Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

EXTREMÁLIS HALMAZRENDSZEREK

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Ulviczki Tünde

Témavezető: Szőnyi Tamás, egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2016.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ha adott elemszámú halmazt, mint alaphalmazt tekintünk, s vesszük bizonyos részhalmazait, melyeket elemeiként tartalmaz, akkor halmazrendszerhez jutunk. A dolgozat fő problémája mindig számosságukkal kapcsolatos (leginkább felső) becslés lesz; extremális halmazrendszereket keresünk tehát. Az 1. fejezet után, mely fontosabb alapfogalmat tartalmaz, a 2. fejezetben metsző halmazrendszerekre vonatkozó nevesebb becslések szerepelnek; a metszőségen túl a metszet méretére vagy egyéb tulajdonságára, például paritására vonatkozó tételeket is látni lehet. A becslésekre megfogalmazott tételek mentén legfontosabbként az Erdős–Ko–Rado tételhez jutunk el; itt további kikötés, hogy bármely két elem metsző és minden halmaz ugyanannyi elemű, legalábbis azon változata, mely e néven közismert, s mellyel egészen a 4. fejezetig találkozunk. E tételt járja körül a 3. fejezet. A tétel általánosítható, s különféle eszköztár vonul fel bizonyítására. A 4. fejezetben a Sperner–rendszerek ismertetésére kerül sor, melyekben az a további tulajdonság tehető fel, hogy elemei, az alaphalmaz részhalmazai nem tartalmazhatják egymást páronként sem. Természetesen itt is előkerül az Erdős–Ko–Rado–tételt, pontosabban szólva eredendően ezzel a tulajdonsággal fogalmazódott a tétel. Az 5. fejezetben a keresztben metszéssel találkozhatunk.

Ezúton szeretném köszönetemet kifejezni Szőnyi Tamás tanár úrnak a témavezetésért és a konzultációkért, valamint Héger Tamás tanár úrnak a tanácsokért.

1. Alapfogalmak

Jelölés **F** (és általában a vastag betű): halmazrendszer (kivéve: **R**: valós számok, **Z**: egész számok),
A, B (és általában a nagybetű): alaphalmaz, részhalmazok; a halmazrendszer elemei,
n (és általában a kisbetű): a halmazok elemszáma, illetve elemeik.

1.1. Definíció Egy $V \coloneqq \{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz részhalmazainak olyan összességét, melynek elemei V részhalmazai, családnak nevezzük.

A halmaz fogalmával ellentétben itt egy elem többször is előfordulhat. Ha a család alaphalmazból legfeljebb kételemű, nemüres részhalmazokat tartalmaz, akkor (irányítatlan) gráfnak is nevezhetjük. Mivel $A_i = A_j$ megengedett nemcsak $i = j$ –re, ezért többszörös élt is tartalmazhat, ill. egyelemű részhalmazok is lehetnek, így hurokél is.

1.2. Definíció V feletti **F** halmazrendszeren egy V alaphalmaz részhalmazainak olyan halmazát értjük, melynek A_i elemei V részhalmazai, s melyre $i \neq j$ esetén $A_i \neq A_j$.

Másképp: $\mathbf{F} \subseteq 2^V$, V hatványhalmazának egy részhalmaza, mivel **F** nem szükségszerűen tartalmazza V alaphalmaz összes részhalmazát, csak közülük bizonyosakat. (A hatványhalmaz $P(V)$ -vel, ill. 2^V -vel is jelölhető.) $|V| = n$ esetén V –nek 2^n részhalmaza van.
Halmazrendszerek és kételemű részhalmazok esetén a hurok- és többszörös éleket kizárjuk, azaz az egyszerű gráfokat kapjuk vissza, így nevezhetjük a halmazrendszereket egyszerű hipergráfoknak, ahol **F** elemei az élek, V elemei a csúcsok.

1.3. Definíció Ha $\mathbf{F} \subset 2^V$, $\mathbf{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ és $\forall i : |A_i| = k$, akkor **F** –et k-uniform halmazrendszernek mondjuk. A k-uniformitás más jelölése: $\mathbf{F} \subseteq \binom{V}{k}$. Hasonlóan **F** –et r-regulárisnak nevezzük, ha minden $x \in V$ –t pontosan r darab $A_i \in \mathbf{F}$ tartalmaz.

