Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematika BSc – tanári szakirány

MÁSODRENDŰ GÖRBÉK ÉS FELÜLETEK

Szerző: Resch Borbála
Témavezető: Szeghy Dávid adjunktus
Geometriai Tanszék

2016

Tartalomjegyzék

A témaválasztás oka

Szakdolgozatom témájának kiválasztásakor praktikus és érzelmi okok miatt döntöttem a másodrendű görbék és felületek mellett. A geometriát már középiskolás koromban is szerettem, de igazán az egyetemen alakult ki a csodálattal teli érzés is mellé. A projektív geometria világa nagyon érdekes volt, sok újdonságot tudtam meg, mindeközben magaménak éreztem a témát is, amit sajnálatos módon nem tudtam elmondani minden egyes tantárgy minden egyes pillanatában a félévek során, így nyilvánvaló volt számomra, hogy a geometria tanszéken fogok konzulenst keresni. Az előadások során az egyik legemlékezetesebb felismerés az volt számomra, mikor a vonalfelületeket tanultuk. Lebilincselő volt az élmény, mikor szembesültem a ténnyel, hogy egy tengely körül forgatott, kitérő helyzetű egyenes egy felületet ad meg. Annyira egyszerű és mégis csodálatos. Különösen szívügyemnek érzem azt, hogy másokkal is megismertessem a matematika szépségeit, mert gyakran találkozom negatív hangvételű mondatokkal, mikor valaki a matek szót emlegeti. Nagyon érdekesnek és szépnek tartom, hogy a másodrendű görbék és felületek különböző módokon való felírásából sok dologra lehet következtetni, mintha csak egy kódot kellene megfejteni. A való életből vett példákkal pedig a természettudományok iránt kevésbé érdeklődők számára is érdekfeszítővé lehet tenni egy-egy egyenletet.

A szakdolgozat felépítése

A dolgozatom szerkezetében három rész különíthető el. Elengedhetetlen először is egy projektív geometria bevezető, hogy később egyszerűbben lehessen tárgyalni a görbék és felületek minden lehetséges esetét. Az ezt követő fejezetben a másodrendű görbék homogén koordinátás és mátrixos-, majd kanonikus alakban való felírása, a harmadik fejezetben pedig az előbbihez hasonló felépítésben a másodrendű felületek részletezése olvasható.

1. Projektív geometria bevezető

A projektív geometria kidolgozásának szükségességét főként a képzőművészet és az építészet sürgette, hiszen a térbeli elemek síkbeli ábrázolásához valamilyen vetítést kell alkalmazni. Ezek közül az egyik leggyakrabban alkalmazott a centrális (középpontos) vetítés, melynél a vetítősugarak egy közös pontból, centrumból indulnak ki. (Az emberi szem is gyakorlatilag a centrális vetítést használja: a térbeli tárgyakról érkező fénysugár a szemhártyán halad át, mely megváltoztatja annak az irányát, amit majd az agy megfordít még egyszer, így visszakapva az eredeti állást.) Az ideális pont bevezetése a perspektivikus ábrázolással kapcsolható össze. Egy fotón vagy helyesen szerkesztett tájképen megfigyelhető, hogy a párhuzamos egyenesek képe egy pontban ér össze. Ez a pont nem feleltethető meg a hagyományos tér egyik elemének sem.

Centrális vetítés alkalmazása során két sík között nem tudunk bijektív megfeleltetést végezni (lásd: [2]Verhóczky L.: Projektív geometria). Ezt kiküszöbölendő, az euklideszi teret kibővítjük további, úgynevezett ideális pontokkal. Az egymással párhuzamos egyenesekhez ugyanaz az ideális pont tartozik. Így a centrális vetítés már egy bijektív, egyenestartó leképezés lesz.

1.1. Ideális térelemek: ideális pont, egyenes, sík

A projektív teret az euklideszi tér kibővítéseként értelmezzük úgy, hogy a közönséges euklideszi teret tekintjük, majd ezt bővítjük ki ideális térelemekkel az alább definiált módon.

1.1.1. Definíció: Az euklideszi tér pontjait bővítsük ki új, úgynevezett ideális pontokkal oly módon, hogy minden közönséges e egyeneshez hozzárendelünk egy i_e-vel jelölt ideális (máshogy fogalmazva végtelen távoli) pontot. Párhuzamos egyenesekhez ugyanazt az ideális pontot rendeljük hozzá és nem párhuzamos egyenesekhez különböző ideális pontokat rendelünk. Így a kibővített térben a következő térelemeket kapjuk:

- **pontok:** a közönséges és az ideális pontok,
- **egyenesek:** a közönséges e egyenesek az ideális pontjukkal azaz $\bar{e} = e \cup i_e$, és a síkok ideális egyenesei, azaz ha σ egy sík, akkor $i_\sigma := \{i_e : e \in \sigma, e \; egyenes\}$

- **Síkok:** a közönséges síkok az ideális pontjaikkal együtt azaz $\overline{\sigma} = \sigma \cup \{i_e : e \in \sigma, e\ egyenes\}$ és az ideális sík, mely a tér összes ideális pontjának halmaza.

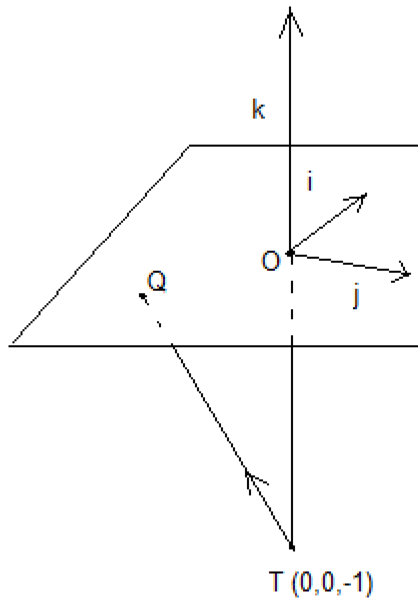
1.1.2.Állítás: A projektív térben az illeszkedésre vonatkozóan igazak az alábbi kijelentések.

- Két ponthoz egy és csak egy egyenes illeszkedik.
- Két síkhoz egy és csak egy egyenes illeszkedik.
- Ha adott egy egyenes és egy hozzá nem illeszkedő sík, akkor az egyenes és a sík metszete egyetlen pont.
- Ha két egyenes egyazon síkhoz illeszkedik, akkor a két egyenesnek van egy közös pontja.

Bizonyítás: Az 1.1.1. definíció egyszerű következménye, lásd [2].

1.2. A projektív sík sugárnyaláb modellje

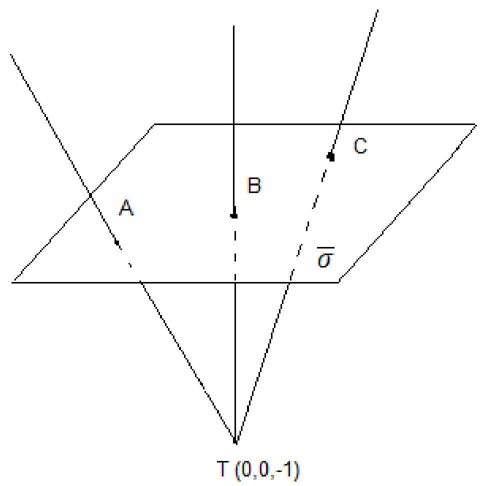
Ahhoz, hogy le tudjuk írni azokat az ideális térelemeket, amelyekkel dolgozni szeretnénk, szükségünk lesz egy modellre és egy ehhez tartozó koordináta rendszerre.
Tekintsünk egy $\overline{\sigma}$ kibővített közönséges síkot és legyen $O \in \overline{\sigma}$ egy közönséges pont. Legyen i,j,k egy olyan ortonormál bázis, ahol i,j párhuzamos $\overline{\sigma}$-val és i,j,k jobb rendszert alkot. Tekintsük az (O, i,j,k) által meghatározott koordináta rendszert, melyben a pontok koordinátáit (x_1, x_2, x_3) alakban fogjuk jelölni. Vegyük a T:=(0,0,-1) pontot, melyet tartópontnak is szoktak nevezni.
Tekintsük a $\overline{\sigma}$ sík egy tetszőleges Q pontját. T és Q pontok egyértelműen meghatároznak egy TQ egyenest, és minden T-n átmenő egyenes egyértelműen meghatároz egy Q pontot a $\overline{\sigma}$ síkon (lásd: 1.1.2. állítás). TQ-t meghatározhatjuk úgy, hogy megadjuk egy irányvektorát. Vigyázat ez az irányvektor nem egyértelmű, csak nem 0 számszorzó erejéig egyértelmű!



