Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Szerkesztések a Cayley-Klein-féle körmodellben

Szakdolgozat

Készítette:

Szántó Rita

Matematika BSc,

Tanári szakirány

Témavezető:

Dr. Verhóczki László

Egyetemi docens

Geometriai tanszék

Budapest

2016

Tartalomjegyzék

Előszó

A hiperbolikus síkgeometria legismertebb modellje a Cayley-Klein-féle körmodell. Tanulmányaim során világossá vált számomra, hogy ez a modell nagy mértékben megkönnyíti a hiperbolikus geometria megértését amellett, hogy annak ellentmondásmentességét is igazolja. Ezért döntöttem amellett, hogy szakdolgozatomat ebből a témából írom. Dolgozatom célja a legalapvetőbb modellbeli szerkesztések tárgyalása.

Dolgozatom a következőképpen épül fel: először felvázolom a modellbeli szerkesztésekhez szükséges legalapvetőbb projektív geometriai alapismereteket. Ezt az áttekintést követően röviden bemutatom a Cayley-Klein-féle körmodellt. Végül ismertetem a modellben elvégezhető fontosabb szerkesztéseket.

Dolgozatom első részében a projektív geometriai alapokat tekintem át. Mindössze az a célom, hogy a modell és a modellbeli szerkesztések szempontjából releváns definíciókat és tételeket ismertessem.

A második fejezetben bemutatom a Cayley-Klein-féle körmodellt és annak egybevágósági transzformációit. Külön is kitérek a modellbeli tengelyes és középpontos tükrözésekre.

A harmadik fejezetben tárgyalom a modellbeli szerkesztéseket. Először a szakaszfelező merőleges szerkesztését, majd a szögfelező szerkesztését írom le. Ezt követően pedig olyan szerkesztéseket végzek el, melyek a korrespondeálás fogalmára épülnek. Annak megfelelően, hogy a modellsíkban a tekintett egyenesek hogyan helyezkednek el egymáshoz képest, három lehetőség adódik, melyeket külön-külön tárgyalok.

Először azt az esetet tekintem, melyben a két egyenes metszi egymást, és bemutatom a korrespondeáló pontok szerkesztésének módját. Ehhez kapcsolódóan a metsző egyenessereg korrespondeáló pontjainak szerkesztését is leírom, mely a modellbeli kör fogalmához vezet.

A második lehetséges eset az, ha a tekintett egyenesek párhuzamosak. Ennek tárgyalása során először a modellbeli párhuzamosságot definiálom, majd megszerkesztem a két párhuzamos egyenes két korrespondeáló pontját. Végül a modellbeli párhuzamos egyenessereg korrespondeáló pontjainak szerkesztését végzem el, mely a paraciklust adja a modellben.

Az utolsó esetben, amelyben a tekintett egyenesek a modellben nem metszik egymást és nem is párhuzamosak, először szintén megszerkesztek a két egyenesen korrespondeáló pontokat. Ezt követően pedig bemutatom, hogy ez a szerkesztés egy adott egyenesre merőleges egyenesseregen hogyan vezet el a modellbeli hiperciklushoz.

A dolgozatban szereplő ábrák szerkesztéséhez a GeoGebra programot használtam.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Verhóczki László tanár úrnak, aki tudásával, tanácsaival és precíz korrektúráival nélkülözhetetlen segítséget nyújtott ahhoz, hogy szakdolgozatom ebben a formában létre tudjon jönni.

1 Projektív geometriai alapok

Ebben a fejezetben a Cayley-Klein-féle körmodell tárgyalásához szükséges projektív geometriai fogalmak és tételek összefoglalására kerül sor. A kimondott tételek bizonyításai megtalálhatók Hajós György *Bevezetés a geometriába* című könyvében (lásd [1]), illetve Verhóczki László *Projektív geometria* című jegyzetében (lásd [5]). A kifejtés során – melyben e két műre támaszkodom – igyekszem a dolgozat további részéhez szükséges ismeretekre koncentrálni, és ennek megfelelően strukturálni ezt a fejezetet.

Mielőtt a projektív geometriai alapismeretek tárgyalásába belekezdenék szükséges bevezetnem néhány alapfogalmat és jelölést.

Legyen adva egy σ halmaz, melyet síknak nevezünk. A σ halmaz elemeit pontoknak nevezzük és latin nagybetűkkel jelöljük. A σ részhalmazait alakzatoknak hívjuk, ezen részhalmazok egy kitüntetett fajtája az egyenes. Az egyenesek jelölése latin kisbetűkkel fog történni, az egyenesek összességének halmaza pedig legyen $\mathcal{E}$. Egy A pontról akkor mondjuk, hogy illeszkedik az e egyeneshez (rajta van az e egyenesen), ha $A \in e$.

Ha C és D két nem azonos pont, akkor $\langle C, D \rangle$ jelölje azt az egyenest, amelyen a C és a D pont is rajta van. Ha f és g egyeneseknek létezik közös pontja, akkor metsző egyeneseknek nevezzük őket, a közös pontot pedig metszéspontnak mondjuk. Három különböző pontot kollineárisnak nevezünk akkor, ha azok egy egyenesre illeszkednek.

Ezen fogalmak tisztázása után most rátérek a projektív geometria bemutatására illetve alapjainak leírására.

A projekció szó jelentése vetítés. Ha térbeli alakzatokat szeretnénk a síkon ábrázolni, akkor általában vagy a paralel vagy a centrális vetítés módszerét alkalmazzuk. Az emberi szem a centrális vetítésnek megfelelő módon alkot képet a külvilág tárgyairól. Így tehát már hosszú ideje fontos az embereknek a centrális vetítés törvényszerűségeinek feltárása. A centrális vetítés összefüggések vizsgálata során született egy matematikai elmélet, a projektív geometria.

A projektív geometria tárgyalásához mindenekelőtt be kell vezetnünk néhány új fogalmat. Ezek után rátérek majd a centrális vetítés problémájára, mely a projektív geometria születéséhez vezetett.

Definíció. Jelölje T az euklideszi tér egy tetszőleges pontját. Sugárnyalábon a T–n áthaladó egyenesek $\mathcal{E}(T)$ összességét értjük. A T pontot ezen sugárnyaláb tartópontjának nevezzük.

Definíció. Legyen adott egy T pont és egy azt tartalmazó σ sík. A σ síkra és a T pontra egyaránt illeszkedő egyenesek $\mathcal{E}(\sigma, T)$ halmazát sugársornak mondjuk.

Definíció. Egy adott h egyenessel párhuzamos egyenesek seregét párhuzamos egyenesosztálynak nevezzük és $\mathcal{E}(h)$-val jelöljük.

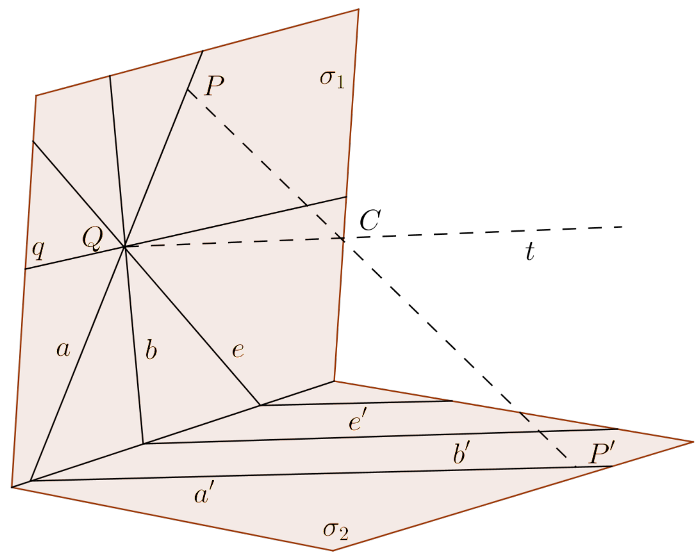
1.1 A centrális vetítés problémája

Könnyen belátható, hogy a centrális vetítés – a paralel vetítéssel ellentétben – nem ad bijektív megfeleltetést két sík között. Tekintsük az euklideszi térben az egymást metsző σ_1 és σ_2 síkokat, valamint egy C pontot, melyet nem tartalmaz egyik sík sem. A σ_1 síkot képezzük rá a σ_2 síkra úgy, hogy a σ_1 egy tetszőleges P pontjához a $\langle C, P\rangle$ egyenes és a σ_2 sík metszéspontját rendeljük hozzá. A $P' = \langle C, P\rangle \cap \sigma_2$ pontot a P centrális vetületének nevezzük. Az itt megadott hozzárendelést a σ_1 és σ_2 síkok közötti C középpontú centrális vetítésnek nevezzük, (a C pont vetítési centrum).

Vegyük a C-n átmenő, σ_2-vel párhuzamos σ_3 síkot és annak σ_1-el való metszésvonalát. Tekintsünk az így kapott q egyenesen egy tetszőleges Q pontot. Azt kapjuk, hogy a $t = \langle C, Q\rangle$ egyenes párhuzamos a σ_2 síkkal, így tehát Q-nak nincs centrális vetülete a σ_2 síkon. Látható tehát, hogy a centrális vetítés nem ad bijektív megfeleltetést az euklideszi tér σ_1 és σ_2 síkjai között.

Tekintsünk a σ_1 síkban egy olyan q-tól különböző a egyenest, melyre illeszkedik Q. Ezen egyenes és a C pont által meghatározott $\langle a, C\rangle$ sík és σ_2 metszésvonalát jelölje a'. Evidens, hogy az a pontjai a σ_2 síkra történő C középpontú centrális vetítés során az a'

egyenesre kerülnek. Az a' adja tehát az a egyenes centrális vetületét. Ha az a egyenes P pontjával közelítünk Q-hoz, akkor az a' egyenes P' pontja egyre távolabb kerül a $\sigma_1 \cap \sigma_2$ metszésvonaltól.



1. Ábra: A σ_1 sík centrális vetítése a σ_2 síkra

Fontos kiemelnünk, hogy mivel az $\langle a, C\rangle$ síkon rajta van a σ_2 síkkal párhuzamos $t = \langle C, Q\rangle$ egyenes, az a' képegyenes párhuzamos t-vel. Ehhez hasonlóan az összes Q-n átmenő σ_1 síkbeli egyenes centrális vetületére is – q kivételével – igaz a t-vel való párhuzamosság. Így tehát megállapíthatjuk, hogy a centrális vetítés az $\mathcal{E}(\sigma_1, Q)$ sugársor egyeneseit a σ_2 sík egymással párhuzamos egyeneseibe viszi.

A centrális vetítés problémája, hogy ti. a Q ponthoz – a q egyenes többi pontjához hasonlóan – nem tudunk Q' képet rendelni, vezetett a projektív geometria kialakulásához.

1.2 A projektív sík származtatása

A centrális vetítés problémája a következő ötlethez vezetett: Az euklideszi síkot (jelenleg síkban tárgyalom a problémát, a megállapítások természetesen a térre is kiterjeszthetőek) ki lehet bővíteni további pontokkal úgy, hogy minden egyeneshez hozzárendelünk egy ún. ideális pontot. Ez az ideális pont egy végtelen távoli pontnak tekinthető. Az egymással párhuzamos egyenesekhez ugyanazt az ideális pontot rendeljük. Tehát a fenti példánál ez azt jelenti, hogy a Q-n átmenő σ_1-beli egyenesek σ_2-beli (párhuzamos) képegyeneseinek ideális pontja a Q pont centrális vetülete a σ_2 síkon. Így tehát a centrális vetítés a kibővített síkok között már egy bijektív és egyenestartó leképezés lesz.

Egy e egyenes ideális pontjára az I_e jelölést alkalmazzuk. Az ideális pontok párhuzamos egyenesosztályokat határoznak meg. Ezekből – és így az ideális pontokból is – értelemszerűen több van. Az ideális pontok egy ideális egyenest (jele: i) alkotnak. A $\overline{\sigma}$ projektív sík tehát az euklideszi síkból és az ahhoz hozzávett ideális egyenesből áll: $\overline{\sigma} = \sigma \cup i$. A sík nem-ideális pontjait közönséges pontoknak nevezzük.
A projektív síkon igazak a következő kijelentések:

(1) Két ponthoz egy és csak egy egyenes illeszkedik.

(2) Bármely két egyenesnek egy és csak egy közös pontja van.

1.3 A sugárnyaláb modell és a homogén koordináták

A továbbiakban a projektív sík sugárnyaláb modelljének értelmezését mutatom be. Ehhez a következőkben tegyük fel, hogy adott a térben egy $\overline{\sigma}$ projektív sík, melyet a σ euklideszi sík kibővítésével kapunk meg: $\overline{\sigma} = \sigma \cup i$. Ahhoz, hogy a projektív sík koordinátáit bevezessük felhasználunk egy megfeleltetést a $\overline{\sigma}$ projektív sík pontjai és az euklideszi tér egy sugárnyalábja között.

