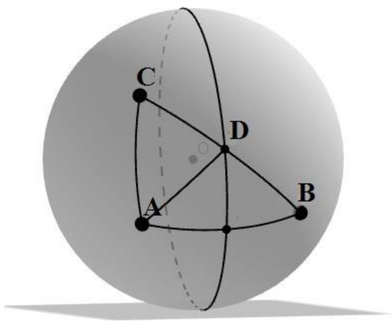
Térbeli és gömbi távolság kapcsolata

Ha a B és C pont közötti gömbi távolságot a-val jelöljük, akkor a köztük lévő a^* térbeli távolság a következőképpen számolható ki:

$$a^* = 2 \cdot \sin\left(\frac{a}{2}\right)$$

2.2. Egyenlőtlenségek gömbháromszögekben

2.2.1. Felezőmerőleges-tétel



1. ábra

Legyen adott két pont a gömbön (A és B), és az ezeket összekötő gömbi szakasz (főkörív).

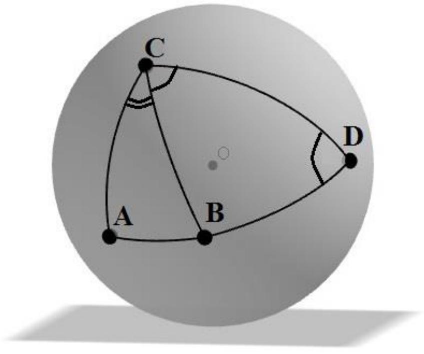
Állítás: Ezt a főkörívet merőlegesen felező főkör pontjai az A és B pontoktól egyenlő gömbi távolságra vannak. A felező főkör által meghatározott két félgömb belső pontjai az AB főkörívnek attól a végpontjától vannak kisebb gömbi távolságra, amelyek ugyanahhoz a félgömbhöz tartoznak. (1. ábra)

Bizonyítás térben: Kössük össze az A és B pontokat egy egyenes szakasszal, és vegyük ennek a felezőmerőleges síkját. Tegyük fel, hogy a C pont nincs rajta ezen a síkon, mert ha rajta lenne, egyenlő lenne az A-tól és B-től vett távolság. C legyen az A-t tartalmazó féltér egy belső pontja, ekkor CB metszi a felezőmerőleges síkot egy D pontban. Mivel D a felezőmerőlegesen van, az ABD háromszög egyenlőszárú, vagyis: DAB ∢ = DBA ∢. Mivel az AD szakasz a CAB ∢ belsejében halad, DAB ∢ < CAB ∢. Ezek szerint az ABC háromszögben CBA ∢ < CAB ∢, és akkor a szemközti oldalakra CA < CB.
A húrok (térben vett távolságok), és a hozzájuk tartozó körívek (gömbi távolságok) kapcsolatára hivatkozva gömbön is érvényes lesz a kimondott tétel.

2.2.2. Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van

Állítás: Egy gömbháromszögben két oldal, és az ezekkel szemközti szögek vagy páronként egyenlők, vagy nem, és ekkor a nagyobb oldallal szemben van a nagyobb szög.
Bizonyítás: Tekintsük az ABC gömbháromszög A és B csúcsainál elhelyezkedő szögeit, és az azokkal szemközti oldalait. (1. ábra) Ha C csúcs az AB oldalt merőlegesen felező főkörön van, akkor a főkör síkjára vonatkozó szimmetriából következik, hogy a vizsgált szögek és oldalak egyenlők. Ha a C pont az említett főkör által határolt egyik, például az A pontot tartalmazó félgömb belsejében van, akkor az előző tétel szerint BC > AC, tehát a CAB ∢ > CBA ∢ egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk. Mivel C az A-t tartalmazó félgömbön van, a BC oldal az AB gömbi szakasz felezőmerőleges főkörét egy D pontban metszi. Az AD szakasz kettévágja a CAB ∢-et. A már említett szimmetriából következik, hogy CBA ∢ = BAD ∢, tehát az őt részeként tartalmazó CAB ∢-nél kisebb.

2.2.3. Háromszög-egyenlőtlenség



2. ábra

Állítás: Egy gömbháromszög bármely két oldalának összege a harmadik oldalnál nagyobb.
Bizonyítás: Ha van két olyan oldal a háromszögben, aminek az összege π-nél nagyobb vagy egyenlő, akkor az állítás biztosan teljesül, mert a harmadik oldalnak π-nél kisebbnek kell lennie. Ha az ABC gömbháromszög oldalaira vonatkozó AB + BC > AC egyenlőtlenséget akarjuk bizonyítani (2. ábra), feltehetjük, hogy az AB oldalt a BC oldallal egyenlő hosszúságú BD ívvel meghosszabbítva, félkörnél kisebb AD

ívhez jutunk. Ez az ív az ACD gömbháromszög egyik oldala, amit a BC ív kettévág. A BCD gömbháromszögnek C és D csúcsnál lévő szögei az előző tétel miatt egyenlők. Az ACD gömbháromszög C csúcsánál tehát nagyobb szög helyezkedik el, mint a D csúcsnál. Tehát az AD = AB + BC ív az AC ívnél hosszabb.

Másképp megközelítve:

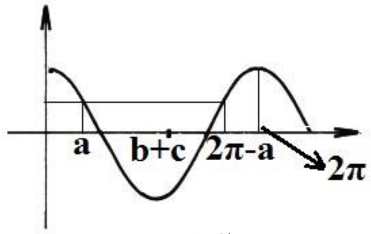
Az állítás a gömbháromszög oldalaira vonatkozó koszinusztétellel is belátható.

A $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$ összefüggést felhasználva lássuk be, hogy a gömbháromszög oldalaira igaz: $a < b + c$

Tudjuk, hogy $0 < \alpha < \pi$, amiből következik, hogy $-1 < \cos \alpha$, így:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha > \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c = \cos (b + c)$$

Mivel a koszinuszfüggvény a $[0, \pi]$ intervallumon szigorúan monoton csökken (3. ábra), így a kapott $\cos a > \cos (b + c)$ összegfüggésből éppen az állítás következik: $a < b + c$



3. ábra

Következmény:

Ha ehhez hozzávesszük, hogy $0 < b + c < 2\pi$, illetve, hogy a koszinuszfüggvény a $[\pi, 2\pi]$ intervallumon szigorúan monoton nő, igaz lesz, hogy: $a < b + c < 2\pi - a$.

Ehhez a-t hozzáadva:

$$a + b + c < 2\pi$$

Vagyis igaz a 2.1. fejezetben, az oldalak összegére felírt egyenlőtlenség: egy gömbháromszög kerülete mindig kisebb, mint egy főkör hossza.

2.2.4. A Lexell-kör

Tekintsünk egy rögzített ABC gömbháromszöget. Keressük azon C^* pontok mértani helyét, amelyekre az ABC^* gömbháromszög területe megegyezik az ABC gömbháromszög területével.

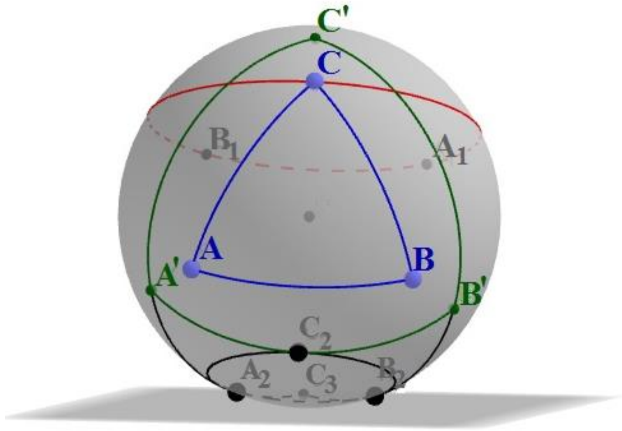
Állítás: Az ilyen C^* csúcsok mértani helye két olyan köríven található, amelyek közül az egyik átmegy a C csúcson, a másik annak AB oldalra vett tükörképén, és végpontjaik az A és B csúcsok átellenes pontjai (A_1 és B_1). Ezeket a köríveket nevezzük Lexell-körívnek, az őket meghatározó teljes köröket pedig Lexell-körnek.

1. bizonyítás (Polárháromszög segítségével):

Legyen ABC adott területű gömbháromszög, és A'B'C' annak polárháromszöge. (4. ábra) Az ABC gömbháromszög területe:

$$T_{ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

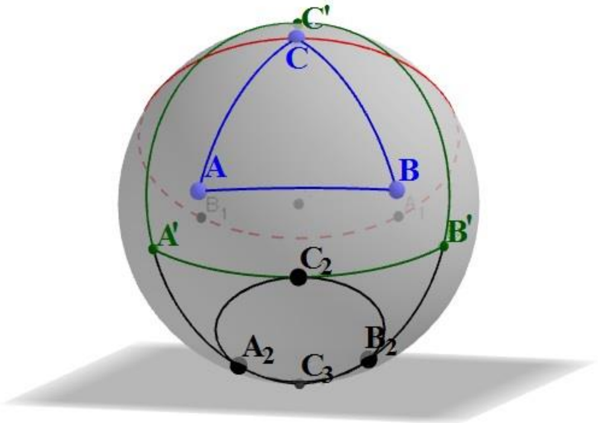
Ahhoz, hogy a terület állandó legyen, az kell, hogy az $\alpha + \beta + \gamma$ szögösszeg állandó legyen. A polárháromszögekre vonatkozó, 2. 1. fejezetben található, összefüggések alapján: $A'B' = \pi - \gamma$, $A'C' = \pi - \beta$, és $B'C' = \pi - \alpha$. A szögösszeg tehát akkor állandó, ha a polárháromszög kerülete állandó.



4. ábra

Mivel az AB oldal rögzített, a C' csúcs is az, mert C' az AB-t tartalmazó rögzített főkör egyik póluspontja. Továbbá a B'C' és az A'C' oldalakat tartalmazó főkörök is rögzítettek, mert az A és B ezek egy-egy póluspontja, amik a hozzájuk tartozó főköröket egyértelműen meghatározzák.