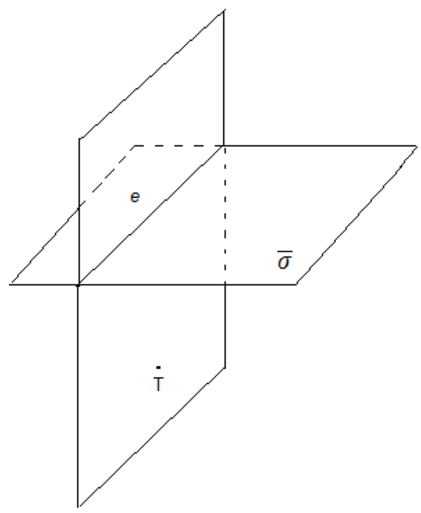
1. ábra

A modell pontjai az *T*-n áthaladó egyenesek. A modell egyenesei olyan egyeneshalmazok, amelyek valamely *T*-n átfektetett síkban fekvő, összes *T*-n áthaladó egyenesből állnak, azaz a *T*-n átmenő síkok.

Egy *T*-re illeszkedő síkot megadhatunk a normál vektorával, de ez is, mint az irányvektoros, csak egy nem 0 számszorzó erejéig egyértelmű!



2. ábra (pont a projektív síkon)



3. ábra (egyenes a projektív síkon)

A fenti definíció és tulajdonságok alapján belátható, hogy bármely két térelemre igaz, hogy van közös pontjuk, így leegyszerűsödnek az euklideszi axiómák.

- bármely két különböző egyenes, melyek azonos síkban fekszenek, 1 pontban metszik egymást;
- bármely sík és egy nem benne fekvő egyenes 1 pontban metszi egymást;
- bármely két különböző sík egy egyenesben metszi egymást.

A sugárnyaláb modell és a kibővített sík között bijektív megfeleltetés van:

Legyen T egy közönséges pont ($T \notin \overline{\sigma}$). Ekkor minden $\overline{\sigma}$ −beli ponthoz az 1.1.2. állítás miatt egyértelműen van *T*-re illeszkedő egyenes. Fordítva, a *T*-n áthaladó egyenesek mindegyikéhez hozzá tudunk rendelni egy σ-beli $\overline{\sigma}$ pontot az alábbi módon:

- Ha g egy olyan *T*-n áthaladó egyenes, mely nem párhuzamos σ-val, akkor
  $g \rightarrow g \cap \sigma$ közönséges pont lesz.
- Ha h egy olyan *T*-n áthaladó egyenes, mely párhuzamos σ-val, akkor
  $$h \rightarrow i_h \ (i_h \ \ ideális\ pont\ \in \overline{\sigma})$$
  Itt i_h a $\overline{h}$ projektív egyenes és a $\overline{\sigma}$ projektív sík metszéspontja.

Hasonlóan bijektív megfeleltetés van a projektív sík és az egyenesek között az 1.1.2. állítás miatt.

- Ha S egy olyan T-n áthaladó sík, mely nem párhuzamos $\overline{\sigma}$-val, akkor
  $S \rightarrow S \cap \overline{\sigma}$ közönséges sík lesz

- Ha S párhuzamos a $\overline{\sigma}$ síkkal, akkor$S \rightarrow i_{\overline{\sigma}}$, azaz az ideális egyenes lesz a két sík metszete

Miért jó a sugárnyaláb modell?

- homogén modell: nincs különbség közönséges és ideális térelemek között;
- lehetővé teszi a vektorok használatát, melyek segítségével bevezethetők a homogén koordináták (lásd: 1.6. fejezet).

Szükségünk lesz a későbbiekben az alábbi jelölésekre:

Ha *A* és *B* különböző pontok, akkor *A*-n és *B*-n áthaladó egyenes jelölése: AB

Ha *A* nem illeszkedik az *e* egyenesre, akkor az *e*-t és *A*-t tartalmazó síkot jelölje <e,A>

1.3. Vektorok használata a projektív geometriában

A fentebb leírt (1.2. fejezet) i, j, k vektorokkal meghatározott koordináta-rendszerben dolgozva definiáljuk a vektorokat. Az O pontot a $(0,0,0)$ koordináták határozzák meg, a $\overline{\sigma}$ síkon kívül levő T pont koordinátái pedig $(0,0,-1)$.

1.3.1. Definíció: Egy P pont **meghatározó vektorán** a *PT* egyenes egy tetszőleges $\underline{a}$ irányvektorát értjük.

Mint a tartópontos modellnél említettük, egy pont $P \in \overline{\sigma}$ pont meghatározásánál a PT egyenes irányvektora csak egy számszorzó erejéig egyértelmű. Hasonlóan a T-re illeszkedő síkok megadásánál a normál vektor sem egyértelmű, ezért vezessük be a következő ekvivalencia relációt:

1.3.2. Definíció: A $\underline{v}$ és $\underline{w}$ **vektorok**at **ekvivalens**nek mondjuk, ha létezik olyan k nem nulla szám, melyre $\underline{v} = k\underline{w}$. (Jelölésben $\underline{v} \sim \underline{w}$.) A $\underline{v}$ vektor által meghatározott T-re illeszkedő egyenes és a $\overline{\sigma}$ sík metszéspontját jelölje$[\underline{v}]$.

Ahhoz, hogy kijelenthessük, ekvivalenciarelációról van szó (jel.:~), három dolognak kell teljesülnie:

- Reflexív: Minden $\underline{a}\ -ra\ \underline{a} \sim \underline{a}$
- Szimmetrikus: Ha $[\underline{a}] \sim [\underline{b}], akkor\ [\underline{b}] \sim [\underline{a}]$
- Tranzitív: Ha $[\underline{a}\ ] \sim [b\ ]$ és $[\underline{b}\ ] \sim [c\ ]\ akkor\ [\underline{a}\ ] \sim [c\ ]$

A fenti jelöléseket alkalmazva, ha *A*,*B* $\in \overline{\sigma}$ és *A*=$[\underline{a}]$, *B*=$[\underline{b}\ ]$, akkor $A = B \Leftrightarrow [\underline{a}] = [\underline{b}] \Leftrightarrow \underline{b} = \lambda\underline{a}\ (valamilyen\ \lambda - val) \Leftrightarrow \underline{a}$ és $\underline{b}$ lineárisan összefüggő vektorok.

1.3.3 Definíció: Egy $f \in \sigma$ egyenes **meghatározó vektorán** az <f,O> euklideszi síknak egy tetszőleges $\underline{u}$ normálvektorát értjük ($\underline{u}$ merőleges erre a síkra és $\underline{u}\ \neq \underline{0}$). Ezen vektornak az *i*,*j*,*k* bázisra vonatkozó koordináta-hármasait az *e* egyenes homogén koordinátáinak nevezzük. Ekkor az *f* egyenest megadhatjuk az $f\ = [\underline{u}]_e$ jelöléssel is a modellünkben.

Megint $e = [u]_e$–ra és $f = [v]_f$–re, ha $e = f \Leftrightarrow [u]_e = [v]_f \Leftrightarrow [\underline{u}\ ] = \lambda\underline{v}$ $(valamilyen\ \lambda - val) \Leftrightarrow\ \underline{u}$ és $\underline{v}$ lineárisan összefüggnek.

1.4. Ideális térelemek vektorokkal: ideális pont, egyenes, sík

1.4.1. *Definíció:* Egy $P \in \overline{\sigma}$ pont meghatározó vektorainak az i, j, k bázisra vonatkozó koordináta–hármasait mondjuk a P **pont homogén koordinátái**nak. Azaz a homogén koordináta is egy ekvivalencia osztály lesz igazából és egy reprezentánsa nem nulla szám szorzó erejéig egyértelmű csak. Hasonlóan egy $f \in \overline{\sigma}$ egyenes meghatározó vektorainak az i, j, k bázisra vonatkozó koordináta–hármasait mondjuk az f **egyenes homogén koordinátái**nak.