Vegyünk egy T közönséges pontot, melyre $T \notin \overline{\sigma}$. Az euklideszi tér $\mathcal{E}(T)$ sugárnyalábjának minden egyeneséhez hozzárendelhetünk egy $\overline{\sigma}$-beli pontot a következőképp:

Ha $g \in \mathcal{E}(T)$ egyenes nem párhuzamos a σ síkkal, akkor g-hez rendeljük hozzá a $P = g \cap \sigma$ pontot.

Ha $h \in \mathcal{E}(T)$ egyenes párhuzamos a σ síkkal, akkor h-hoz az $\mathcal{E}(h)$ párhuzamos egyenesosztálynak megfelelő I_h ideális pontot rendeljük hozzá. ($I_h \in \overline{\sigma}$) Az említett I_h pont éppen a $\overline{\sigma}$ projektív sík és a $\overline{h}$ projektív egyenes metszéspontja lesz.

A fent leírt hozzárendelés egy bijektív leképezés a sugárnyaláb egyenesei és a $\overline{\sigma}$ projektív sík pontjai között.

A $\overline{\sigma}$ projektív sík egyenesei és a T-t tartalmazó euklideszi síkok között is létesíthető bijektív megfeleltetés: Ha egy T-hez illeszkedő σ_1 sík nem párhuzamos σ-val, akkor σ_1-hez hozzárendelhetjük az $e = \sigma_1 \cap \sigma$-nak megfelelő $\overline{e}$ projektív egyenest. Ha a σ_2 sík párhuzamos σ-val, akkor vele az i ideális egyenest feleltetjük meg.

A projektív sík koordinátázása a következőképp adható meg. A σ euklideszi síkon legyen adott egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta-rendszer, melynek kezdőpontja az O pont, ortonormált alapvektorai pedig az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok. Tekintsük egy $P \in \sigma$ pont $\overrightarrow{OP} = x_P\mathbf{i} + y_P\mathbf{j}$ helyvektorát. Az ebben szereplő x_P, y_P együtthatók a P pont koordinátái.

A $\overline{\sigma} = \sigma \cup i$ projektív sík koordinátázásához a fenti Descartes-féle koordináta-rendszert hívjuk segítségül. Legyen $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ azaz legyen $\mathbf{k}$ a σ-beli $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ortonormált vektorok vektoriális szorzata. Tekintsük az euklideszi tér azon T pontját, melyre fennáll a $\overrightarrow{TO} = \mathbf{k}$ összefüggés.

Definíció. Ha $P \in \overline{\sigma}$ a projektív sík egy pontja, akkor a $\langle T, P \rangle$ egyenes irányvektorait a P meghatározó vektorainak nevezzük. Ezen meghatározó vektorok $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázison vett koordinátáit a P pont homogén koordinátáinak mondjuk.

Megjegyzés: A homogén koordináták számszorzótól eltekintve egyértelműek.

Megjegyzés: Egy ideális pont homogén koordinátái közül a harmadik mindig 0.

1.4 Kollineáris pontnégyes kettősviszonya

Definíció. Legyen A, B és C az euklideszi sík három különböző kollineáris pontja. Irányítsuk az általuk meghatározott egyenest, és tekintsük az $\overrightarrow{AC}$ és a $\overrightarrow{CB}$ irányított szakaszok előjeles hosszát (ezeket jelölje AC és CB). Az A, B, C ponthármas osztóviszonyának az $(ABC) = \dfrac{AC}{CB}$ számot mondjuk.

Definíció. Legyen A, B, C, és D négy különböző, közönséges, kollineáris pont a síkon. A pontnégyes kettősviszonyának az $(ABCD) = \dfrac{(ABC)}{(ABD)}$ valós számot nevezzük.

A kettősviszony a korábban használt irányított szakaszok segítségével is felírható a következő alakban: $(ABCD) = \dfrac{AC}{CB} : \dfrac{AD}{DB}$.

Mivel a definícióban kikötöttük, hogy az A, B, C, D pontok különbözőek, ezért a kettősviszonyra teljesül, hogy $(ABCD) \neq 1$ és $(ABCD) \neq 0$.

Tetszőleges A, B, C, D pontokra teljesülnek a következő összefüggések

(1) $(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)}$,

(2) $(ABCD) = (CDAB)$.

Definíció. Az A, B, C, D kollineáris pontnégyest harmonikus pontnégyesnek nevezzük, amennyiben kettősviszonyuk értékére igaz, hogy $(ABCD) = -1$.

A továbbiakban két a kettősviszonnyal kapcsolatos fontos tételt mondok ki: a Pappos-tételt és a Teljes négyoldal tételét. A Pappos-tétel kimondásához azonban be kell vezetnem az egyenesek kettősviszonyának fogalmát.

Vegyünk a σ euklideszi síkon egy O pontot és rajta áthaladó, négy különböző a, b, c, d egyenest. Irányítsuk a σ síkot és az egyeneseket. A sík irányításával nyerünk egy forgásirányt az O pont körül, az egyenesek irányításával pedig minden egyenesen nyerünk egy O kezdőpontú irányított félegyenest. A $(a, c)\sphericalangle$ jelölje azt az előjeles szöget, melynek megfelelő elforgatás az a-n kapott félegyenest a c-n kapott félegyenesbe képezi ($-\pi < (a, c)\sphericalangle < \pi$). Hasonlóan értelmezzük a $(c, b)\sphericalangle, (a, d)\sphericalangle, (d, b)\sphericalangle$ előjeles szögeket is.

Definíció. Az a, b, c, d egyenesek kettősviszonyán az

$$(abcd) = \frac{\sin(a, c)\sphericalangle}{\sin(c, b)\sphericalangle} : \frac{\sin(a, d)\sphericalangle}{\sin(d, b)\sphericalangle}$$

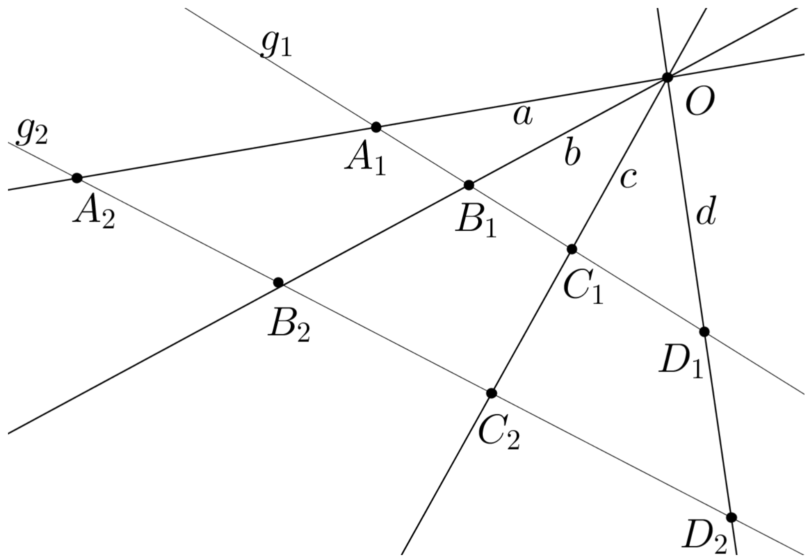
számot értjük.

Tétel. (Pappos tétele) *Legyenek a, b, c, d egymástól különböző egyenesek a σ síkon, melyek egyazon O ponton mennek át. Legyen e a σ sík olyan egyenese, melyre nem illeszkedik O, és messe az a, b, c, d egyeneseket az A, B, C, D pontokban. Ekkor igaz lesz az $(abcd) = (ABCD)$ egyenlőség.*

A Pappos–tételből következik az alábbi kijelentés.

Tétel. *Adott a σ síkon négy nem azonos a, b, c, d egyenes. Ezek mindegyike egyazon O ponton halad át. Legyenek g_1 és g_2 a σ sík olyan egyenesei, melyek nem illeszkednek*

O-ra. Ezek messék az a, b, c, d egyeneseket rendre az A_1, B_1, C_1, D_1 illetve A_2, B_2, C_2, D_2 pontokban. A kimetszett pontnégyesek kettősviszonyára igaz lesz az $(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2)$ egyenlőség.



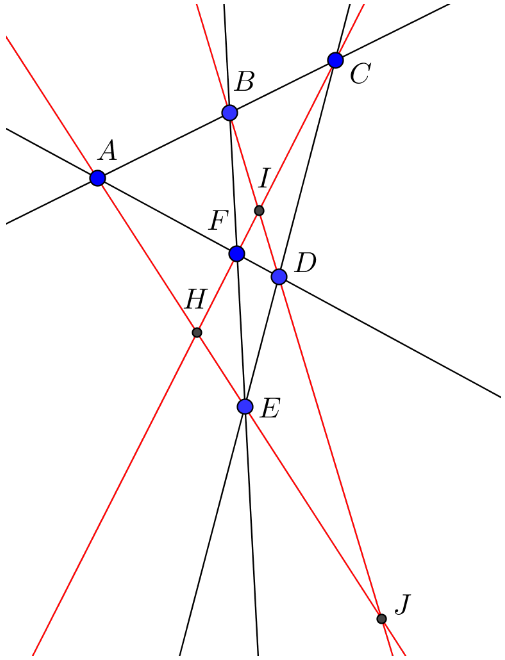
2. Ábra: Kollineáris pontnégyes centrális vetítése

Következmény: A centrális vetítés kettősviszonytartó a kollineáris pontnégyesek és a sugárnégyesek esetén.

Definíció. Egy projektív sík négy egyenese teljes négyoldalt alkot, ha közülük bármely három nem megy át ugyanazon a ponton.

Legyen a, b, c, d négy olyan egyenes a $\overline{\sigma}$ projektív síkon, amelyek egy teljes négyoldalt képeznek. Ekkor azt mondjuk, hogy az a, b, c, d egyenesek a teljes négyoldal oldalegyenesei. Ezen oldalegyeneseknek összesen hat metszéspontjuk van. Ezeket a teljes négyoldal szögpontjainak nevezzük.

Ha két szögpont nem illeszkedik ugyanahhoz az oldalegyeneshez, akkor átellenesnek mondjuk őket. Ilyen szögpontokat összekötve három további egyenest kapunk: ezek a teljes négyoldal átlós egyenesei. Ezen egyenesek metszéspontjait (3 db) nevezzük a teljes négyoldal átlós pontjainak. Egy átlós egyeneshez tehát két átlós pont és két szögpont illeszkedik.



3. Ábra: Teljes négyoldal

Az alábbi kijelentés a szakirodalomban a teljes négyoldal tételeként ismert.

Tétel. *A teljes négyoldal egy átlós egyenesére illeszkedő két szögpont és két átlós pont harmonikus pontnégyest alkot.*

Megjegyzés: A teljes négyoldal tétele szerint tehát a fenti ábrán, (ahol A, B, C, D, E, F a szögpontok, H, I, J pedig az átlóspontok,) teljesül a következő összefüggés:

$$(FCIH) = (BDIJ) = (AEHJ) = -1$$

1.5 Kollineációk a projektív síkon

Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív sík egy $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ bijektív és egyenestartó leképezését a $\overline{\sigma}$ projektív sík kollineációjának nevezzük.

Tétel. *A projektív sík kollineációira igazak az alábbi kijelentések:*

(1) A $\overline{\sigma}$ projektív sík bármely kollineációja kettősviszonytartó. (Tetszőleges A, B, C, D pontnégyes esetén $(ABCD) = (A'B'C'D')$)

(2) Legyen adva két általános helyzetű pontnégyes (azaz közülük bármely 3 pont nem illeszkedik egyazon egyenesre) a $\overline{\sigma}$ projektív síkon. Ekkor létezik egy és csak egy olyan kollineáció, mely az egyik pontnégyest a másikba viszi.

Megjegyzés: Ha κ_1 és κ_2 a $\overline{\sigma}$ projektív sík kollineációi, akkor a két kollineáció egymásutánja – $\kappa_2 \circ \kappa_1$ – is kollineáció a $\overline{\sigma}$ projektív síkon, valamint ha κ a $\overline{\sigma}$ projektív sík egy kollineációja, akkor inverze, κ^{-1} is az.

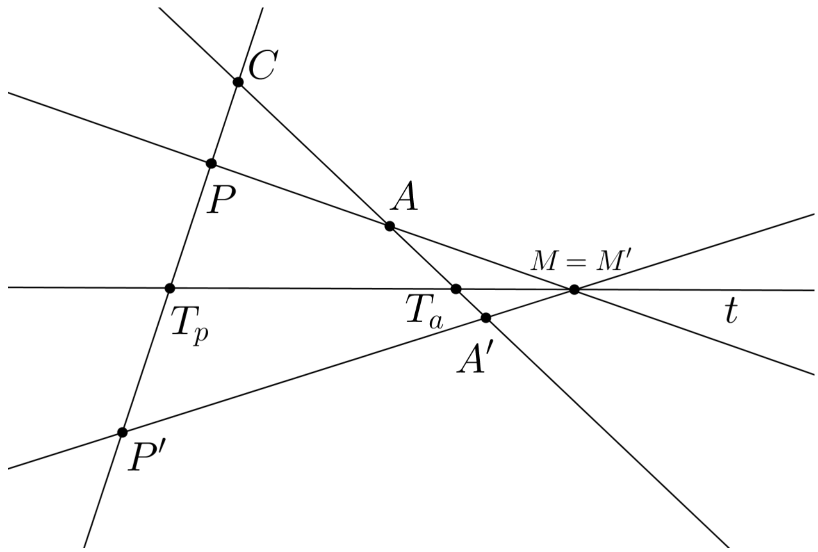
Definíció. Adott egy $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ kollineáció. Azt mondjuk, hogy a $\overline{\sigma}$ projektív sík egy t egyenese tengelye a κ kollineációnak, ha κ a t egyenes minden pontját fixen hagyja. A $\overline{\sigma}$ projektív sík egy C pontját pedig a kollineáció centrumának mondjuk, ha κ a C pontra illeszkedő összes egyenest fixen hagyja.

