A végtelen fogalma

Szabó András

Matematika BSc

Szakdolgozat

Témavezető:

Fialowski Alice

Egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A szakdolgozatom témájának kiválasztásánál fontos szerepet játszott, hogy egy olyan matematikai fogalmat járjak körül, amellyel élete során minden ember találkozik, akár csak olyan formában, hogy két gyermek azon vetélkedik, ki tud nagyobb számot mondani. A téma iskolai alkalmazása során jól alakítható az egyes tanulók elsajátított ismereteihez, legyen szó akár nagy számosságokról, vagy a különböző számhalmazok nagyságáról, minden érdeklődő talál benne érdekességet.

A dolgozat felépítésében néhány kivétellel a tudományos megismerés kronológiáját követtem, kezdve a görögök tapasztalati alapokon nyugvó fogalmától egészen eljutva a modern halmazelmélet axiomatikus megközelítéséhez. Az érvelések fontos részét képezik szemléletes példák az egyes tételek, axiómák, vagy definíciók mélységének bemutatására.

A második fejezet a matematikai érvelés erejét mutatja meg a végtelen mennyiségek fogalomkörében. Bemutatja azon lépéseket, amelyek a matematika szilárd megalapozásához vezettek.

A harmadik fejezet tárgyalja a végtelen axiomatizálását, és annak eredményét. Megmutatom, hogy a kellően gazdag állításokkal alkotott rendszer túlmegy a korábbi megismerésen, sőt azt is, hogy tetszőleges magasságokba vezethet. Itt térek ki arra is, hogy milyen kapcsolat feltételezhető a megismert nagyságok, és a logiával előállított jól körülhatárolt végtelenek közt.

A dolgozatot a végtelen kutatásának huszadik századi eredményeivel zárom. Bemutatok olyan módszereket, melyekkel ellentmondásmentesen újabb állításokat csatolhatunk a logikai rendszerhez.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megragadni az alkalmat, hogy köszönetet mondjak témavezetőmnek, Fialowski Alice-nak, aki szakirodalmi ajánlásaival és szakmai hozzáértésével hozzájárult a témám feldolgozásához.

2. fejezet

Történeti áttekintés

2.1. Ókori gondolkodók

A végtelen kétség nélkül a legfurcsább, leggazdagabb és legérdekesebb fogalmak egyike, amelyet az emberi elme felfedezett. Az ókor gondolkodóit is rengeteg logikai ellentmondásra vezette, például Akhillész és a teknősbéka paradoxonja, melynek megoldására az emberiségnek körülbelül húsz évszázadot kellett várnia.

Mivel a görögök előtti időkből nem maradt fenn írásos emlék a végtelen témakörében folytatott vitákról, ezért értekezésemet az ókori gondolkodókkal kezdem. A görög civilizáció számára minden, ami végtelen, az őskáoszból származik. Az ő világukban minden mennyiség egy véges szám volt. Arisztotelész és Pitagorasz számára a végtelenség különcségnek számított, nem pedig tökéletességnek. Pitagorasz felfedezett ugyan megérthetetlen számokat, mint például a $\sqrt{2}$, ennek értelmezéséhez azonban egy letisztult végtelen elméletre lett volna szükségük.

Mégis, – annak ellenére, hogy nem tudták értelmezni a végtelent – a fizikai világ több szempontból is szembesítette őket annak létezésével [2]:

- Az idő vég nélkülisége.
- A tér és az idő vég nélkül kisebb részekre osztható.
- Az minket körülvevő térnek nincsenek határai.

Megfigyeléseik az idő végtelenségéről nem ösztönözte őket további vizsgálódásra, hiszen véges életet éltek, ezért úgy gondolhatták, ez az univerzum rendje. Érdekesebb kérdéseket vetettek fel a tér és idő vég nélküli felosztásával kapcsolatban, ebből származtattak különböző „elenyésző” mértékeket, végtelen közelítéseket. Ez a nézőpont vezetett ahhoz a megközelítéshez, hogy akár a kör is tekinthető egyre növekvő oldalszámú sokszögek határának. E gondolatok nagy hatást gyakoroltak a későbbi matematikusok gondolkodására, például Zénón paradoxonjai

(Akhillész és a teknős, A fának hajított kő és a nyílvessző mozgásának paradoxonja) megoldatlanok maradtak egészen Newton és Leibniz koráig. A görögök számára a mozgások leírását ez problematikussá tette, ezért a nehézségek feloldására más megoldások után néztek.

Euklidész prímek előállítására használható algoritmusa ugyanakkor egyértelművé tette, hogy a prímszámok mennyiségének nincs egyértelmű határa. Ez szükségessé tette egy kezdetleges, a kor gondolkodói számára elfogadható végtelen nagyság bevezetését. Arisztotelész a végtelen fogalom problémáit elkerülve definiált egy minimális végtelent, amely megengedte az egészek számára, hogy tetszőleges nagyságúak legyenek, hiszen bármelyikhez hozzáadva egyet, egy nagyobb egészet kapunk, de az egészek végtelenül nagy halmaza nem létezett.

Az ókori görög gondolkodók a geometria területén is szembesültek a végtelen fogalmának problémájával. Euklidesz a következő definíciókat adta *Elemek* [13] című művének első könyvében:

1. Definíció. Pont az, aminek nincs része.

2. Definíció. Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.

Ezen gondolkodás szerint Euklidész többször is elkerüli a végtelen fogalmának használatát, például a pont definíciójában, ahol is felhasználja a tér végtelen oszthatóságát. Posztulátumai során pedig kimondja, hogy egy véges egyenes akkorára hosszabbítható meg, amekkorára szükséges, ezzel is elkerülve a tisztázatlan fogalom használatát. Két egyenes párhuzamosságának definíciója során azonban szükségessé vált a végtelen használata:

3. Definíció. Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak, és mindkét oldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak.

A görög gondolkodók örökségét az arab világ konzerválta a későbbi európai civilizáció számára. Munkásságuk főleg az algebra terén nyilvánult meg. Az irracionális számokkal, mint értékekkel dolgoztak, nem vizsgálták viselkedésüket tüzetesebben. Arra még újabb ezer évet kellett várni.

2.2. Európai matematikusok

Az arabok példáját követve az európai gondolkodók is értékekként tekintettek az irracionálisokra, ebből azonban újabb paradoxonok születtek. Például úgy gondolták, hogy egy nagyobb sugarú körvonalnak több pontja kell, hogy legyen, mint egy kisebb sugarúnak. Egyszerűen belátható, hogy ez téves, hiszen 1–az–1 hozzárendelés állítható fel közöttük.

Az 1600-as évek elején Galileo Galilei (1564-1642) felismerte a problémát, hogy végtelen mennyiségekkel történő számítások során véges logikát alkalmaztak. Helytelennek vélte a végtelen mennyiségek nagyságának egyszerű összehasonlítását olyan módon, hogy valamely mennyiség nagyobb, kisebb, vagy egyenlő, mint egy másik végtelen mennyiség. Úgy vélte, a végtelen nem egy logikát nélkülöző fogalom, csupán más szabályok vonatkoznak rá.

Egy sokkal gyakorlatiasabb problémát vetett fel Leonardo di Pisa (Fibonacci) (1170-1240) olyan másodfokú egyenletek segítségével, melyek megoldásai nem írhatók fel euklideszi módon, azaz nem határozhatók meg a következő összefüggéssel [2]: $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$.

A 17. század végére bizonyossá vált, hogy az irracionálisok megértéséhez egy készség szinten használható végtelen definícióra van szükség. Az irracionálisok megértése nélkül azonban nem léteznének a mai formájukban a matematika különböző ágai.

John Wallis (1616-1703), a Newton-korabeli Anglia egyik legjelentősebb matematikusa, *Arithmetica Infinitorium* című művében kiterjesztette Toricelli (1608-1647) és Cavalieri (1698-1647) munkásságát az oszthatatlan mennyiségek terén. Munkája egyik példája a π közelítésére adott alábbi kifejezés [1]:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots}$$

A közelítés nem az első, amely megpróbálja közelíteni a π-t, de egyértelműen mutatja egy végtelen folyamat alkalmazásának szükségességét. 1657-ben Wallis a ∞ szimbólumot vezette be, ami egy véget nem érő görbét szimbolizál; ez szinte azonnal elterjedt.

A matematika ezen ágának úttörőivel szemben azonban, a kor szellemének megfelelően, megjelent a bizonyosság szükségessége. Például, ha egy számítás során a ∞ megjelent, azt paradoxonnak tekintették. A deriváltak matematikai jogosultságának Isaac Newton (1642-1727) szerinti értelmezését George Berkeley (1685-1753) a következőképp cáfolta meg: Vegyük az x^2 Newtoni differenciálját [2]:

$$\begin{aligned}(x+t)^2 - x^2 &= x^2 + 2xt + t^2 - x^2 \\ &= 2xt + t^2\end{aligned}$$

Ezt a kifejezést t-vel osztva a következőt kapjuk:

$$2x + t$$

Ezt követően hagyjuk el a t mennyiséget, így megkapjuk a deriváltat, ami $2x$. Ez volt az, ami ellen Berkeley püspök tiltakozott. Hogyan lehet ez a számítás helyes, ha a t kifejezéssel, mint mennyiséggel számolunk, majd ha szükséges, egyszerűen semmisnek tekintjük? Berkeley nem tagadta az új tudományág vívmányait, de érvei hatalmas csapást jelentettek az analízis számára. Newton ugyan adott egy – a maihoz hasonló – definíciót a derivált értelmezésére, de az kevésnek bizonyult, hogy megcáfolja a kétségeket.

Leonard Euler (1707-1783) a következő sorozatok vizsgálatával tette próbára az új vívmányokat:

$$\frac{1}{(x+1)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x \quad + x^2 \quad + x^3 + \ldots \tag{2.2}$$

Helyettesítsünk az (2.1) egyenletbe $x = -1$-et, ekkor azt kapjuk, hogy:

$$\infty = 1 + 2 + 3 + \ldots$$

Helyettesítsünk a (2.2) egyenletbe $x = 2$-t, ekkor azt kapjuk, hogy:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + \ldots$$

Észrevehetjük, hogy a második sorozat tagonként tekintve mindig nagyobb az elsőnél, tehát $-1 > \infty$. Az ehhez hasonló számítások uralkodók voltak Euler idejében.

Végül a matematikusokat a trigonometrikus függvények vizsgálatainak eredményei késztették a probléma megoldására. Jean d'Alembert (1717-1783) trigonometrikus függvények segítségével származtatta a modern hullámfüggvényt a rezgő zsinór mozgásának leírására. A maga korában ez nagy lépés volt a hatványsorokról, amit a kor matematikusai a bizonyosság határának véltek. D'Alambert ugyanakkor az analízis egyszerűbbé tételének érdekében a kezdeti feltételeket periodikus függvényekre szűkítette. Munkásságát Euler folytatta, aki a feltételeket a töréspontmentességben korlátozta, a periodicitást pedig a vizsgált tartomány kibővítésével biztosította. Daniel Bernoulli (1700-1782), továbbgondolva kortársai vívmányait úgy vélte, hogy akár tetszőleges, szakaszonként definiált új görbék is megadhatók megfelelő trigonometrikus sorokkal. Ezt a feltevést Euler és d'Alambert elutasította.