Például, ha az e egyenessel párhuzamos $\underline{v}$ vektort az i, j, k bázisban felírva $\underline{v} = v_1 i + v_2 j + 0k$, akkor a fenti definíció szerint az i_e pont homogén koordinátái a $(\lambda v_1, \lambda v_2, 0)$ (ahol $\lambda \in$R, $\lambda \neq 0$) számhármasok lesznek.

1.4.2. *Megjegyzés:* A projektív sík ideális pontjainak a harmadik koordinátája tehát mindig 0.

Ha $\underline{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$, ahol $\underline{v}$ nem $\underline{0}$ vektor, akkor $P := [\underline{v}]$ által meghatározott pont homogén koordinátáját (mely mint mondtuk egy ekvivalencia osztály) jelölje $(v_1 i : v_2 j : v_3 k)$ utalva arra, hogy csak ez egyes komponensek aránya számít. Hasonlóan az f=$[\underline{v}]_e$ egyenes homogén koordinátáit jelölje $(v_1 i : v_2 j : v_3 k)_e$.

Tegyük fel, hogy adva van az $e \in \overline{\sigma}$ egyenes egy $P\ (x_P, y_P)$ pontja és egy σ–val párhuzamos $\underline{m} = ai + bj$ vektor, amely merőleges az e–re. A $\overline{\sigma}$ egy tetszőleges Q(x, y) pontja akkor van rajta az e egyenesen, ha az $\underline{m}$ és $\overrightarrow{PQ}$ vektorok skaláris szorzatára $\underline{m}\overrightarrow{PQ} = 0$ teljesül. Vagyis ha fennáll: $a(x - x_p) + b(y - y_p) = 0$. Eszerint az e egyenes egyenlete a síkbeli (O,i,j) koordináta–rendszerben az $ax + by + c = 0$, ahol $c = -ax_p - by_p$. A $\underline{v} = bi - aj$ vektor az egyik irányvektora az e egyenesnek. Adódik, hogy az $\langle e, T \rangle$ síkkal párhuzamos $\overrightarrow{TP}$ és $\underline{v}$ vektorok vektoriális szorzata merőleges az $\langle e, T \rangle$ síkra. Számolással látható, hogy ezen

$$\underline{n} = \overrightarrow{TP} x \underline{v}$$

normálvektorra az $\underline{n} = ai + bj + ck$ kifejezést nyerjük. Ily módon a fenti definíciónak megfelelően a $(\lambda a, : \lambda b : \lambda c)_e, (\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0)$ számhármasok képezik az e egyenes homogén koordinátáit.

1.4.3. Megjegyzés: Vegyük az $e \in \sigma$ euklideszi egyenes egy $P(x, y)$ közönséges pontját. Az egyenes $ax + by + c = 0$ egyenletébe a P pont homogén koordinátáinak megfelelő hányadosait írjuk be $\left(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}, z = 1\right)$, akkor az $a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0, ahol\ x_3 \neq 0$ összefüggéshez jutunk. Az ebből nyert $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ egyenletet csak az e egyenes pontjainak homogén koordinátái elégítik ki. A homogén egyenlet új pontokat ad a megoldáshalmazhoz, mert itt megkapjuk az egyenes ideális pontját is.

1.4.4. Definíció: Az i_σ ideális egyenesnek korábban a *T*–n áthaladó és a σ–val párhuzamos μ síkot feleltettük meg. Az i_σ-hoz rendeljük hozzá a μ sík normálvektorait, vagyis a λk ($\lambda \epsilon \mathbb{R}, \lambda \neq 0$) vektorokat. Ezek $(0: ,0: , \lambda)_e$ koordináta–hármasait mondjuk az i_σ **egyenes homogén koordinátáinak**.

A σ projektív síkon lévő *P* pont egyik meghatározó vektora legyen $\underline{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, továbbá egy e $(\underline{e} \epsilon \overline{\sigma})$ egyenes egyik meghatározó vektora legyen $\underline{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$. Egyértelmű, hogy a *P* pont akkor és csakis akkor van rajta az e egyenesen, ha az $\underline{u}, \underline{x}$ vektorok merőlegesek egymásra, vagyis ha a skaláris szorzatukra $\underline{u} x \underline{v} = 0$ teljesül.

1.5. Néhány illeszkedési tulajdonság a meghatározó vektorokkal leírva

Az alábbi illeszkedési tulajdonságokat a definíciókból közvetlen igazolhatjuk a vektoriális és skaláris szorzás tulajdonságainak használatával:

- $A = [\underline{a}\ ]$, $e = [\underline{u}]$-ra $A \in e \Leftrightarrow\ \underline{a}\ merőleges\ az\ \underline{u}$-ra (⟺ $\underline{au}$=0)
- $A = [\underline{a}\ ]$, $B = [\underline{b}]$, $A \neq B$ esetén az *AB* egyenes meghatározó vektora $[\underline{a} x \underline{b}]$
- $e = [\underline{u}]$, $f = [\underline{v}]$, $e \neq f$ esetén $e \cap f$ pont meghatározó vektora $[\underline{u}\text{x}\underline{v}]$
- Az $A = [\underline{a}\ ]$, $B = [\underline{b}]$, $C = [\underline{c}]$ pontok kollineárisak ⟺ $\underline{ab}\ \underline{c}$=0 (⟺ $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan összefüggő vektorok)
- Az $e = [\underline{u}]$, $f = [\underline{v}]$, $g = [\underline{w}]$ egyenesek egy ponton haladnak át ⟺ $\underline{uvw}$=0 ($\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lineárisan összefüggő vektorok)

1.6. A projektív sík projektív transzformációi (kollineációi)

Adott egy $\overline{\sigma}$ projektív sík. A $\overline{\sigma}$ –ról végig feltesszük, hogy az 1.2 fejezetben leírt speciális (O, i, j, k) koordináta rendszert használjuk.

1.6.1. Definíció: A $\tau\colon \overline{\sigma} \rightarrow \overline{\sigma}$ bijektív leképezést a $\overline{\sigma}$ sík **projektív transzformáció**jának (vagy **kollineáció**nak) mondjuk, ha bármely $\overline{\sigma}$-beli egyenesnek a τ szerinti képe egyenes (tehát a kollineáció egyenestartó bijekció), lásd [2].

Könnyen látható, hogy például minden affinitás és minden középpontos vetítés kollineáció lesz.

1.6.2. Következmény: A fenti definíció alapján igazak az alábbi kijelentések.

- Ha τ_1 és τ_2 a σ sík projektív transzformációi, akkor az azok kompozíciójaként nyert $\tau_1 \circ \tau_2$ leképezés is egy kollineáció.
- Ha τ egy kollineáció, akkor a τ^{-1} inverz leképezés is egy projektív transzformáció.
- A σ projektív sík kollineációi a leképezések kompozíciójára, mint szorzásműveletre nézve egy csoportot alkotnak.

1.6.3. Definíció: Egy $\varphi\colon \overline{\sigma} \rightarrow \overline{\sigma}$ bijektív leképezést **projektív transzformáció**nak hívunk a projektív síkon, ha bármely három kollineáris pont képe három kollineáris pont.

1.6.4. ***Tétel:*** (A projektív geometria alaptétele)

A projektív sík kollineációi pontosan a projektív lineáris leképezések.

Bizonyítás: lásd [3] Hoffmann M., Papp I.: Affin és projektív geometria

2. Másodrendű görbék

2.1. Másodrendű görbék felírása homogén koordinátákkal

Az 1.4.4-es definícióban látható, hogy hogyan kell egy egyenes egyenletét homogén koordinátákkal felírni. Érdemes megvizsgálni, hogy mit érdemes még így definiálni. Ebben a fejezetben a másodrendű görbéket fogjuk ennek fényében tanulmányozni, ahol a homogén koordinátákkal való felírás során az alakzat egyenlete csak másodfokú tagokat fog tartalmazni.