Megjegyzés: Az olyan kollineációkat, melyeknek tengelye és centruma is van, centrális-tengelyes (vagy centrális-axiális) kollineációknak hívjuk. Ha egy kollineáció ilyen típusú, de nem identikus, akkor a kollineáció összes fixpontja a centrum valamint a tengely összes pontja.

Tétel. *Egy κ centrális-tengelyes kollineációt egyértelműen meghatároz annak C centruma, t tengelye és egy tetszőleges P, P' pontpár, ahol P' a P pont κ-nál nyert képe és $C \notin t$. ($C \in \langle P, P' \rangle$, $P \notin t$)*

A fenti tétel a következőképp bizonyítható:

Legyen adott az állításnak megfelelően a kollineáció C centruma, t tengelye, valamint egy P, P' pontpár. Azt kell belátnunk, hogy ezen adatok ismeretében már megszerkeszthető egy tetszőleges A pont A' képe. Ehhez először tekintsük a $\langle A, C \rangle$ egyenest, és ennek a t tengellyel vett metszéspontját nevezzük T_a-nak. Mivel ez az egyenes átmegy a centrumon, az A képe is rajta lesz ezen az egyenesen. Ezután vegyük a P-t az A-val összekötő $\langle P, A \rangle$ egyenest, ez az egyenes messe a t tengelyt az M pontban. $M \in t$, ezért a kollineáció M-et fixen hagyja. Kössük össze az $M = M'$ pontot a megadott P' ponttal. Az így kapott $\langle M, P' \rangle$ egyenes és az $\langle A, C \rangle$ egyenes metszéspontja meghatározza a keresett A' pontot.



4. Ábra: Centrális-tengelyes kollineáció

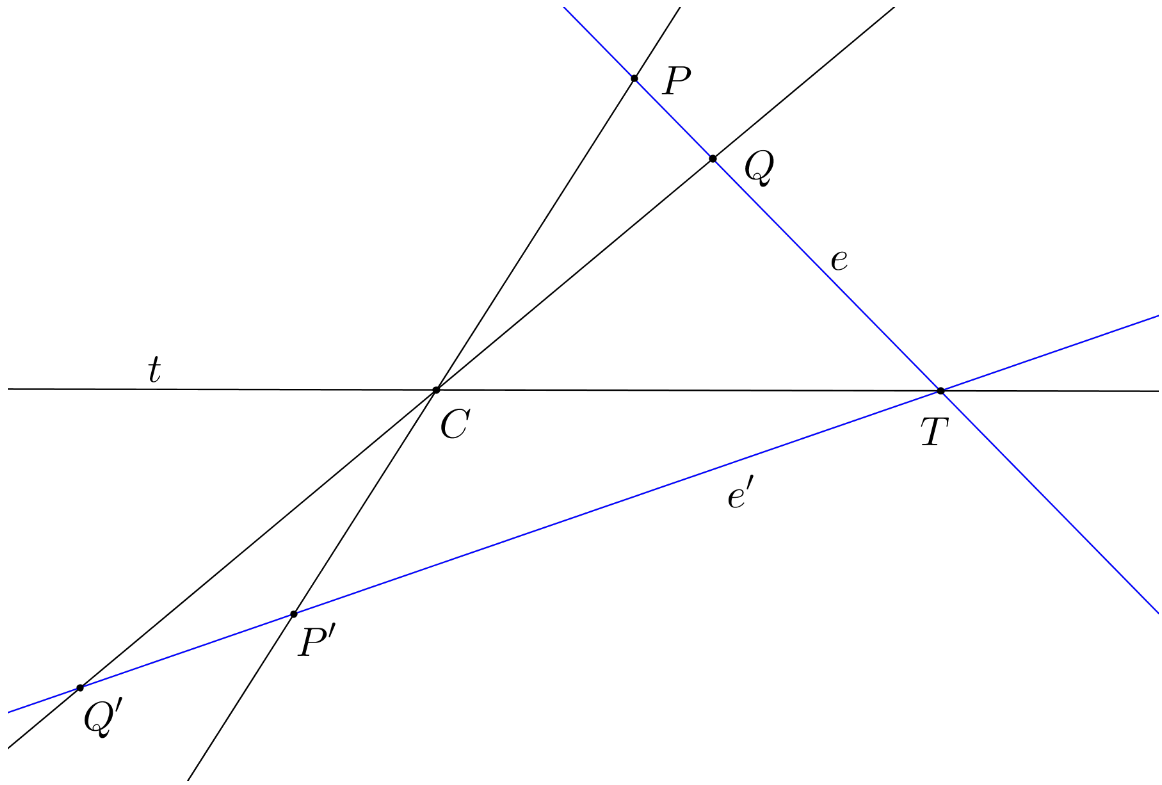
Ha a fenti ábrán képzeletben összekötjük a C és az M pontot, akkor látható, hogy a Pappos-tétel következtében a $(CT_pPP') = (CT_aAA')$ összefüggés adódik. $\square$

Definíció. Legyen κ egy olyan centrális-tengelyes kollineáció, melynek C centruma nincs a t tengelyen. Vegyünk egy P pontot és annak P' képét. A $\lambda = (CT_pPP')$ kettősviszonyt a centrális-tengelyes kollineáció karakterisztikus kettősviszonyának nevezzük. (Ez a szám nem függ a választott P ponttól.)

Tétel. *Ha a κ centrális-tengelyes kollineáció karakterisztikus kettősviszonyára igaz, hogy $\lambda = (CT_pPP') = -1$, akkor $\kappa \circ \kappa = id_{\overline{\sigma}}$.*

Ennek belátásához tekintsünk egy a fenti jelölésekkel megadott κ kollineációt, azaz legyen C a kollineáció centruma, t a tengelye, P pedig egy tetszőleges $P \notin t, P \neq C$ pont, melynek képét jelölje P'. A $\langle C, P \rangle$ egyenes t-vel vett metszéspontját nevezzük T_p-nek. Tegyük fel a tételnek megfelelően, hogy $\lambda = (CT_pPP') = -1$. A kettősviszony korábban ismertetett tulajdonsága alapján $(CT_pP'P) = \frac{1}{-1} = -1$ Tekintsük a $\kappa \circ \kappa$ kollineációt, P' pont képét jelölje P''. A kettősviszony állandósága miatt $(CT_pP'P'') = -1$, a kapott P'' pont ezért megegyezik P-vel, tehát igaz, hogy $\kappa \circ \kappa = id_{\overline{\sigma}}$. $\square$

Definíció. Ha egy κ centrális-tengelyes kollineációnál a centrum illeszkedik a tengelyre ($C \in t$) akkor κ elnevezése eláció, vagy nyírás.



5. Ábra: Eláció a projektív síkon

Megjegyzés: Az eláció esetében nem értelmezhető a karakterisztikus kettősviszony fogalma.

Ebben az esetben C, t, és egy tetszőleges P, P' pontpár esetén a következőképpen szerkeszthetjük egy tetszőleges Q pont Q' képét (lásd: 5. Ábra):

Kössük össze P-t P'-vel illetve Q-val. A $\langle P, Q\rangle = e$ egyenes t-vel vett metszéspontját jelölje T. Most kössük össze a T pontot a P pont P' képével. Az így kapott egyenest jelöljük e'-vel. Mivel T fixpont, P képe pedig P', az e egyenes képe az e' egyenes lesz. Most tekintsük a $\langle Q, C\rangle$ egyenest. Ez az egyenes önmagába képeződik a κ elációnál, mivel átmegy C-n. A fentiek alapján a keresett Q' pontot a $\langle Q, C\rangle$ és az e' egyenes metszéspontjaként kapjuk.

1.6 Konjugált pontok egy kúpszeletre nézve

A továbbiakban feltesszük, hogy a projektív síkon bevezettük a homogén koordinátákat. P pont homogén koordinátái $P(x_1, x_2, x_3)$. Vegyünk olyan a_{ij} számokat $(1 \leq i \leq j \leq 3)$ melyek nem mindegyike 0, és melyekre igaz, hogy $a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall i, j \in [1, 3])$.

Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív sík azon $\overline{\mathcal{M}}$ pontjainak halmazát melyek homogén koordinátái a

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0$$

egyenletet kielégítik, másodrendű görbéknek nevezzük.

A fenti egyenlet együtthatóiból képezhetünk egy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

szimmetrikus mátrixot.

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe projektív kúpszelet, ha a fent képezett $\mathbf{A}$ mátrixra teljesül, hogy $\det\mathbf{A} \neq 0$ és $\overline{\mathcal{M}} \neq \emptyset$.

Tétel. *Legyen adott a $\overline{\sigma}$ síkon öt általános helyzetű pont (vagyis öt olyan pont, hogy közülük bármely három nincs egy egyenesen). Ekkor pontosan egy olyan projektív kúpszelet van, amely áthalad mind az öt ponton.*

Megjegyzés: A GeoGebra programmal megrajzolható az öt ponton átmenő kúpszelet.

Definíció. Vegyünk egy $\overline{\mathcal{M}}$ projektív kúpszeletet a $\overline{\sigma}$ projektív síkon, melynek egyenlete $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0$, valamint egy $P(y_1, y_2, y_3)$ és egy $Q(z_1, z_2, z_3)$ pontot. Azt mondjuk, hogy P pont konjugált a Q ponthoz az $\overline{\mathcal{M}}$-re vonatkozóan, ha a pontok homogén koordinátái kielégítik a következő összefüggést: $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} y_i z_j = 0$. Jelölése $P \sim Q$.

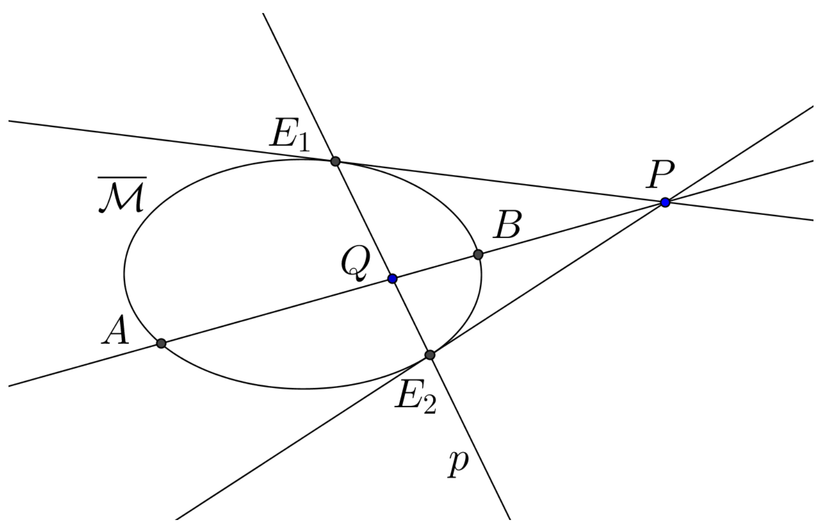
Definíció. Adott a $\overline{\sigma}$ projektív síkon egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet valamint egy P pont. A P-hez konjugált pontok által alkotott egyenest a P pont $\overline{\mathcal{M}}$-re vonatkozó polárisának mondjuk.

Definíció. Adott a $\overline{\sigma}$ projektív síkon egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet és egy f egyenes. Azt mondjuk, hogy a pont, melyhez f összes pontja konjugált, az f egyenes $\overline{\mathcal{M}}$-re vonatkozó pólusa.

Definíció. Adott egy e egyenes és egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet a $\overline{\sigma}$ projektív síkon. Az e egyenest a kúpszelet érintőjének mondjuk, ha $\overline{\mathcal{M}}$-nek és e-nek egyetlen metszéspontja van. Ekkor a közös pontot az e érintési pontjának nevezzük.