A helyzet majd egy évszázadig megoldatlan maradt, mikor is Baptiste Joseph de Fourier (1768-1830) trigonometrikus sorozatokat alkalmazott a hővezetés problémájára. Munkája ugyan nem vált azonnal elfogadottá, eredményei azonban elvitathatatlanok.

A függvények viselkedésének jellemzéséhez átfogó választ vártak a trigonometrikus függvények vizsgálatától, azonban az a matematikai gondolkodást alapjaiban változtatta meg. Először is a folytonosságról alkotott nézeteket kellett újragondolni. Az új kétségek szükségessé tették az integrál fogalmának átgondolását és a definíciók pontosítását. Végül a halmazelmélet új, szilárd alapokra való helyezése is szükségessé vált. Ennek a folyamatnak néhány példája [2][10]:

- 1817 – Bernard Bolzano (1781-1848) megpróbálta igazolni a ma Középértéktétel néven ismert állítást. Azonban a bizonyítás során megrekedt, nem állt rendelkezésére egy jól megalapozott elmélet a valós számokról.

- 1821 – Augustine Cauchy (1789-1857) ad egy modernnek mondható definíciót a határértékre és a folytonosságra. Pontos definíciót adott sorozatok konvergenciájára és divergenciájára, továbbá megalkotta azt a feltételt, amit ma Cauchy konvergencia kritériumnak nevezünk.

- 1823 – Cauchy téglalapok összegének határaként definiálja az integrált.

- 1829 – Gustav Dirichlet (1805-1859) elégséges feltételt fogalmaz meg olyan függvényekre, amelyeknek van konvergens Fourier-sora.

- 1831 – Carl Frederich Gauss (1777-1855) elutasította a végtelen mennyiség, mint önálló fogalom használatát a matematikában. Úgy vélte, ez egy szófordulat, ami alatt egyesek határértékeket értenek, amihez törtek értékei tetszőlegesen közeledhetnek, mások pedig értékeket, amelyek minden határon túl nőhetnek.

- 1850 – Karl Weierstrass (1815-1897) megadja a ma is használatos ε, δ-t használó folytonosság definíciót, és egy új elméletet fogalmaz meg az irracionális számokról. Elődei az irracionális számokat racionális sorozatok határértékeként tekintették.

- 1854 – Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), aki Dirichlet tanítványa volt, megfogalmazta a sokáig legáltalánosabb definíciót az integrálra.

- 1858 – Richard Dedekind (1831-1916) új elméletet fogalmaz meg az irracionálisokra. Az elméletet a racionális számokon ejtett vágásokra alapozza, ami ma Dedekind szeletekként vált ismertté. A vágásokat egy „végtelenül éles” késsel ejtjük, ezáltal a racionális számokat két részhalmazra osztjuk. Legyen L a vágás alatti racionális számok halmaza, U pedig a vágás feletti racionálisok halmaza. Ekkor definiálhatjuk az (L, U) vágást, ahol L és U együtt tartalmazzák az összes racionális számot. Látható, hogy minden L-beli elem kisebb, mint tetszőleges U-beli elem. Belátható, hogy minden ilyen (L, U) vágás reprezentálhat racionális és irracionális számot is, ugyanis ha L-nek van legnagyobb eleme, vagy U-nak van legkisebb eleme, jelentse ezt r. Azonban, ha L-nek nincs legnagyobb eleme, és U-nak sincs legkisebb eleme, akkor az (L, U) vágás egy irracionális számot reprezentál.

- 1874 – Georg Cantor (1845-1918) megjelentetett egy értekezést, melyben felismerte a végtelen halmazok jellemző tulajdonságát, és megmutatta, hogy léteznek egymástól különböző végtelen mennyiségek is. Ezzel, és későbbi munkásságával megteremtette a mai halmazelmélet alapjait. Ezen felül arra a megfigyelésre jutott, hogy az irracionálisoknak valamilyen rend szerint kell létezniük, mert alkalmas sorozatok határértékeiként elő állnak.

3. fejezet

Végtelen mennyiségek

3.1. Megszámlálhatóan végtelen halmazok

A végtelen fogalmának története során megismerkedtünk már néhány végtelen halmazzal és mennyiséggel. Próbáljuk meg ezeket csoportosítani. Ehhez szükségünk lesz annak tisztázására, hogy mit is értünk halmaz és halmazhoz tartozás alatt. A következő példákhoz egyenlőre nincs szükség a halmazelmélet teljes axiomatikus felépítésére, csupán néhány halmazelméleti fogalom egyértelműsítésére [1]. A halmazt, hasonlóan az elemi geometria felépítéséhez, nem definiáljuk, ahogy a pontot és egyenest sem a geometriában. Helyette inkább leírjuk, hogy mit lehet velük csinálni. A halmaznak, ahogy általában elképzeljük, elemei vannak. A halmaznak eleme lehet egy farkas, egy szőlőszem vagy egy galamb. Fontos kihangsúlyozni, hogy akár egy halmaz is lehet egy másik halmaz eleme, ez a tulajdonság a későbbiekben még fontos szerephez fog jutni. A geometria példájánál maradva, egy egyenes pontok halmaza, ugyanakkor az összes síkbeli egyenes jó példa pontok halmazainak halmazára. Halmazok előfordulhatnak mint elemek – ez nem olyan meglepő –, de annál meglepőbb, hogy matematikai célokra semmilyen más elemre nem lesz szükségünk.

A halmazelmélet alapvető fogalma a hozzátartozás, ha x hozzátartozik az A halmazhoz, azaz $x \in A$. Ezután definiálhatjuk két halmaz egyenlőségét is. Az axiomatikus felépítésben ezt *meghatározottsági axiómának* nevezik.

4. Definíció. Két halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha elemeik ugyanazok.

Vizsgálhatjuk azt is, hogy egy halmaz mikor tartalmaz egy másikat:

5. Definíció. Ha A és B halmaz, továbbá, ha A minden eleme B-nek is eleme, akkor azt mondjuk, hogy A részhalmaza B-nek, azaz $A \subset B$.

Fontos különbséget tenni a részhalmaz és a valódi részhalmaz között, ha egymást tartalmazó halmazokról beszélünk:

6. Definíció. Ha A és B halmaz, továbbá $A \subset B$ és $A \neq B$, akkor A valódi részhalmaza B-nek.

Ahogy korábban említésre került, halmazokat az élet minden területén kreálhatunk. Ezek többnyire véges halmazok, azaz meghatározható az általuk tartalmazott elemek száma. Viszont egyértelműen látszik, hogy a matematikában, amint rendelkezünk az összeadás műveletével, szembekerülünk a végtelen problémájával. Ennek legkézenfekvőbb formája a természetes számok felsorolása. Hasonlóan vég nélküli sokasághoz jutunk, ha csupán a pozitív racionális számokat próbáljuk hiánytalanul felsorolni. További nehézségekbe ütközünk a pontok felsorolásánál egy egyenesen, de akár csak egy egységnyi szakaszon is.

Cantort is ez a kérdéskör foglalkoztatta: vajon összehasonlíthatók-e ezek a végtelen mennyiségek? Először a természetes számokat vette górcső alá. Ugyan a számlálás $1, 2, 3, \ldots$ végtelen eljárás, de „kifárasztja" az $\{1, 2, 3, \ldots\}$ halmazt, mivel minden pozitív egészhez eljutunk a számlálás során. Az ilyen, és ehhez hasonló halmazokat ezért megszámlálhatóan végtelen halmazoknak nevezte. Cantor az $\mathbb{N}$ halmaz nagyságát (számosságát) $\aleph_0$-nak nevezte el. Megfigyelte a természetes számok azon tulajdonságát, hogy 1–az–1 megfeleltetés létesíthető $\mathbb{N}$ és alkalmas $A \subset \mathbb{N}$ között.

Ilyen A halmazt már Galileo is mutatott azzal, hogy felvetette, hány négyzetszám van összességében a természetes számok közt? Érvelése azon alapult, hogy ha valaki felsorolja a természetes számokat, azok egyenként hozzárendelhetők a négyzeteikhez. Ezzel az eljárással pedig az összes lehetséges négyzetszámot felsoroljuk. Erre a problémára Cantor újfajta aritmetikája adott választ. Hasonlóan vizsgálódva könnyedén meghatározható a páros számok és a páratlan számok halmazának nagysága is, hiszen $n \in \mathbb{N}$ esetén $n \leftrightarrow 2n$ és $n \leftrightarrow 2n-1$ hozzárendeléssel megmutathatjuk, hogy szintén $\aleph_0$ méretűek. Innen könnyen felfedezhetjük az újfajta aritmetika mintáit, amely az ilyen halmazokra érvényes, ha a méreteiket tekintjük:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Ezután felmerül a kérdés, hogy vajon egy végtelen nagyság elegendő-e arra, hogy minden létező halmazt lefedjünk?

Elsőként célszerű az $\aleph_0$ számosságot vizsgálni. Ennek szemléltetésére tekintsük George Gamow 1947-ben megjelent gondolatmenetét, melyet David Hilbert (1862-1943) után Hilbert Hotelnek nevezett el.

3.1.1. Hilbert Hotel

7. Definíció. Hilbert Hotel egy olyan szálloda, melynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van. Azaz a szobák száma $\aleph_0$, továbbá minden szobában pontosan egy lakos lehet.

A következő állításokhoz tegyük fel, hogy egy napon a Hilber Hotel megtelt, tehát minden szobához egyértelműen hozzá lehet rendelni a lakóját [1].

1. Állítás. *Amennyiben egy új lakó érkezik, mindig lehet számára keresni egy üres szobát.*

2. Állítás. *Amennyiben egy megszámlálhatóan végtelen sok utast szállító busz érkezik a Hilbert Hotelhez, mindenki számára tudunk keresni üres szobát.*

3. Állítás. *Amennyiben megszámlálhatóan sok, megszámlálhatóan végtelen utast szállító busz érkezik a Hilbert Hotelhez, mindenki számára tudunk keresni üres szobát.*

Az állításokat tekintve elegendő az utolsót belátnunk, hiszen ha ott tudunk elegendő szobát találni, akkor ugyan pazarlással, de a másik kettőt is igazoljuk.

Bizonyítás. Mivel minden szoba foglalt, így nem találunk nekik szobát, ennek ellenére egy gyors költöztetéssel mégis tudunk nekik helyet csinálni. Pusztán annyit kell tennünk, hogy:

- Az 1. szoba lakója maradjon az 1. szobában, majd a következő 1 szoba maradjon üresen;
- A 2. szoba lakója költözzön a 3. szobába, majd a következő 2 szoba maradjon üresen;
- A 3. szoba lakója költözzön a 6. szobába, majd a következő 3 szoba maradjon üresen;
- A 4. szoba lakója költözzön a 10. szobába, majd a következő 4 szoba maradjon üresen ...