2.1.1. *Definíció:* Legyenek adottak olyan $a_{rs}\,(1 \leq r \leq s \leq 3)$ valós számok, amelyek nem mind nullák. A

$$a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{22}{x_2}^2 + a_{33}{x_3}^2 = 0$$

2.1. képlet: m.r.g.

egyenlettel leírt $\overline{\sigma}$-beli **másodrendű görbé**n a sík azon pontjainak $\overline{M}$ halmazát értjük, melyek homogén koordinátái kielégítik az egyenletet, ahol a_{11}, a_{12} és a_{22} nem lehetnek mind nullák.

Több értelemben is homogén a fenti egyenlet:

- A fokszámában, mert-csak másodfokú tagok vannak benne;
- Skalárral való szorzásra, mivel egy tetszőleges λ skalárral megszorozva sem változnak meg a megoldások;
- Ha x_1, x_2, x_3 az egyenlet megoldása, akkor $\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3$ is az.

2.1.2. *Megjegyzés*: Egy $\overline{\sigma}$-beli $\overline{M}$ ponthalmazt akkor mondunk projektív másodrendű görbének, ha léteznek olyan $a_{rs}\,(1 \leq r \leq s \leq 3)$ valós együtthatók, hogy az általuk meghatározott fenti (**2.1. képlet**) másodfokú egyenletet éppen az $\overline{M}$ alakzat pontjainak homogén koordinátái elégítik ki.

2.1.3. *Megjegyzés:* A fenti (**2.1. képlet**) egyenlet mindkét oldalát megszorozva egy $\mu\ (\mu \neq 0)$ számmal, ugyan azt az $\overline{M}$ alakzatot kapjuk.

2.2. Speciális alakzatok

Nézzünk néhány példát másodrendű görbékre, melyek egyenleteinek egyszerű és szép alakja van.

$x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2 = 0$ 0 centrumú egységkör

$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 0$ egyetlen pont sem elégíti ki (üres halmaz)

$x_1{}^2 - x_2{}^2 = 0 \to (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$ két metsző egyenes

$x_1{}^2 + x_2{}^2 = 0$ egyetlen pont (O)

De ezeken kívül előáll sok más alakzat is, pl. ellipszis, hiperbola parabola is, mint azt később látni fogjuk. Éppen ezért megpróbáljuk megnézni, hogy hogyan lehet meghatározni a másodrendű görbe minőségét. Ehhez az első lépés egy jól kezelhető tömör felírási mód.

2.3. A másodrendű görbék egyenletének mátrixos alakja

A 2.1. képletben szereplő a_{rs} $(1 \leq r \leq s \leq 3)$ együtthatókból képezni tudunk egy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

szimmetrikus mátrixot, mely elemeire igaz, hogy $a_{rs} = a_{sr}$. Ekkor a **2.1.** képlet az alábbi alakot ölti:

$$\beta = (x_1 x_2 x_3)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Tömörebben: $\sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} a_{rs}\, x_r x_s = 0.$

A másodrendű görbék homogén koordinátás felírásának előnyei az euklideszi síkban már definiált másodrendű görbékre is szeretnénk alkalmazni. Ezt egyszerűen meg tudjuk tenni az alábbi módon.

2.3.1. ***Tétel:*** A közönséges $P(x,y)$ pont homogén koordinátáira igaz, hogy

1.1 $(x_1 : x_2 : x_3) = (x : y : 1)$

1.2 *Bizonyítás:* Közvetlenül adódik a speciális koordináta rendszerünk választásából, (lásd 1.2. fejezet), ha a *TP* egyenes meghatározó irányvektorát, $\overrightarrow{TP}$ −t vesszük meghatározó vektornak.

A tétel alapján a közönséges pont harmadik koordinátája nem nulla, és az x és y koordinátákra $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$ adódik.

2.3.2. *Megjegyzés*: Vegyük észre, hogy az (O,i,j) egy koordináta rendszert ad a σ síkon. Ebből következik, hogy egy P(x,y) koordinátájú pontnak van közönséges σ −beli, (O,i,j) szerinti koordinátája. A két koordináta-rendszer közötti összefüggést az alább látható módon lehet kiszámolni.

Származtatás a σ euklideszi sík egyik másodrendű görbéjéből:

2.3.3. Definíció: a σ euklideszi síkon az (O,i,j) szerinti koordinátarendszerben adott

$$M = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

2.2. képlet: m.r.g. mátrixos alak

alakú görbét, **közönséges másodrendű görbének** mondjuk, mely az alábbi alakba is írható:

$$M = (xy1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

2.3.4. *Definíció:* A homogén koordinátákra vonatkozó

$$a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}{x_3}^2 = 0.$$

2.3 .képlet: h.k. egyenlet

egyenlet által leírt $\overline{\sigma}$-beli $\overline{M}$ alakzatot az M kiterjesztésével nyert **projektív másodrendű görbé**nek nevezzük, vagy másként a közönséges másodrendű görbe projektív lezárásának.

Látni fogjuk a másodrendű görbék osztályozási tételből (2.5.1. Tétel), hogy az alábbi csoportokba sorolhatjuk a görbéket.

2.3.5. *Definíció:*

- **elliptikus** másodrendű görbéről beszélünk, ha: $\det(A_{33}) > 0$, ahol $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$
- **hiperbolikus** másodrendű görbe: $\det(A_{33}) < 0$
- **parabolikus** másodrendű görbe: $\det(A_{33}) = 0$ és det(A) ≠0 $és$ $\det(A) \neq 0$

2.3.6. *Állítás:* A $\mathbf{2.2 - es}$ egyenlettel leírt, euklideszi síkon tekintett M másodrendű görbére igazak az alábbiak:

- Ha M elliptikus, akkor i_σ ideális egyenesre igaz, hogy $i_\sigma \cap \overline{\mathrm{M}} = \emptyset$.
- Ha M hiperbolikus, akkor $\overline{\mathrm{M}}$ és i_σ közös pontjainak száma 2.
- Ha M parabolikus, akkor $\overline{\mathrm{M}}$ és i_σ közös pontjainak száma 1.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\overline{M}$ homogén egyenlete (**2.3. képlet**) alakú. Mivel az ideális pontok homogén koordinátái (x_1: x_2:0), $x_1{}^2 + x_2{}^2 \neq 0$ alakúak, ezért a képletbe helyettesítve

$$a_{11}x_1{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2{}^2 = 0$$

adódik. Ha nincs az egyenletnek $x_1 = 0$ alakú megoldása, akkor x_1-vel leosztva $\frac{x_2}{x_1}$ $-$ben másodfokú egyenletet kapunk, melynek megoldásszámát a diszkriminánsa adja, ami épp $\det(A_{33})$. Ha $x_1 = 0$ alakú megoldásunk van, akkor $a_{22} = 0$, hiszen $x_2{}^2 \neq 0$, viszont ekkor az egyenletünk

$$a_{11}x_1{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

alakú lesz. Ennek tényleg megoldásai az $(0, \lambda, 0)$, $\lambda \neq 0$ alakú homogén koordináták. (λ,$*$,0), $\lambda \neq 0$ alakú megoldása csak akkor van, ha $x_1{}^2$-vel leosztva az $\frac{x_2}{x_1}$-re meg tudjuk oldani az

$$a_{11} = -2a_{12}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)$$

egyenletet, ez

$$\left(-\frac{a_{11}}{2a_{12}}\right) = \left(\frac{x_2}{x_3}\right)$$

egyértelmű megoldást ad, ha $a_{12} \neq 0$ és nincs más megoldás, ha $a_{12} = 0$. Ez egybevág az állításunkkal.

2.4. A projektív sík másodrendű görbéinek osztályzása

A **2.1**-es képlettel leírt $\overline{M}$ másodrendű görbe akkor nem jön létre egy σ-beli másodrendű görbe kiterjesztéseként, ha $a_{11} = 0, a_{12} = 0$ és $a_{22} = 0$, akkor

$$a_{33}{x_3}^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

alakra egyszerűsödik, ahol ${a_{13}}^2 + {a_{23}}^2 + {a_{33}}^2 > 0$. Ezt felírhatjuk úgy is, hogy

$$x_3(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3) = 0$$

Ekkor azt kapjuk, hogy $\overline{M} = i_\sigma \cup e$ (ahol i_σ: $x_3 = 0$ egyenletű egyenes, e pedig az $2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0$ által definiált egyenes), itt megengedjük, hogy e ideális egyenes legyen esetleg.