Vegyünk egy adott területű ABC háromszöget, és a hozzátartozó polárháromszöget. Tekintsük a C' csúcs átellenes pontját (C_3), vagyis a B'C' és az A'C' oldalakat tartalmazó főkörök másik metszéspontját, és vegyük az így keletkező $A'B'C_3$ háromszög beírt körét. (5. ábra)

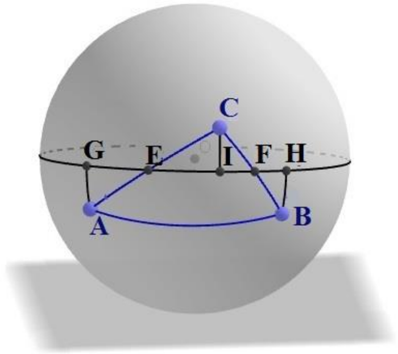


5. ábra

Ez érinti az A'C' oldal főkörét egy A_2, a B'C' oldal főkörét egy B_2, és az A'C' oldalt egy C_2 pontban. A szimmetria miatt gömbön is igaz, hogy külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, ezért $C'A_2 = C'B_2$, illetve $A'A_2 = A'C_2$ és $B'B_2 = B'C_2$. Ebből következik, hogy a polárháromszög kerülete egyenlő $C'A_2 + C'B_2$-vel, és mivel $C'A_2 = C'B_2$, ezért ezek egyenként a félkerülettel egyeznek meg. Tehát ahhoz, hogy a polárháromszög kerülete ne változzon, az A_2 és B_2 pontoknak rögzítettnek kell lenni, a C_2 pontnak pedig az előbb említett kör A_2 és B_2 közötti ívén kell mozognia, de azokkal nem eshet egybe, ugyanis akkor nem jönne létre az A'B'C' háromszög. Vagyis az A_2 és B_2 közötti íven mozgó C_2 pontok, illetve a kört érintő, A'B' oldalt tartalmazó főkörök a

gömb középpontját, és az említett kör középpontját összekötő tengely körüli forgatással kaphatóak meg. Így az A'B' ívet tartalmazó főkörök C^* póluspontjainak a pályája is egy körívet írt le, aminek két végpontja az A és B pont átellenesei, A_1 és B_1. Ugyanis ez a két pont a polárháromszög másik két oldalát tartalmazó főköröknek egy-egy póluspontja. C^* nem eshet egybe az A_1 és B_1 pontokkal, mert ha egybeesne, nem jönne létre az ABC gömbháromszög. A fent említett körívet nevezzük Lexell-körívnek, a hozzá tartozó teljes kört pedig Lexell-körnek. Később még vizsgáljuk az A_1 és B_1 közötti, C-t nem tartalmazó íven létrehozható háromszögek területének eredetivel vett viszonyát.
Természetesen a szimmetria miatt az AB oldalt tartalmazó főkörre tükrözve az ábrát, kijön az állításban szereplő másik kör is.

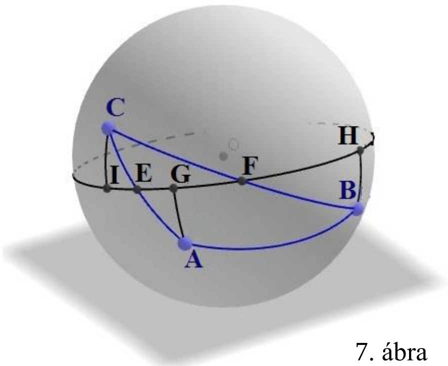
2. bizonyítás (Saccheri-négyszög segítségével):



6. ábra

Legyen ABC gömbháromszög (6. ábra). Vegyük az AC oldal felezőpontját (E), és a BC oldal felezőpontját (F). Rajzoljuk be az E-t és F-et összekötő szakaszt tartalmazó főkört (vagyis az AB oldalhoz tartozó középvonal egyenesét). Erre állítsunk merőlegest a C csúcsból, annak talppontja legyen I. Tükrözzünk centrálisan CEI háromszöget az E, illetve CIF háromszöget az F pontra. Az ekkor létrejövő AEG háromszög egybevágó CEI háromszöggel, illetve BHF háromszög CIF háromszöggel. Az ABC gömbháromszög így átdarabolható egy vele azonos területű ABHG négyszöggé:

$T_{ABC} = T_{ABFE} + T_{CEI} + T_{CFI} = T_{ABFE} + T_{AEG} + T_{BFH} = T_{ABHG}$



7. ábra

Ha C talppontja a háromszögön kívül esik, az AEG és CEI háromszögek, illetve BFH és CFI háromszögek egybevágóak. (7. ábra)
Ekkor az ABC háromszög területe:

$T_{ABC} = T_{ABFE} + T_{CEF} = T_{ABFG} + T_{BFH} = T_{ABHG}$

Az ABHG négyszög mindkét esetben *Saccheri-négyszög*: azaz két szemközti oldala (AG, BH) egyenlő hosszú, és derékszögben metszik a harmadik oldalt (a középvonal egyenesét). Vagyis ez egy szimmetrikus négyszög, és ebből következik, hogy a negyedik oldalt is azonos szögben metszik.

Keressük azokat a C^* pontokat, amire az ABC^* háromszög ugyanolyan területű négyszöggé darabolható át, mint az ABC háromszög. Ha a C^* pontok egy olyan körön vannak, amin rajta van a C csúcs, és az EF középvonal főkörétől CI távolságra van, akkor a létrejövő ABC^* háromszögek ugyanazzá a Saccheri-négyszöggé darabolhatóak át, mint az eredeti ABC háromszög, vagyis állandó lesz a terület. Ez a kör a Lexell-kör. (Később láthatjuk, hogy ha más Lexell-körön van a harmadik csúcs – vagyis a háromszögek más Saccheri-négyszöggé darabolhatóak át –, akkor a területük az eredetinél kisebb, vagy nagyobb lesz.**)**

Mivel az A és B csúcsok is AG = BH = CI távolságra vannak az EF középvonalat tartalmazó főkörtől, ezek átellenes pontjai (A_1 és B_1) is rajta vannak a Lexell-körön, azonban korábban már láttuk, hogy a C^* csúcs ezekkel nem eshet egybe.

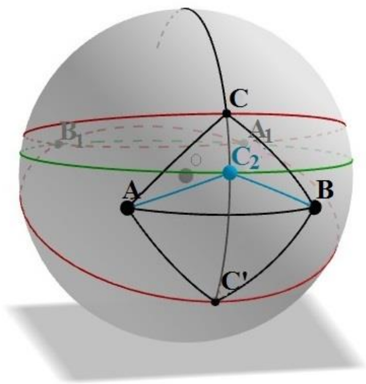
A Lexell-kör síkja párhuzamos az EF középvonalat tartalmazó főkör síkjával, így a Lexell-kör középpontjai megegyeznek a főkör póluspontjaival, sugara pedig: $r = \frac{\pi}{2} \pm |CI|$.

Szimmetriai okokból az ábra AB oldalra vett tükörképe is eleget tesz a feltételeknek.

Az eredetinél kisebb és nagyobb területű háromszögek elhelyezkedése:

Állítás: Az AB oldalhoz tartozó két, egymást A_1 és B_1 pontokban metsző Lexell-körív a gömböt két részre osztja: ezek közül az ABC háromszöget is tartalmazó tartomány belsejében lévő C^* pontokkal az eredeti háromszögnél kisebb területű, míg azon kívül eső pontokkal az eredetinél nagyobb területű háromszögek hozhatóak létre. (Természetesen C^* egyik esetben sem lehet rajta az AB oldalt tartalmazó főkörön.)

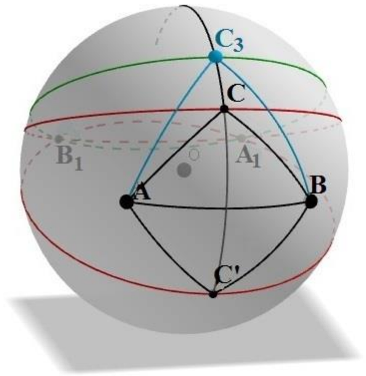
Bizonyítás: (Csak az AB-hez tartozó főkör által határolt, C-t tartalmazó félgömbön nézzük meg. Természetesen a szimmetria miatt a C'-t tartalmazó félgömbön is elmondható ugyanez, tehát a teljes tartományra igaz.) Ha vesszük azt a lehetséges C csúcsot, ami rajta van az AB oldalt merőlegesen felező főkörön (8. ábra), akkor minden olyan C_2 csúcsra, ami ugyancsak rajta van ezen a főkörön, és teljesül rá, hogy $d(C_2, AB) < d(C, AB)$, az így kapott ABC_2 háromszög területe kisebb lesz, mint az eredeti ABC háromszögé, ugyanis az eredeti háromszög tartalmazza az ABC_2 háromszöget. Az ABC_2 háromszög Lexell-körívén pedig bárhol kiválasztva a harmadik csúcsot, az ABC_2 háromszöggel megegyező területű háromszögeket kapunk.



8. ábra

(Később, a 3.1. fejezetben, illetve feladatmegoldáskor erre a tartományra már csak úgy fogunk hivatkozni, hogy a Lexell-körív alatti terület.)

A gömb ezen kívül eső részein található C_3 pontokkal pedig olyan ABC_3 háromszög hozható létre, amelyek területe nagyobb, mint az ABC háromszögé (9. ábra). Ez ugyanúgy levezethető, mint az előző esetben, csak itt az ABC_3 háromszög tartalmazza az ABC háromszöget, így az ABC_3 területe a nagyobb.



9. ábra

Megjegyzés:

A síkbeli eset bizonyításának első lépésében párhuzamost kellett húzni, azonban ezt a gömbön nem tudjuk megtenni, illetve a háromszög területét sem úgy számoljuk ki, mint síkon. Az első bizonyítás épp ezért a gömbi területszámítás módszerét vette alapul, a második viszont síkon is érvényben marad.

2.2.5. Kapcsolat a háromszög oldala és középvonala között

Állítás: A gömbháromszög adott oldalhoz tartozó középvonalai mindig nagyobbak, mint az oldal hosszának a fele.

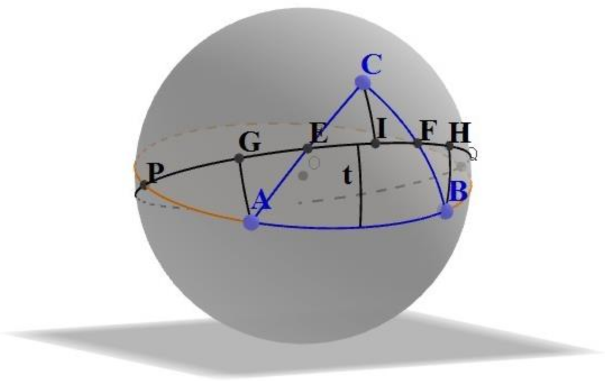
Ennek bizonyításához szükségünk lesz az alábbi összefüggésre, így előbb azt látjuk be:

Állítás:

$$\cos\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{\cos k(c)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)}$$

T jelöli az ABC gömbháromszög területét, k(c) pedig a c oldalhoz tartozó középvonal hosszát.

Bizonyítás: Az ABC gömbháromszöget a korábban látott módon átdaraboljuk a vele azonos területű ABHG négyszöggé. (10. ábra) Ekkor AG = BH, illetve a GAB ∢ megegyezik az ABH ∢-gel, ezeket jelöljük δ-val. A G-nél és H-nál lévő szög azonosan derékszög. Az



10. ábra

ABHG négyszög szimmetrikus a t tengelyre, ami az AB felezőpontját a GH felezőpontjával összekötő szakasz.
Az ABHG négyszög területe:

$$T_{ABHG} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2\delta - 2\pi = 2\delta - \pi$$

$$\text{Vagyis: } \delta = \frac{\pi+T}{2}$$

Az AB és a GH oldalhoz tartozó főkörívek egymást két átellenes pontban metszik, ezek közül az A-hoz közelebbit jelölje P, a B-hez közelebbit Q. Ekkor:

$$GAP\sphericalangle = \pi - \delta = \frac{\pi - T}{2}$$

Illetve, az ABHG négyszög t-re való szimmetriája miatt:

$|AP| = |BQ| = \frac{\pi - |AB|}{2} = \frac{\pi - c}{2}$, illetve $|GP| = |FQ| = \frac{\pi - 2 \cdot |EF|}{2} = \frac{\pi - 2 \cdot k(c)}{2} = \frac{\pi}{2} - k(c)$

Tekintsük a gömbi szinusz-tételt a GAP derékszögű háromszögben:

$$\frac{\sin |GP|}{\sin |AP|} = \frac{\sin GAP\sphericalangle}{\sin AGP\sphericalangle}$$

Mivel az AGP $\sphericalangle$ derékszög, behelyettesítve az előbb kapottakat:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - k(c)\right)}{\sin\left(\frac{\pi - c}{2}\right)} = \sin\left(\frac{\pi - T}{2}\right), \text{ vagyis: } \frac{\cos k(c)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)} = \cos\left(\frac{T}{2}\right)$$

Tehát valóban igaz az összefüggés. Ebből pedig az eredeti állítás már könnyen bizonyítható, vagyis, hogy a gömbháromszög adott oldalhoz tartozó középvonalai mindig nagyobbak, mint az oldal hosszának a fele.
Ugyanis, ha egyenlők lennének, akkor a fenti egyenlőség alapján:

$\cos\left(\frac{T}{2}\right) = 1$, vagyis T = 0 eredményt kapnánk, így a háromszög létre sem jönne.