1.4. Definíció Az **F** halmazrendszert t –metszőnek nevezzük, ahol $t \geq 1$ egész, ha
$\forall A_i, A_j \in \mathbf{F} : |A_i \cap A_j| \geq t$.

Később használjuk a $t = 0$ esetet is, ekkor semmilyen feltétel sincs a metszetekre.

2. Metsző halmazrendszerek

Ebben a részben a páronként nem diszjunkt halmazokat tartalmazó halmazrendszereket nézzük meg felső becslést adva. Az alábbiak főként [8] és [10] –ben foglaltak szerint készültek.

2.1. Tétel (de Bruijn – Erdős) Legyen V alaphalmaz, $|V| = n > 1, \{A_1, \dots, A_m\} = \mathbf{F} \subseteq 2^V$, $m > 1$, $\forall i : |A_i| \geq 2$, $\mathbf{F} \neq \{V\}$ olyan halmazrendszer, ahol $\forall x_1 \neq x_2 \in V$ –re $\exists!\, A_i$: $x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow m \geq n$.

Megjegyzés Ha $m = 1$ előfordulhatna, akkor $\mathbf{F} = \{V\}$ egyelemű halmazrendszer lenne, szemléletesen, egyetlen egyenes lenne, mely tartalmazná az összes pontot a halmazból (ld. tétel utáni részt). Az $|A_i| = 1$ esetek csak növelik m –et, s hogy a bizonyításban ne zavarjanak, a továbbiakban feltettük, hogy $|A_i| > 1$. Az $m = n$ esetét részletesebben ld. a 2.4. Tételnél.

Bizonyítás (Conway) Indirekt tegyük fel, hogy $n \geq m$. Azért nem $n > m$ –et teszünk fel, mert így $|A_i \cap A_j| = 1$ is teljesülhet, ha az „indirekt bizonyítás" végén egyenlőségre jutnánk, s $n = m$ esetére is választ ad.
Jelölje $d(i)$ az i elemet tartalmazó A_j halmazok számát.
Ha $\exists i : d(i) = m$, azaz $\forall A_j$ -re $i \in A_j$, az A_j halmazok i –ben metszik egymást. Eme i és az A_j halmazok további egy – egy eleme meghatározza az A_j halmazt a tétel feltétele alapján, s más halmazban nem lehet i és az adott A_j -t meghatározó elempár. Vegyünk tetszőleges A_j, A_k halmazt, $i \neq x_1 \in A_j$, $i \neq x_2 \in A_k$ elempárt! A tétel feltétele miatt ezen x_1, x_2 -hez is $\exists!\, A_i : x_1, x_2 \in A_i$, de ez az A_i is tartalmazza i -t, így két halmaz is van, melynek eleme i, x_1 : A_j és A_i, ami pedig ellentmondás, tehát $\forall i :\ d(i) < m$.
Tetszőleges $i \notin A_j$ esetén $d(i) \geq |A_j|$, hiszen ha rögzítünk egy $i \notin A_j$ -t, akkor pontosan $|A_j|$ darab i -t és az A_j halmaz pontosan egy elemét tartalmazó halmaz van; ekkor $d(i) = |A_j|$, ha pedig vannak olyan i –t tartalmazó A_k -k, melyekre $A_k \cap A_j = \emptyset$, akkor szigorú egyenlőtlenség teljesül. (Innen látható az is, hogy $|A_j| = n - 1$ esetén biztosan teljesül a tétel.) A $d(i) \geq |A_j|$ egyenlőtlenséget az
$n \geq m$ egyenlőtlenséggel szorozva, mindkét oldalt nm –ből kivonva kapjuk:

$$nm - nd(i) \leq nm - m\,|A_j|,$$

$$\frac{1}{n(m-d(i))} \geq \frac{1}{m(n-|A_j|)}, \text{ másként: } \quad \frac{m}{m-d(i)} \geq \frac{n}{n-|A_j|}.$$

$(m - d(i))$ –vel a feljebb leírt $d(i) = m$ eset kizárása miatt, $(n - |A_j|)$ -vel a tétel kimondása után kizárt $m = 1$ eset miatt oszthatunk. Ha összeadjuk ezeket $\forall i \notin A_j$ esetén, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i \notin A_j} \frac{m}{m-d(i)} \geq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \notin A_j} \frac{n}{n-|A_j|} \quad \text{teljesül,}$$

ahol az egyenlőtlenség bal oldalán i –t rögzítve kerestük A_j -ket, jobb oldalán pedig A_j -t rögzítve számoltuk össze i –ket.