Vegyük észre, hogy ha a másodrendű görbe nem egy közönséges másodrendű görbe kiterjesztéseként nyert projektív másodrendű görbe, $\det(A) = 0$ lesz.

2.4.1. ***Tétel:*** A projektív másodrendű görbék az alábbi alakzatok lehetnek:

- σ-beli ellipszis
- σ-beli hiperbola projektív lezárása
- σ-beli parabola projektív lezárása
- két egyenes uniója
- egy egyenes
- egy pont
- üres halmaz

Bizonyítás: Mivel a [1](Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába) szerint ismerjük a közönséges esetben az osztályozási tételt, így abból az állításból közvetlen adódik, hogy a közönséges esetben előálló alakzatok projektív lezárásait kapjuk meg a kiterjesztéssel.

Másodrendű görbékre is bevezethetünk pár definíciót a projektív osztályozás megkönnyítésére.

2.4.2. Definíció: Egy másodrendű $\overline{\mathrm{M}}$ görbét **elfajulónak** mondunk, ha $det(A) = 0$.

2.4.3. *Definíció:* Ha $\overline{M}$ elfajuló, akkor az olyan $\overline{\sigma}$-beli B pontot, mely megoldja a másodrendű görbét leíró lineáris egyenletrendszert, $\overline{M}$ **szinguláris pont**jának nevezzük.

2.4.4. *Definíció:* Egy másodrendű $\overline{M}$ görbét **közönséges projektív kúpszelet**nek nevezünk, ha $\overline{M} \neq \emptyset$ és $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

2.4.5. *Definíció*: Ha adott egy C$\in \mathbb{R}^{3x3}$mátrix, ahol $\det(C) \neq 0$ akkor ez indukál a tartópontos modellünk segítségével egy $\overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ kollineációt a projektív síkon, az alábbi definícióval.

$$[\underline{v}] \to [C\underline{v}]$$

Az ilyen alakú kollineációkat **projektív lineáris transzformáció**nak nevezzük.

Mivel a C általánosan definiált lineáris leképezés T-re illeszkedő $\underline{v}$ irányvektorú egyenest a T-re illeszkedő C$\underline{v}$ irányvektorú egyenesbe viszi és a T-re illeszkedő n normálvektorú síkot a T-re illeszkedő C$\underline{n}$ normálvektorú síkba viszi, könnyen látható, hogy a fenti leképezés egy egyenes tartó leképezést definiál $\overline{\sigma}$ −n. Mivel C invertálható is, így az indukált leképezés bijektív is lesz, azaz egy kollineáció.

2.4.6. ***Tétel:*** A projektív sík minden kollineációja előáll projektív lineáris transzformációként.

Bizonyítás: [3]Szeghy D.: Geometriai transzformációk

2.4.7. *Definíció*: Azt mondjuk, hogy a projektív sík két alakzata **projektívan ekvivalens**, ha létezik az egyiket a másikba vivő projektív lineáris transzformáció.

Az előző (2.4.6.) tétel miatt itt projektív kollineációt is írhattunk volna. Mivel a projektív lineáris transzformációk csoportot alkotnak, a projektív ekvivalencia ekvivalenciareláció. Azt is mondhatjuk, hogy ekvivalens görbék csak a homogén koordinátarendszer megválasztásában különböznek egymástól, vagy más szóval, a koordinátarendszer megfelelő választásával az egyik a másik alakjára hozható, mivel egy projektív lineáris transzformáció lényegében ezt jelenti. Példaként megemlítjük, hogy a projektív egyenesek projektívan ekvivalensek, azaz bármely két projektív egyenes egymásba vihető.

2.4.8. *Állítás:* Az $x^t Ax = 0$ másodrendű görbét a $\varphi(M)$ projektív lineáris transzformáció az $x^t Bx = 0$ másodrendű görbébe viszi, ahol $B = M^{-t} AM^{-1}$

Bizonyítás: $[\underline{w}] \in \varphi(M)$ pontosan akkor igaz, ha $[M^{-1}\underline{w}] \in \varphi$, azaz felírva a transzformációt mátrixok segítségével:

$$(M^{-1}\underline{w})^T AM^{-1}\underline{w} = 0 \Rightarrow \underline{w}^T (M^{-1})^T AM^{-1}\underline{w}$$

Itt legyen $A' = (M^{-1})^T AM^{-1}$, egy szimmetrikus mátrix, mert a transzformáció után is ugyan az marad:
$A' = ((M^{-1})^T AM^{-1})^T = (M^{-1})^T A^T ((M^{-1})^T)^T = (M^{-1})^T AM^{-1}$, ami A'-vel egyezik meg.

2.4.9. ***Tétel:*** A projektív transzformáció másodrendű görbét másodrendű görbébe visz át, mégpedig elfajult másodrendű görbét elfajultba, nemelfajult másodrendű görbét nemelfajultba.

Bizonyítás: A tétel első felét az előző (2.4.8.) állítás adja. Ellenőrizzük a tétel második felét is, hogy a transzformáció elfajultat elfajultba, nemelfajult görbét pedig nemelfajultba visz. Ehhez azt nézzük, hogy a mátrix determinánsa hogyan viselkedik.
$\det(A') = \det((M^{-1})^T) \det(A) \det(M^{-1})$, ahol $\det((M^{-1})^T) = \det(M^{-1}) \neq 0$ miatt a két determináns ugyanakkor 0 vagy nem 0.

Idézzünk fel egy jól ismert lineáris algebrai tételt, melyre szükségünk lesz.

2.4.10. ***Tétel:*** Legyen A egy szimmetrikus valós mátrix. Ekkor létezik olyan C ortogonális mátrix, ami diagonalizálja, azaz

$$C^T AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = D$$

$det(C^T AC) = (\det(C))^2 \det(A)$, ahol $\det(C) \neq 0, (\det(C))^2 = 1, \acute{e}s\ \det(A) \neq 0$, azaz $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$

$$D^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}} \end{pmatrix}$$

$$D^{*T} DD^* = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

azaz, ha $L^{-1} \coloneqq CD^*$, akkor $\det(CD^*) \neq 0$, inverze $L = (CD^*)^{-1}$ és $\det(L) \neq 0$, tehát létezik olyan kollineáció, melyre

$$(L^{-1})^T AL^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

2.4.11. *Megjegyzés*: $C^T AC$, azaz D főátlóbeli elemeinek értékei között lehet 0 is. Ebben az esetben az $\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$ érték helyére behelyettesítünk például 1-et, hiszen úgy is a végeredmény 0 lesz a megfelelő helyen. Minden művelet elvégzése után az $(L^{-1})^T AL^{-1}$ mátrix főátlójában az elemek értéke $+1, -1\ \acute{e}s\ 0$ lehet.

A 2.4.8., 2.4.9. és 2.4.10. állítás, illetve tételek alapján mondhatjuk, hogy kollineációval minden másodrendű görbe ilyen alakra hozható. Másodrendű görbét másodrendű görbébe visz, úgy, hogy elfajult másodrendű görbét elfajultba, nemelfajultat pedig nem elfajult másodrendű görbébe visz át.

2.4.12. *Definíció:* A normálalakra hozott másodrendű görbe mátrixának **rang**ját R-rel jelöljük. R így $(+1)$ vagy (-1) lehet.

2.4.13. *Definíció:* A normálalakra hozott másodrendű görbe mátrixának **szignatúrá**ja a $(+1)$ és (-1)-es együtthatók számának abszolútértékben vett különbsége, melyet S-sel jelölünk.

2.4.14. ***Tétel:*** A másodrendű görbe mátrixának rangja és a szignatúrája a projektív transzformációval (kollineációval) szemben invariáns (azaz változatlan marad a transzformáció után).

Bizonyítás: Lineáris algebrából ismert, hogy $C^T A C$ átalakításakor ha $\det(C) \neq 0$, a szignatúra és a rang nem változik. Így a 2.4.9. tétel alapján igaz az állítás.

2.4.15. *Megjegyzés:* Báziscserékkel elérhető, hogy a nullák és egyek sorrendjét felcseréljük, amit kihasználunk később az osztályozásnál. A teljes egyenletet (-1)-gyel szorozva az előjelek is cserélhetőek.

A másodrendű görbék osztályozását az R rang és S szignatúra vizsgálata alapján végezzük el, a már normálalakban felírt görbéken.