1		2			3				4					5						···

3.1. ábra. A szobák a lakók korábbi szobaszámával

Ezzel az eljárással elegendő üres szobát tudtunk alkotni az összes vendég számára. Vegyük az első busz utasait (ezt megtehetjük hiszen a buszok megszámlálhatóan sokan vannak) és helyezzük el az utasait az üresen maradt szobák közül az „elsőkbe”. Ekkor láthatjuk, hogy újra $1, 2, 3, \ldots$ szoba maradt üresen. A rekurziót folytatva megszámlálhatóan végtelen számú, megszámlálhatóan végtelen sok utast szállító busz utasait is el tudtuk szállásolni a Hilbert Hotelben. $\square$

A fenti három állítást a cantori aritmetika nyelvére a következőképpen fordíthatjuk le:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$
$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

Gamow példája viszont új kérdést vet fel: Ha $\aleph_0$ méretű halmaz tartalmazni tud $\aleph_0 \times \aleph_0$ mennyiségű elemet, vajon létezik-e ennél nagyobb méretű halmaz?

3.2. Megszámlálhatatlanul végtelen halmazok

Ahhoz, hogy megválaszoljuk ezt a kérdést, tekintsük Cantor 1874-ben publikált érvelését [1]. A gondolatmenet hasonló ahhoz, ahogyan Euklidesz bizonyította, hogy nincs véges lista, amely az összes prímszámot tartalmazza. Megmutatta, hogy a prímek minden véges listájához tud találni egy új prímet, azaz egyetlen ilyen lista sem teljes.

Cantor bizonyítása is hasonló, csak egy szinttel bonyolultabb. Azt mutatja meg, hogy a számok tetszőleges megszámlálható listája nem teljes. Ehhez felhasználja a számok tizedestört alakját. Tekintsük az alábbi sorozatot:

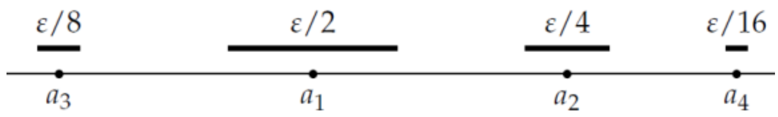
$$\begin{aligned}
x_1 &= 1,\mathbf{4}13\ldots \\
x_2 &= 1,41\mathbf{4}1\ldots \\
x_3 &= 1,414\mathbf{2}32\ldots \\
x_4 &= 1,4142\mathbf{3}5621\ldots \\
x_5 &= 1,41423562\mathbf{3}5\ldots \\
x_6 &= 1,414235623\mathbf{7}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Látható hogy $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, mivel a sorozat tetszőleges két tagja megegyezik egy bizonyos tizedesjegyig, majd az elsőként megjelenő különböző jegyek – a vastagon szedettek –, miatt a listán szereplő tetszőleges két szám egyértelműen különböző. Ezek után, ha „készítünk” egy számot a vastagon szedett helyiértékek segítségével, legyen ez x, látható, hogy tetszőlegesen hosszú lista esetén is mindig találhatunk alkalmas x-et, ami a korábban felsorolt x_i-k legkisebb felső határa, továbbá biztosan különbözik minden korábban felsorolttól:

$$x = 1,\mathbf{414235637}\ldots$$

Ezzel Euklidesz bizonyításához hasonlóan beláttuk, hogy tetszőleges ilyen lista sosem teljes. Tehát arra a következtetésre jutottunk, hogy a valós számok egy megszámlálhatóan végtelen listája sosem teljes.

Hasonló megállapításra jutott 1885-ben Axel Harnack (1851-1888) is, amikor megpróbálta a teljes számegyenest lefedni véges szakaszokkal [1]. Érvelése során a következőképpen gondolkodott. Legyen $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ a valós számok egy tetszőleges felsorolása. Mindegyik a_i lefedhető szakaszokkal úgy, hogy a szakaszok együttes hossza tetszőlegesen kicsi lehet. Legyen a szakaszok együttes hossza ε. Ekkor, amennyiben veszünk egy $\varepsilon/2$ hosszúságú szakaszt, és azzal lefedhetjük a_1-et, a fennmaradó szakasznak ismét vehetjük a felét $\varepsilon/4$-et, és lefedhetjük vele a_2-t és így tovább. A fennmaradó szakaszok felezésével a valós számok tetszőleges listája lefedhető úgy, hogy a szakaszdarabok együttes hossza ε.



Az előző érveléshez hasonlóan itt is látható, hogy az $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ pontokból álló megszámlálhatóan végtelen lista távolról sem tartalmazza az összes valós számot. Továbbá az is látható, hogy az $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ pontokat fedő szakaszok együttes hossza tetszőlegesen kicsi lehet. Ez a bizonyítás ugyan egyértelműbben megmutatja, hogy a valós számok megszámlálhatatlanul sokan vannak, de egy kis pontosítással szemléletesebbé tehető [1]. Adottak az $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ számok a tizedestört alakjukkal a következőképpen:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,22\ldots \\ a_2 &= 0,551\ldots \\ a_3 &= 0,5732\ldots \\ a_4 &= 0,57571\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Fedjük le a_1-et egy $1/10$ hosszúságú szakasszal, ekkor látható, hogy minden olyan szám, amely az első tizedesjegyében a_1-től legalább kettővel eltér, az intervallumon kívül esik. Ezt követően, ha lefedjük a_2-t egy $1/100$ hosszúságú szakasszal, akkor látható, hogy van olyan szám, amely a második tizedesjegyében eltér a_2-től és kívül esik az eddig lefedett intervallumokon. Ezt követően az eddigiekhez hasonlóan mindig le tudjuk fedni az újabb a_i-ket $1/10^i$ hosszú szakaszokkal. A lefedést folytatva, ha megpróbáljuk lefedni az összes valós számot, mindig találunk egy alkalmas x-et, ami kívül esik az eddig lefedett intervallumokon.

Az eddig prezentált mindkét érvelésben felfedezhető egy hasonlóság, amelyet Cantor 1891-ben publikált. A gondolatmenet megértéséhez tekintsük a pozitív egész számok részhalmazait. A pozitív egészek egy H részhalmaza leírható úgy, mint megszámlálhatóan végtelen 0-ák és 1-ek sorozata a következő módon. Az n-edik szám 1, ha H tartalmazza az $n \in \mathbb{N}$ számot, és 0, ha H nem tartalmazza az $n \in \mathbb{N}$ számot.

Ezt követően vegyünk $\aleph_0$ ilyen H halmazt. Ez azt jelenti, hogy ezen halmazokat fel tudjuk sorolni $H_1, H_2, H_3, \ldots$, módon, mivel minden halmazhoz hozzárendelhetünk egy $n \in \mathbb{N}$ számot. A korábbiakhoz hasonlóan meg kell mutatnunk, hogy egyetlen ilyen felsorolás sem tartalmazza a pozitív egészek összes részhalmazát. Ezt úgy tehetjük meg, hogy készítünk egy H halmazt, amely legalább egy elemében különbözik a felsorolásban szereplő H_i halmazoktól. Az eddigiek alapján egy ilyen halmaz megalkotása nem nehéz. Minden $n \in \mathbb{N}$ számot tegyünk bele a H halmazba, ha H_n nem tartalmazza $n \in \mathbb{N}$-t, és amennyiben tartalmazza H_n, akkor H ne tartalmazza $n \in \mathbb{N}$-t. Ekkor látható, hogy a H halmazt nem tartalmazza a felsorolásunk, hiszen az $n \in \mathbb{N}$ elemben minden H_n-től különbözik. Ezt a gondolatmenetet Cantor diagonális érvelésnek nevezte, ami felfedezhető az összes korábbi példában is, ahol megszámlálhatatlanul végtelen mennyiségek létezését mutattunk meg.

Képzeljünk el egy megszámlálhatóan végtelen oszlopokból és sorokból álló táblázatot, amelynek sorai a H_i halmazok úgy ábrázolva, mint 0-ák és 1-ek sorozata, attól függően, hogy H_i tartalmazza-e az adott oszlopot jelölő pozitív egészet. Ekkor a táblázat főátlójában megjelenő sorozat segítségével elkészíthetjük azt a H halmazt, amely biztosan nem szerepel a listánkon.

-	1	2	3	4	5	$\cdots$
H_1	**0**	1	1	0	1	$\cdots$
H_2	0	**0**	1	0	1	$\cdots$
H_3	1	0	**1**	1	0	$\cdots$
H_4	1	1	1	**1**	1	$\cdots$
H_5	0	1	0	1	**0**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
H	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	$\cdots$

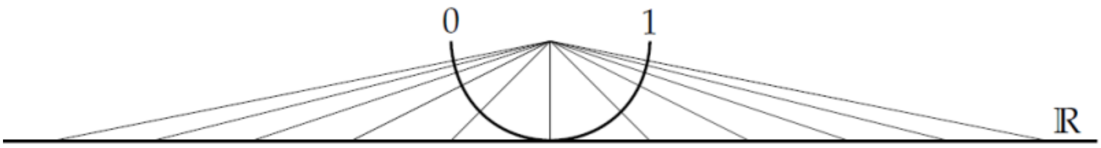
Látszik, hogy a H halmaz elkészítése során a főátló minden elemét az ellentettjére cseréltük ki, ebből következtethetünk annak a halmaznak a nagyságára, amely a pozitív egészek minden részhalmazát tartalmazza.

Ezen halmaz méretét meghatározhatjuk, ha tekintjük a H halmaz előállításának folyamatát. A H halmaz 0-ák és 1-ek sorozata, ahol bármely helyre kétféle értéket írhatunk úgy, hogy a fent említett szabályt követjük. Amikor megpróbáljuk az összes ilyen 0,1 sorozatot létrehozni, akkor $\aleph_0$ helyre írunk be a két érték közül egyet. Ez $\aleph_0$ szorzótényezőt jelent a következők szerint:

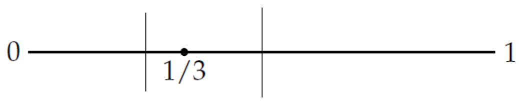
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots$$

Tehát a diagonális érveléssel elő tudunk állítani a pozitív egészeknek $2^{\aleph_0}$ különböző halmazát. Cantor érvelése ugyanakkor arra is rámutat, hogy $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, hiszen 1–az–1 hozzárendelés létesíthető a természetes számok, és természetes számok bizonyos részhalmazai közt, de nem az összessel. Az eddigi példákon keresztül láttuk, hogy létezik olyan halmaz, amely $\aleph_0$-nál nagyobb méretű. Vajon ezen halmazok nagyságát kielégíti-e a diagonális érvelés által létrehozott $2^{\aleph_0}$?