Bal oldalon: $\sum_{i \notin A_j} \frac{m}{m-d(i)} = \sum_i \sum_{j: i \notin A_j} \frac{m}{m-d(i)}$, ahol $\frac{m}{m-d(i)}$ nem függ j –től, és

$$\sum_{j: i \notin A_j} \frac{m}{m-d(i)} = (\text{ilyen } j\text{–k száma} = m - d(i)) \cdot \frac{m}{m-d(i)}.$$ Innen

$$\sum_i \sum_{j: i \notin A_j} \frac{m}{m-d(i)} = \sum_i m = nm.$$

Jobb oldalon hasonlóan

$$\sum_{i \notin A_j} \frac{n}{n-|A_j|} = \sum_j \sum_{i: i \notin A_j} \frac{n}{n-|A_j|},$$ ahol

$$(\text{az } i\text{–k száma} = n - |A_j|) \cdot \frac{n}{n-|A_j|} = \sum_{i: i \notin A_j} \frac{n}{n-|A_j|},$$ s így

$$\sum_j \sum_{i: i \notin A_j} \frac{n}{n-|A_j|} = \sum_j n = nm.$$

Itt az összegek azonos mennyiségek összeadásából adódnak, s azt is láthatjuk, hogy az $\frac{m}{m-d(i)} \geq \frac{n}{n-|A_j|}$ egyenlőtlenségben $\forall i \notin A_j$ -re egyenlőtlenség teljesül. Innen látszik, hogy

$n \geq m$ és $d(i) \geq |A_j|$ miatt, hogy $n = m$, ill. $\forall i \notin A_j$ -re $d(i) = |A_j|$. ■

Ha $n = q^2 + q + 1$, $\forall A_j$ -re $|A_j| = q + 1$, minden elemet $q + 1$ halmaz tartalmaz, azaz $d(i) =$

$= q + 1$, és $\forall A_j, A_k$ -ra $|A_j \cap A_k| \neq \emptyset$, akkor is biztosan teljesül az egyenlőség. A leírtak éppen a q-rendű véges projektív síkot adják. E véges projektív síkokról dióhéjban tekintjük át a legfontosabb ismereteket [2] nyomán.

V halmaz elemeit pontoknak, $\mathbf{F}$ elemeit egyeneseknek fogjuk nevezni. Ekkor

P1 Bármely két ponthoz pontosan egy olyan $\ell \in \mathbf{F}$ egyenes található, melyben mindkét pont benne van.
P2 Bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van.
P3 Bármely egyenesnek legalább 3 pontja van.
P4 Bármely pontot legalább 3 egyenes tartalmaz.

A **P1** – **P4** axiómának eleget tevő $(V, \mathbf{F})$ párokat projektív síkoknak nevezzük. Mivel V véges, így véges projektív síkokról lesz szó. Másképp: egy projektív sík véges, pontosabban q –rendű, ha igaz rá a végességi axióma; $\exists \ell \in \mathbf{F}$, $|\ell| = q + 1$. Megfogalmazható mintegy az 5. axióma:

P5 Van 4 olyan pont, amelyek közül semelyik 3 nincs egy egyenesen.

A **P3**, **P4**, **P5** axiómák azt a célt szolgálják, hogy a „degenerált struktúrákat” kizárják, úgymint
a) egyetlen egyenes van, mely minden pontot tartalmaz, vö. 2.1. Tétel után leírt $m = 1$ eset,

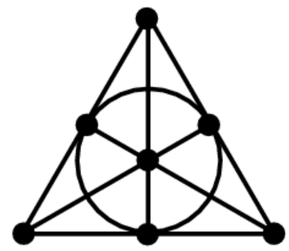
b) $\exists v \in V$ pont, melyre $V \setminus \{v\} \in \mathbf{F}$ (azaz egyenes), a többi egyenes kétpontú és tartalmazza v –t, vagyis $\{v, x\}$ alakúak, ahol $v \neq x \in V$, vö. de Bruijn – Erdős tétel bizonyításánál leírtakkal.