A másodrendű görbék projektív osztályozása alapján az alábbi kategóriákba sorolhatjuk az alakzatokat:

$$R = 3, \qquad S = 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 0$

Descart-féle koordinátákkal a görbe egyenlete: $x^2 + y^2 = -1$

A görbe neve: képzetes nemelfajuló görbe (képzetes kör)

$$R = 3, \qquad S = 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 = 0$

Descart-féle koordinátákkal a görbe egyenlete: $x^2 + y^2 = 1$

A görbe neve: valós nemelfajuló görbe (valós kör)

$R = 2, \qquad S = 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$

Descart-féle koordinátákkal a görbe egyenlete: $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = 0$

A görbe neve: képzetes metsző egyenespár.

$R = 2, \qquad S = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$

Descart-féle koordinátákkal a görbe egyenlete: $x^2 + y^2 = (x + y)(x - y) = 0$

A görbe neve: valós metsző egyenespár.

$R = 1, \qquad S = 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 = 0$

Descart-féle koordinátákkal a görbe egyenlete: $x^2 = 0$

A görbe neve: valós egybeeső egyenespár.

Az osztályozásból azt látjuk, hogy sokkal kevesebb osztályt kaptunk, mint az euklideszi vagy az affin osztályozásnál (lásd 2.5. fejezet). Nincs olyan osztály, amely valós vagy képzetes párhuzamos egyeneseket tartalmazna, mivel a projektív síkon bármely két egyenesnek van metszéspontja (a párhuzamos egyeneseknek az ideális pontjuk közös), így a párhuzamos egyenesek a projektív síkon a metsző egyenesek csoportjába tartoznak. Két nemelfajult másodrendű görbetípus létezik projektív szempontból, a valós és a képzetes kör.

2.5. Közönséges másodrendű görbék felírása kanonikus alakban

Egybevágósági transzformációkkal a közönséges σ síkon, minden másodrendű görbe kanonikus alakra hozható (lásd [1]). A kanonikus alakban felírt másodrendű görbéket is szeretnénk osztályozni. A 2.4-es fejezetben leírt módon a görbék vizsgálata leegyszerűsödött, a normálalakra hozott mátrixból pedig már könnyedén leolvasható, hogy milyen alakzatot kapunk. Ha a közönséges síkon szeretnénk osztályozást csinálni egybevágóság ereéig, már nehezebb dolgunk van.

2.5.1. ***Tétel:*** A másodrendű görbék osztályozási tétele

Bármely másodrendű görbe egyenlete a koordináta-rendszer egybevágósági transzformációkkal az alábbi kanonikus alakok valamelyikére hozható:

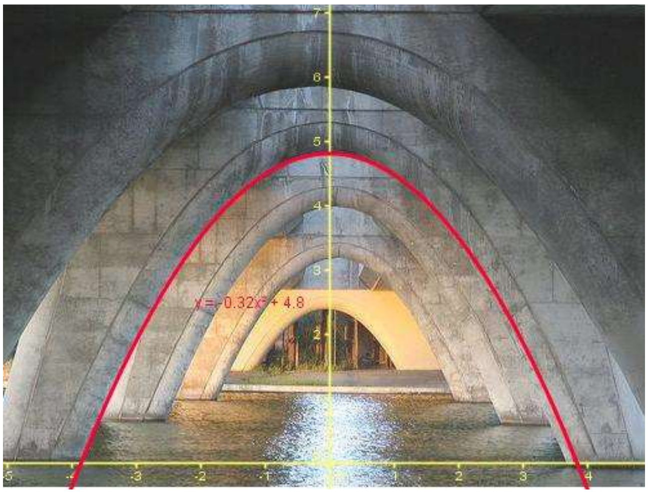
1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis (ha$a=b$, akkor kör)
2) $y^2=2px$ parabola
3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola
4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ üres halmaz
5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ metsző egyenespár
6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ egy darab pont
7) $\frac{x^2}{a^2}=1$ párhuzamos egyenespár ($x=a\ vagy\ x=-a$)
8) $\frac{x^2}{a^2}=0$ egy darab egyenes
9) $\frac{x^2}{a^2}=-1$ üres halmaz

Bizonyítás: lásd: [1]

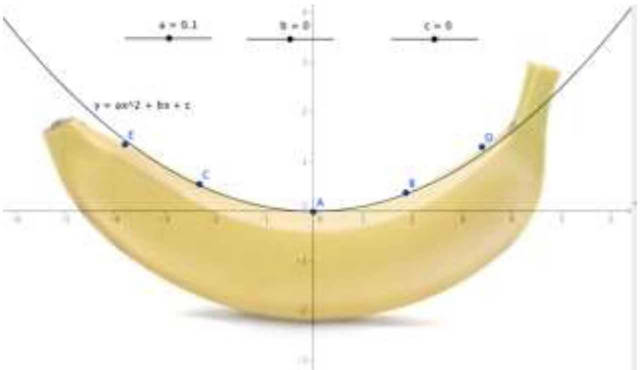
Ahogy azt láthatjuk, vannak olyan másodrendű görbék, melyek nem kúpszeletek. Tehát a másodrendű görbék tárgyalása kiterjed a kúpszeletekre és a fent említett alakzatokra, így a másodrendű görbékre tett kijelentések érvényesek a kúpszeletekre is. Viszont fordítva nem igaz. A kúpszeletekre igaz állítások nem helytállóak minden másodrendű görbére nézve.

2.6. Példák másodrendű görbékre

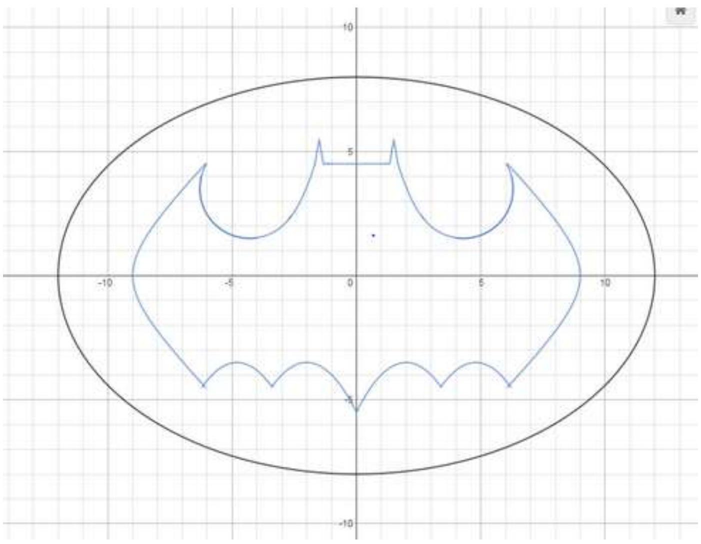
Az eddigiek során sok érdekes dologra fény derült a másodrendű görbékkel kapcsolatban a homogén koordinátás, mátrixos és kanonikus alakjuk kapcsán. Érdekességképpen pár példát gyűjtöttem össze, hogy a való életben hol is találkozgatunk ilyen görbékkel? Elsősorban az építészet merülhet fel sokakban, ami valóban jogos, de a természetben is felfedezhetünk néhol egy-egy parabolát.



Parabola



Parabola



Ellipszis

3. Másodrendű felületek

3.1. Másodrendű felületek felírása homogén koordinátákkal

A másodrendű görbékhez hasonló módon tudjuk a másodrendű felületek egyenletét felírni a homogén koordináták segítségével. Az $\theta \coloneqq \mathbb{R}^3$ tér kibővített modelljét $\overline{\theta}$ −t tartalmazza a kibővített $\overline{\mathbb{R}^4}$, így a különbség csupán annyi, hogy ebben az esetben már négy koordináta fog szerepelni az alakzatok egyenleteiben. Hasonlóan a kibővített sík esetéhez, most is felveszünk egy (O, i, j, k, l) koordináta rendszert, ahol i, j, k, l egy ortonormált bázis és (O, i, j, k) az $\mathbb{R}^3$ egy koordináta rendszere lesz. A $T \coloneqq (0,0,0,-1)$ tartópontra illeszkedő egyenesek, síkok, 3-dimenziós alterek bijekcióban vannak $\overline{\theta}$ pontjaival, egyeneseivel és síkjaival a $\overline{\theta}$ −val vett $\overline{\mathbb{R}^4}$-beli metszeteik miatt, hasonlóan a projektív sík esetében mondottak következtében.