A konjugáltságra vonatkozó fontosabb tételek:

Tétel. *Vegyünk a $\overline{\sigma}$ projektív síkon egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszeletet, illetve olyan P, Q nem azonos pontokat, melyek nem illeszkednek $\overline{\mathcal{M}}$-re. Ezen pontok összekötő egyenese messe $\overline{\mathcal{M}}$-et az A és B pontokban. A P, Q pontok akkor és csak akkor konjugáltak egymáshoz az $\overline{\mathcal{M}}$-re nézve, ha a fent megadott pontnégyes kettősviszonyára teljesül, hogy $(ABPQ) = -1$.*



6. Ábra: Egymáshoz konjugált pontok $\overline{\mathcal{M}}$-re nézve

Tétel. *Adott a $\overline{\sigma}$ projektív síkon egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet és egy rá illeszkedő P pont. Az $\overline{\mathcal{M}}$-nek csak egy olyan érintője létezik, mely a P pontban érinti $\overline{\mathcal{M}}$-et. Ez az érintő megegyezik a P pont polárisával.*

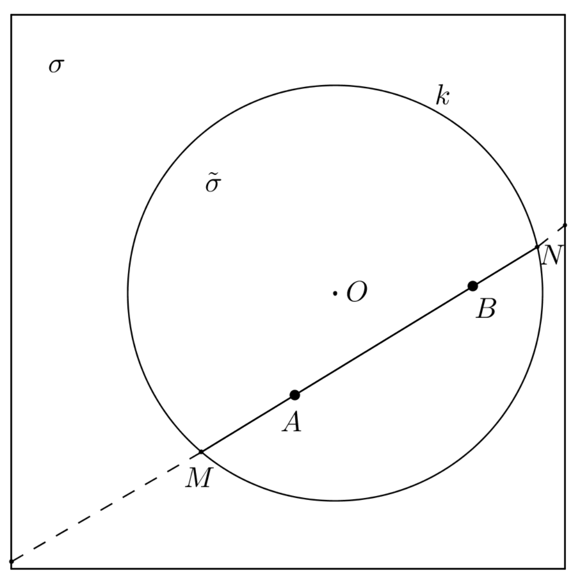
2 A hiperbolikus síkgeometria Cayley-Klein modellje

A modell tárgyalásához Reiman István *A geometria és határterületei* című könyvét (lásd [3]) és Verhóczki László *Geometriai axiómarendszerek és modellek* című jegyzetét (lásd [4]) vettem alapul.

2.1 A modell leírása

Vegyünk az euklideszi térben egy σ síkot és benne egy O középpontú, r sugarú k körvonalat. A modellbeli sík pontjainak $\tilde{\sigma}$ halmaza a k körvonal által határolt nyílt körlemez legyen, azaz: $\tilde{\sigma} = \{P \in \sigma \mid d(O,P) < r\}$.

A σ sík összes egyeneseinek halmazát jelölje $\mathcal{E}$. Tekintsük azokat az $\mathcal{E}$-beli egyeneseket, melyek két pontban metszik a k körvonalat. Ezen egyeneseknek a $\tilde{\sigma}$ nyílt körlemezzel vett metszetei lesznek a modell egyenesei. A σ-beli f egyenesnek tehát megfelel a $\tilde{f} = f \cap \tilde{\sigma}$ egyenes a modellben.



7. Ábra: A Cayley-Klein féle körmodell

Ezután definiáljuk a modellbeli $\tilde{d} : \tilde{\sigma} \times \tilde{\sigma} \to \mathbb{R}$ távolságfüggvényt.

Legyen A és B a $\tilde{\sigma}$ sík két különböző pontja. Tekintsük azt a $g = \langle A, B \rangle$ egyenest az euklideszi síkban, amelyre mindkét pont illeszkedik. Ezen egyenes k körvonallal vett metszéspontjai legyenek az M és N pontok. A $\tilde{d}$ függvény A, B pontpárhoz tartozó értéke legyen $\tilde{d}(A, B) = |\ln(MNAB)|$, ahol $(MNAB)$ a σ-beli kollineáris pontnégyes kettősviszonyát jelöli, ln pedig a természetes alapú logaritmusfüggvény.

Legyen A tetszőleges modellbeli pont. Ekkor teljesül, hogy $\tilde{d}(A, A) = 0$.

Megjegyzés: A modellbeli $\tilde{d}$ távolságfüggvénnyel kapcsolatban a következő észrevételek tehetők: Legyen A és B az $\tilde{\sigma}$ modellsík két különböző pontja. Mivel A és B egyaránt eleme az M és N pontok által meghatározott szakasznak, ezért $(MNA) = \frac{MA}{AN}$ és $(MNB) = \frac{MB}{BN}$ osztóviszonyok értéke pozitív. Így tehát az $(MNAB)$ kettősviszony egy szintén pozitív valós szám, melynek létezik logaritmusa.

Az ismert $(MNAB) = \frac{1}{(NMAB)}$ összefüggés is fennáll, valamint tetszőleges a pozitív számra igaz, hogy

$$|\ln(\frac{1}{a})| = | - \ln a| = |\ln a|.$$

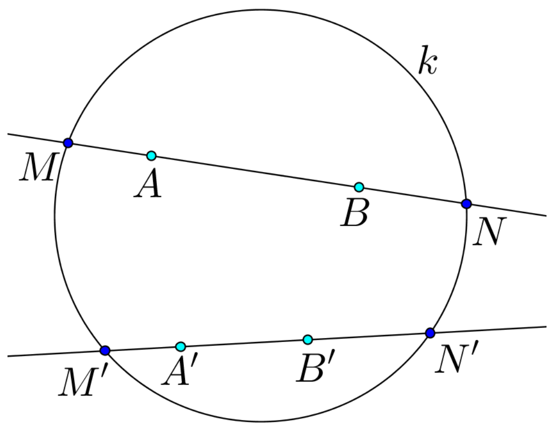
Így a $\tilde{d}(A, B)$ függvényérték független attól, hogy az $\langle A, B \rangle \cap k$ halmaz elemei közül melyiket jelöljük M-nek és melyiket N-nek.

Megjegyzés: A $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(B, A)$ összefüggés teljesülése is ehhez hasonlóan könnyen belátható.

2.2 Egybevágósági transzformációk a modellben

Ha $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ egy olyan kollineáció a projektív síkon, amely a modellkör k körvonalát önmagába képezi, akkor a $\tilde{\sigma}$ nyílt körlemezt is önmagába viszi.

Vegyünk egy egyenest, mely a k határkört az N és M pontokban metszi. Tekintsük ennek az egyenesnek a κ kollineációnál vett képét, ahol $\kappa(N) = N'$ és $\kappa(M) = M$. Most tekintsünk az $\langle M, N \rangle$ egyenes modellbeli leszűkítésén egy A és egy B pontot. Ezen pontok κ kollineációnál nyert képei legyenek az $\langle M', N' \rangle$ egyenes A' illetve B' pontjai. Ekkor a kollineáció kettősviszony-tartása miatt igaz lesz az $(MNAB) = (M'N'A'B')$ összefüggés. Ekkor viszont $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(A', B')$, tehát azt kaptuk, hogy a κ kollineáció megőrzi a modellbeli távolságot. A κ kollineáció $\tilde{\sigma}$ modellsíkra való leszűkítése tehát egybevágósági transzformációt ad a modellben.



8. Ábra: Az $\langle M, N\rangle$ egyenes és κ-nál nyert képe

A modellbeli egybevágósági transzformációk a $\overline{\sigma}$ projektív sík k határkört önmagába képező kollineációinak a $\tilde{\sigma}$ modellsíkra való leszűkítései.

2.3 Tengelyes tükrözés a modellben

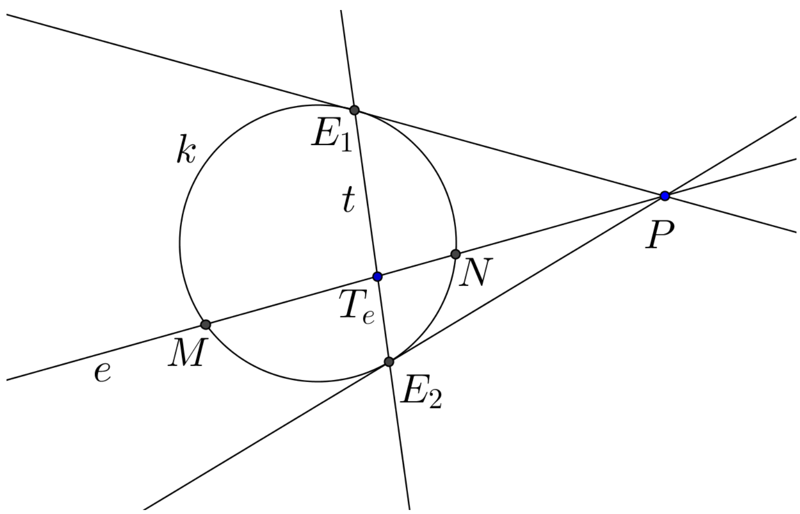
Ebben a szakaszban a modellbeli tengelyes tükrözést fogom meghatározni, majd ez alapján egy pont tükörképének szerkesztését bemutatni.

Legyen t egy olyan egyenes, melyre nem illeszkedik a modellkör középpontja. Ezen egyenes P pólusát a k körre nézve a kör és a t egyenes metszéspontjaiba húzott érintők metszéspontja adja. Ekkor – mivel P konjugált a t egyenes két pontjához (az érintési pontokhoz) – P konjugált a t egyeneshez, tehát t a P pont polárisa.

Vegyük azt a P középpontú, t tengelyű κ centrális-tengelyes kollineációt, melynek karakterisztikus kettősviszonya: $\lambda = -1$. A κ kollineáció a modellkört önmagára képezi. Ez a következőképp látható be:

Vegyünk egy P-n áthaladó e egyenest, melynek a k körrel vett metszéspontjai legyenek M és N (lásd: 9.ábra). Tekintsük a $T_e = e \cap t$ pontot. $T_e \in t$, ezért T_e konjugált P-vel, amiből a $(CT_eMN) = -1$ összefüggés adódik. Így viszont $\kappa(M) = N$ és $\kappa(N) = M$ teljesül, vagyis a κ kollineáció egymásba képezi az M és N pontokat. A fent belátott összefüggés tetszőleges P-t tartalmazó egyenesre érvényes, ezért κ a modellkört önmagába viszi.

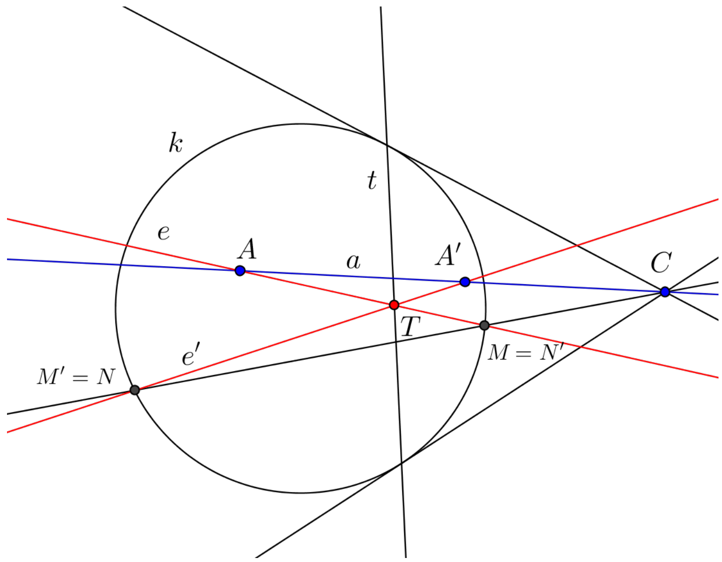
A κ kollineáció kettősviszonytartása miatt a modellbeli távolságot nem módosítja. A κ kollineáció tehát egybevágósági transzformációt ad a modellben. A t egyenes a κ fix egyenese, és $\kappa \circ \kappa$ az identitást adja. A fentiekből következik, hogy a κ kollineáció modellbeli leszűkítése lesz a t egyenesre való tükrözés a modellben.



9. Ábra: Tengelyes tükrözés a modellben

A következőkben egy tetszőleges A modellbeli pont t-re vonatkozó tükörképét szerkesztem meg (lásd: 10. Ábra). A t egyenes pólusát a továbbiakban C-vel jelölöm, mivel ez a pont a modellbeli tengelyes tükrözésnek megfelelő centrális-tengelyes kollineáció centruma.

Kössük össze az A pontot a κ kollineáció C centrumával. Az A képe ezen az a egyenesen lesz, mert a centrumon áthaladó egyenesek fixek. Vegyünk ezután egy tetszőleges C-n átmenő az előbbivel nem azonos egyenest, mely két pontban metszi k-t. Ezek a pontok legyenek M és N. A korábbiak alapján világos, hogy ezeket a κ kollineáció egymásba képezi. Most vegyük azt az e egyenest, mely összeköti M-et, az A ponttal. Ez messe a t tengelyt a T pontban. Ekkor viszont ha a T pontot az N ponttal összekötjük, megkapjuk az e egyenes e' képét, mivel T fixpont, N és M pedig egymás képei a κ kollineációnál. Ennek az e' egyenesnek az a-val vett metszéspontja lesz az A pont κ-nál vett képe, azaz az A tükörképe a t egyenesre nézve.