Ha pedig $k(c) < \left(\frac{c}{2}\right)$ igaz lenne, akkor, mivel az oldalak hossza 0 és π közötti lehet, $\cos k(c) > \cos\left(\frac{c}{2}\right)$, vagyis $\cos\left(\frac{T}{2}\right) > 1$ lenne, ami lehetetlen. Tehát $k(c) > \left(\frac{c}{2}\right)$.

3. Fejezet

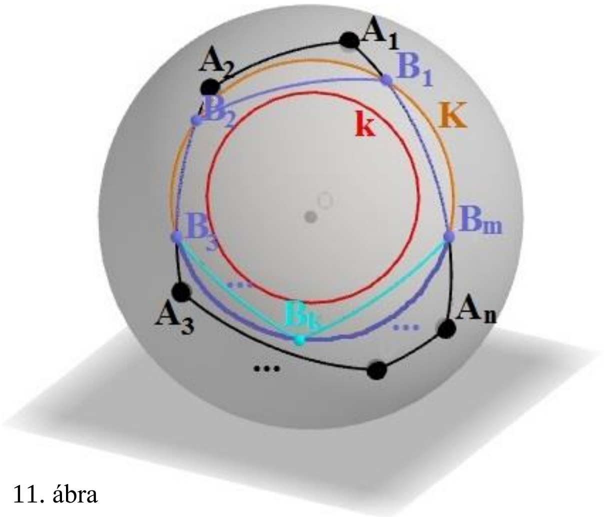
Tetszőleges n-szögek, konvex lemezek esete

3.1. Hajós-lemma

Legyen S gömbi konvex sokszög, ami tartalmazza a k (egységsugarú) kört. K legyen egy olyan kör, aminek középpontja megegyezik k középpontjával, sugara pedig: $r > 1$. S csúcsai legyenek K körön, vagy azon kívül.

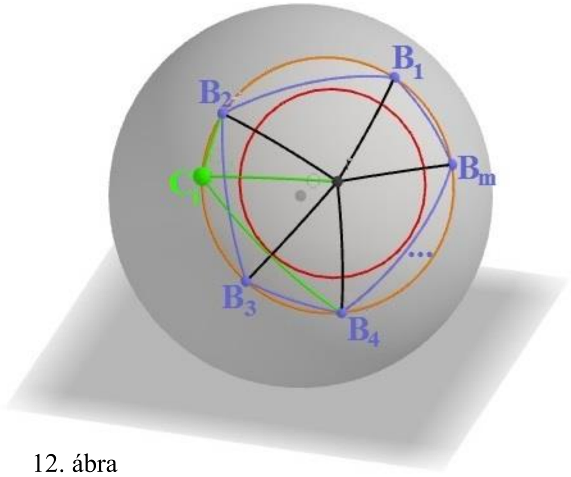
Állítás: Ilyen feltételekkel az S sokszög területe akkor minimális, ha csúcsai a K körön vannak, és legfeljebb egy oldala nem érinti a k kört.

Bizonyítás: Legyen pl. $A_1 \ldots A_n$ ilyen S sokszög. Metsszük el ezt a K körrel. (11. ábra) A kör és a sokszög metszete egy körívek és szakaszok által határolt tartomány, ami tartalmazza a belső kört. A köríveket kicserélhetjük a két végpont közötti olyan törött vonalakra, aminek a csúcsai a K körön vannak, és nem metszenek bele a k körbe. Az így létrejövő $B_1 \ldots B_m$ sokszög területe tehát biztosan kisebb, mint az eredeti sokszögé, mert az $A_1 \ldots A_n$ tartalmazza őt.



11. ábra

Kössük össze a körök közös középpontját a sokszög csúcsaival (12. ábra). Az így létrejött háromszögek közül azokat, amelyeknek a sokszöggel közös oldala nem érinti a k kört, cseréljük egymás mellé, majd a közös csúcsot toljuk el úgy a K körön, hogy a hozzátartozó valamelyik sokszögoldal érintse a k kört. Ekkor eggyel csökkentettük a nem érintő



12. ábra

oldalak számát, és csökkent a terület is. Ugyanis a 2.2.4. fejezetben láthattuk, hogy ha vesszük például a $B_2B_3B_4$ gömbháromszöget, akkor a B_3-hoz tartozó Lexell-körív alatti területen vett pontokkal az eredeti háromszögnél kisebb területű gömbháromszögeket kapunk. (Ha B_3 Lexell-köríve érinti a K kört a B_3 pontban, akkor a K kör B_3B_4 ívén és B_2B_3 ívén felvett pontokkal létrehozott háromszögben lesz kisebb a terület, ha a Lexell-körív két pontban (B_3 és egy B_3') metszi a K kört, akkor annak B_3B_4 és B_2B_3' ívén lesz kisebb.) Minél közelebb van tehát a B_3 csúcs a másik két csúcs valamelyikéhez, annál kisebb a terület. Viszont a feltétel szerint a sokszögnek tartalmaznia kell a k kört, oldalai nem metszhetnek bele abba. Így például a B_3 csúcs akkor kerülhet legközelebb, mondjuk, a B_2 csúcshoz, ha a B_3B_4 főkörív érinti a k kört. Ezt az eljárást egészen addig folytathatjuk, amíg csak egy (vagy nulla) nem érintő oldalhoz jutunk.

Tehát véges sok olyan lépést hajtottunk végre, amivel a területet vagy nem változtattuk, vagy csökkentettük. Az így kapott sokszögek egybevágóak, tovább már nem lehet csökkenteni a területüket, ezért az adott feltételek mellett ez a minimális terület.

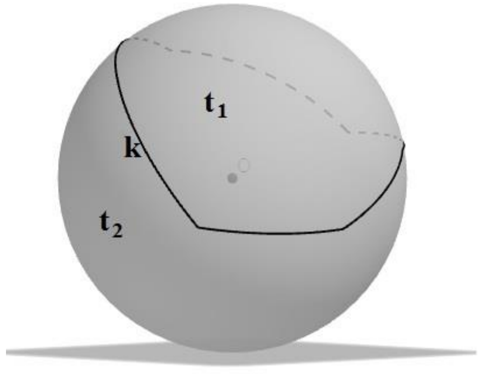
3.2. Gömbi izoperimetrikus egyenlőtlenség

Ismert az az állítás, hogy azonos kerületű síkidomok között a körnek a legnagyobb a területe. Ha a síkidom területét k-val, a területét pedig t-vel jelöljük, akkor ez az egyenlőtlenség a következő képlettel írható fel:

$$t \leq \frac{k^2}{4\pi}$$

Kérdés, hogy a gömbön is felírható-e hasonló összefüggés?

Vegyünk a gömbön egy k hosszúságú, egyszerű, zárt görbét. (Zárt: önmagába visszatérő, egyszerű: nincsenek önátmetszései és önátfedései.) A gömböt a görbe (a síkbeli esettel ellentétben) két darab véges területű, k kerületű idomra bontja. A két idom felszínét jelölje t_1 és t_2. (13. ábra)



13. ábra

Tétel: Ebben az esetben teljesül az alábbi egyenlőtlenség, amit gömbi izoperimetrikus egyenlőtlenségnek nevezünk:

$$t_1 \cdot t_2 \leq r^2 \cdot k^2$$

Bizonyítás:

1. eset: Amikor k hossza nagyobb vagy egyenlő, mint egy főkör. ($k \geq 2r\pi$)

Felhasználva, hogy $t_1 + t_2$ egyenlő a gömb teljes felszínével, vagyis $4r^2\pi$-vel, a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből a következő adódik:

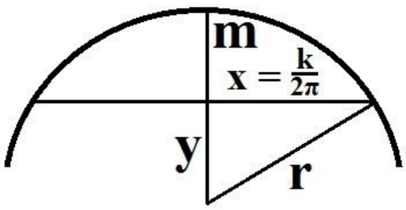
$$t_1 \cdot t_2 \leq \left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{4r^2\pi}{2}\right)^2 = 4r^4\pi^2$$

Mivel $k \geq 2r\pi$, ezért $r^2 \cdot k^2 \geq r^2 \cdot (2r\pi)^2 = 4r^4\pi^2$, ami megegyezik az előző egyenlet jobb oldalával. Tehát $k \geq 2r\pi$ esetén igaz az eredeti egyenlőtlenség.

2. eset: Ha k hossza kisebb, mint egy főkör. ($k < 2r\pi$)

Állítás: Ekkor az egyenlőtlenség egyenlő azzal, hogy a k kerületű, kisebbik felületdarab felszíne legfeljebb akkora, mint egy k kerületű gömbi körlap felszíne.

Bizonyítás: Először is számoljuk ki a gömbsüveg felszínét. (14. ábra) A gömbsüveget határoló k kerületű kör (síkban mért) sugara: $x = \frac{k}{2\pi}$



14. ábra

A magassága: $m = r - y$; ahol $y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2}$

$$m = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2}$$

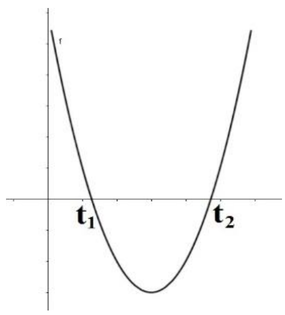
A gömbsüveg felszíne: $A = 2\pi r m$, ami behelyettesítés után:

$$A = 2r^2\pi - \sqrt{4r^4\pi^2 - r^2 \cdot k^2}$$

A $t_2 = 4r^2\pi - t_1$ összefüggést felhasználva a $t_1 \cdot t_2 \leq r^2 \cdot k^2$ egyenlőtlenség átírható:

$$t_1 \cdot (4r^2\pi - t_1) \leq r^2 \cdot k^2$$

$$0 \leq t_1^2 - (4r^2\pi) \cdot t_1 + r^2 \cdot k^2$$



Mivel $t_1 < t_2$, a megoldó képlet $\pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ részéből csak a negatív, vagyis $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ részre lesz szükségünk:

$$t_1 = \frac{4r^2\pi - \sqrt{16r^4\pi^2 - 4 \cdot 1 \cdot r^2 \cdot k^2}}{2} = \frac{4r^2\pi - 2\sqrt{4r^4\pi^2 - r^2 \cdot k^2}}{2}$$

Tehát azt kaptuk, hogy:

$$t_1 \leq 2r^2\pi - \sqrt{4r^4\pi^2 - r^2 \cdot k^2}$$

Az egyenlet jobb oldalán éppen a korábban megkapott k kerületű gömbsüveg felszíne áll. Vagyis igaz az állításunk, hogy $k < 2r\pi$ esetben az egyenlőtlenség egyenlő azzal, hogy a k kerületű, kisebbik felületdarab felszíne legfeljebb akkora, mint egy k kerületű gömbi körlap felszíne.