3.1.1. *Definíció:* Legyenek adottak olyan a_{rs} $(1 \leq r \leq s \leq 4)$ valós számok, amelyek nem mind nullák. Az

$$a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}{x_2}^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 +$$
$$+a_{33}{x_3}^2 + a_{34}x_3x_4 + a_{44}{x_4}^2 = 0$$

3.1.1. képlet: m.r.f.

egyenlettel leírt $\overline{\theta}$-beli másodrendű felületen a tér azon pontjainak $\overline{M}$ halmazát értjük, melyek homogén koordinátái kielégítik az egyenletet.

Itt az együtthatók jelölése a másodrendű görbék esetében leírtak mintájára történt (2.1.1.).

A görbékhez hasonlóan az is elmondható, hogy ez az egyenlet homogén, több értelemben is.

- A fokszámában, mert-csak másodfokú tagok vannak benne;
- Skalárral való szorzásra, mivel egy tetszőleges λ skalárral megszorozva sem változnak meg a megoldások;
- Ha x_1, x_2, x_3, x_4 az egyenlet megoldása, akkor $\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4$ is az.

Az egyenletben szereplő együtthatókat egy szimmetrikus mátrixba rendezhetjük a következőképp:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Ezt a mátrixot a felület alapmátrixának nevezzük. A mátrix determinánsából következtetéseket vonhatunk le a felületről. Ha a determináns nullával egyenlő $(\det(M) = 0)$, akkor a másodrendű felület elfajuló. Amennyiben a determináns nullától különböző $(\det(M) \neq 0)$, a felület nemelfajuló.

3.2. Másodrendű felületek osztályozása

Az előző fejezet 2.4.5-ös definíciójához hasonlóan létezik egy olyan C $(\det(C) \neq 0)$ mátrix $\mathbb{R}^{4x4}$-ben, amely a modellünk segítségével indukál egy projektív lineáris transzformációt. Két alakzat projektívan ekvivalens ugyan úgy, mint ahogy azt 2.4.7-nél definiáltuk, ahogy a 2.4.8-as állítás is igaz, hogy egy másodrendű felületet a projektív lineáris transzformáció másodrendű felületbe viszi, sőt, 2.4.19. alapján elfajultat elfajultba, nemelfajultat pedig nemelfajult másodrendű felületbe visz át. Természetesen a lineáris algebrából tanult tétel továbbra is érvényes, hogy létezik olyan $W \in \mathbb{R}^{4x4}$ ortogonális mátrix, mely diagonalizál egy $A \in \mathbb{R}^{4x4}$ szimmetrikus mátrixot (2.4.10. tétel). Felhasználhatjuk a 2.4.13-as és 2.4.14-es definíciókat, melyekben a normálalakra hozott másodrendű felület rangját és szignatúráját adják meg, továbbá az osztályozáshoz a 2.4.15-ös tételt használjuk fel úgy, mint a másodrendű görbék esetében.

Az 1.6.1-es definícióhoz hasonlóan a projektív tér kollineációi is definiálhatóak és a 2.4.6. tételhez hasonló módon igazolható, hogy a projektív tér minden kollineációja előáll projektív lineáris transzformációként.

3.2.1. *Definíció*: Most kimondhatjuk 2.4.7. alapján, hogy a projektív tér két alakzatát **projektívan ekvivalens**nek mondjuk, ha létezik az egyiket a másikba vivő projektív lineáris transzformáció.

Voltaképpen a bizonyítások lényegi változtatása nélkül a 2.4.8-10. állításokhoz hasonlóan igazak itt is, azaz kimondhatjuk a következő tételt:

3.2.2. ***Tétel:*** A projektív térben minden másodrendű felület projektív lineáris transzformációk segítségével kanonikus alakra hozható, azaz a leíró mátrixa az alábbi alakra hozható:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

ahol $\lambda_i = \pm 1\ vagy$ 0 alakú.

Bizonyítás: A tételek bizonyítása hasonló a második fejezetben leírtakhoz.

3.2.3. *Megjegyzés:* Hasonlóan a 2.4.16-os megjegyzéshez, báziscserékkel itt is „szép sorrendbe" tehetjük a főátlóbeli elemeket. Sőt az egyenletet -1-gyel szorozva feltehető, hogy legalább annyi +1 van benne, mint -1.

A másodrendű felületek osztályozását az R rang és S szignatúra vizsgálata alapján végezzük el, a már normálalakban felírt felületeken.

A másodrendű felületek projektív osztályozása alapján az alábbi kategóriákba sorolhatjuk az alakzatokat:

$$R = 4, \qquad S = 4, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 0$

A görbe neve: képzetes gömb

$$R = 4, \qquad S = 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - {x_4}^2 = 0$

A görbe neve: valós gömb

$$R = 4, \qquad S = 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 - {x_4}^2 = 0$

A görbe neve: egyköpenyű forgáshiperboloid (ami projektív térben egy tórusz)

$$R = 3, \qquad S = 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 0$

A görbe neve: képzetes kúpfelület

$$R = 3, \qquad S = 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 = 0$

A görbe neve: valós kúpfelület

$$R = 2, \qquad S = 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$

A görbe neve: képzetes metsző síkpár

$$R = 2, \qquad S = 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$

A görbe neve: valós metsző síkpár

$$R = 1, \qquad S = 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Homogén koordinátákban a görbe egyenlete: ${x_1}^2 = 0$

A görbe neve: egybevágó síkpár

Megállapíthatjuk, hogy a normálalakban felírt mátrixok között, melyeknél az utolsó két főátlóbeli elem értéke nulla, az megegyezik a másodrendű görbék utolsó három esetével (2.4-es fejezet).

Abban az esetben, ha nem projektívan osztályoznánk, sokkal nehezebb dolgunk lenne, mert akkor 17 osztályt kapnánk.

3.3. Síkmetszetek

Vegyük a θ közönséges tér egy φ affin leképezését. Ekkor ez az (O,i,j,k) koordináta rendszerben a

$\varphi(\underline{x}) = B\underline{x} + \underline{b}$ alakba írható, ahol $B \in \mathbb{R}^{3x3}$, *det(B)*$\neq 0$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$, lásd [3].

Ekkor a

$$\tilde{B} := \begin{pmatrix} & B & & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix által indukált projektív leképezés, épp a φ affin leképezést valósítja meg θ-n, lásd [3]. Ebből és a korábban általánosított tételekből közvetlen adódik, hogy:

3.3.1. ***Tétel:*** A koordinátarendszer eltolása és elforgatása affin transzformációt jelent, ezért a másodrendű felület eltolásával és elforgatásával újból másodrendű felülethez jutunk. Ezek szerint a másodrendű felületek az analitikus alakzatoknak olyan osztályát alkotják, amely a koordináta-rendszer megválasztásától független.

3.3.2. ***Tétel:*** Egy síknak egy másodrendű felülettel való metszete általában másodrendű görbe, de lehet egyenes, teljes sík és üres alakzat (azaz nincs valós közös pont) is.

Bizonyítás: Mivel egy tetszőleges síkot elvihetünk a $z = 0$ egyenletű síkba affin leképezéssel, és eközben a másodrendű felület másodrendű felületbe fog menni, és a metszet a metszetbe megy, így elég belátni a következő esetre a tételt:

A másodrendű felület általános egyenletéből láthatjuk, hogy a $z = 0$ síkkal vett metszete az alábbi egyenletet adja:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}\mathrm{xy} + 2a_{13}\mathrm{x} + 2a_{23}\mathrm{y} + a_{33} = 0$$

Ez a metszet általában másodrendű görbét ír le, de bizonyos esetekben mást kapunk, például egyenest $(ha\ a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0)$, teljes síkot $(ha\ a_{13} = a_{23} = 0)$, vagy üres halmazt.