10. Ábra: Tetszőleges A pont t egyenesre való tükrözése a modellben

2.4 Középpontos tükrözés a modellben

A modellbeli középpontos tükrözés bemutatásához mindenekelőtt szükség van annak az eljárásnak a leírására, melynek során a kör egy tetszőleges belső pontjához akarjuk megszerkeszteni annak poláris egyenesét.

Kör belső pontjának polárisa

A következőkben tehát bemutatom, hogy egy k kör adott C belső pontjának ismeretében hogyan szerkeszthető meg annak polárisa a k körre nézve.

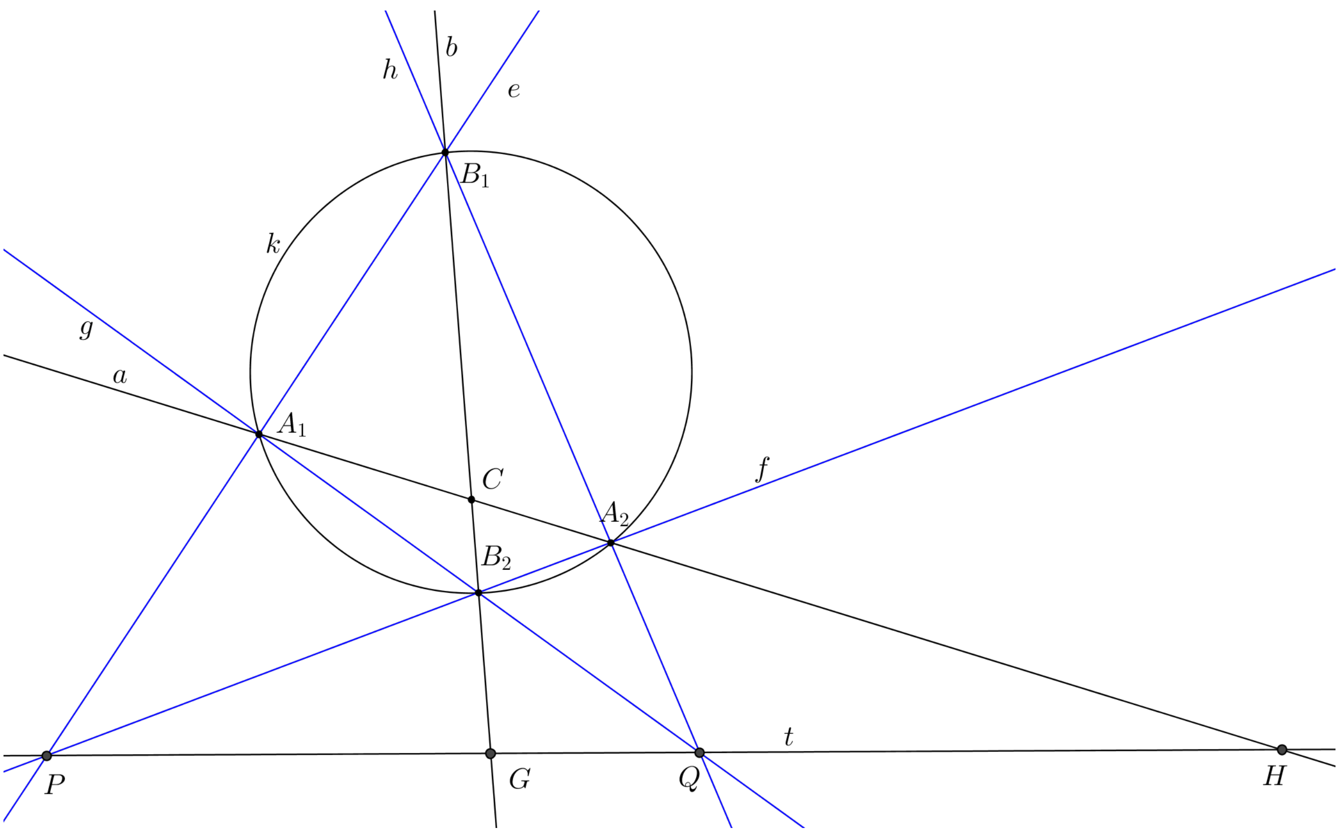
Vegyünk két C-n áthaladó egyenest, ezeket jelölje a és b, és messék a k kört az A_1, A_2 illetve B_1, B_2 pontokban. Ezen pontok összekötő egyeneseit jelölje e, f, g és h. Páronkénti metszéspontjaikat jelöljük a következőképp: $e \cap f = P$, $g \cap h = Q$. A $\langle P, Q \rangle = t$ egyenes messe az a és b egyeneseket a G és H pontokban.

Az e, f, g, és h egyenesek teljes négyoldalt alkotnak, mivel közülük bármely háromnak nincs közös pontja. Az imént meghatározott teljes négyoldal átlós egyenesei az a, b, és t

egyenesek lesznek. A korábban kimondott teljes négyoldal tétele alapján tudjuk, hogy két átlóspont és két szögpont kettősviszonya -1. Ezt a fent meghatározott teljes négyoldalra alkalmazva azt kapjuk, hogy $(B_1B_2CG) = (A_1A_2CH) = (PQGH) = -1$

Az a és b egyenesek két-két pontban metszik a kört, és átlóspontjaik harmonikusan választják el ezeket a pontokat, ezért $C \sim G$ és $C \sim H$ adódik (azaz a C pont konjugált a G és a H pontokhoz). Ebből viszont következik, hogy C konjugált a t egyenes többi pontjához is, C polárisa tehát a t egyenes lesz.

A kör belső pontjának polárisára vonatkozó szerkesztési eljárás ismeretében mostmár tárgyalható a modellbeli középpontos tükrözés.



11. Ábra: Egy belső pont polárisának szerkesztése

Középpontos tükrözés a modellben

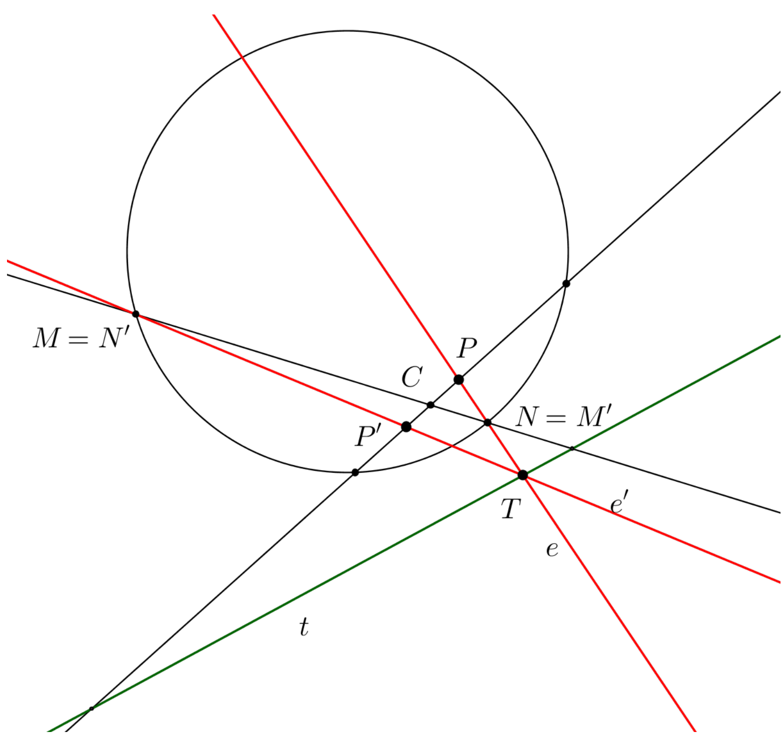
Tetszőleges P pont C-re való modellbeli középpontos tükrözésnél vett P' képe az alábbi módon szerkeszthető.

A C-re való modellbeli tükrözés az a κ centrális-tengelyes kollineáció lesz, melynek centruma C, tengelye a C polárisa, t, valamint karakterisztikus kettősviszonya $\lambda = -1$. Ez a kollineáció a k határkört önmagába képezi, emiatt a $\tilde{sigma}$-ra való leszűkítése egy egybevágóságot ad a modellben. Világos, hogy $\kappa \circ \kappa$ az identitást adja. Emiatt a modellkörre való leszűkítése éppen a C pontra történő tükrözés.

Adott középpont esetén tehát először meg kell szerkeszteni annak polárisát a fent leírt eljárás szerint.

Ezután a P' pont szerkesztéséhez először kössük össze a P pontot C-vel, továbbá vegyünk fel még egy, az előbbitől különböző C-n áthaladó egyenest. Ennek az egyenesnek a modellkörrel vett metszéspontjait jelölje M és N. Ezekre igaz lesz, hogy $\kappa(M) = M' = N$ és $\kappa(N) = N' = M$. Most tekintsük a $\langle P, N \rangle = e$ egyenest. Ennek a t tengellyel vett metszéspontját jelölje T. Mivel $T \in t$, ezért T fixpont.

Most kössük össze a T pontot az $M = N'$ ponttal. Ez az egyenes lesz az e egyenes κ kollineációnál vett e' képe. Mivel a $\langle P, C \rangle$ fix egyenes, ezért e' éppen a P pont P' képét metszi ki a $\langle P, C \rangle$ egyenesből.



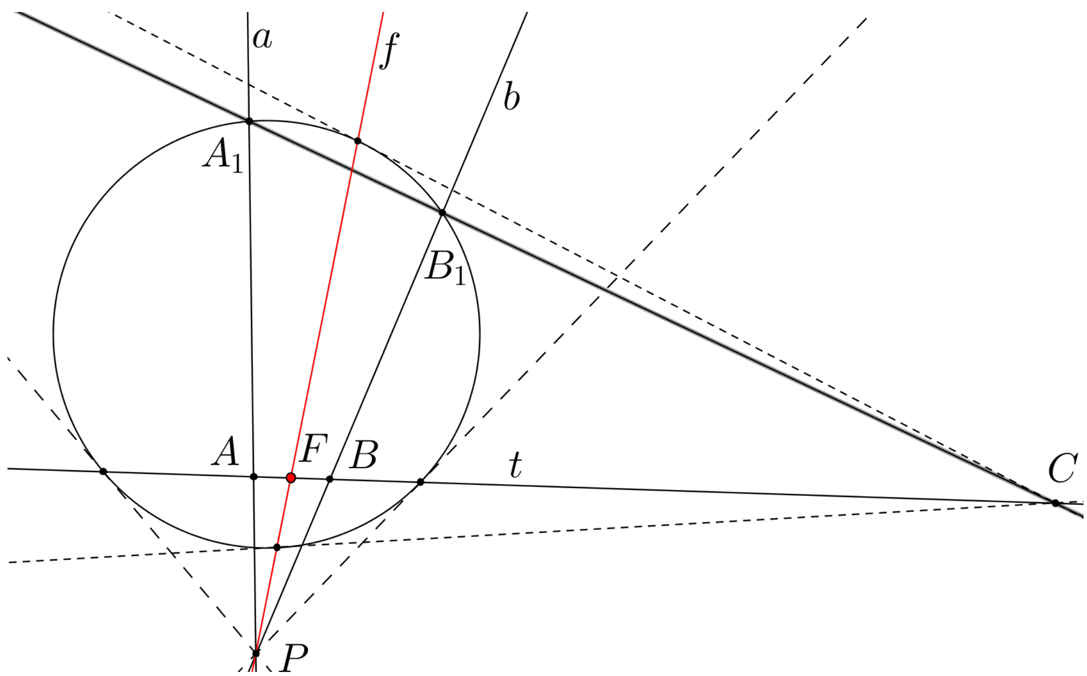
12. Ábra: Tetszőleges P pont C középpontra való tükrözése a modellben

3 Szerkesztések a Cayley-Klein-féle körmodellben

3.1 Szakaszfelező merőleges szerkesztése

A modell egy tetszőleges AB szakaszának felezőmerőlegese korábbi ismereteink felhasználásával a következőképpen szerkeszthető.

Szerkesszük meg az A és B pontokon áthaladó t egyenes P pólusát a körérintők segítségével. Tekintsük az A, B pontokon és a póluson áthaladó egyeneseket, ezeket jelölje a, b, és messék a modellkört az A_1 és B_1 pontokban. Az $\langle A_1, B_1\rangle$ egyenes és t metszéspontja legyen C. A C pontból a modellkörhöz húzott érintők érintési pontjainak összekötésével nyerünk egy f egyenest, mely átmegy P-n. (Ez az egyenes a C polárisa.)