Elsőként tekintsük a pontok számát egy egyenesen. Láttuk, hogy az biztosan nagyobb, mint $\aleph_0$. Az érvelés leegyszerűsítésének érdekében a következő ábrával geometriailag igazoljuk, hogy 1–az–1 megfeleltetés létesíthető a $(0, 1)$ szakasz pontjai és a teljes számegyenes közt. Ehhez nem kell mást tenni, mint „meghajlítani” a $(0, 1)$ szakaszt egy félkörré. Ekkor a félkör középpontjából a félkörív pontjaihoz induló sugarak alkalmas megfeleltetést adnak a $(0, 1)$ és $\mathbb{R}$ között [1].



A valós számok megadásához használjuk a következő kódolási eljárást. A $(0, 1)$ intervallumon szereplő x valós szám bináris kiterjesztését a következőképpen határozhatjuk meg: első lépésként vágjuk félbe az intervallumot. Amennyiben x a bal oldali félintervallumba esik, írjunk a bináris pont után 0-át, amennyiben a jobb oldali félintervallumba, írjunk 1-et. Ezt követően a második bináris jegy meghatározásához ismételjük meg az előbb leírt folyamatot az x-et tartalmazó félintervallumra. Például $\frac{1}{3}$ bináris kiterjesztését a következőképpen kaphatjuk meg:



$$.0101010101010101010101010101\ldots$$

Probléma akkor merülhet fel, ha a vizsgált $x \in (0, 1)$ pont a felezővonalra esik. Azaz például $x = \frac{1}{2}$ vagy $x = \frac{1}{4}$. Ilyenkor az x-et valamely oldalhoz hozzárendeljük. Például, ha $x = \frac{1}{2}$, akkor x-et a bal oldalra rendelve a következő kiterjesztést kapjuk:

$$.0111111111111111111111111111\ldots$$

Ha pedig x-et a jobb oldalhoz rendeljük:

$$.1000000000000000000000000000\ldots$$

Ahhoz, hogy ezt a problémát kiküszöböljük, nézzük meg, milyen alakban írhatók fel az $\frac{1}{2}$-hez hasonlóan problematikus számok. Minden ilyen tört felírható $\frac{q}{2^p}$ alakban, ahol $q, p \in \mathbb{N}$. Mivel $q, p \in \mathbb{N}$ ezért mindegyik helyre pontosan $\aleph_0$ értéket helyettesíthetünk, így összesen $\aleph_0 \times \aleph_0$ ilyen tört létezik, ami a Hilbert Hoteles érvelés alapján egyenlő $\aleph_0$-al. Egy ilyen $\frac{q}{2^p}$ szám mindkét bináris kiterjesztése azonos kezdősorozattal rendelkezik. Az egyik $1000\ldots$, a másik $0111\ldots$ sorozatban végződik, így minden ilyen bináris kiterjesztés hozzárendelhető egy $H \subset \mathbb{N}$ halmazhoz. Mivel megszámlálhatóan végtelen sok ilyen tört van, így létesíthetünk köztük kettő az egyhez megfeleltetést. Az így kapott halmaz és a további 0 és 1 elemekből álló sorozatok pedig 1–az–1 hozzárendelhetők a természetes számok részhalmazaihoz. Így előállítottunk egy 1–az–1 hozzárendelést az $\mathbb{R}$ halmaz és a természetes számok részhalmazainak halmaza között.

3.3. Transzcendens számok

A számfogalom fejlődése az algebrához kötötten folyt. Jó példa erre a következő [10]: Nevezzük racionálisnak azon x számokat, amelyek kielégítik az $ax+b = 0$ alakú elsőfokú egyenleteket, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Ennek a felfogásnak az általánosításából ered az algebrai számok fogalma. Pierre Fermat (1601-1665) foglalkozott olyan számok kutatásával, amelyek valamely egész együtthatós algebrai egyenlet gyökei lehetnek. Meghatározása szerint az algebrai számokat a következőképpen definiálhatjuk:

8. Definíció. (Algebrai szám) Algebrai számoknak nevezzük azokat a (valós vagy komplex) számokat, amelyek gyökei valamely

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

alakú n-ed fokú, egész együtthatós algebrai egyenletnek.

Az algebrai számok magukban foglalják az összes racionális számot és sok irracionálist is, mint például a $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \ldots$. Valójában nem is olyan egyszerű nem algebrai számra példát mutatni. Az első példát Joshep Liouville mutatta meg 1844-ben. Liouvielle az alábbi számot vizsgálta [1]:

$$x = 0,101001000000100000000000000000000000010\ldots$$

ahol az egyre növekvő csupa nullából álló blokkok hosszúsága a következőképp alakul:$1, 2, 3 \times 2, 4 \times 3 \times 2, \ldots$. Az ilyen és ehhez hasonló számokat ma *transzcendens számok*-nak nevezzük, mivel túlhaladnak az algebrai leírás lehetőségein. A mai napig a leírásuk csak végtelen folyamatokkal vagy végtelen sorozatokkal lehetséges. Az első jól ismert transzcendens szám az

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \ldots ,$$

amely számtalan helyen felbukkan a matematikában, csakúgy mint a π, melyről szintén már a 19. században belátták, hogy transzcendens. Cantor 1874-es felfedezése, amelyet az algebrai számok tulajdonságaként nevezett, meglepte a kor matematikusait. Annak ellenére, hogy addig csak maroknyi transzcendens számot ismertek, Cantor belátta, hogy a transzcendes számok alkotják a valós számok túlnyomó többségét. Azt már korábban beláttuk, hogy a valós számok halmaza megszámlálhatatlanul végtelen, Cantor pedig a következő eljárás segítségével megmutatta, hogy az algebrai számok halmaza megszámlálhatóan végtelen [1].

9. Definíció. (Egyenlet magassága) Az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ n-ed fokú egész együtthatós egyenlet magasságán azt a h értéket értjük, amelyre:

$$h = |a_n| + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0| + n$$

4. Állítás. *Megszámlálhatóan végtelen számú algebrai szám van.*

Bizonyítás. Rendeljük hozzá minden n-ed fokú egész együtthatós egyenlethez a h magasságát. Ekkor minden h számhoz csak véges sok egyenlet tartozik, hiszen $n \leq h$ és minden együtthatóra $a_i < h$. Ezért fel tudunk sorolni minden egyenletet, és az egyenlettel együtt az általa meghatározott algebrai számokat. Elsőként $h = 1$, majd $h = 2$ és így tovább. Ezzel az algebrai számok egy megszámlálhatóan végtelen listáját alkottuk meg. □

Az ilyen, és ehhez hasonló bizonyítások megmutatták a halmazelmélet erejét, míg intuitív meggondolások segítségével alig maroknyi transzcendens szám létezésére sikerült fényt deríteni, Cantor halmazelméleti megközelítése új irányt mutatott a matematikában. Ez azonban új problémákat is felvetett, a diagonális érvelés ugyanis alkalmazható minden halmazra, tehát megmutatható, hogy minden halmaznak több részhalmaza létezik, mint eleme. Ebből következik, hogy nem tudunk egy legnagyobb halmazt találni. Tehát nem létezik minden halmaz halmaza, mert ha létezne, akkor az lenne a legnagyobb halmaz. Ezen gondolatmenet nyomán azonban felmerül a kérdés, hogy mit is értünk „halmaz” alatt, ha nem létezik minden halmaz halmaza. Cantor erre nem adott pontos választ, vizsgálatait pusztán az egyértelmű műveletek útján kapott halmazokra korlátozta, ilyen például egy halmaz részhalmazainak felsorolása.

A kérdés sokkal problematikusabb volt a kor filozófus matematikusainak, mint például Gottlob Frege (1848-1925) és Bertrand Russell (1872-1970). Úgy vélték, hogy minden P tulajdonság egyértelműen meghatároz egy halmazt, pontosan azt, amelynek minden elemére igaz a P tulajdonság. Probléma akkor merül fel, ha a P tulajsonságot úgy definiáljuk, hogy „halmaz”, ekkor jutunk a minden halmazt tartalmazó halmaz problémájához. Ezen ellentmondás egy népszerű példája a Russel által adott következő ellentmondás [1]:

A borbély paradoxon: Egy város borbélya egyszer azt állította, hogy minden olyan embernek le fogja vágni a haját, aki nem vágja magának. De ha ez igaz, vajon ki vágja le a borbély haját?

Russel a probléma feloldására a következő kikötést tette. Tekintsük az összes olyan halmazok halmazát, amelyek nem tartalmazzák önmagukat elemként. Tehát a borbélyt elköltöztetve a városból a paradoxont feloldjuk. Russel érvelése meggyőzte a matematikus társadalmat arról, hogy a halmazelmélet és az egész matematika biztos alapokat igényel. A huszadik század elején Ernst Zermelo (1871-1953) úgy vélte, hogy a halmazelmélet biztos alapokra helyezhető axiómák bevezetésével, ezzel formalizálva Cantor intuícióját, hogy minden halmaz megalkotható alkalmas, jól definiált műveletek segítségével egy halmazból, például a természetes számok halmazából.

4. fejezet

A végtelen axiomatikus megközelítése

4.1. Halmazelméleti axiómák

A mai halmazelméletben használatos axiómák többsége a német Zermelo-tól származik, egy fontos kiegészítéssel honfitársától Abraham Fraenkeltől (1891-1965), emiatt Zermelo–Fraenkel axiómarendszernek nevezzük [3].

1. Axióma. (Az egyenlőség axiómája) Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlőek.

2. Axióma. (A létezés axiómája) Létezik halmaz.

Ezzel az axiómával egyenértékű az az állítás, amely azt mondja ki, hogy létezik üres halmaz. Hiszen az 1. axiómából már tudjuk, hogy csak egy üres halmaz létezhet.

3. Axióma. (A részhalmaz axióma) Ha A halmaz, $T(x)$ tulajdonság, akkor $\{x \in A : T(x)\}$ is halmaz.

Itt $T(x)$ bármilyen szabatosan megfogalmazott matematikai tulajdonságot jelenthet. Ilyen tulajdonság lehet például az, amikor egy egyenlet megoldásait keressük: Mely $x \in \mathbb{R}$ értékekre igaz az $x^2-3x+2=0$ egyenlet, azaz $\{x \in \mathbb{R} : x^2-3x+2=0\}$. Ebből az axiómából már könnyen bizonyítható halmazok metszete és különbsége.

4. Axióma. (A páraxióma) Adott x-hez és y-hoz van olyan halmaz, amely csak x-et és y-t tartalmazza. Jele: $\{x, y\}$.

Ezzel azt is kimondjuk, hogy létezik az x-et tartalmazó egyelemű $\{x\}$ halmaz, és léteznek kételemű halmazok; amennyiben $x \neq y$, akkor létezik az $\{x, y\}$ halmaz is.