Elég tehát a $t_1 \cdot t_2 \leq r^2 \cdot k^2$ egyenlőtlenséget a $2r\pi$-nél rövidebb, zárt görbék esetén bizonyítani. Ehhez nézzünk át néhány, a bizonyításban felhasználandó fogalmat és összefüggést a gömbön.

3.2.1. Konvexitás

Nyílt félgömbön belüli idomokra (a továbbiakban úgy mondjuk: félgömbnél kisebbekre) egyértelműen átvihető a síkbeli definíció, vagyis, hogy egy alakzat konvex, ha bármely két pontját összekötő szakasznak is minden pontját tartalmazza.

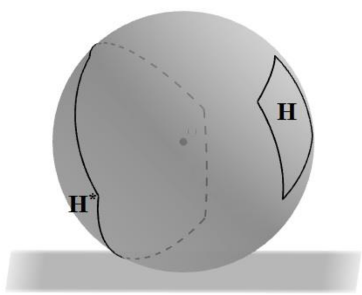
Viszont, ha tekintünk például egy félgömböt, és annak két átellenes pontját, azok összeköthetőek olyan szakasszal is, amelynek minden pontját tartalmazza az említett félgömb, és olyannal is, amelyiknek a két átellenes ponton kívül egyik pontját sem tartalmazza. (Ezt figyelembe véve, a definíció kiterjeszthető nem csak egy nyílt félgömb belsejében lévő halmazokra, az alábbi módon: egy gömbi ponthalmazt akkor nevezünk konvexnek, ha bármely két, nem átellenes pontjával együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.)

Félgömbnél kisebb alakzatok esetén – a síkbeli esethez hasonlóan –, elegendő, ha az izoperimetrikus egyenlőtlenség az adott idom konvex burkára teljesül, ugyanis akkor az eredeti idom területe kisebb vagy egyenlő, mint a konvex buroké, a kerülete viszont nagyobb vagy egyenlő. (Később látni fogjuk, hogy a bizonyításkor elég a k kerületű görbe által határolt két idom közül csak a félgömbnél kisebbet vizsgálni.)

Definíció: Nevezzük gömbi konvex lemeznek azon konvex, zárt halmazokat, amik tartalmaznak legalább három, nem egy főkörön fekvő pontot (ezzel egyenértékűek, hogy nem fajul gömbi szakasszá/főkörré; van belső pontja; van olyan pontja, amellyel együtt egy elég kis sugarú gömbi körlemez is része a halmaznak).

3.2.2. Dualitás

Vegyünk egy O középpontú egységgömböt, ennek a felületét jelöljük G-vel. Ezen tekintsünk egy tetszőleges $H \subseteq G$ részhalmazt (15. ábra).



15. ábra

Definíció: $H^* \subseteq G$ halmaz a H halmaz duálisa, ha minden $P \in H^*$ pont úgy áll elő, hogy az OP félegyenes szöge az összes olyan OQ félegyenessel, ahol $Q \in H$, legalább $\frac{\pi}{2}$.

Képlettel:

$$H^* = \{P \in G: \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0, \text{ minden } Q \in H\text{-ra}\}$$

Az $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ a két vektor skaláris szorzata.

Néhány speciális alakzat duálisa ebből egyszerűen látható:

– üres halmaz duálisa az egész gömbfelület, és fordítva

– félgömb duálisa egyetlen pont, és fordítva

– félgömbnél kisebb gömbsüveg duálisa is félgömbnél kisebb gömbsüveg

– főkör duálisa egy átellenes pontpár, és fordítva

– fél-főkör duálisa egy másik fél-főkör

– α hosszúságú gömbi szakasz duálisa π – α szögű gömbkétszög, és fordítva

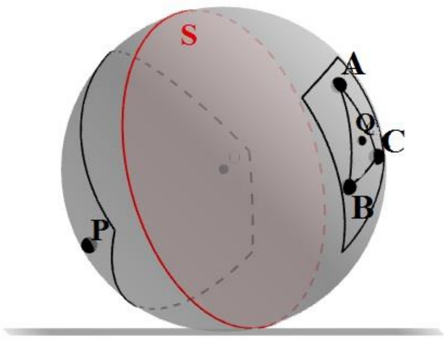
Észrevételek:

1.) Bővebb halmaz duálisan szűkebb és fordítva, vagyis $H_1 \subseteq H_2$ esetén $H_1^* \supseteq H_2^*$.

2.) Ha a H halmaz tartalmaz három, nem egy főkörön fekvő pontot, akkor a H^* félgömbnél kisebb.

Bizonyítás:

Legyen A, B, C ∈ H három, nem egy főkörön fekvő pont. Az általuk kifeszített ABC gömbháromszög belsejében vegyünk egy tetszőleges Q pontot. (16. ábra) H^* az O-n átmenő, OQ-ra merőleges S sík által meghatározott két félgömb közül a H-t nem tartalmazónak a belsejében fekszik, mert H^* minden P pontjára igaz, hogy $POQ \measuredangle \geq \frac{\pi}{2}$.

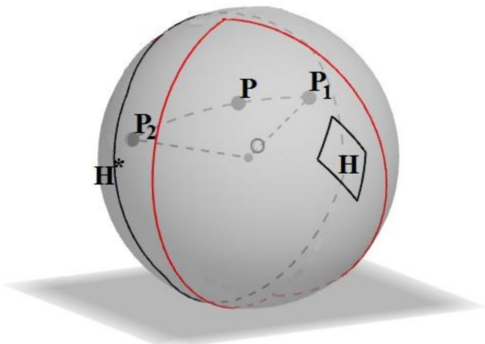


16. ábra

3.) Bármely, félgömbnél kisebb, legalább három, nem egy főkörön fekvő pontot tartalmazó gömbi halmaz duálisa konvex.

Bizonyítás:

Az ábrán látható módon vegyünk egy H halmazt, és annak a duálisát (H^*). Legyenek P_1 és $P_2 \in H^*$ pontok. Tekintsük azt a



17. ábra

gömbkétszöget, amely a P_1P_2 szakasz duálisa. H halmaz része ennek a gömbkétszögnek. Ha egy P pont befutja a P_1P_2 gömbi szakaszt, akkor az OP-re merőleges, O-n átmenő sík nem metsz bele ebbe a gömbkétszögbe, tehát P végig a H^* halmazban marad. Vagyis a H^* halmaz bármely két pontját választva az őket összekötő szakasznak is minden pontja a H^*-ban halad, tehát a halmaz konvex.

4.) A duálisként előálló halmazok mindig zártak.

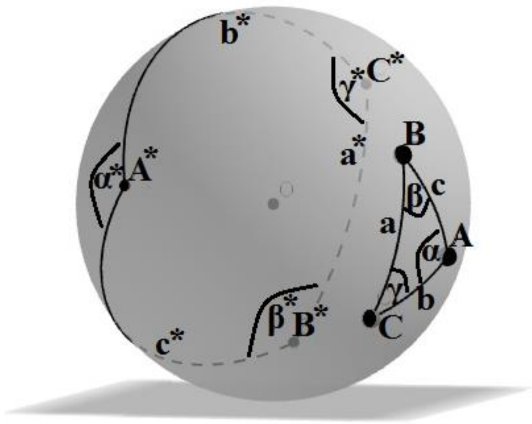
Megjegyzések:

1.) Az előző észrevételeket összegezve kimondható, hogy bármely félgömbnél kisebb gömbi konvex lemez duálisa is félgömbnél kisebb gömbi konvex lemez.

2.) Megmutatható az is, hogy bármely gömbi konvex lemez duálisának a duálisa saját maga.

Összefüggések a gömbháromszög és a duálisa között

Tekintsük az O középpontú egységgömböt, és azon egy ABC gömbháromszöget. A definícióból következik, hogy ennek a duálisát úgy kapjuk, hogy vesszük az O-ból induló, OBC, OAC és OAB síkokra merőleges egyenesek metszéspontjait a gömbfelülettel. Így egyenesenként két darab metszéspont jön létre, ezek közül mindig azokat tekintjük, amelyiket által meghatározott alakzat nincsen egy félgömbön az ABC gömbháromszöggel. Nevezzük az OBC egyenes által meghatározott pontot A^*-nak, az OAC-hez tartozót B^*-nak, az OAB-hez tartozót C^*-nak. Így az ABC gömbháromszög duálisaként az $A^*B^*C^*$ gömbháromszöget kapjuk. Az ABC gömbháromszög oldalait jelölje a, b, c, szögeit α, β, γ, a kerületét k, a területét t. Az $A^*B^*C^*$ gömbháromszög adatai legyenek rendre ugyanezek, *-gal ellátva. (18. ábra)



18. ábra

Az OBC, OAC, OAB síkokra merőleges egyeneseknek a gömbbel vett metszéspontjai rendre az a, b és c ívekhez tartozó főkörök pólusai. Ha ezen metszéspontok közül a gömbháromszöggel azonos félgömbön lévőket vennénk, éppen a polárháromszöghöz jutnánk, ami egybevágó a duális $A^*B^*C^*$ háromszöggel, ugyanis annak O-ra vonatkozó középpontos tükrözésével megkapható. (*Megjegyzés*: Mivel polárháromszög polárháromszöge az eredeti háromszög, gömbháromszögek esetére meg is mutattuk egy korábbi állításunkat, vagyis, hogy gömbi konvex lemez duálisának a duálisa saját maga.) Ez alapján az $A^*B^*C^*$ gömbháromszögre is igazak az alábbi állítások:

$$a^* = \pi - \alpha \qquad \alpha^* = \pi - a$$

$$b^* = \pi - \beta \qquad \beta^* = \pi - b$$

$$c^* = \pi - \gamma \qquad \gamma^* = \pi - c$$

További összefüggések kereséséhez tekintsük a 2.1. fejezetben szereplő, a gömbháromszögek területére vonatkozó Girard-formulát:

$$t = \alpha + \beta + \gamma - \pi, \text{ és } t^* = \alpha^* + \beta^* + \gamma^* - \pi$$

Az előző összefüggések alapján:

$$t = (\pi - a^*) + (\pi - b^*) + (\pi - c^*) - \pi = 2\pi - k^*$$

$$t^* = (\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) - \pi = 2\pi - k$$

Tehát minden gömbháromszögre igaz, hogy:

$$t + k^* = t^* + k = 2\pi$$

Ezek az állítások kiterjeszthetőek tetszőleges oldalszámú S gömbi konvex sokszögre, ugyanis az előzőek alapján S^* egy ugyanolyan oldalszámú gömbi konvex sokszög lesz. A gömbháromszögek esetéhez hasonlóan S oldalai párba állíthatók S^* szögeivel, illetve S^* oldalai S szögeivel. Egy n oldalú S_n gömbi konvex sokszög esetén tehát az alábbi összefüggések igazak:

$$a_k^* = \pi - \alpha_k \text{ , illetve } \alpha_m^* = \pi - a_m \text{ , ahol } k, m = 1, \ldots, n$$

Illetve a területükre:

$$t = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - (n-2)\pi$$

$$t^* = \alpha_1{}^* + \alpha_2{}^* + \ldots + \alpha_n{}^* - (n-2)\pi$$

Ezekből a gömbháromszögek esetén elvégzett számolással adódik, hogy bármilyen gömbi konvex sokszögre igaz a $t + k^* = t^* + k = 2\pi$ egyenlőség.