Véges geometriából ismert, hogy ha egy $(V, \mathbf{F})$ párra teljesül **P1**, **P2**, de nem teljesül **P5**, akkor $(V, \mathbf{F})$ csak az a) vagy b) eset valamelyike lehet. Ismert az is, hogy **P1**, **P2**, **P5** –ből következik **P3**, **P4**, míg **P1** – **P4** –gyel ekvivalens az előző három axióma, ld. [2].

2.2. Tétel Minden véges projektív síkhoz van olyan $q \in \mathbf{Z}$, $q \geq 2$, melyet a véges projektív sík rendjének neveznek, s melyre a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. Minden egyenesnek $q + 1$ pontja van;
2. Minden ponton $q + 1$ egyenes megy át;
3. A síknak $q^2 + q + 1$ pontja és ugyanennyi egyenese van.

2.3. Példa (Fano – sík) Pontjai legyenek a szabályos háromszög csúcsai, oldalfelező pontjai és középpontja, egyenesei pedig az oldalak, a magasságvonalak és a beírt kör által megadott ponthármasok, $q = 2$. Mindezek az ún. Fano – síkot adják meg (ld. 1. ábra). A Fano – sík esetében könnyen látható a de Bruijn – Erdős tétel teljesülése úgy, hogy $n = m$.



1. ábra

2.4. Tétel A de Bruijn – Erdős tételben $m = n$, $m > 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan egyenes, ami egy pont híján minden pontot tartalmaz, vagy a halmazok projektív sík egyenesei.

Bizonyítás A 2.1. Tétel bizonyítása végén láttuk, hogy $n = m$ és $\forall A_j$ -re $d(i) = |A_j|$. Ez azt jelenti, hogy az i ponton átmenő minden egyenes metszi A_j -t. Mivel ez tetszőleges $i \notin A_j$-re igaz, bármely két egyenes metszi egymást, azaz teljesül **P2** is, így $n > 1$ miatt a fenti a) eset nem fordulhat elő, tehát vagy a b) –nél leírt példa lehet, vagy **F** elemei projektív sík egyenesei. ■

A projektív síkokra érvényes a dualitás elve, mely során egyenes és pont szerepe felcserélődik, s melyhez szükséges az előbbi egyenlőség. Ez halmazrendszerek nyelvére fordítva a de Bruijn – Erdős tételnél azt jelenti, hogy két pont által egyértelműen meghatározott egyenes (két elem által egyértelműen meghatározott, azt egyedüliként tartalmazó részhalmaz) keresése helyett az lesz a feltétel, hogy két halmaz pontosan egy elemben (két egyenes egy pontban) messe egymást. A duális tétel:

2.5. Tétel (de Bruijn – Erdős) Legyen $|V| = n$, $\{A_1, \ldots, A_m\} = \mathbf{F} \subseteq 2^V$ olyan, hogy $i \neq j$ -re $|A_i \cap A_j| = 1$. Ekkor $m \leq n$.

A tétel a Bose – Fisher tétel speciális esete, ezért érdemesebb az utóbbit belátni. Míg $\lambda = 1$ –re (a duálisnál) kombinatorikus bizonyítás volt látható, a következő, $\lambda > 1$ általános esetre csak lineáris algebrai eszköztárat használó bizonyítás ismeretes.

2.6. Tétel (Bose – Fisher) Legyen $\{A_1, \ldots, A_m\} = \mathbf{F} \subseteq 2^V$, és $\forall i \neq j$ –re $|A_i \cap A_j| = \lambda > 0$. Ekkor $m \leq n$.