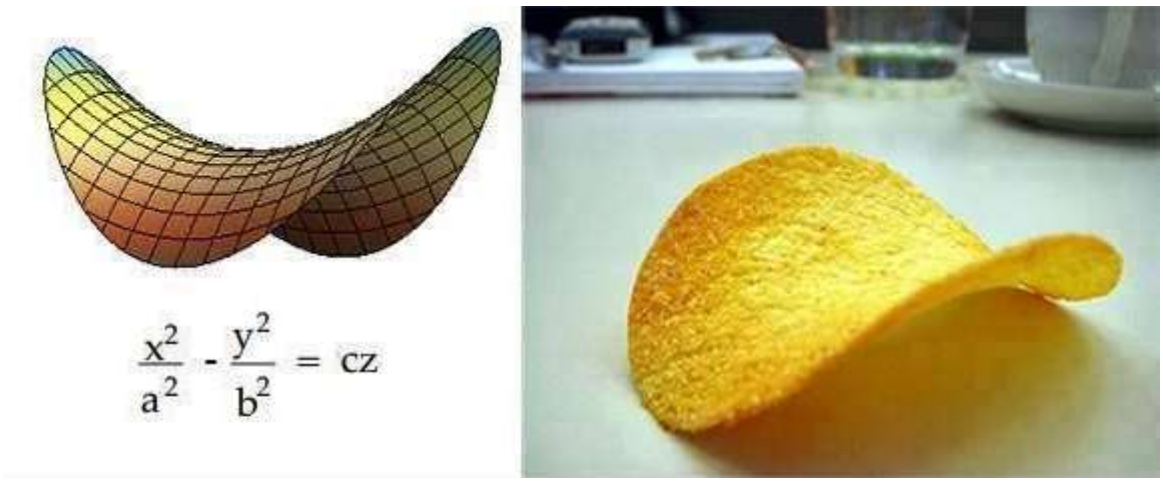
Azaz az $\mathbb{R}^3$-beli egybevágóságok megvalósíthatók projektív lineáris transzformációval, ezért feltehető, hogy ha egy síkmetszetet veszünk, akkor az a sík a $z = 0$ egyenletű sík.

3.3.3. *Következmény:* A fenti két tétel alapján következik, hogy a másodrendű felületek síkmetszete másodrendű görbe, egyenes, teljes sík vagy ($c \neq 0$ állandóval felírt $c = 0$ egyenletű) üres alakzat lehet. Ebből következik, hogy 2.3. állítása a másodrendű felületek körében is érvényes, tehát hogy egy egyenesnek egy másodrendű felülettel 0, 1 vagy 2 közös pontja van, vagy pedig a teljes egyenes a másodrendű felülethez tartozik.

3.4. Példák másodrendű felületekre

Az előző fejezethez hasonlóan a felületek esetében is hangsúlyosnak tartom, hogy néhány hétköznapi példát is bemutassak a dolgozatomban.

Tökéletes példa nyeregfelületre egy falat ropogós chips.



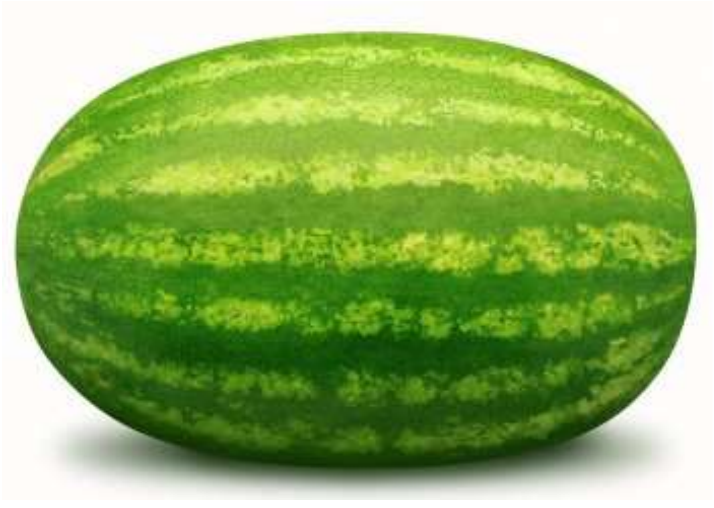
Nyeregfelület

A matematika mindenhol jelen van, még a fánkboltban is.

Tórusz

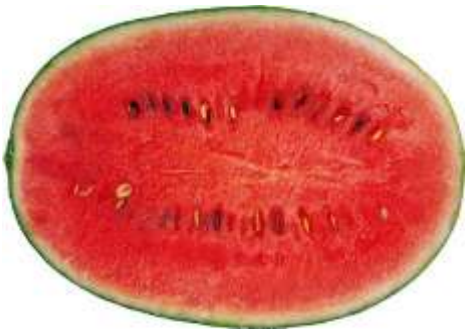
Egyenlete: $(\boldsymbol{x^2+y^2+z^2+R^2-r^2})^2 \leq \boldsymbol{4R^2}(\boldsymbol{x^2+y^2})$

Külön érdekesség volt számomra a gondolat, hogy otthoni kísérletet is tudunk végezni, ha van egy megfelelő másodrendű felületünk – például egy dinnye. Egy kés segítségével könnyen beláthatjuk szemléletesen, hogy egy síkkal vett metszete másodrendű görbét ad.



Görögdinnye, mint ellipszoid

Egyenlete: $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$



Körtformáló metszet **Ellipszist fomáló metszet**

4. Összefoglalás

Szakdolgozatom célja, hogy bemutassam mennyire leegyszerűsödik a másodrendű görbék és felületek vizsgálata a projektív síkon, illetve térben. A megírása során arra törekedtem, hogy a problémakört általánosítsam, ezáltal könnyebben és egyszerűbben áttekinthetővé téve a témáját. Ugyan ezeket az eseteket affin vagy egybevágósági osztályozásnál sokkal bonyolultabb kivitelezni, ezt jól szemlélteti, hogy például kanonikus alakra hozva a görbék és a felületek egyenleteit, az osztályaik számossága jóval nagyobb, mint projektív esetben. Az ideális térelemek bevezetésének köszönhetően könnyebben tudtam a lehetséges eseteket tárgyalni. A dolgozat során áttekintettük a projektív geometria alapjait, a sugárnyaláb modellben dolgoztunk, és a vektorok bevezetésével láthattuk, hogy milyen könnyedén lehet kezelni a térelemeket, illetve algebrai úton leírni a projektív transzformációkat. A második és harmadik fejezetben ezek segítségével egyszerűsödött a tételek, állítások belátása, következtetések levonása. Ezek után a normálalakban leírt másodrendű görbék és felületek osztályozása a rang és szignatúra segítségével könnyedén elvégezhető volt. Úgy gondolom, hogy ez a matematika bája és az értelme is: mindent minél egyszerűbben és ezzel egyenesen arányosan minél szebb módszerekkel és eredményekkel tárgyaljunk. Jelen szakdolgozat a görbék és felületek osztályozásának témakörére irányult, de a projektív leképezések további vizsgálata is rengeteg dolgot rejt még magában.

Ezúton szeretném hálámat kifejezni mindenki iránt, aki valamilyen módon segített abban, hogy ez a szakdolgozat létre jöjjön. Különösen köszönöm Szeghy Dávid áldozatos munkáját és a nehéz időkben is lankadatlan segítőkészségét! Köszönöm továbbá az Egyetem minden dolgozójának a tevékenységét, akik az egyetemi éveim alatt átadták a kellő tudást a szak elvégzéséhez és feltárták a matematika szépségeinek titkait számomra, nem utolsó sorban pedig bizonyították, hogy a matematikusoknak van a legjobb humoruk.

5. Irodalomjegyzék

[1] Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest 1962

[2] Verhóczki László: Projektív geometria,
http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/ProjGeom.pdf

[3] Szeghy Dávid: Geometriai transzformációk, Alkalmazott Modul Jegyzet, ELTE 2013
http://www.cs.elte.hu/~szeghy/files/MBSJ.pdf

[3] Hoffmann Miklós, Papp Ildikó: Affin és projektív geometria. Tankönyvtár,
http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0038_matematika_Hoffmann_Miklos_Papp_Ildiko-Affin_es_projektiv_geometria/ch06.html

[4] Kovács Béla: Matematika II. Tankönyvtár
http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0033_SCORM_GEMAN6218B/sco_01_02.htm

[5] Bota Bettina: Tételek másodrendű felületekről. ELTE Matematika BSc szakdolgozat,
https://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2014/bota_bettina.pdf

[6] Surface of the second order, Encyclopedia of Mathematics
https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Surface_of_the_second_order