10. Definíció. (Rendezett pár) Az x és y által alkotott rendezett pár jelentse a következőt:

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

11. Definíció. (Descartes-szorzat) Az A és B halmazok Descartes szorzatán a következőt értjük:

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A, y \in B\}$$

5. Axióma. (Az unió axiómája) Az $\{A_i : i \in I\}$ halmazok uniója alatt azt a B halmazt értjük, amelyre ha $A = \{A_i : i \in I\}$, akkor

$$B = \{x : x \in A_i \in A,\ i \in I\}$$

Ezen axióma szerint tehát B elemei azok, amelyek elemei A valamelyik elemének, tehát A „unokái”.

6. Axióma. (A hatványhalmaz axióma) Minden halmaznak létezik hatványhalmaza (tehát az összes részhalmazainak halmaza).

Erre az axiómára azért van szükség, mert még a végtelenségi axiómával (következő axióma) sem tudjuk megszámlálhatónál nagyobb halmaz létezését belátni.

7. Axióma. (Végtelen halmaz létezése) Létezik végtelen halmaz.

Ennek kimondására azért van szükség, mert az eddigi axiómákkal nem tudjuk végtelen halmaz létezését bizonyítani. Ez az axióma persze szükségtelenné teszi az 1. axiómát.

8. Axióma. (A kiválasztási axióma) Ha $\{A_i : i \in I\}$ nemüres halmazok rendszere, akkor van olyan I-n értelmezett f függvény, hogy $f(i) \in A_i$ minden $i \in I$-re.

Megmutatható, hogy már a korábbi példák során is kihasználtuk ezt az axiómát. Tekintsük a következő állítást:

5. Állítás. *Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható.*

Bizonyítás. Legyenek halmazaink $A_0, A_1, \ldots$ és soroljuk fel mindegyiket:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{a_{00}, a_{01}, \ldots\} \\ A_1 &= \{a_{10}, a_{11}, \ldots\} \\ A_2 &= \{a_{20}, a_{21}, \ldots\} \\ A_3 &= \{a_{30}, a_{31}, \ldots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ezután vegyük ezen halmazok unióját:

$$X = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots = \{a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{03}, a_{12} \ldots\}$$

és készen is vagyunk. Ugyan nem teljesen egyértelmű, de ezen érvelés során kihasználtuk a kiválasztási axiómát. Először vegyük az $A = \{A_0, A_1, \ldots\}$ halmazok felsorolását. Megmutatható, hogy minden A_i $i \in \mathbb{N}$ halmazhoz létezik egy elemeinek felsorolását tartalmazó B_i halmaz. Válaszzuk ki A_i elemeinek egy felsorolását! Azaz vegyünk egy olyan g függvényt, amely az $i = 0, 1, \ldots$ értékekre kielégíti, hogy $g(i) \in B_i$. Itt használtuk ki a kiválasztási axiómát, oly módon, hogy egyszerre választottuk ki végtelen sok nemüres halmaznak egy-egy elemét. E g függvény segítségével elkészíthetjük a következő táblázatot, és átlósan haladva sorba rendezhetjük a halmazrendszer összes elemét. $\square$

$$\begin{array}{|c|cccccccc}
\hline
A_0 & a_{00} & \rightarrow & a_{01} & & a_{02} & \rightarrow & a_{03} & \cdots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
A_1 & a_{10} & & a_{11} & & a_{12} & \cdots & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
A_2 & a_{20} & & a_{21} & \cdots & & & & \\
 & & \swarrow & & & & & & \\
A_3 & a_{30} & \cdots & & & & & & \\
\vdots & \downarrow & & & & & & &
\end{array}$$

A kiválasztási axiómával kiegészített rendszer ugyan még bővíthető további, ezektől független állításokkal, de már elégséges ahhoz, hogy megmutassuk a halmazok axiomatizálásában rejlő lehetőségeket. Tekintsük Neumann János (1903-1957) 1920-as definícióját a természetes számok megalkotására [1]. Legyen 0 az üres halmaz, majd

$$
\begin{aligned}
1 &= \{0\}, \\
2 &= \{0, 1\}, \\
3 &= \{0, 1, 2\}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Észrevehető, hogy $n + 1 = n \cup \{n\}$ és $m < n$ akkor és csak akkor igaz, ha m részhalmaza n-nek. Ezzel a módszerrel előállítottuk az öröklődés „függvényét”, amely rengeteg matematikai bizonyítás elengedhetetlen eszköze, és ráadásként megkaptuk a „kisebb mint” reláció definícióját is, így elkezdhetjük felépíteni a ma ismert számtant. A 7. axióma és a neumanni eljárás segítségével előállítjuk a $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ halmazt. Így már rendelkezésünkre áll a természetes számok halmaza, és – kihasználva a 6. axiómát és a korábbi intuitív érveléseket – előállíthatunk egy $2^{\aleph_0}$ méretű halmazt, és ezzel együtt minden mást a ma ismert matematikában. A gondolatmenet fontos eredménye a $<$ reláció, mellyel összehasonlíthatjuk a természetes számok elemeit, és ezen összehasonlítások alapján sorba is rendezhetjük őket. Innen adódik a kérdés, hogy vajon mely halmazok rendezhetők, és milyen feltételeknek kell megfelelnie egy ilyen összehasonlításnak.

4.2. Rend és rendezés

Az előző fejezetben mutattunk példát egy rendezésre, a $<$ reláció rendezi a $\mathbb{N}$ halmazt. Minden ilyen rendezésnek teljesítenie kell a következő három feltételt [3]:

- irreflexív, azaz $x < x$ nem teljesül egyetlen $x \in A$ elem esetén sem;
- tranzitív, azaz ha $x, y, z \in A$ és $x < y$ továbbá $y < z$, akkor $x < z$;
- trichotóm, azaz ha $x, y \in A$, akkor $x < y$, $x = y$ vagy $x > y$.

A halmazelmélet nyelvén az $\langle A, R\rangle$ rendezett párt, ahol $R \subseteq A \times A$, rendezett halmaznak nevezzük, ha teljesíti az előbbi tulajdonságokat:

- $\langle x, x\rangle \notin R$ ha $x \in A$
- ha $\langle x, y\rangle \in R$ és $\langle y, z\rangle \in R$, akkor $\langle x, z\rangle \in R$
- ha $x, y \in A$, akkor $\langle x, y\rangle \in R$, $x = y$ vagy $\langle y, x\rangle \in R$.

Néhány jó példa rendezett halmazra a $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ rendezésén kívül: az egész számok $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, a racionálisok $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ és a valós számok halmaza $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, de rendezett halmaz az üres halmaz is, az üres rendezéssel $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$. Könnyen megmutatható, hogy minden véges halmaz rendezhető, hiszen, ha veszünk egy A véges halmazt, ahol $|A| = n$, akkor van A elemeinek egy $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ felsorolása, amelyet rendezhetünk az indexekben használt számok szerint csakúgy, mint a természetes számokkal tennénk. A további vizsgálódáshoz definiáljuk két rendezett halmaz között a rendezéstartó függvényt [3].

12. Definíció. (Rendezéstartó függvény) Ha az A halmaz rendezett a $<_A$ rendezéssel és a B halmaz rendezett a $<_B$ rendezéssel, akkor az $f : A \to B$ függvény neve *rendezéstartó függvény*, ha $x <_A y$ esetén $f(x) <_B f(y)$ is teljesül.

Amennyiben az $\langle A, <_A \rangle$ és $\langle B, <_B \rangle$ halmazok közötti rendezéstartó f függvény bijekció, akkor *hasonlóságnak* vagy *izomorfizmusnak* nevezzük. Mivel az izomorfizmus ekvivalencia-reláció, ezért az egymással izomorf halmazok közös tulajdonságát *rendtípusnak* nevezzük:

$$tp(\langle A, <_A \rangle) = tp(\langle B, <_B \rangle)$$

Eddigi vizsgálataink csak arra terjedtek ki, hogy mikor nevezhetünk két rendezett halmazt hasonlónak. Vizsgáljuk most ezen halmazokat abból a szempontból, hogy melyeknél találhatunk legkisebb elemet. Hamar arra a következtetésre jutunk, hogy az említettek közül csak a véges halmazok, a természetes számok halmaza és ezek részhalmazai tartalmaznak egyértelműen legkisebb elemet. Nevezzük ezért az olyan halmazokat, ahol $\langle A, < \rangle$ minden részhalmazának van legkisebb eleme, *jólrendezett halmaznak.*

Már definiálhatjuk jólrendezett halmazok rendszámát, ehhez tekintsük a következő tételt [3]:

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\langle A, <_A \rangle$ izomorf $\langle B, <_B \rangle$-vel és $\langle A, <_A \rangle$ jólrendezett. Ekkor $\langle B, <_B \rangle$ is jólrendezett.*

Bizonyítás. A feltétel szerint létezik $f : \langle A, <_A \rangle \to \langle B, <_B \rangle$ izomorfizmus. Legyen $C \subseteq B$ nemüres részhalmaz. Válasszuk ki a nemüres $f^{-1}(C)$ halmaz legkisebb elemét, legyen ez a. Ekkor $f(a)$ a C halmaz legkisebb eleme, hiszen f rendezéstartó. $\square$

Most már definiálhatjuk a rendszámot:

13. Definíció. (Rendszám) A jólrendezett halmazok rendtípusait *rendszámoknak* nevezzük.

Most térjünk vissza a rendezett halmazok tulajdonságainak vizsgálatára és definiáljuk a rendezett halmazok egy speciális részhalmazát:

14. Definíció. (Kezdőszelet) Az $\langle A, < \rangle$ rendezett halmaz B részhalmazát *kezdőszeletnek* nevezzük, ha $x, y \in A$, $x \in B$ és $y < x$, akkor $y \in B$.

Az $\mathbb{N}$ halmaznak ilyen kezdőszelete például az $\{1, 2, 3, \ldots, 96\}$ és persze a két triviális, az $\emptyset$ és $\mathbb{N}$. Fontos kiemelni az *elem által meghatározott kezdőszeleteket.* Egy $\langle A, < \rangle$ rendezett halmaz valamely B részhalmazát az $a \in A$ elem által meghatározott kezdőszeletének nevezzük, ha $B = \{x \in A : x < a\}$, ezt $B = A|a$-val jelöljük. Most már minden eszköz a rendelkezésünkre áll, hogy két rendszámot összehasonlíthassunk. Legyenek α, β rendszámok. Akkor mondjuk, hogy $\alpha < \beta$, ha igaz, hogy $\langle A, <_A \rangle$ halmaz rendszáma α, és a $\langle B, <_B \rangle$ halmaz rendszáma β, továbbá $\langle A, <_A \rangle$ izomorf egy $b \in B$ elem által alkotott $\langle B|b, <_B \rangle$ szelettel. Ezen összehasonlításra is igazak a következő tulajdonságok:

- A rendszám-összehasonlítás irreflexív, azaz $\alpha < \alpha$ sosem teljesül.