13. Ábra: Szakaszfelező merőleges szerkesztése

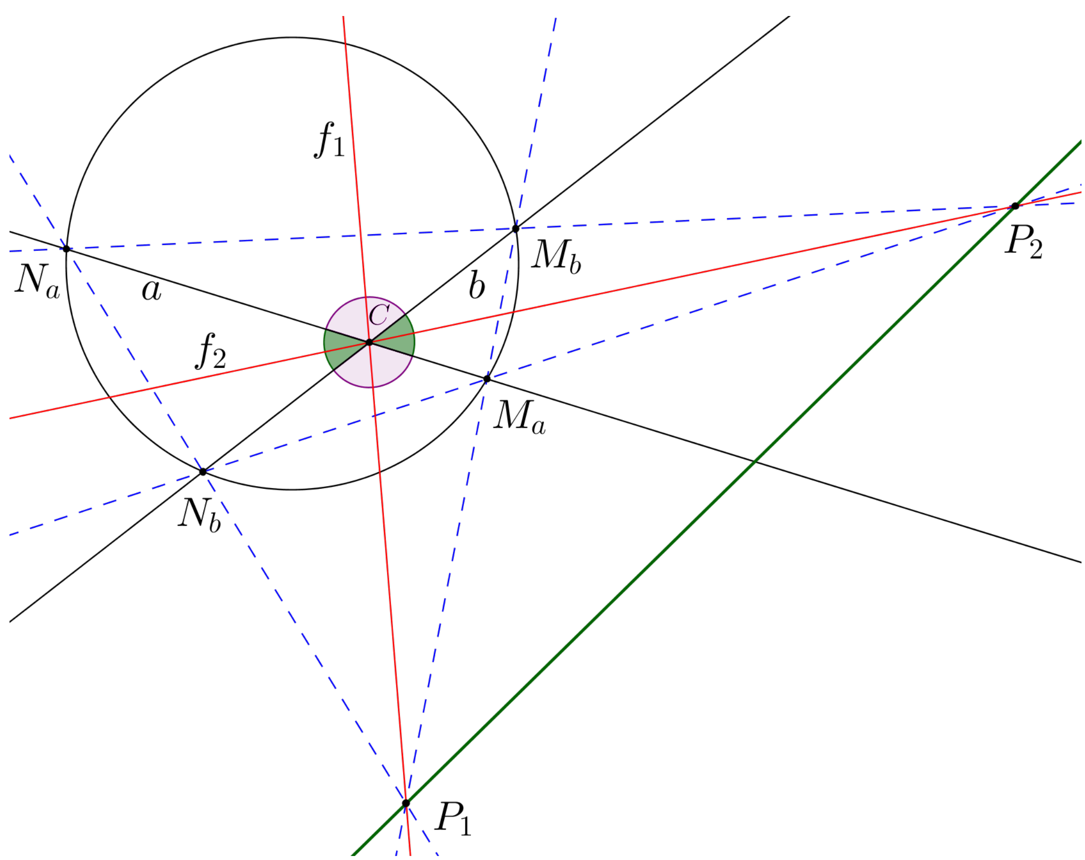
Jelölje κ azt a centrális tengelyes kollineációt, melynek a $\tilde{\sigma}$ nyílt körlemezre való leszűkítése az f egyenesre való modellbeli tükrözés, ahol C a κ centruma, f a tengelye, karakterisztikus kettősviszonya pedig $\lambda = -1$. Ekkor igazak lesznek a következő egyenlőségek: $\kappa(A_1) = B_1$, $\kappa(B_1) = A_1$ (ebből következik, hogy) $\kappa(a) = b$ és $\kappa(b) = a$. Így viszont $\kappa(A) = B$ és $\kappa(B) = A$. Azt kaptuk tehát, hogy a κ kollineáció, vagyis az f

egyenesre történő tükrözés a modellben a t egyenest önmagára képezi, az A és B pontokat pedig felcseréli. Ebből adódik, hogy az f egyenes éppen az AB szakasz felezőmerőlegese.

3.2 Szögfelező szerkesztése

Adott szögtartományok felező egyeneseit keressük a modellben. Jelölje az adott szögeket meghatározó egyeneseket a és b, és legyen a szögek csúcsa a C pont (lásd: 14. Ábra). A szögfelezőnek azon tulajdonságát fogjuk kihasználni a szerkesztés során, hogy a rá való tükrözés az adott szögek szárait egymásba viszi.

Az a és b egyenesek a modellkört 2-2 pontban metszik, legyenek ezek N_a, M_a, N_b, M_b. Kössük össze ezeket a pontokat, és legyen $\langle M_a, M_b\rangle \cap \langle N_a, N_b\rangle = P_1$ és $\langle N_a, M_b\rangle \cap \langle M_a, N_b\rangle = P_2$. Ekkor – a 2.4-es szakaszban belátottak alapján – $\langle P_1, P_2\rangle$ pontjai konjugáltak C-hez, mivel ez az egyenes a C polárisa.

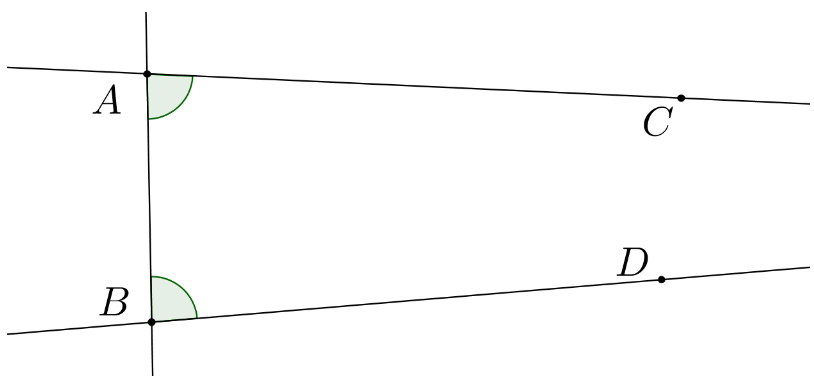


14. Ábra: Szögfelező szerkesztése

Tekintsük a $\langle P_1, C\rangle = f_1$ és $\langle P_2, C\rangle = f_2$ egyeneseket. A teljes négyoldal tételének alkalmazásával belátható, hogy P_1 polárisa f_2 és P_2 polárisa f_1. A mellékelt ábra alapján világos, hogy az f_1, f_2 egyenesekre történő modellbeli tengelyes tükrözések (centrális-tengelyes kollineációk) az a egyenest b-be, a b egyenest pedig a-ba viszik. Ebből adódóan az f_1, f_2 egyenesek lesznek az a, b metsző egyenesekkel meghatározott szögek szögfelezői.

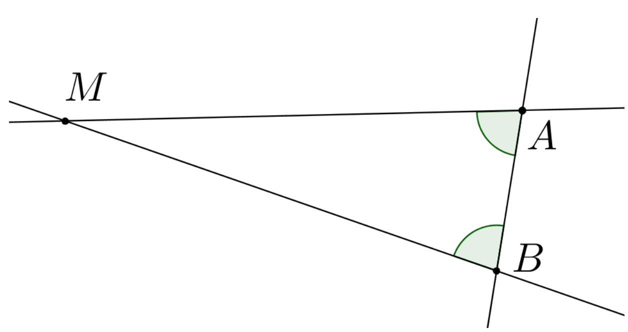
3.3 Korrespondeáló pontok két síkbeli egyenesen

Definíció. Vegyünk két tetszőleges a, b ($a \neq b$) egyenest illetve azokon két különböző A és B pontot. Tekintsünk az egyeneseken olyan $C \in a$ és $D \in b$ pontokat, melyek az $\langle A, B\rangle$ egyenes egyazon oldalán helyezkednek el. Ha fennáll a $CAB\sphericalangle = DBA\sphericalangle$ egyenlőség, akkor azt mondjuk, hogy az a, b egyenesek A, B pontjai korrespondeálnak egymáshoz.



15. Ábra: Korrespondeáló pontok

Megjegyzés: Ha az a és b egyenesek egy M pontban metszik egymást, akkor az A és B pontok korrespondeálnak egymáshoz, ha $MA = MB$. A metsző egyenesek egymáshoz korrespondeáló pontjai tehát egyenlő szárú háromszögeket határoznak meg.



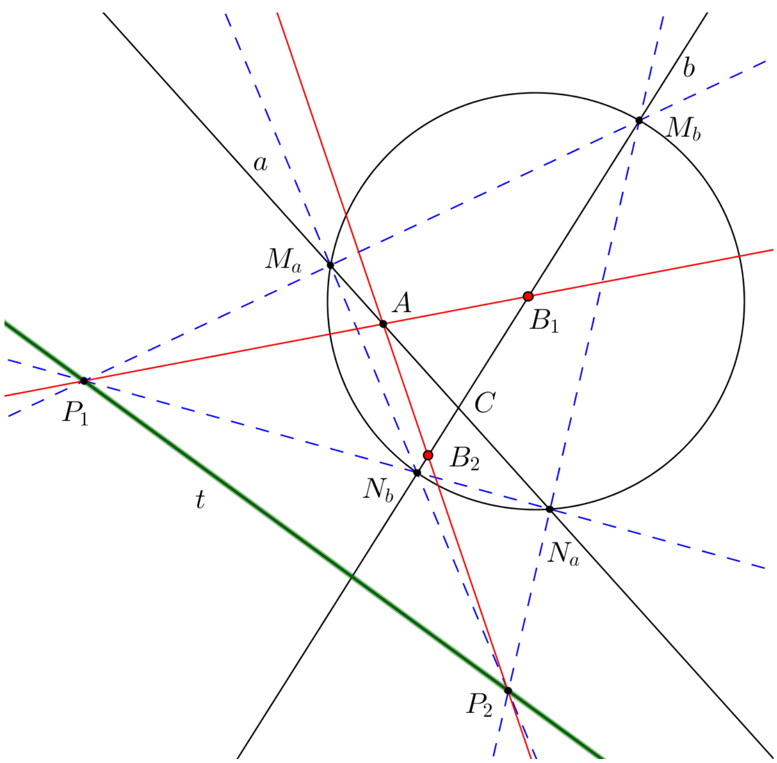
16. Ábra: Korrespondeáló pontok két metsző egyenesen.

3.3.1 Korrespondeáló pontok szerkesztése metsző egyeneseken

Legyen a és b a modell két egyenese, ezek messék egymást a C pontban. Az a és b határpontjait jelölje: M_a, N_a, M_b, és N_b. Tetszőleges $A \in a$ ponthoz keresünk olyan $B \in b$ modellbeli pontot, ami a korrespondeálás feltételét teljesíti. Itt is – mint az euklideszi geometriában – teljesül, hogy a ABC háromszögben $CAB\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle$ szögek akkor és csak akkor egyenlőek, ha a szemközti oldalak hossza megegyező.

Így tehát olyan $B \in b$ pontra irányul a keresés, melyre igaz, hogy $\tilde{d}(A,C) = \tilde{d}(B,C)$. Ez az összefüggés akkor teljesül, ha a (M_aN_aCA) és (M_bN_bCB) kettősviszonyok értéke megegyező.

Az M_a és M_b illetve N_a és N_b pontok összekötésével kapott egyenesek metszéspontja legyen P_1. Ezen és az A ponton áthaladó egyenes messe b-t a B_1 pontban. Ekkor a Pappos-tétel alapján igaz lesz a $(M_aN_aCA) = (M_bN_bCB_1)$ egyenlőség.



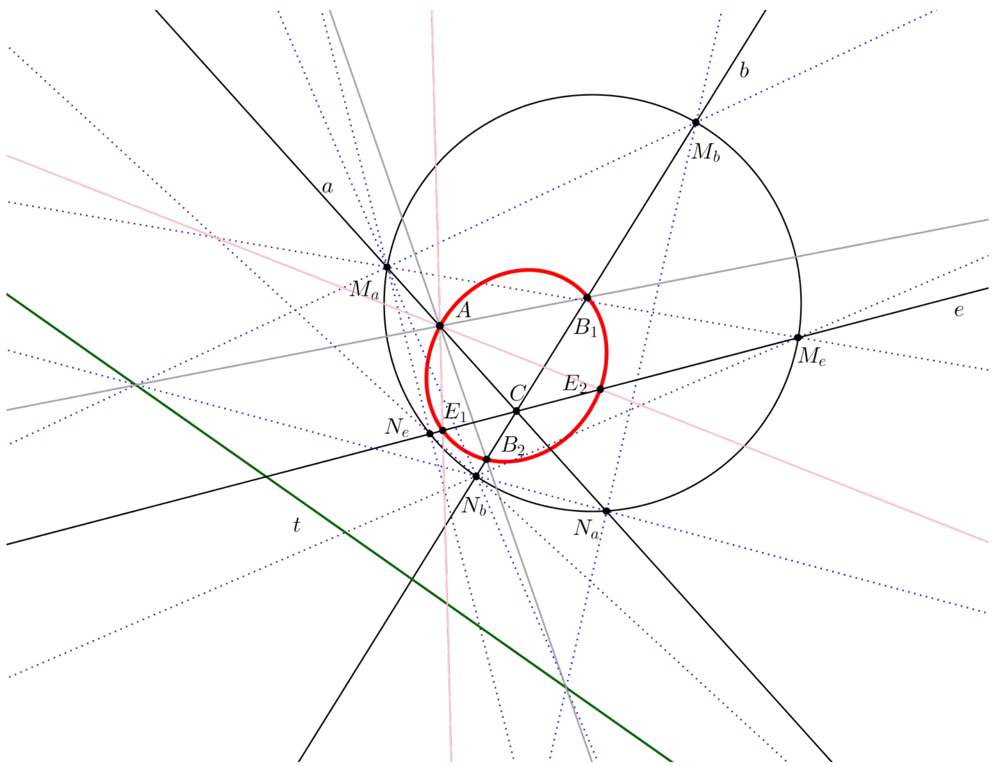
17. Ábra: Korrespondeáló pontok szerkesztése metsző egyeneseken

Ugyanígy kaphatunk egy másik B_2 pontot, melyhez a M_a és N_b valamint az M_b és N_a

pontok összekötésével nyert egyenesek P_2 metszéspontját használjuk fel. P_2 és A összekötő egyenese kimetszi a b egyenesről az A-val szintén korrespondeáló B_2 pontot.