Ezt még tovább ki lehet terjeszteni tetszőleges gömbi konvex lemezre (L), és duálisára (L^*). Közelítsük meg L-et minden határon túl gömbi konvex sokszögek egy S_n sorozatával. Ekkor S_n^* sorozat L^*-hoz közelít (ha az egyik belülről, akkor a másik kívülről). Az S_n sokszögek t_n területe t-hez, k_n kerülete pedig k-hoz tart, és ugyanez igaz a duális S_n^* sokszögekre is, amik $t_n{}^*$ területe t^*-hoz, $k_n{}^*$ kerülete pedig k^*-hoz tart. Mivel minden n-re teljesül a $t_n + k_n{}^* = t_n{}^* + k_n = 2\pi$ egyenlőség, így az ezekben szereplő számsorozatok határértékeire is: $t + k^* = t^* + k = 2\pi$ igaz lesz bármely L és L^* gömbi konvex lemezekre.

3.2.3. Paralleltartományok a gömbfelületen

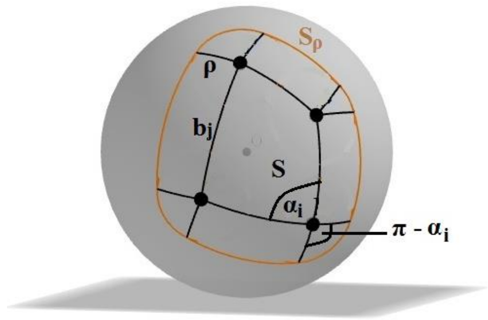
Legyen adott egy L gömbi konvex lemez, és egy ρ pozitív szám, amelyre $\rho \leq \frac{\pi}{2}$.

Definíció: Az L gömbi konvex lemez ρ sugarú paralleltartománya (L_ρ) az összes L-beli középpontú, ρ sugarú zárt gömbi körlap egyesítését jelenti. (ρ = 0 esetben magát az L halmazt tekintjük L_ρ-nek)

A paralleltartományok szerkezetének vizsgálata

Gömbi konvex sokszögek esete

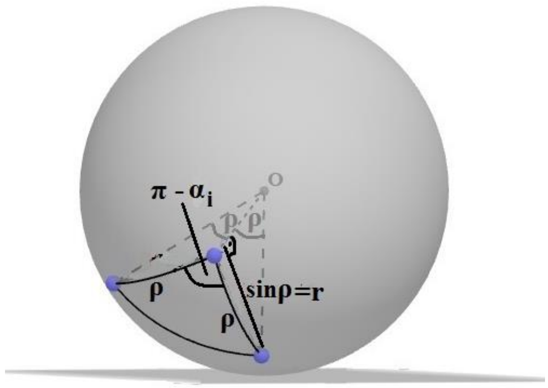
Legyen adott egy S gömbi konvex n-szög, és egy $\rho \in (0; \frac{\pi}{2}]$ szám. Húzzunk S minden csúcsából az ábrán látható módon 2-2, a csúcsba befutó oldalakra merőleges, ρ hosszúságú gömbi szakaszt. Így az S_ρ paralleltartomány S-en kívül eső részét feldaraboltuk n db gömbi körcikkre, és n db gömböv cikkre.



19. ábra

Az i-edik csúcsnál fekvő gömbi körcikk középponti szöge így $\pi - \alpha_i$, ahol α_i az S sokszög szöge az i-edik csúcsban. A j-edik oldal mentén keletkező gömböv cikk középponti szöge egyenlő b_j-vel, az S sokszög j-edik oldalával.

A körcikkek síkbeli r sugara megkapható az őket befogóként tartalmazó, ρ szögű, egység átmérőjű derékszögű háromszögből (20. ábra): sin ρ = r. Az ezekhez tartozó körívek hossza tehát $(\pi - \alpha_i) \cdot \sin \rho$.

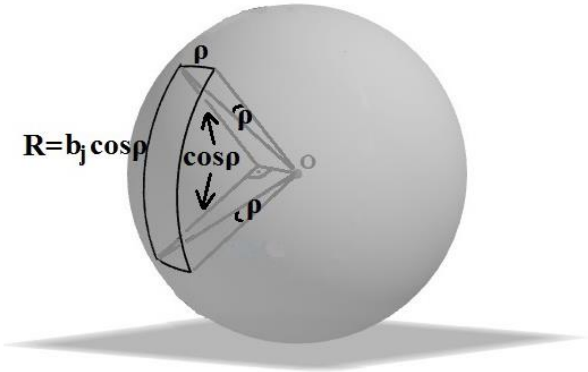


20. ábra

A gömbövek R sugara a hasonló derékszögű háromszögek másik befogója: R = cos ρ, szöge pedig b_j. (21. ábra) Tehát a hozzá tartozó körívek hossza: $b_j \cdot \cos \rho$.

Ezek alapján meghatározhatjuk az S_ρ paralleltartomány k_ρ kerületét:

$$k_\rho = (\pi - \alpha_1) \cdot \sin \rho + \ldots + (\pi - \alpha_n) \cdot \sin \rho + b_1 \cdot \cos \rho + \ldots b_n \cdot \cos \rho$$



21. ábra

Tekintve a gömbi konvex sokszögre és duálisára vonatkozó $\pi - \alpha_i = a_i^*$ $(i = 1, \ldots, n)$ összefüggést, az egyenlet így is felírható:

$$(a_1^* + \ldots + a_n^*) \cdot \sin\rho + (b_1 + \ldots + b_n) \cdot \cos\rho = k^* \cdot \sin\rho + k \cdot \cos\rho$$

A paralleltartomány kerülete tehát:

$$k_\rho = k^* \cdot \sin\rho + k \cdot \cos\rho$$

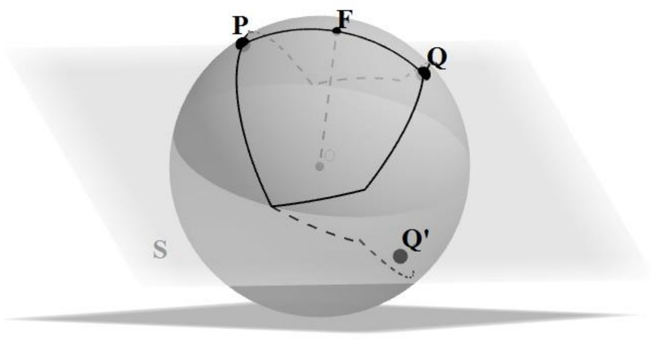
Kiterjesztés tetszőleges gömbi konvex lemezek kerületére:

Legyen L ilyen lemez, $\rho \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tetszőleges szám. A korábbi módszerrel közelítsük L-et minden határon túl S_n gömbi konvex sokszögek sorozatával. Ekkor az $(S_n)_\rho$ paralleltartományok sorozata az L_ρ paralleltartományhoz fog tartani, ami érvényes a duálisaikra is. Tehát a kerületeikre korábban megkapott $(k_n)_\rho = k_n^* \cdot \sin\rho + k_n \cdot \cos\rho$ képlet a benne szereplő sorozatok határértékeire is igaz lesz, vagyis tetszőleges L gömbi konvex lemez L_ρ paralleltartományára igaz lesz a $k_\rho = k^* \cdot \sin\rho + k \cdot \cos\rho$ egyenlőség. Ugyanilyen módszerrel az L_ρ területére megkapható az alábbi összefüggés:

$$t_\rho = 2\pi + k \cdot \sin\rho - k^* \cdot \cos\rho, \text{ minden } \rho \in [0; \tfrac{\pi}{2}] \text{ szám esetén.}$$

3.2.4. A gömbi izoperimetrikus egyenlőtlenség bizonyítása

A 3.2. fejezetben már beláttuk, hogy $k \geq 2r\pi$ esetben igaz a $t_1 \cdot t_2 \leq r^2 \cdot k^2$ egyenlőtlenség. Azt kell megvizsgálnunk, hogy $k < 2r\pi$ esetben is teljesül-e. Legyen adott az egységgömb felületén egy $k < 2\pi$ hosszú zárt görbe. (22. ábra) Válasszunk két pontot (P és Q) a görbén, amik azt két egyenlő hosszú ívre bontják fel. Mivel $k < 2\pi$, így a P és Q által meghatározott ívek hossza legfeljebb ennek a fele: $d(PQ) < \pi$. Tehát P és Q nem átellenes pontok.



22. ábra

A PQ gömbi szakasz felezőpontját jelöljük F-fel, és tekintsük az O-n átmenő, OF egyenesre merőleges S síkot. Azt állítjuk, hogy a görbének nincsen közös pontja az S síkkal, vagyis félgömbnél kisebb.

Indirekt tegyük fel, hogy a görbének létezik egy olyan R pontja, ami az S síkba esik. Az RQ ívet az S síkra tükrözve megkapjuk az RQ' ívet. A PRQ' ív folytonos, és hossza megegyezik a PRQ ív hosszával, vagyis a görbe teljes hosszának a felével.

A P és Q' pontok átellenesek, ugyanis a P-ből a Q' megkapható a P pont OF egyenesre, majd az S síkra való tükrözésével, vagyis a P pont O-ra vonatkozó középpontos tükrözésével. Ez alapján a PRQ' ív, és így a PRQ ív is egyenlő lesz π-vel. Ez viszont lehetetlen, mert a PRQ ív a görbe hosszának a fele, vagyis π-nél kisebb.

Az eredeti görbének tehát nincs közös pontja az S síkkal, teljes egészében az egyik általa határolt félgömbön belül fekszik. Így az egységgömbre írt, 2π-nél rövidebb, egyszerű zárt görbe által határolt két gömbi tartomány közül az egyik területe félgömbnél kisebb.

A 3.2-ben tett észrevételünk szerint elegendő erről az idomról bizonyítanunk, hogy a területe kisebb, mint az azonos kerületű gömbsüvegé. Sőt, a síkbeli esethez hasonlóan elég az idom konvex burkára bizonyítani az állítást.

Ha az egységgömb felületén elhelyezkedő gömbi konvex lemez kerületét k-val, a területét pedig t-vel jelöljük, akkor elég a bizonyítandó $t_1 \cdot t_2 \leq r^2 \cdot k^2$ egyenlőtlenséggel egyenértékű $t \cdot (4\pi - t) \leq k^2$ egyenlőtlenséget bizonyítani.

Átrendezve, és $4\pi^2$-et hozzáadva mindkét oldalhoz, teljes négyzetté alakítható:

$$4\pi^2 \leq (2\pi - t)^2 + k^2$$

Felhasználva 3.2.2. fejezetben, a dualitás vizsgálatakor kapott $2\pi - t = k^*$ egyenlőséget:

$$4\pi^2 \leq (k^*)^2 + k^2$$

Tekintsük a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz egyenlőtlenséget, vagyis, hogy tetszőleges x, y, u, v valós számokra igaz az alábbi összefüggés:

$$(xu - yv)^2 \leq (x^2 + y^2) \cdot (u^2 + v^2)$$

Válasszuk x, y, u, v számokat a következőképp: $x = k^*$, $y = k$, $u = \sin\rho$, $v = \cos\rho$. Ezeket behelyettesítve a CBS-egyenlőtlenségbe:

$$(k^* \cdot \sin\rho + k \cdot \cos\rho)^2 \leq ((k^*)^2 + k^2) \cdot (\sin^2\rho + \cos^2\rho)$$

Vegyük a 3.2.3-ban kapott, paralleltartományokra vonatkozó $k_\rho = k^* \cdot \sin\rho + k \cdot \cos\rho$ egyenlőséget. Ez alapján a fenti egyenlet baloldala éppen k_ρ^2, vagyis a $k_\rho^2 \leq ((k^*)^2 + k^2)$ egyenlőtlenség minden $\rho \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tetszőleges számra fennáll.