  Bizonyítás. Amennyiben $\alpha < \alpha$ teljesülne, akkor α izomorf egy $a \in A$ elem által alkotott $\langle A|a, < \rangle$ szeletével. Ez viszont nem lehetséges, hiszen akkor $f : \langle A, < \rangle \to \langle A|a, < \rangle$ olyan rendezéstartó leképezés lenne, amire $f(a) < a$, ekkor viszont létezne A-ban végtelen csökkenő sorozat, ami jólrendezett halmazban nem lehetséges. $\square$

- A rendszám-összehasonlítás tranzitív, azaz ha $\alpha < \beta$ és $\beta < \gamma$, akkor $\alpha < \gamma$.

  Bizonyítás. Tegyük fel, hogy α az $\langle A, < \rangle$, β a $\langle B, < \rangle$, γ pedig a $\langle C, < \rangle$ jólrendezett halmazok rendszámai oly módon, hogy $\alpha < \beta < \gamma$. Ekkor létezik $b \in B$ és $c \in C$, hogy az $f : \langle A, < \rangle \to \langle B|b, < \rangle$ és a $g : \langle B, < \rangle \to \langle C|c, < \rangle$ izomorfizmusok. Ekkor ezek $g \circ f$ kompozíciója is izomorfizmus $\langle A, < \rangle$ és $\langle C|g(b), < \rangle$ között, tehát $\alpha < \gamma$. $\square$

- A rendszám-összehasonlítás trichotóm, azaz $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ vagy $\beta < \alpha$. Ezen állítás igazolásához tekintsük a következő tételt és annak bizonyítását [4]. (A tételt már Cantor is megfogalmazta, de bizonyítani nem tudta.)

2. Tétel. (Cantor-Schröder-Bernstein) *Ha A és B halmazok, továbbá léteznek $f : A \to B$ és $g : B \to A$ injektív leképezések, akkor létezik az A és B halmazok közti bijektív leképezés is.*

Bizonyítás. Definiáljuk részhalmazok sorozatait a következőképpen:

$$\begin{aligned} A_0 &= A & B_0 &= B \\ A_1 &= g(B_0) & B_1 &= f(A_0) \\ A_2 &= g(B_1) & B_2 &= f(A_1) \\ &\vdots & &\vdots \\ A_n &= g(B_{n-1}) & B_n &= f(A_{n-1}) \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Miután az injektív leképezések felhasználásával elkészítettük ezeket a sorozatokat, a következő megfigyeléseket tehetjük:

$$A = A_0 \sim B_1 \sim A_2 \sim B_3 \sim A_4 \sim \dots$$
$$B = B_0 \sim A_1 \sim B_2 \sim A_3 \sim B_4 \sim \dots$$

továbbá,

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$
$$B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$$

Az első észrevételből úgy tűnik, hogy $A \sim B_1$ és $B \sim A_1$, a másodikból pedig az látszik, hogy $A \supseteq A_1$ és $B \supseteq B_1$, ebből arra jutnánk, hogy $A \sim B$. Ez azonban nem minden esetben teljesül. Ha minden $i \in I$-re $A_i \sim B_i$, továbbá az A_i halmazok páronként diszjunktak, és a B_i halmazok is páronként diszjunktak, akkor igaz:

$$\bigcup_{i \in I} A_i \sim \bigcup_{i \in I} B_i \ .$$

Tehát arra van szükségünk, hogy páronként diszjunk halmazok sorozatát állítsuk elő, amire teljesül az első észrevétel. Legyen $A_n^* = A_n \setminus A_{n+1}$, ezzel az észrevételt átfogalmazhatjuk oly módon, hogy:

$$A_0^* \sim B_1^* \sim A_2^* \sim B_3^* \sim A_4^* \sim \dots$$
$$B_0^* \sim A_1^* \sim B_2^* \sim A_3^* \sim B_4^* \sim \dots$$

Így már teljesül, hogy

$$\bigcup_{0 \le n} A_n^* \sim \bigcup_{0 \le n} B_n^* \ .$$

Legyen most $\bigcup\limits_{0 \le n} A_n^* = \widetilde{A}$ és $\bigcup\limits_{0 \le n} B_n^* = \widetilde{B}$. Továbbá vegyük a következő halmazokat: $\overline{A} = \bigcap\limits_{0 \le n} A_n$ és $\overline{B} = \bigcap\limits_{0 \le n} B_n$, ekkor $A = \bigcup\limits_{0 \le n} A_n$. A sorozat tagjainak metszeteként definiált halmazokra igaz a következő: $f(\overline{A}) = \overline{B}$ és $g(\overline{B}) = \overline{A}$, hiszen ezek az elemek azok, amelyek előállnak a g és f leképezések képeként. Eddig láttuk, hogy $\widetilde{A} \sim \widetilde{B}$ és $\overline{A} \sim \overline{B}$. A két halmaz definíció szerint diszjunkt, így $A = \widetilde{A} \cup \overline{A}$ és $B = \widetilde{B} \cup \overline{B}$, tehát $A \sim B$. $\square$

A rendszám összehasonlítás trichotómiáját e tétel szerint visszavezettük az injektív leképezések létezésére. Beláttuk, hogy, ha ez mindkét irányba létezik, akkor izomorf halmazokról beszélünk, és fennáll a rendszám ekvivalencia, ha pedig csak az egyik irány létezik, akkor annak megfelelően az egyik rendszám nagyobb.

Ezek után tekintsük egy halmaz rendszámának és a halmaz részhalmaza rendszámának viszonyát ugyanazon rendezés szerint [3].

3. Tétel. *Ha $\langle A, <\rangle$ α rendszámú jólrendezett halmaz és $B \subseteq A$, akkor a $\langle B, <\rangle$ jólrendezett halmaz β rendszámára $\beta < \alpha$.*

Bizonyítás. Ha ez nem lenne igaz, akkor a rendszámok összehasonlításának harmadik tulajdonsága miatt csak $\alpha < \beta$ lehetne. Ilyenkor azonban létezik egy $f : \langle A, <\rangle \to \langle B|b, <\rangle$ izomorfizmus egy alkalmas $b \in B$ elem által alkotott kezdőszeletre. Ekkor azonban f leképezi a teljes $B \subseteq A$ halmazt a $B|b$ kezdőszeletre, ami lehetetlen, hiszen ekkor $f(b) < b$ lenne, ami egy végtelen csökkenő sorozatra vezetne egy jólrendezett halmazban. □

Ezek után elindulhatunk a „másik” irányba, és elkezdhetjük a már meglévő halmazainkat bővíteni, így közelítve a végtelent [3]. Példának vegyünk egy $\langle A, <\rangle$ jólrendezett halmazt α rendszámmal, és tegyünk hozzá egy új, a $<$ rendezés szerint az összes A-belinél nagyobb z elemet. Az így létrehozott $B = A \cup \{z\}$ halmaz jólrendezett az $\langle A, <\rangle$-beli rendezéssel, hiszen z minden korábbinál „nagyobb”. A $\langle B, <\rangle$ rendszáma csak α-tól függ, ugyanis ha $f : \langle A, <\rangle \to \langle A', <\rangle$ izomorfizmus és z' nagyobb A' minden eleménél, akkor f értelmezhető z-ben is, és $f(z) = z'$. Legyen az így előállított rendszám $\alpha + 1$. Az ilyen $\alpha + 1$ alakú rendszámokat nevezzük *rákövetkező* rendszámoknak. Végtelen rendszámok esetén α^+ jelölést is használunk, ennek indoklása ott szerepel majd bővebben. Azokat a nem nulla rendszámokat pedig, amelyek nem rákövetkezők, *limesz rendszámoknak* nevezzük. Ez azzal egyenértékű, hogy ha veszünk egy $\langle A, <\rangle$ jólrendezett halmazt, akkor abban az esetben beszélhetünk rákövetkező rendszámról, ha van $\langle A, <\rangle$-nak legnagyobb eleme. Amennyiben nincs, azaz minden $x \in A$ elemhez létezik olyan $y \in A$ amelyre $x < y$, akkor limesz rendszámról beszélünk. Mindezek után nézzük meg, milyen műveleteket értelmezhetünk a rendszámokkal.

4.3. Rendszám aritmetika

4.3.1. Rendszámok összeadása

Először értelmezzük az összeadás műveletét [8]. Ehhez vizsgáljuk meg, hogy mit értünk két jólrendezett halmaz összege alatt. Legyen A és B két diszjunkt halmaz. Ezeket a következőképpen rendezhetjük: A és B elemei tartsák meg a saját rendezésüket, és kössük ki, hogy az A minden eleme előzze meg B elemeit. Ezt tegyük meg a következő két végtelen halmazra [1]: legyen A a páratlan számok halmaza, B pedig a páros számok halmaza. Már tudjuk, hogy mindkét halmaz végtelen, és az uniójukként előálló $\mathbb{N}$ halmaz jólrendezhető. Tekintsük most a következő rendezést: mondjuk azt, hogy m „kisebb" mint n, ha m páratlan és n páros, vagy pedig mindkét szám azonos paritású és $m < n$ a neumanni értelemben. Ezzel a következő rendezést állítottuk elő:

$$1, 3, 5, \ldots 2, 4, 6, \ldots$$

Ez természetesen kibővíthető tetszőleges, páronként diszjunkt halmazokból álló halmazrendszerre is. Ha A_i $i \in I$ egy ilyen rendszer, akkor jelentse az $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ halmaz rendezése a következőt: Az $a \in A_i$ és $b \in A_j$ unióbeli elemekre $a < b$ azzal ekvivalens, hogy $i < j$, vagy pedig $i = j$ esetén az A_i-ben az a „megelőzi" b-t annak rendezése szerint.

Ahhoz, hogy a műveleteinket számszerűsíteni tudjuk, a rendszámok értékeit a következőképpen adjuk meg [8]. Amennyiben A egy véges jólrendezett halmaz, akkor A rendszáma jelentse A elemszámának értékét. Ha pedig α és β tetszőleges rendszámok, akkor legyen A és B két olyan diszjunkt és jólrendezett halmaz, amelyre A rendszáma α, B rendszáma pedig β. Amennyiben az A és B halmazok jólrendezett összege C, akkor C rendszáma $\alpha + \beta$ lesz.