3.3.2 Kör szerkesztése a modellben

Vegyük a modellben a C, A pontokat. Azt a kört akarjuk megszerkeszteni, amelynek centruma C és átmegy az A ponton. Legyen a C polárisa t. Ha vesszük azt a κ kollineációt, amelynek centruma C és tengelye a t egyenes, továbbá fennáll $\kappa(M_a) = A$, akkor $\kappa(M_b) = B_1$ és $\kappa(N_b) = B_2$ is igaz lesz. Ez az a kollineáció, mely megadja az A-hoz korrespondeáló pontok halmazát a C ponton áthaladó egyenessereg egyenesein. Ezek a pontok egyenlő távolságra vannak a C ponttól, ezért egy C középpontú kört határoznak meg a modellben.



18. Ábra: Kör a modellben

A C centrumú $\rho = \tilde{d}(C, A)$ sugarú kör megegyezik a k határkör κ szerinti $\kappa(k)$ képével. Ismeretes, hogy a kollineáció másodrendű görbét másodrendű görbébe képez.

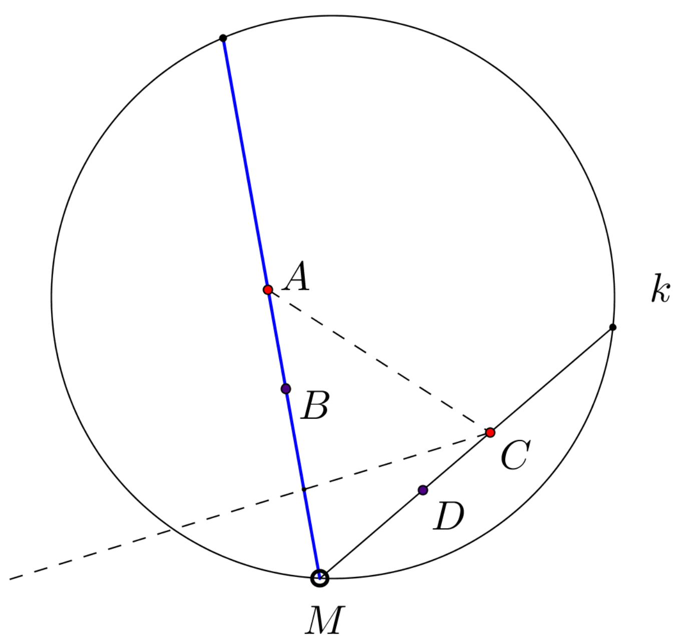
A modellbeli $\kappa(k)$ kör egy olyan másodrendű görbe, amely a kör belsejében van. Emiatt a $\kappa(k)$ görbe euklideszi értelemben egy ellipszist ad.

A szerkesztés során kihasználtam azt a tételt, mely kimondja, hogy egy másodrendű görbét (jelen esetben ellipszist), meghatároz annak öt pontja. A szerkesztést a GeoGebra programmal végeztem, melynek segítségével az öt darab megszerkesztett pontra ellipszist tudtam illeszteni. (A paraciklus és a hiperciklus (lásd: 3.3.4. ill. 3.3.6. szakaszok) szerkesztése során is hasonló módon jártam el.)

Megjegyzés: Ha a κ kollineáció középpontja megegyezik a modellkör O középpontjával, akkor a fenti módon kapott kör euklideszi értelemben is kör, méghozzá a modellkörrel koncentrikus kör lesz.

3.3.3 Korrespondeáló pontok szerkesztése párhuzamos egyeneseken

Mielőtt a párhuzamos egyenesek korrespondeáló pontjainak szerkesztésébe belekezdek, le kell írnom, mit értünk párhuzamosságon a modellben, ehhez pedig szükség van a megegyező irányú modellbeli félegyenesek fogalmára.



19. Ábra: Megegyező irányú $[A, B\rangle$ és $[C, D\rangle$ félegyenesek

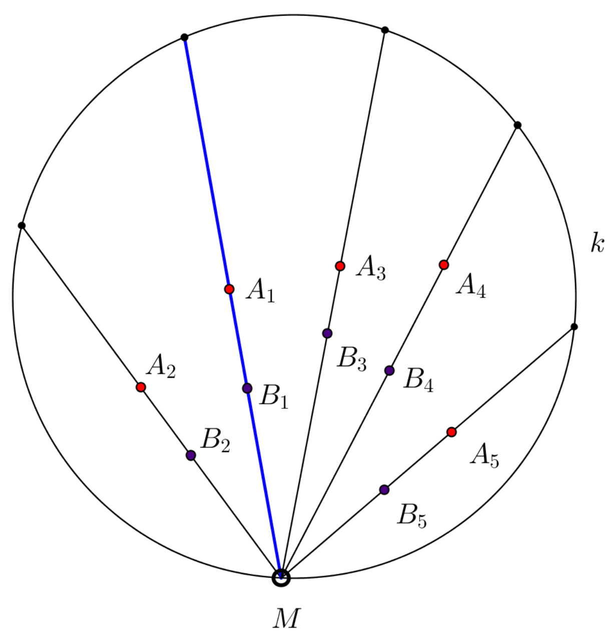
Jelölje $[A, B\rangle$ az A kezdőpontú, B-n átmenő modellbeli félegyenest. Világos, hogy e félegyenest meghatározza az A kezdőpont és a modellkörön vett megfelelő M pont (lásd: 19. Ábra).

Definíció. Két egyazon egyenesre eső félegyenest megegyező irányúnak mondunk, ha az egyik félegyenes tartalmazza a másikat.

Definíció. Legyenek $[A, B\rangle$ és $[C, D\rangle$ olyan modellbeli félegyenesek, melyek nincsenek egy egyenesen. Ezeket egymással megegyező irányúnak mondjuk, ha fennállnak a következők:

(1) A két félegyenesnek nincs közös pontja.

(2) Bármely olyan C kezdőpontú (a $[C, D\rangle$ szártól különböző) félegyenes, amely az $ACD\sphericalangle$ konvex szögtartományban van, már elmetszi az $[A, B\rangle$ félegyenest.



20. Ábra: Modellbeli egymással párhuzamos egyenesek

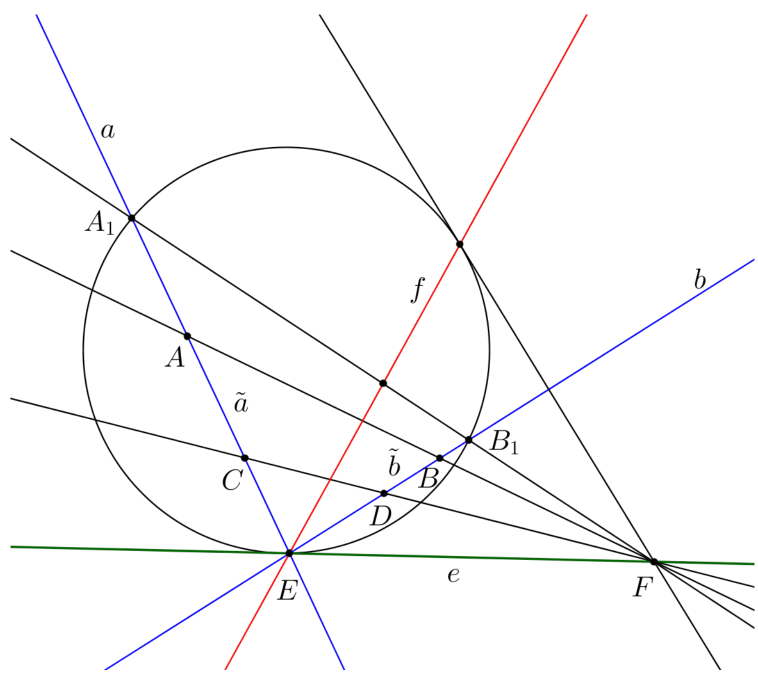
Megjegyzés: Az $[A, B\rangle$ és $[C, D\rangle$ modellbeli félegyenesek megegyező irányúak, ha az euklideszi értelemben vett félegyenesek által a modellkörön kimetszett pontok megegyeznek (lásd: 20. Ábra).

Definíció. A modellben két egyenest párhuzamosnak mondunk egymással, ha tartalmaznak megegyező irányú félegyeneseket.

Megjegyzés: A határkör egy pontja meghatároz egy párhuzamos egyenessereget a modellben.

A továbbiakban két, a modellben egymással párhuzamos egyenest tekintek, és az egyik egyenes egy adott pontjához szerkesztek korrespondeáló pontot a másik egyenesen. Legyen a és b két olyan egyenes az euklideszi síkon, melyek a modellkör körvonalának E pontjában metszik egymást. Tekintsük most az a és b egyenesek modellbeli leszűkítésével nyert $\tilde{a}$ és $\tilde{b}$ egyeneseket (lásd: 21. ábra). A definíció alapján ezek párhuzamos egyenesek a modellben.

Jelöljünk ki egy $A \in \tilde{a}$ pontot. Ehhez a ponthoz szerkesszünk konjugált pontot $\tilde{b}$-n. Először húzzuk meg a körhöz az érintőt az E pontban. Az a és a b egyenesek körrel vett E-től különböző metszéspontjai legyenek A_1 és B_1. Tekintsük az $\langle A_1, B_1 \rangle$ egyenest, ennek e egyenessel vett metszéspontja legyen F. Ebből a pontból húzzuk meg a másik érintőt a körhöz. Az így kapott érintési pontot E-vel összekötve megkapjuk az F polárisát. Nevezzük ezt f-nek.



21. Ábra: Korrespondeáló pontok szerkesztése párhuzamos egyeneseken

Tekintsük most azt az F középpontú, f tengelyű centrális-tengelyes kollineációt, melynek karakterisztikus kettősviszonya -1. Ennél a kollineációnál A_1 és B_1 egymás képei. A pont képe ennél a kollineációnál a B pont lesz, mely megfelel a korrespondeálás feltételeinek a következő megfontolások alapján:

Vegyünk fel még egy egyenest, mely F-ből indul és két pontban metszi a modellkört. Ez az egyenes az a és b egyeneseket egy-egy pontban metszi, az a-val vett metszéspontját jelölje C, a b-vel vett metszéspontját pedig D. Ekkor igaz lesz, hogy $CAB\sphericalangle = DBA\sphericalangle$, mert az f-re való modellbeli tükrözés egymásra képezi az a és a b egyenest valamint az A és B pontot, az $\langle A, B\rangle$ egyenes képe viszont önmaga, mivel merőleges a tengelyre.

3.3.4 Paraciklus szerkesztése a modellben

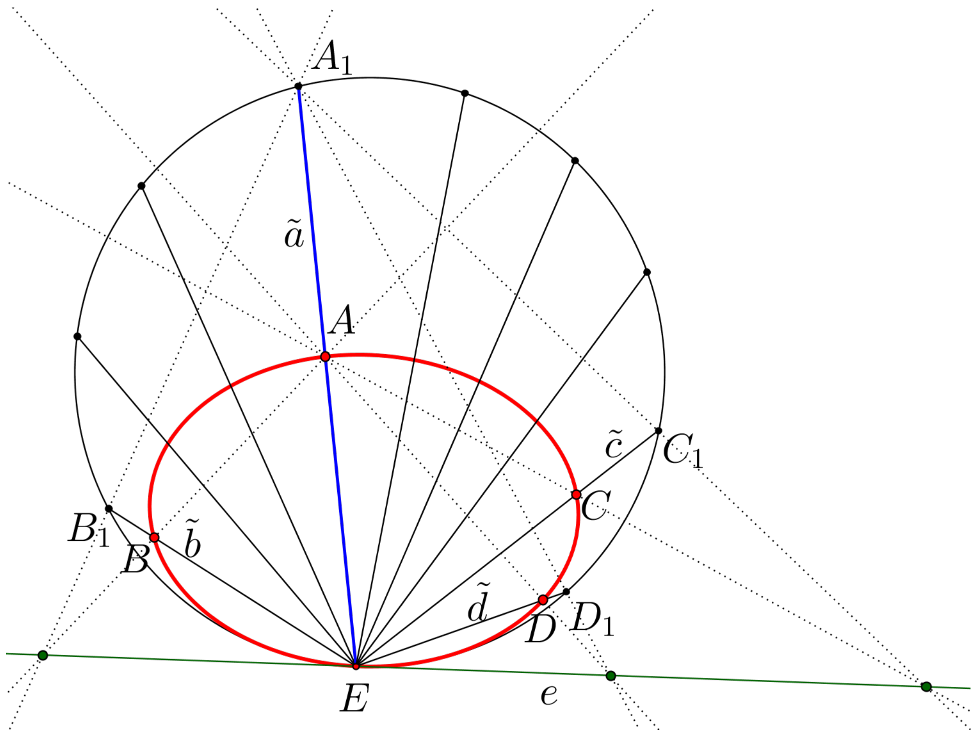
Rögzítsük a határkör egy E pontját. Tekintsük a modellben azt a párhuzamos egyenessereget, amelyet ezen E pont határoz meg.