Ezt összevetve a korábban kapott, bizonyítandó $4\pi^2 \leq (k^*)^2 + k^2$ egyenlőtlenséggel, elég, ha $k_\rho^2 \geq 4\pi^2$ teljesül, vagyis olyan ρ-t kell találnunk, hogy az adott L gömbi konvex lemez ρ sugarú L_ρ paralleltartományának a kerülete:

$$k_\rho \geq 2\pi.$$

Kezdjük el a ρ sugarat 0-tól a lehetséges $\frac{\pi}{2}$ -ig folyamatosan növelni. A $\rho = 0$ pillanatban L_ρ egybeesik az L idommal, majd az L_ρ görbe határvonala folyamatos mozgással átkerül az L^* duális gömbi konvex lemez határával egybeeső véghelyzetbe. Ezzel azonban folyamatos mozgással átkerül az őt addig nem tartalmazó félgömbre, vagyis van egy olyan pillanat, amikor a görbe hossza nagyobb, mint a gömb egyenlítője.

Ennek a bizonyításához gondoljunk vissza arra a korábbi megállapításra, hogy a 2π-nél rövidebb gömbi zárt görbék területe félgömbnél kisebb. A $\rho = 0$ pillanatban az L_ρ idom területe kisebb, mint a félgömb felszíne, vagyis 2π. A $\rho = \frac{\pi}{2}$ határhelyzetben viszont már 2π-nél nagyobb, mert a komplementerének, L^*-nak ugyancsak 2π-nél kisebb a területe. Tehát van egy olyan közbülső pillanat, amikor az L_ρ határgörbéje felezi a gömb felszínét, ekkor azonban a görbe nem lehet félgömbnél kisebb, vagyis a hossza sem lehet 2π-nél kisebb.

A 3.2.3. fejezetben, a paralleltartományok területére kapott $t_\rho = 2\pi + k \cdot \sin \rho - k^* \cdot \cos \rho$ összefüggés alapján ez a ρ is kiszámolható, ugyanis a terület akkor lesz egyenlő 2π-vel, ha teljesül az alábbi:

$$k \cdot \sin \rho = k^* \cdot \cos \rho.$$

Vagyis $\mathrm{tg}\, \rho = \frac{k^*}{k}$, amiből:

$$\rho = \mathrm{arctg}\left(\frac{k^*}{k}\right).$$

Ezzel tehát beláttuk a gömbi izoperimetrikus egyenlőtlenséget, vagyis gömbön is igaz, hogy azonos kerületű gömbi lemezek közül az adott kerületű gömbsüvegnek (gömbi körlapnak) van a legnagyobb területe.

4. Fejezet

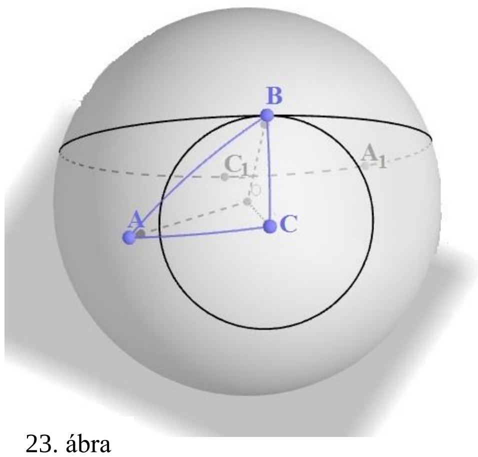
Gömbháromszögekre vonatkozó szélsőérték-feladatok megoldása

Az alábbiakban szereplő minimális kerület és maximális terület létezése a Weierstrass-tételből következik: vagyis, hogy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát. A kerület és a terület a csúcsokba mutató vektorok koordinátáinak függvényeként kapható meg. Ennek részletesebb tárgyalása túlmutat a dolgozat keretein, azonban azt fontos megjegyezni, hogy az alábbiakban keresett minimális kerület és maximális terület minden esetben létezik.

4.1. Maximális terület adott két oldal esetén

Feladat: Ha adott egy ABC gömbháromszög $a = BC$ és $b = AC$ oldala, mekkorára válasszuk az általuk közbezárt γ szöget, hogy a háromszög területe maximális legyen?

Szimmetriai okokból az ábrán látható módon rögzíthetjük a háromszög adott hosszúságú AC oldalát, és elég ehhez képest vizsgálni a B csúcs elhelyezkedését, hogy a háromszög területe maximális legyen. Ehhez rajzoljuk be az C középpontú, d(C, B) sugarú k kört, ezen helyezkedik el a háromszög B csúcsa. A keresett B csúcshoz tartozó Lexell-körnek egy vagy két közös pontja lehet a k körrel, annak megfelelően, hogy a Lexell-kör metszi vagy érinti a k kört. Ha két közös pontjuk van, akkor a Lexell-kör közelebb van az AC oldalhoz, vagyis a 2.2.4.-ben kapott egyenlőtlenség miatt a terület kisebb. A legnagyobb tehát akkor lesz a terület, ha a Lexell-kör érinti a k kört. (Ugyancsak a szimmetria miatt természetesen két ilyen B csúcs lehetséges, amit a két Lexell-kör határoz meg.)



23. ábra

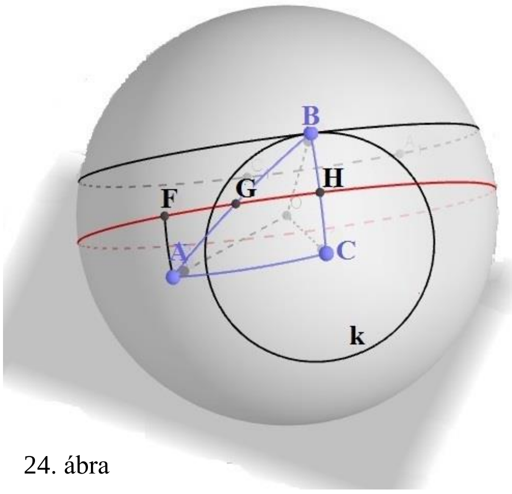
Hogyan szerkeszthető meg ez a háromszög?

Vegyük fel az AC oldalt, és a C középpontú, |BC| sugarú k kört, illetve szerkesszük meg az A és C csúcsok átellenes pontjait (A_1, C_1). Mivel a Lexell-kör érinti a k kört a B pontban, a középpontjai a BC oldalt tartalmazó főkörön vannak rajta. A Lexell-kör sugara tehát: $r = \frac{\pi \pm |BC|}{2}$. (A plusz vagy mínusz attól függ, hogy a kör melyik középpontját nézzük. Szerkesztésnél mindegy, hogy melyiket választjuk, viszont az így kapott középpontból is ugyanakkora sugarú kört kell majd rajzolni.)

Az A_1 és C_1 középpontú, r sugarú körök metszéspontjai lesznek a Lexell-körök középpontjai (L_1, L_2), és az L_1, L_2 középpontú, r sugarú körök k körrel vett metszéspontjai lesznek a keresett (B, illetve annak AC-re vett tükörképe: B') csúcsok. (A Lexell-körök másik középpontjai L_1 és L_2 átellenesei.

Állítás: Adott BC és AC oldalak esetében annak a háromszögnek lesz maximális a területe, aminek szögeire igaz, hogy: $\alpha + \beta = \gamma$.

Bizonyítás: Vegyük fel az AB oldal felezőpontját (G), és a BC oldal felezőpontját (H), illetve az ezeken átmenő főkört (24. ábra). A 2.2.4. fejezetben, a Lexell-körre vonatkozó 2. bizonyításnál láttuk, hogy ennek a főkörnek a síkja párhuzamos a Lexell-körével. Mivel a Lexell-kör érinti a k kört, így síkja merőleges a k kör C középpontjából B érintési pontba húzott sugarára (vagyis a BC oldalra). Így a G és H pontokon keresztül húzott főkörre is merőleges a BC oldal.



24. ábra

A korábban látott módon daraboljuk át az ABC háromszöget a vele megegyező területű Saccheri-négyszöggé. A B csúcsból állított merőleges talppontja megegyezik a C-ből állított merőleges talppontjával, vagyis H-val, így az átdarabolás jelen esetben a BHG háromszög G pontra való centrális tükrözését jelenti. Emiatt az AFG háromszög A csúcsánál lévő szöge megegyezik az ABC háromszög B csúcsnál lévő β szögével. Az ACHF Saccheri-négyszögben tehát az A csúcsnál lévő szög: $\alpha + \beta$, ami megegyezik a C csúcsnál lévő γ szöggel. Az ABC háromszög szögeire tehát igaz, hogy $\alpha + \beta = \gamma$.

Konkrét esetben, ha adott az a és b oldalak nagysága, hogyan számoljuk ki a közbezárt szöget, hogy a terület maximális legyen?

A gömbháromszög területére vonatkozó $T = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ képletből kiindulva a terület akkor lesz maximális, ha a háromszög szögeinek összege maximális lesz. Mivel a háromszög adatai közül két oldalt ismerünk, ezért a gömbi koszinusz-tétel oldalakra vonatkoztatott képletei alapján próbáljuk a szögek összegét meghatározni.

I. $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$

II. $\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta$

III. $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$

Ezekből átalakítással kifejezhetjük az egyes szögeket:

I. $\cos \alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}\right)$

II. $\cos \beta = \dfrac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \rightarrow \beta = \arccos\left(\dfrac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}\right)$

III. $\cos \gamma = \dfrac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} \rightarrow \gamma = \arccos\left(\dfrac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}\right)$

A három egyenletet összeadva megkaphatjuk a szögek összegét, ennek keressük a maximumát. Mivel a gömbháromszögek belső szögei 0 és π közé esnek, így ezek vizsgálatát elég erre az intervallumra korlátozni, ahol:

$$-1 < \cos x < 1 \text{ és } 0 < \sin x \leq 1$$

$$f(c) = \arccos\left(\frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}\right) + \arccos\left(\frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}\right) +$$

$$+ \arccos\left(\frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}\right) = \alpha + \beta + \gamma$$

Ennek a függvénynek a maximumhelyét keressük (a és b rögzített számok). Az f(c) függvény ott veheti fel a szélsőértékeit, ahol az első deriváltja egyenlő nullával. A feladatmegoldás elején, a Lexell-körre vonatkozó gondolatmenetből látszik, hogy mivel f(c) = 0-nál a terület 0, majd folyamatosan növekszik egy pontig, onnantól kezdve pedig f(c) = π-ig folyamatosan csökken, míg ismét el nem éri a nullát, a függvénynek a vizsgált $[0, \pi]$ intervallumban (az intervallum két végpontjában lévő minimumhelyen kívül) egyetlen szélsőértéke lesz, ami maximum. Az egyszerűség kedvéért a $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ kifejezéseket csak később helyettesítjük be.