A rendszámok összegzésének tulajdonságait a következő azonosságok mutatják meg:

$$\alpha + 0 = \alpha$$
$$0 + \alpha = \alpha$$
$$\alpha + 1 = \alpha^+$$
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

A rendszámok összeadásának – mint a harmadik egyenletből látszik – vannak „rossz" tulajdonságai is. Ez azzal magyarázható, hogy nem minden esetben igaz rá a kommutatív szabály. Ahhoz, hogy ezt belássuk, alkossuk meg a természetes számok halmazának rendszámát. Bármely $n \in \mathbb{N}$ számra, ha van két n elemű rendezett (ami egyben jólrendezett is) halmaz, akkor azok izomorfak, tehát csak egy n nagyságú rendszám van. Ezt célszerűen azonosnak tekintjük az $n \in \mathbb{N}$ számmal, mivel egy n elemű halmaz kezdőszeletei pontosan a $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ elemű halmazok, és azokat szintén azonosítani tudjuk a megfelelő természetes számokkal anélkül, hogy a rendszám-összehasonlítás tulajdonságait sértenénk. Ezt követően jogosan merül fel a kérdés, hogy mi lesz az első limesz rendszám. Az egyetlen eddig említett végtelen, jólrendezhető halmaz az $\mathbb{N}$ és a vele izomorf halmazok rendszáma, jelöljük ezt ω-val. Az összeadás kommutativitásának problémája így arra egyszerűsödött, hogy a korábbi eljárások alkalmazásával a természetes számok mely „végére" adjuk azt a bizonyos elemet. A dilemmával akkor szembesülünk, ha a végtelen sorozat után illesztjük az új tagot, hiszen az eredeti sorozatunk nem rendelkezett utolsó elemmel, de az új igen.

4.3.2. Rendszámok szorzása

A rendezett összeadás elvezet a rendezett szorzás műveletéhez. Bármely A és B jólrendezett halmaz esetén a szorzást, mint az A halmaz B-szeri önmagához adását próbáljuk definiálni [8]. Ehhez készítenünk kell egy jólrendezett halmazokból álló halmazrendszert, amelynek minden tagja izomorf A-val. Minden $b \in B$ esetén A_b legyen az $\langle a, b\rangle$ $(a \in A)$ alakú rendezett párok halmaza, ami az összes $b \in B$-re az $A \times B$ Descartes szorzat. Amennnyiben erre a halmazrendszerre értelmezzük a rendezett összeget, egy rendezett halmazt kapunk. Ennek rendezése úgy írható le, hogy amennyiben $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in A \times B$ és $\langle a, b\rangle < \langle c, d\rangle$, akkor $b < d$, vagy $b = d$ és $a < c$. Itt is megfogalmazható az az észrevétel, hogy alkalmas halmazokra, a halmazok rendezett szorzatának rendszáma a rendszámok szorzata lesz. Csakúgy, mint az összeadásnál, itt is szemléletesek a következő tulajdonságok:

$$\alpha \times 0 = 0$$
$$0 \times \alpha = 0$$
$$\alpha \times 1 = \alpha$$
$$1 \times \alpha = \alpha$$
$$\alpha \times (\beta \times \gamma) = (\alpha \times \beta) \times \gamma$$
$$\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Hasonlóan az összeadásnál tapasztalt problémákhoz, itt is különbséget kell tennünk aszerint, hogy jobbról vagy balról végezzük el a szorzást. Amennyiben balról szorzunk, tehát vegyük a 2ω szorzatot, a rendezés segítségével elérhetjük, hogy egy ω-hoz hasonló halmazt kapjunk. Ugyanakkor, ha tekintjük az $1\omega + 1\omega$ összeget, ezzel előállítunk egy új rendezést igénylő halmazt, amely eltér a korábban megtalált ω halmaztól.

4.3.3. Rendszámok hatványozása

Ahogy a rendezett összeadás a rendezett szorzás műveletéhez vezetett, ugyanúgy használjuk fel a szorzást a rendezett hatványozás definiálásához [8]. Használjuk fel a következő rekurziót: Legyen $\alpha^0 = 1$, továbbá $\alpha^{\beta+1}$, ahol α és β rendszámok, legyen egyenlő $\alpha^\beta\alpha$-val. Ekkor definiáljuk α^β-t az összes α^γ alakú rendszám szuprémumaként, ahol $\gamma < \beta$. Ekkor igazolhatók a következő tulajdonságok:

$$
\begin{aligned}
0^\alpha &= 0 \\
1^\gamma &= 1 \\
1 \times \alpha &= \alpha \\
\alpha^{\beta+\gamma} &= \alpha^\beta \alpha^\gamma \\
\alpha^{\beta\gamma} &= (\alpha^\beta)^\gamma
\end{aligned}
$$

Itt is meg kell említeni, hogy – ellentétben a hatványozás elemi matematikai értelmezésével – csakúgy mint a szorzás esetén, itt sem teljesül az összes azonosság. Például ha α és β rendszámok, akkor $(\alpha\beta)^\gamma$ nem egyezik meg a $\alpha^\gamma\beta^\gamma$ kifejezéssel. Így $(2 \cdot 2)^\omega = 4^\omega$, ami szintén egy ω típusú rendszám, míg $2^\omega \cdot 2^\omega = \omega \cdot \omega = \omega^2$.

Kezdjük el az így bevezetett műveletek segítségével növelni a már definiált rendszámokat. Az első, amit a felsorolásban megemlítünk, legyen az $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ halmaz rendszáma, azaz ω. Ez az első olyan rendszám, amely túlhalad az összes korábban említetten. Mi következik azonban utána?

Érvelésünkhöz használjuk az egész számokon értelmezett függvények halmazát, és azon értelmezzük a növekedés nagyságát, mint rendezést [1]. Könnyedén találhatunk a véges rendszámokhoz $\{1, 2, 3, \ldots\}$ alkalamas függvények egy olyan $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sorozatát, ahol mindegyik növekedése meghaladja az előzőét. A cantori eljárást felhasználva megkereshetjük ezen függvények „diagonális" függvényét, $f(n) = f_n(n)$, amely mindig gyorsabban nő az őt megelőzőknél. Definiáljuk ezt a függvényt az ω limeszrendszámhoz úgy, hogy $f_\omega(n) = f_n(n) = n^n$, így megtaláltuk az első transzfinit rendszámhoz tartozó függvényünket. Ezt azonban egyből követi egy „utódja", hiszen az $\omega + 1$ rendszámhoz is meg tudunk adni egy elegendően gyorsan növő függvényt, legyen $f_{\omega+1} = n^{n+1}$. Erre igazolható, hogy gyorsabban növekszik, mint bármely korábban leírt függvény, hiszen $\frac{f_{\omega+1}(n)}{f_\omega(n)} = n \to \infty$, ha $n \to \infty$. Ekkor viszont az egyre növekvő rendszámok egy egész sorozatára lesz szükségünk:

$$\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots$$

hogy kifejezzük az egyre gyorsabban növekvő függvényeinket:

$$f_{\omega+1}(n) = n^{n+1}, f_{\omega+2}(n) = n^{n+2}, f_{\omega+3}(n) = n^{n+3}, \ldots$$

Ezeknek a függvényeknek ismét meg tudjuk konstruálni egy „diagonális” függvényét, amely minden eddigit felülmúl:

$$f_n = n^{2n}$$

Ennek megfelelően meg kell adni a hozzá tartozó rendszámot, amely nagyobb az eddigi

$$1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots$$

rendszámoknál: Legyen a legkisebb ilyen $\omega \cdot 2$. Itt azonban nem állunk meg, hiszen minden eddig felhasznált $g(n)$ függvénynél tudunk találni egy gyorsabban növőt, nevezetesen $n \cdot g(n)$-t. Emiatt tehát az egyre növekvő rendszámoknak egy újabb sorozata keletkezik:

$$\omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \omega \cdot 2 + 3, \ldots$$

melyeknek szuprémumát kézenfekvő $\omega \cdot 3$-nak nevezni. Ez azonban egyre növekvő rendszámok egy újabb sorozatát indítja el, amelynek felső korlátja $\omega \cdot 4$ és így tovább. Tekintsük most az elkészült rendszámok következő sorozatát:

$$\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \ldots$$

melynek felső határa $\omega \cdot \omega = \omega^2$ és annak megfelelője az $f_{\omega^2}(n) = n^{n^2}$. Ez az eddigi megfontolásokkal ismét túlszárnyalható:

$$\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \omega^2 + 3, \ldots, \omega^2 + \omega,$$

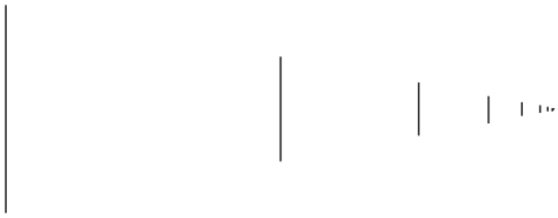
ami újfent növelhető:

$$\omega^2 + \omega \cdot 2, \omega^2 + \omega \cdot 3, \omega^2 + \omega \cdot 4, \ldots, \omega^2 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 2$$

Ezt természetes módon követi a hatványok egyre magasabb $\omega^3, \omega^4, \omega^5, \ldots$ sorozata, és azok szuprémuma ω^ω.

A folytatás innen már jól látható, csupán az elnevezési készségünket teszi próbára. Látványosabb eredményt kapunk, ha megpróbáljuk ezen hatalmas mennyiségeket valamilyen rendezett módon ábrázolni. Talán a legjobb módja ennek, ha megpróbáljuk a rendszámokat, mint a $(0, 1)$ intervallumba tartozó racionális számok halmazát ábrázolni a $<$ rendezéssel. Ennek megfelelően legyen ω a $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots\}$ halmaznak a rendszáma, és ezen halmaz minden elemét reprezentálja egy függőleges vonal, melyek hossza tartson nullához, ahogy közeledünk ω-hoz [1].

Amennyiben egy α rendszám így reprezentálható, akkor egy $\alpha+1$ nagyságú is. Elsőként rendezzük az α-t reprezentáló törteket a $(0, \frac{1}{2})$ intervallumba, oly módon,



hogy minden tagot osszunk el kettővel. Ezt követően, adjuk hozzá az így kapott rendszerhez az $\frac{1}{2}$-pontot, mint $\alpha + 1$ reprezentánsát. Amennyiben $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots$ mind reprezentálható, akkor a szuprémumuk is. Ehhez rendezzük α_1-et a $(0, \frac{1}{2})$-be, α_2-t a $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$-be, α_3-at a $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$-ba és így tovább, végül tegyük a helyére az így elkészített $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ rendszer szuprémumát, az 1-et. Így ábrázolhatjuk akár az ω^ω rendszámot is, a racionális számok megfelelő halmazával [1]:

4.4. A kontinuumhipotézis

A rendszámok megfoghatatlanságának eddig jópár példáját láttuk, de fontos kihangsúlyozni, hogy ezek mind megszámlálható, vagy megszámlálhatóan végtelen rendszámok voltak. Magától értetődő a kérdés, hogy – mint a halmazok nagyságánál – ezzel a megközelítéssel lehet-e vajon ennél messzebb jutni a végtelen fogalomkörében.