Definíció. A párhuzamos egyenessereg egy $\tilde{a}$ egyenesén vegyünk egy A pontot. Jelöljük ki a többi egyenesen az A-hoz korrespondeáló pontokat. Az ezen pontok által alkotott görbét egy paraciklusnak mondjuk.

Az alábbiak során azt vizsgáljuk, hogy miként lehet előállítani az A ponthoz korrespondeáló pontok görbéjét, azaz a paraciklust.

Vegyük azt az ε elációt, melynek tengelye az e egyenes, és centruma az E pont, valamint az A_1 pontot A-ba viszi. Ekkor a B_1 pont képe B lesz. Az előbbiekből már következik, hogy a paraciklus nem más mint $\varepsilon(k)$, vagyis a k modellkör ε elációnál nyert képe.

Az kör szerkesztéséhez hasonlóan itt is egy euklideszi értelemben vett ellipszist kapunk, itt azonban az alakzat (belülről) érinti a határkört (lásd:22. Ábra).



22. Ábra: Paraciklus a modellben

3.3.5 Korrespondeáló pontok szerkesztése nem metsző és nem párhuzamos egyeneseken

Tekintsünk ismét egy a és egy b egyenest, melyek ezúttal két-két különböző pontban metszik a k modellkört. A metszéspontokat jelölje M_a, N_a valamint M_b és N_b. Az egyenesek a körön kívül találkozzanak, metszéspontjukat jelölje C. Ezek az egyenesek a modellben nem metszik egymást, és nem is párhuzamosak.

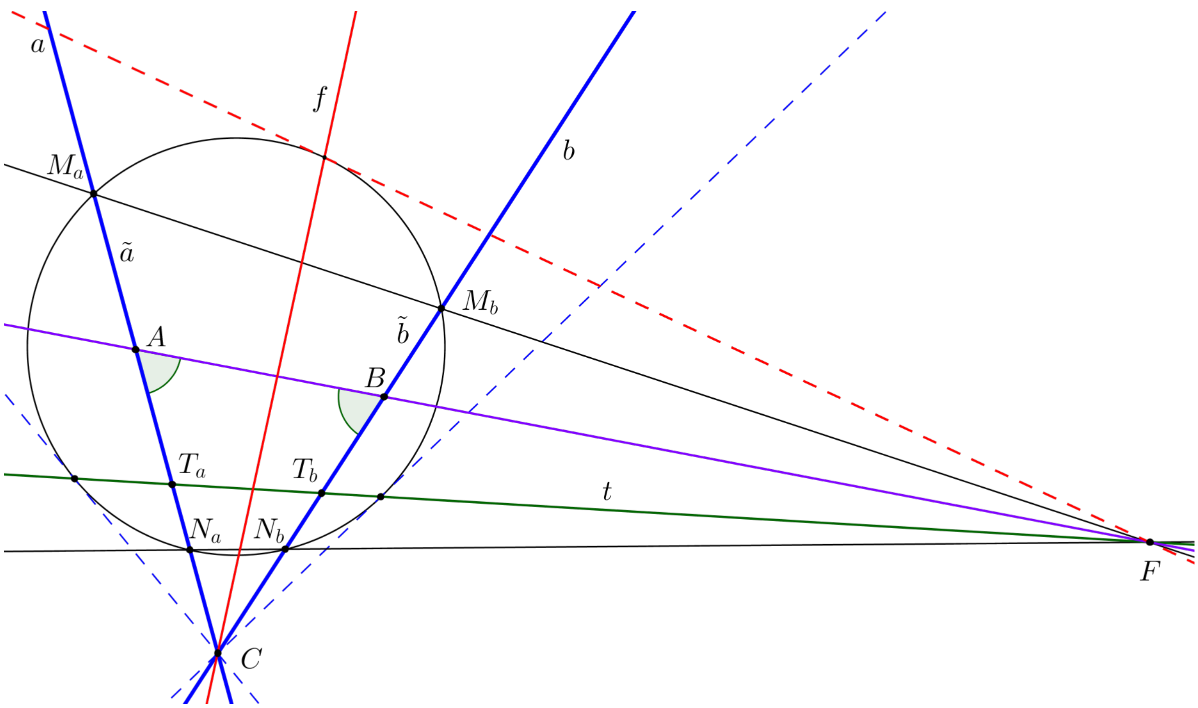
Vegyünk az a egyenesen egy A pontot. Szerkesszük meg a b egyenes azon B pontját, amely korrespondeál A-hoz.

Az $\langle M_a, M_b \rangle$ és az $\langle N_a, N_b \rangle$ egyenesek metszéspontját jelölje F. Most szerkesszük meg a C pont t polárisát a modellkörre nézve. Ezen az egyenesen rajta lesz az F pont (mivel a 2.4. szakaszban leírt szerkesztés alapján látszik, hogy F konjugált a C-hez). C polárisának az a valamint a b egyenesekkel vett metszéspontjait jelölje T_a illetve T_b. Világos, hogy ez a t egyenes a modellben merőleges az a, b egyenesekre.

Kössük össze az F pontot az A-val. Az így kapott egyenes kimetsz egy pontot b-ből, ezt jelöljük B-vel. Ekkor a Pappos-tétel miatt fennáll a $(M_aN_aT_aA) = (M_bN_bT_bB)$ egyenlőség, vagyis $\tilde{d}(T_a, A) = \tilde{d}(T_b, B)$.

Az előzőek alapján már meg tudjuk szerkeszteni a T_a, T_b szakasz f felezőmerőlegesét. Látható, hogy ez megegyezik az F pont polárisával. Hajtsunk végre tengelyes tükrözést az f egyenesre a modellben. Ez felcseréli a T_a, T_b pontokat és a t-re merőleges a, b egyeneseket.

Mivel igaz $\tilde{d}(T_a, A) = \tilde{d}(T_b, B)$, a tengelyes tükrözés felcseréli az A, B pontokat. Ez a transzformáció a $T_aAB\sphericalangle$ és $ABT_b\sphericalangle$ szögeket is egymásba képezi. Az előbb elmondottakból már látszik, hogy az említett szögek egyenlőek, tehát a B pont korrespondeál az A ponthoz.



23. Ábra: Korrespondeáló pontok szerkesztése nem metsző és nem párhuzamos egyeneseken

Megjegyzés: A modell nem metsző és nem párhuzamos egyeneseit ultraparalel egyeneseknek is szokás nevezni.

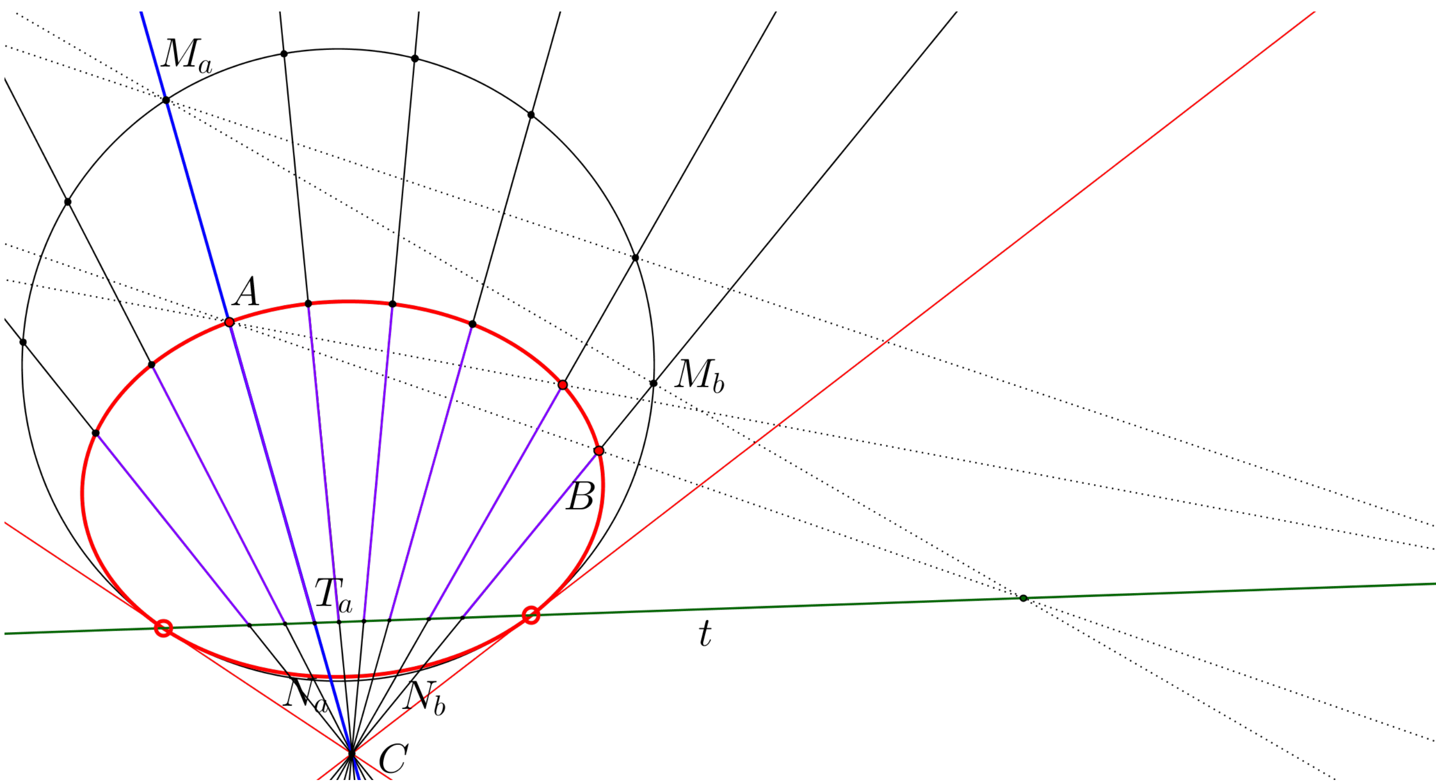
3.3.6 Hiperciklus szerkesztése a modellben

Definíció. Egy adott t egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmazát a t egyenes egy távolságvonalának hívjuk.

Megjegyzés: A távolságvonalat az euklideszi geometriában az adott egyenessel párhuzamos egyenespár alkotja. A hiperbolikus síkon és a modellben a távolságvonalat hiperciklusnak nevezzük.

Definíció. Legyen adott a modellben egy t egyenes. A t-re merőleges egyenesek összességét egy merőleges egyenesseregnek mondjuk.

Legyen adott egy t egyenes és egy A pont. Szerkesszük meg a t egyenes A ponton átmenő távolságvonalát a modellben.



24. Ábra: Hiperciklus a modellben

Vegyük azt a $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ kollineációt, melynek C a középpontja, a C pont polárisa a tengelye, továbbá az M_a pontot az A pontba viszi. Tekintsük a 24. Ábrát. Világos, hogy fennáll $\kappa(M_b) = B$ is. A fentebb belátottak alapján az A és B pontok t egyenestől vett távolsága is állandó, és a $\tilde{d}(T_a, A)$ távolsággal egyenlő. A k modellkör κ kollineációnál vett képe megadja a t-től $\tilde{d}(T_a, A)$ távolságra lévő pontok halmazát, vagyis a hiperciklust.

Fontos azonban megkülönböztetni a $\kappa(k)$ ellipszis t egyenes fölötti illetve t alatti részét. Valójában az A ponthoz korrespondeáló pontokat csak a felső íven találunk.

Irodalomjegyzék

[1] HAJÓS, Gy.: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1962.

[2] HAJÓS, Gy. és STROHMAJER J.: A geometria alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[3] REIMAN, I.: A geometria és határterületei, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.

[4] VERHÓCZKI, L.: Geometriai axiómarendszerek és modellek, ELTE TTK Matematikai Intézet, Geometriai Tanszék, Budapest, 2011. (Interneten elérhető jegyzet: http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/AxiomakModellek.pdf Utolsó megtekintés dátuma: 2015. október 14.)

[5] VERHÓCZKI, L.: Projektív Geometria, ELTE TTK Matematikai Intézet, Geometriai Tanszék, Budapest, 2010. (Interneten elérhető jegyzet: http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/ProjGeom.pdf Utolsó megtekintés dátuma: 2015. október 14.)