Az arccos x függvény deriváltja: $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(c) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \cdot (\cos\alpha)' - \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\beta}} \cdot (\cos\beta)' - \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\gamma}} \cdot (\cos\gamma)' = 0$$

$$f'(c) = -\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha}} \cdot (\cos\alpha)' - \frac{1}{\sqrt{\sin^2\beta}} \cdot (\cos\beta)' - \frac{1}{\sqrt{\sin^2\gamma}} \cdot (\cos\gamma)' = 0$$

Mivel $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma > 0$:

$$f'(c) = -\frac{1}{\sin\alpha} \cdot (\cos\alpha)' - \frac{1}{\sin\beta} \cdot (\cos\beta)' - \frac{1}{\sin\gamma} \cdot (\cos\gamma)' = 0$$

A szinusz-tételt felhasználva kifejezzük $\sin\alpha$-t és $\sin\beta$-t $\sin c$ és $\sin\gamma$ segítségével:

$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \sin\gamma$ és $\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \sin\gamma$

Illetve $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kifejezésekbe behelyettesítünk, és elvégezzük a deriválást:

$$(\cos\alpha)' = \left(\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}\right)' = \frac{\cos a}{\sin b} \cdot \left(\frac{1}{\sin c}\right)' - \frac{\cos b}{\sin b} \cdot \left(\frac{\cos c}{\sin c}\right)' =$$

$$= -\frac{\cos a}{\sin b} \cdot \frac{\cos c}{\sin^2 c} - \frac{\cos b}{\sin b} \cdot \left(\frac{-\sin c \cdot \sin c - \cos c \cdot \cos c}{\sin^2 c}\right) =$$

$$= \frac{\cos b}{\sin b} \cdot \frac{1}{\sin^2 c} - \frac{\cos a}{\sin b} \cdot \frac{\cos c}{\sin^2 c}$$

Hasonlóan:

$$(\cos\beta)' = \frac{\cos a}{\sin a} \cdot \frac{1}{\sin^2 c} - \frac{\cos b}{\sin a} \cdot \frac{\cos c}{\sin^2 c}$$

$$(\cos\gamma)' = \left(\frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}\right)' = \frac{1}{\sin a \cdot \sin b} \cdot (\cos c)' = -\frac{1}{\sin a \cdot \sin b} \cdot \sin c$$

f '(c)-be való behelyettesítés után:

$$f'(c) = -\frac{1}{\frac{\sin a}{\sin c} \cdot \sin\gamma} \cdot \left(\frac{\cos b}{\sin b} \cdot \frac{1}{\sin^2 c} - \frac{\cos a}{\sin b} \cdot \frac{\cos c}{\sin^2 c}\right) - \frac{1}{\frac{\sin b}{\sin c} \cdot \sin\gamma} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\cos a}{\sin a} \cdot \frac{1}{\sin^2 c} - \frac{\cos b}{\sin a} \cdot \frac{\cos c}{\sin^2 c}\right) + \frac{1}{\sin\gamma} \cdot \left(\frac{1}{\sin a \cdot \sin b} \cdot \sin c\right) = 0$$

A $\sin\gamma$ -val való beszorzás, és a zárójelfelbontás után:

$$\frac{\cos a \cdot \sin c \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 c} - \frac{\cos b \cdot \sin c}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 c} + \frac{\cos b \cdot \sin c \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 c} - \frac{\cos a \cdot \sin c}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 c} +$$

$$+ \frac{\sin c}{\sin a \cdot \sin b} = 0$$

Egyszerűsítés, és a nevezővel való beszorzás után ($\sin a, \sin b, \sin c \neq 0$):

$$\cos a \cdot \cos c - \cos b + \cos b \cdot \cos c - \cos a + \sin^2 c = 0 \qquad (\sin^2 c = 1 - \cos^2 c)$$

$$\cos^2 c - (\cos a + \cos b) \cdot \cos c + (\cos a + \cos b - 1) = 0$$

$$(\cos c = x, (\cos a + \cos b) = k)$$

$$x_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k-1)}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot k + 4}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{(k-2)^2}}{2} = \frac{k \pm |k-2|}{2}$$

$k - 2 > 0$ nem lehetséges, mert akkor $\cos a + \cos b - 2 > 0$, vagyis $\cos a + \cos b > 2$, ami lehetetlen.

$$x_{1,2} = \frac{k \pm (-k+2)}{2} \rightarrow \frac{2}{2} = 1; \frac{2 \cdot k - 2}{2} = k - 1$$

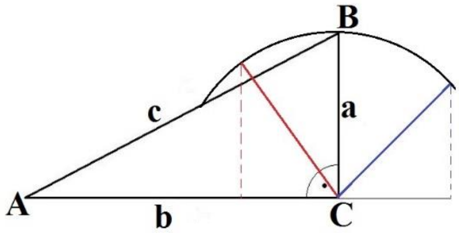
$$x_1 = 1; x_2 = k - 1;$$

A kapott megoldások közül $x = \cos c$ nem lehet 1, mert $c > 0$. A megoldás tehát csak a $\cos c = k - 1$, vagyis: $\cos c = \cos a + \cos b - 1$.

Ezt visszahelyettesítve a $\cos \gamma = \dfrac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$ egyenletbe, megkapjuk a közbezárt szöget. Ez két γ-t határoz meg, de mivel $\cos \gamma = \cos(-\gamma)$, az egyik nagyobb, mint π, így a megoldás egyértelmű.

A megoldás síkháromszögek esetével való kapcsolata:

Feladat: Ha adott síkon egy háromszög a és b oldala, mekkorának válasszuk a közrezárt szöget, hogy a terület maximális legyen?



25. ábra

Ha a b oldalt rögzítjük, akkor a B csúcs egy C középpontú, $|a|$ sugarú körön mozog (25. ábra). Mivel a háromszög területe az egyik oldal, és a hozzátartozó magasság szorzatának a fele, ezért ez akkor lesz maximális, ha a rögzített b oldalhoz tartozó magasság éppen az a oldal lesz, ugyanis akármilyen irányba elmozdulunk a köríven, a magasság csökkenni fog. A megoldás tehát az a és b befogójú derékszögű háromszög.

A 2.1. fejezetben szerepelt, hogy ha a B és C csúcs gömbi távolsága a, akkor a köztük lévő térbeli a^* távolság a következőképpen kapható meg: $a^* = 2 \cdot \sin\left(\frac{a}{2}\right)$.

$$\text{Ebből: } (a^*)^2 = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

A maximális területű gömbháromszög oldalaira kapott összefüggést tovább alakíthatjuk:

$$\cos c = \cos a + \cos b - 1$$

Kétszeres szög szögfüggvényeire vonatkozó átalakítás után:

$$2 \cdot \cos^2\left(\frac{c}{2}\right) - 1 = 2 \cdot \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1 + 2 \cdot \cos^2\left(\frac{b}{2}\right) - 1 - 1$$

$$1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{c}{2}\right) = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) + 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{b}{2}\right) - 1$$

$$2 \cdot \sin^2\left(\frac{c}{2}\right) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) + 2 \cdot \sin^2\left(\frac{b}{2}\right)$$

$$4 \cdot \sin^2\left(\frac{c}{2}\right) = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) + 4 \cdot \sin^2\left(\frac{b}{2}\right)$$

Ezzel pont megkaptuk a csúcsok közötti síkbeli távolságokat, amiket behelyettesítve a Pitagorasz-tételhez jutunk:

$$(c^*)^2 = (a^*)^2 + (b^*)^2$$

Tehát, ha a gömbön az A, B, C csúcsok maximális területű háromszöget határoznak meg, akkor az általuk meghatározott síkbeli háromszög derékszögű, vagyis az is maximális területű.

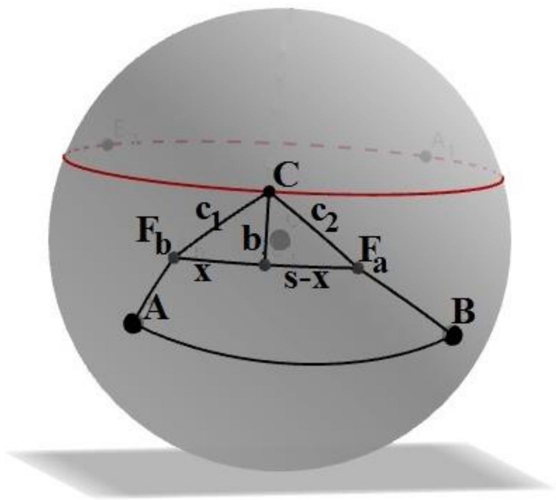
Ez alapján adott két gömbi oldalhosszhoz úgy is megkaphatjuk a maximális területű gömbháromszöget, ha kiszámoljuk az oldalhosszokhoz tartozó térbeli távolságot, és azokból Pitagorasz tétellel meghatározzuk a harmadik síkháromszög oldalt, amiből kiszámolhatjuk a gömbháromszög harmadik oldalát.

4.2. Adott terület, minimális kerület – adott kerület, maximális terület

Feladat: Ha adott az ABC gömbháromszög területe, hogyan válasszuk meg az oldalakat, hogy a kerület minimális legyen?

A síkbeli bizonyítás úgy kezdődött, hogy a háromszög területe akkor lesz állandó, ha az AB oldalhoz tartozó magasság állandó, tehát húzzunk az AB oldallal párhuzamost, tőle m_c távolságra. Gömbön azonban nem tudunk párhuzamost húzni, illetve a háromszög területét is másképp számoljuk ki, mégis hasonló úton elindulhatunk.

A 2.2.4. fejezetben már láttuk, hogy ha rögzített az AB oldal és a terület, akkor az összes lehetséges C csúcs a két Lexell-kör megfelelő ívén van rajta. Ezek közül most csak az egyiket nézzük, természetesen annak AB-re vett tükörképe is megoldás. Tudjuk még azt is, hogy ha vesszük az AC és BC oldal felezőpontjait (F_b-t és F_a-t), akkor az őket összekötő szakasz, vagyis az AB-hez tartozó középvonal minden lehetséges háromszög esetén ugyanolyan távolságra lesz a Lexell-körtől (a síkja párhuzamos a Lexell-körével). (26. ábra)



26. ábra

A síkbeli esettel ellentétben nem igaz, hogy a középvonal hossza a hozzátartozó oldal hosszának a fele, sőt, egy rögzített oldal esetén az őt tartalmazó különböző háromszögekben a hozzátartozó középvonal hossza is változó lehet. Tekintsük azonban a 2.2.5-ös fejezetben leírt, a középvonal és terület kapcsolatára vonatkozó alábbi összefüggést:

$$\cos\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{\cos k(c)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)}$$

Látható, hogy állandó terület, és állandó c oldalhossz mellett a k(c) középvonal hosszának is állandónak kell lennie, minden lehetséges háromszög esetén. Ezt a hosszt jelölje s.
Mivel az AB oldal hossza állandó, a minimális kerülethez elég az AC + BC hosszt tekinteni, sőt, mivel $AF_b = F_bC$, és $BF_a = F_aC$, ezért elég csak az $F_bC + F_aC$ összegnek minimálisnak lenni. Ezeket jelölje c_1 és c_2. Akárhol helyezkedik egy a C csúcs a Lexell-köríven, a középvonal egyenesére mindenhonnan állítható belőle egy állandó b hosszúságú merőleges. Elegendő a C-ből az F_a-ra állított merőleges és a C-ből az F_b-be állított merőleges között létrejövő háromszögeket vizsgálni, mert ha például az F_b-nél lévő szög már tompaszög, akkor a c_1 és c_2 oldal biztosan hosszabb annál, mint amikor az F_b-nél derékszög van, és ez ugyanígy igaz a másik oldalra is.
Ezeken a határokon belül maradva a C-ből a középvonalra húzott merőleges a középvonalat egy x, és egy s – x hosszúságú szakaszra bontja, illetve keletkezik két darab derékszögű háromszög, amiknek az átfogói c_1 és c_2.
A 2.1-ben szerepelt a koszinusz-tétel speciális esete derékszögű háromszögek esetén:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$