Mindenekelőtt fontos megjegyezni, hogy értelmezhető a rendszám számossága, hiszen adott rendszámú halmazok közt nemcsak bijekció, hanem speciálisan rendezéstartó bijekció is létesíthető. Az egyértelműség érdekében adjuk meg az α rendszám számosságát, mint a legszimpatikusabb $\overline{\alpha}$ reprezentáns számosságát. Ebből következik, hogy nagyobb rendszám számossága is nagyobb, vagy egyenlő kell legyen, hiszen, ha $\alpha < \beta$, akkor az őket reprezentáló halmazokra $\overline{\alpha} \subseteq \overline{\beta}$, így $|\overline{\alpha}| \leq |\overline{\beta}|$. Tekintsük ezt követően az alábbi tételt [3]:

4. Tétel. *Van nem megszámlálható rendszám.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az összes rendszám megszámlálható. Legyen továbbá az $\langle A, < \rangle$ jólrendezett halmaz rendszáma α. A feltevés szerint $|\alpha| \leq \aleph_0$, tehát létezik A-ból a természetes számok halmazába ható injekció. Ekkor ez a megfeleltetés bijekció a $B \subset \mathbb{N}$ és az A halmazok közt. Mivel a természetes számok minden részhalmaza jólrendezhető, így izomorfizmus is létesíthető. Tehát minden α rendszámhoz találunk egy $\langle B, < \rangle$ jólrendezett részhalmazt $\mathbb{N}$-ben, amelynek a rendszáma szintén α. Legyen ekkor:

$$U = \{\langle B, < \rangle : B \subseteq \mathbb{N}\},$$

ahol $\langle B \subseteq \mathbb{N} \rangle$ jólrendezett. Ekkor U minden eleme egy rendezett pár, amelynek első eleme egy $B \subseteq \mathbb{N}$ halmaz, a második pedig $B \times B$ részhalmaza. Tehát a részhalmaz axiómát kihasználva, U részhalmaza a két halmaz hatványhalmazai Descartes szorzatának. Ezt követően gyűjtsük a H halmazba U összes elemének rendszámát. Az indirekt feltevés szerint így megkapjuk az összes rendszámot. Ugyanakkor ezen rendszámok egy jólrendezett halmazt is alkotnak, ha rendezésnek a rendszám összehasonlítást vesszük. Tehát H izomorf egy α elem általi valódi kezdőszeletével, ami ellentmondás. $\square$

Ezzel igazoltuk, hogy túlhaladhatunk a megszámlálható rendszámokon. Vegyük közülük a legkisebbet, és nevezzük el ω_1-nek, számosságát pedig $\aleph_1$-nek. Ezzel létrehoztuk a legkisebb $\aleph_0$-nál nagyobb számosságú rendszámot, de mint a korábbi érvelésünk során, itt is továbbhaladhatunk – az előző bizonyításhoz hasonlóan –, indirekt belátható, hogy létezik olyan rendszám, melynek számossága túlmutat $\aleph_1$-en. Azonban, ha vannak ilyen számosságú rendszámok, azok közül is ki tudjuk választani a legkisebbet, ω_2-t, melynek számosságát nevezzük $\aleph_2$-nek. Ezzel az eljárással a transzfinit rendszámok egy rekurziójához juthatunk. Kérdés akkor merül fel, ha megpróbáljuk a korábban megismert kontinuum számosságot elhelyezni ebben a felsorolásban. Jó lenne, ha a két eljárás által előállított megszámlálhatatlan halmaz ($\mathbb{N}$ halmaz $2^{\aleph_0}$ részhalmaza és a most előállított $\aleph_1$) ugyanazt a számosságot reprezentálnák, azaz:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Ezt a problémát már Cantor is felismerte 1883-ban. Az állítást *kontinuum hipotézisnek* nevezte, mely igazságtartalmának eldöntése azonban az emberi teljesítőképesség határán nyugszik. A huszadik században ugyanakkor két nagy áttörés is történt annak megértésében, hogy mi igazolható egy-egy jól választott rendszerben, amelyek segítettek megmutatni a kontinuum hipotézis nehézségét.

5. fejezet

Meddig tart a végtelen?

Ennek a kérdésnek a kutatása a huszadik század során többször is új erőre kapott. Amikor a végtelenről beszélünk a matematikában, valójában módszereket értünk alatta [6]. Ahogy korábban láttuk, a halmazelmélet axiomatizálását megelőző „naiv” halmazelméletben viszonylag könnyű volt olyan paradoxonokra jutni, melyek az akkori tudás szerint nem voltak feloldhatók.

Ezekből az időkből származik egy kérdés: Milyen szerepet is tölt be a végtelen a matematikában? Amennyiben az eddig vázolt gondolatmenetek mentén tekintjük a fogalom alakulását, könnyen megállapíthatjuk a matematikai végtelen három szintjét: a megszámlálható végtelent, a kontinuumot és a halmazelmélet tanulmányozása során felmerülő magasabb végteleneket. Az első végtelen mennyiséget minden korábbi említése során valamilyen módon egy indukciós lépés segítségével állítottuk elő, és e módszer segítségével a vizsgált végtelen mennyiségekről bizonyos kombinatorikai és egyéb matematikai állításokat is tudunk igazolni. A cantori eredmények azonban az ω rendszám segítségével az indukciós felépítést egy egészen új szintre emelték. A matematikai végtelen következő szintje a kontinuum, az analízis végtelenje, amely kifejezi a tér tetszőleges feloszthatóságát és vég nélküliségét. A halmazelmélet segítségével lehetőség nyílt arra, hogy végtelen mennyiségeket elegendően nagy számosságokkal láthassuk el, sőt akár a rendszámokat is alkalmas rendezhető végtelen halmazokra megfogalmazhassuk. Cantor kontinuum hipotézise azonban a valós számok halmazának egy különleges, rendezett felépítését jelentené Cantor transzfinit számainak tükrében, amely sarkalatossá válik a matematikai vizsgálatok során. A kontinuum hipotézis vizsgálata új módszereket hozott a huszadik századi halmazelméleti kutatásokban. Hilbert úgy gondolta, hogy a halmazelmélet axiómáinak megfelelő választásával, azokból a halmazelmélet minden állítása igazolható, továbbá belátható, hogy a formális logika szabályai szerint ezen az úton sohasem kaphatunk ellentmondó állításokat. Kurt Gödel (1906-1978) ennek megfelelően hatalmas eredményt ért el azzal, hogy

1940-ben sikerült igazolnia, hogy a kontinuum hipotézis nem cáfolható a lefektetett axiómarendszer alapján. Gödel ehhez az úgynevezett modell-módszert használta. Elkészítette a halmazelmélet axiómáinak egy olyan modelljét, amelyben a kiválasztási axiómán kívül a kontinuum hipotézis is igaz. Amennyiben viszont létezik ilyen modell, akkor a halmazelméleti axiómákból nem vezethetők le az állítások tagadásai. Gödel érvelése két lehetséges utat hagyott a kontinuum hipotézis igazságtartalmának ellenőrzésére: a kontinuum hipotézis vagy direkt következménye a ZFC axiómarendszernek, vagy pedig attól független. A második esetben azt is igazolni kellene, hogy a kontinuum hipotézis tagadása sem vezethető le az axiómarendszerből. Az újabb áttörésig több mint húsz évet kellett várni. 1963-ban Paul Cohen (1934-2007) szintén a modell módszer segítségével megmutatta a kontinuum hipotézis függetlenségét. Gödellel ellentétben azonban ő nem egy modellt hozott létre, amelyben az állítás függetlenségét vizsgálta, hanem egy módszert, amellyel a halmazelmélet számtalan modelljét meg lehet konstruálni. A módszer a *Forszolás* nevet kapta. Cohen felfedezése új lökést adott a halmazelméleti kutatásoknak [12].

A kutatások egyik iránya, például a Gödel eredményeiből felépíthető, ellentmondásmentes Univerzum létezése. Ez következik Gödel fogalmi realizmusából és filozófiai nézőpontjából [6]. Ennek megközelítésére megpróbálhatjuk felállítani halmazok egy hierarchikus modelljét [5]. Az így „rétegzett” formális V univerzum a halmazok $\bigcup_\alpha V_\alpha$ rendszerével írható le, ahol $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1}$ pedig V_α hatványhalmaza. Továbbá a δ-hoz hasonló limeszrendszámokra legyen V_δ az összes olyan V'_α halmaz uniója, amelyekre tejesül, hogy V'_α rendszáma kisebb δ-nál. Egy adott X halmaz esetén nevezzük X rangjának azt a legkisebb α-t, amelyre X V_α részhalmaza. Tekintsük az összes ω-nál kisebb, azaz véges rendszámú halmazok V_ω halmazát. E halmaz egyik speciális tulajdonsága, hogy zárt bármely részhalmazának hatványhalmazára nézve, azaz mindegyiket tartalmazza. Amennyiben egy V_α halmazra teljesül a fenti tulajdonság valemely α rendszámra, akkor a rendszámot elérhetetlennek, vagy másnéven *nagy kardinális*-nak nevezzük, mivel „nem érhető el”. Így a korábban definiált ω az első nagy kardinális. Érdemes megjegyezni, hogy amennyiben a ZF rendszerből elhagyjuk a végtelen axiómát, akkor már nem tudjuk belátni, hogy létezik olyan κ nagy kardinális, melyre igaz, hogy $\kappa > \alpha$. Amennyiben megtartjuk az axiómát, egyre növekvő kardinálisokat kapunk, amely mind elkerülhetetlen, amennyiben a végtelent próbáljuk közelíteni.

Az Univerzum különböző modellekkel való megközelítése , egyre gazdagabb és mégis jól megalapozott eredményekhez vezetnek. A végtelen fogalomkörében örökérvényű Hilbert állítása, miszerint a matematikusok sohasem fogják elhagyni azt a paradicsomot, amelyet Cantor teremtett nekik.

Irodalomjegyzék

[1] John Stillwell: *Roads to Infinity*, A K Peters Ltd., 2010.

[2] G. Donald Allen: *The History of Infinity*, Texas University (egyetemi jegyzet), http://bit.ly/1MXTaDp .

[3] Komjáth Péter: *Halmazelmélet*, ELTE (egyetemi jegyzet), 2007 http://bit.ly/1QVRHkP.

[4] Leo Goldmakher: *The Cantor-Schröder-Bernstein Theorem*, University of Toronto (egyetemi jegyzet), 2011, http://bit.ly/1Q2amet.

[5] Akihiro Kanamori: *The Higher Infinite*, Springer, 1997.

[6] Akihiro Kanamori: *The Mathematical Infinite as a Matter of Method*, Annals of the Japan Association for Philosophy of Science Vol.20 1-13, 2012.

[7] Hajnal András–Hamburger Péter: *Halmazelmélet*, Tankönyvkiadó, 1983.

[8] Halmos Pál: *Elemi halmazelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, 1981.

[9] Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC*, Nemzeti Tankönyvkiadó–TypoTEX, 1993.

[10] Sain Márton: *Nincs királyi út!*, Gondolat, 1986.

[11] dr. Szalkai István: *Számosságok*, Pannon Egyetem (egyetemi jegyzet), 2008 http://bit.ly/1lZ7ORO.

[12] Csirmaz László: *Forszolás*, jegyzet, 2003 http://www.renyi.hu/∼csirmaz/

[13] Euklidesz: *Elements*, Magyar Elektronikus Könyvtár, 2003 http://bit.ly/1NqTrvD.