Ebből c_1 és c_2 kifejezhető:

$$\cos c_1 = \cos x \cdot \cos b$$

$$\cos c_2 = \cos(s - x) \cdot \cos b$$

Vagyis a $c_1 + c_2$ minimumát az alábbi függvény minimuma adja meg:

$$f(x) = \arccos(\cos x \cdot \cos b) + \arccos(\cos(s - x) \cdot \cos b)$$

Nézzük meg, hogy az f '(x) hol vesz fel nulla értéket:

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - (\cos b \cdot \cos x)^2}} \cdot (\cos b \cdot \cos x)' - \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos b \cdot \cos(s - x))^2}} \cdot (\cos b \cdot \cos(s - x))' = 0$$

$$\frac{\cos b \cdot \sin(s - x)}{\sqrt{1 - (\cos b \cdot \cos(s - x))^2}} = \frac{\cos b \cdot \sin x}{\sqrt{1 - (\cos b \cdot \cos x)^2}} \qquad (\cos b \neq 0)$$

$$\frac{1 - \cos^2(s - x)}{1 - (\cos b \cdot \cos(s - x))^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - (\cos b \cdot \cos x)^2}$$

Az egyenlet két oldala csak akkor egyezhet meg, ha $\cos^2 x = \cos^2(s - x)$.

$$|\cos x| = |\cos(s - x)|$$

Ahhoz, hogy a két háromszögoldal összege – vagyis s – kisebb legyen π-nél, a fenti egyenletnek csak az az esete lehetséges, amikor cos x = cos (s – x), és mindkét megoldás az első síknegyedbe esik. Vagyis:

$$x = s - x$$

Tehát a c_1+c_2 összeg akkor a legkisebb, ha $c_1 = c_2$, vagyis az F_aF_bC háromszög egyenlőszárú. Így az eredeti ABC háromszögnek is akkor lesz minimális a kerülete rögzített AB oldal mellett, ha egyenlőszárú a háromszög. Ha azonban egyik oldalt sem rögzítjük, a szabályos háromszöget kapjuk megoldásként, ugyanis, ha valamelyik két oldal nem lenne egyenlő, a fenti gondolatmenet alapján, a harmadik oldalt rögzítve csökkenteni tudnánk a kerületet, ha a rögzített oldalhoz tartozó Lexell-köríven úgy tolnánk egy a háromszög rajta lévő csúcsát, hogy a hozzá tartozó két oldal egyenlővé váljon.

Síkon erre a feladatra ugyancsak a szabályos háromszög jön ki, mint megoldás.

Feladat: Állandó kerület mellett mikor lesz maximális a terület?

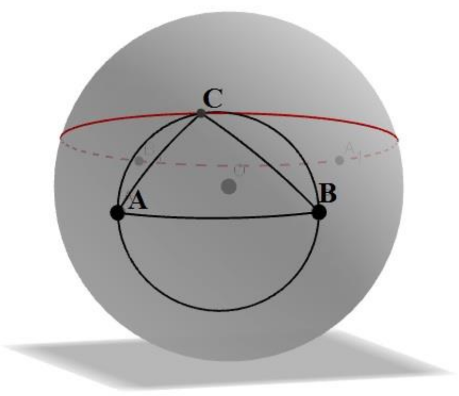
Tekintsük először is a 3.2.2. fejezetben kapott összefüggést a háromszög és duálisa (vagyis a polárháromszöge között):

$$t + k^* = t^* + k = 2\pi$$

Az előző feladat megoldásaként azt kaptuk, hogy rögzített t terület mellett a szabályos háromszög esetén lesz a k kerület minimális. Szabályos háromszögnek a polárháromszöge is szabályos. Vagyis, ha az eredeti háromszög t területe rögzített volt, akkor a $t + k^* = 2\pi$ összefüggés alapján a polárháromszögének kerülete is rögzített. Ha viszont az eredeti háromszög k kerülete minimális, akkor a $t^* + k = 2\pi$ összefüggés alapján a polárháromszög területe maximális. Tehát adott kerület mellett a szabályos háromszögnek lesz a legnagyobb a területe. Ez is megegyezik a síkbeli eset megoldásával.

4.3. Maximális terület adott körbe írt háromszögek között

Feladat: Adott körbe írható háromszögek közül melyiknek lesz a legnagyobb a területe?



27. ábra

Rögzítsük először az AB oldalt a kör tetszőleges húrjaként, és csak a másik két oldal függvényében vizsgáljuk a területet. (27. ábra) A

2.2.4. alapján, ha a C csúcs egy adott Lexell-köríven van, mindig egyenlő területű háromszögeket kapunk, ha a Lexell-kör és az AB oldal főköre által határolt, ABC-t tartalmazó tartományon belül, akkor ennél kisebbeket, ha ezen kívül, akkor nagyobbakat. Az a Lexell-kör, ahol a legnagyobb a terület, miközben a C csúcs rajta van az előre megadott körön is, éppen érinti ezt a kört, méghozzá az AB oldal felezőmerőlegesének a körrel vett metszéspontjában.
Rögzített AB oldal mellett tehát az egyenlőszárú háromszögnek a legnagyobb a területe. Az előző feladat megoldásához hasonlóan, ha nem rögzítjük a háromszög egyik oldalát sem, akkor a szabályos háromszöget kapjuk megoldásként. Ez a megoldás is megegyezik a síkbeli esettel.

Tovább lehet gondolni, hogy mi a helyzet például négyszögek esetén, vagy akár bármilyen n-szögre általánosítva. Melyik feladat hogyan fogalmazható át, megoldható-e ugyanígy, vagy valamilyen más módszerrel.

5. Fejezet

Befejezés

Dolgozatomban a síkon is ismert egyenlőtlenségek gömbi megfelelőit mutattam be, eleinte teljesen az euklideszi geometria ismereteire támaszkodva, ezzel belátva, hogy a gömbi geometria sem egy teljesen új, elhatárolt anyagrész, hanem nagyon is kapcsolódik az eddig tanultakhoz. Bár elsőre szokatlan lehet, hogy például a gömbháromszög szögösszege változó, kiderült, hogy mégis nagyon sokban hasonlít a síkháromszögekre: ugyanúgy igaz, hogy nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, teljesül rá a háromszög egyenlőtlenség, ráadásul euklideszi módszerekkel be lehet ezeket látni.

Ami újdonságot, és eleinte egy kis nehézséget okozott, hogy a gömbön nem teljesül a párhuzamossági axióma, amit síkon nagyon sokszor használunk szerkesztéskor, bizonyításkor. Mégsem szükséges teljesen elvetni a párhuzamosságot tartalmazó síkbeli alapötleteket, például kihasználható, hogy a gömbháromszög egy adott oldalához tartozó középvonalának (illetve annak főkörének) síkja párhuzamos az oldalhoz tartozó Lexell-kör síkjával. Ezen felül egy ilyen, axiómabeli különbség új gondolkodásmódok kialakítására is ösztönöz.

Az elméleti ismeretek elmélyítését a dolgozat végén megoldott feladatok segítették. Ezt a fejezetet szerettem a legjobban, mert itt láttam meg, hogy a szakirodalmat, és a konzultációk során feldolgozott elméleti ismeretanyagot hogyan lehet gyakorlatban is alkalmazni. Ezeknél a feladatoknál igyekeztem az euklideszi ismeretektől elvonatkoztatott – akár többféle – gömbi megoldást adni, majd ellenőrzésképpen a megoldást összevetni a síkbeli eset megoldásával. A saját számításaimat, illetve a feldolgozott anyagrészek megértését is itt tudtam ellenőrizni.

Úgy gondolom, hogy a többféle megközelítésű megoldási módszerek áttekintése segíthet megtalálni az adott feladathoz legkönnyebbet, illetve azt, ami magához a feladatmegoldóhoz a legközelebb áll. A szélsőérték-számítások pedig az életben is használhatók, akár geometria szintjén maradva, mondjuk építkezésnél a maximális kihasználtságra, vagy minimális anyagköltségre törekedve, akár különböző pénzügyi helyzetekben a maximális gazdaságosság vagy nyereség elérésekor.

Habár az oktatásban eddig nem kapott hangsúlyos szerepet, véleményem szerint a gömbi geometria alapfogalmaival már általános iskolában megismerkedhetnek a diákok (ha nem is a tanórán, de legalább azon kívül, szakkörön). A síkgeometriai definíciók alapján (például egyenes: két pont közötti legrövidebb távolság, kör: egy adott ponttól azonos távolságra lévő pontok halmaza, merőleges, háromszög stb.) megkereshetnék ezeket gömbön is, ami segítene mélyebben is megérteni magukat az alapfogalmakat.

Azt tapasztaltam, hogy a geometriában éppen az okozhatja az egyik nehézséget, hogy túlságosan magától értetődőnek tűnnek ezek a fogalmak, azonban a mélyebb megértésük nélkül nehéz később rájuk építeni az összetettebb bizonyításokat. A gömbön viszont kiderülne, hogy az egyenesek is körök, vagy például, hogy egy körnek két középpontja van, ami egyrészt érdekes felfedezés lehet a diákok számára, másrészt megmutatja, hogy bár egyszerűnek tűnnek ezek az alapfogalmak, mégsem annyira magától értetődőek.

A sík végtelensége is elsőre nehezen elképzelhető az ezzel még csak ismerkedő diákoknak. Ezzel szemben például a gömböt a rajta lévő merőlegesek valóban négy egyenlő (véges) területű részre osztják, érdemes lehet először ezzel megismerkedni. A félsík fogalma is érthetőbb, ha először gömbön húzunk be egy egyenest, és mutatjuk meg, hogy az két egyenlő félgömbre osztja a gömböt. Így sík esetén is beszélhetünk egy egyenes által meghatározott két félsíkról, még ha azok területét, egésszel való viszonyát nem is tudjuk így behatárolni.

A dolgozatban szereplő bonyolultabb (geometriai) bizonyításokat el tudnám képzelni középiskolás szakkörökön, ugyancsak a többféle szemléletmód fejlesztése érdekében, illetve az önálló felfedezések pozitív élménye miatt. Az analitikus megoldások pedig jó gyakorlatok lehetnek a felsőfokú tanulmányok során.

Felhasznált irodalom

- Csikós Balázs: Gömbi geometria. In: Új matematikai mozaik. Szerk.: Hraskó András. Typotex Kiadó, Budapest. 2002. 337-373. p.
- Hajós György: Bevezetés a geometriába. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- Lénárt István: Nem-euklideszi geometriák az iskolában I., II. (saját jegyzeteim)
- Moussong Gábor: Izoperimetrikus egyenlőtlenségek és gömbi geometria. In: Új matematikai mozaik. Szerk.: Hraskó András. Typotex Kiadó, Budapest. 2002. 375-394. p.
- http://www.gombigeometria.eoldal.hu/cikkek/cikkeim_-verseim_-netes-leveleim/gombi-geometria-tanitasa-a-felso-tagozaton.html
- math.bme.hu/~ghorvath/**hajos**.ppt
- GeoGebra 5.0 rajzolóprogram In: www.geogebra.org (Telepítve: 2015. 11. 13.)