Bizonyítás Ha valamely $A_i \in \mathbf{F}$ –re $|A_i| = \lambda$, akkor bármely A_j halmazzal vett metszete éppen ez az A_i, s más elem nincs is a metszetben, különben nem λ elemet kapnánk. Minden A_j tartalmazza
A_i -t, így A_i benne lesz tetszőleges $A_j, A_k \in \mathbf{F}$ metszetében. Mivel a metszet mérete λ, így más elem már nem lehet benne. A részhalmazok A_i -n kívül eső része tehát diszjunkt, mely így nyilván legfeljebb $n - \lambda$ darab diszjunkt A_j -t jelenthet. (Az alaphalmaz elemszáma n, A_j -k A_i -n kívül eső része legalább egy elemű.) Ekkor tehát $m \le n - \lambda + 1 \le n$.
Ha $\forall i$: $|A_i| > \lambda$, akkor legyen $\alpha_i = |A_i| - \lambda$, mely 1 -nél nem kisebb (0 –nál nagyobb). Legyen $\underline{v}_i$ az A_i karakterisztikus vektora, azaz $\underline{v}_i$ j. koordinátája 1, ha az alaphalmaz j. eleme benne van A_i -ben, 0 pedig különben. Eszerint

$$\underline{v}_i \underline{v}_j = \begin{cases} \lambda, \text{ ha } i \neq j \\ \lambda + \alpha_i, \text{ha } i = j. \end{cases} \tag{1}$$

(Az előbbi azért, mert következik abból, hogy megadtuk a metszet méretét, így λ darab közös 1 -es lesz a karakterisztikus vektorokban; az utóbbinál A_i méretét kaptuk vissza.) E vektorok száma ugyanúgy m, mint az A_i részhalmazok száma, s n dimenziósak, mivel így definiáltuk azokat. Ha ezen felül lineárisan függetlenek is, akkor számuk maximum n lehet. (Ezzel belátnánk az egyenlőtlenséget, így ennek megmutatására törekszünk.)
Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{m} c_i \underline{v}_i = \underline{0}$, $c_i \in \mathbf{R}$ (A valós számok teste felett nézzük a függetlenséget.)
Mindkét oldalt szorozzuk skalárisan $\underline{v}_j$ -vel. Ekkor $\forall j = 0, 1, \ldots, m$ -re $\sum_{i=1}^{m} c_i \underline{v}_i \underline{v}_j = 0$, azaz $\lambda \sum_{i=1}^{m} c_i + c_j \alpha_j = 0$ (vö. $\underline{v}_i \underline{v}_j$ -t megadó (1) képlettel). Átrendezve következik, hogy $c_j = -\dfrac{\lambda}{\alpha_j} \sum_{i=1}^{m} c_i$.
Ha $\sum_{i=1}^{m} c_i = 0 \Rightarrow c_j = 0$, tehát ebben az esetben $\sum_{i=1}^{m} c_i \underline{v}_i = \underline{0} \Leftrightarrow \forall c_i = 0$.
Ha nem 0, akkor írjuk fel $j = 1, 2, \ldots, m$ –re a $c_j = -\dfrac{\lambda}{\alpha_j} \sum_{i=1}^{m} c_i$ -t, utána adjuk össze ezt az m darab egyenlőséget! Kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{m} c_i = -\lambda \left(\sum_{j=1}^{m} \dfrac{1}{\alpha_j} \right) \sum_{i=1}^{m} c_i$ (bal oldalon c_j -k összege).
Mivel $\alpha_j \ge 1$, tehát $\alpha_j > 0$ $\forall j$ –re, továbbá $\lambda > 0$, ezért csak $\sum_{i=1}^{m} c_i$ előjele, ill. a jobb oldalon levő negatív szorzó számít, tehát azt kaptuk, hogy az egyenlőtlenség két oldalának előjele különböző, jóllehet $\sum_{i=1}^{m} c_i$ ez esetben 0 –tól különböző, ellentmondásra jutva, tehát $\sum_{i=1}^{m} c_i = 0$ teljesül.
Beláttuk, hogy $\underline{v}_j$ -k lineárisan függetlenek. Ez alapján $\underline{v}_i$ -kre a becslés az, hogy számuk legfeljebb a dimenzió, azaz n, vagyis teljesül, hogy $m \le n$. ■

A 2.1. Tételhez hasonlóan ennek a tételnek is megadhatjuk a duálisát: Legyen V alaphalmaz, $|V| = n$, $\mathbf{F} \subseteq 2^V$, $\mathbf{F} \neq \{V\}$ V feletti halmazrendszer, és $\forall x_1 \neq x_2 \in V$ –hez $\exists \lambda$ darab $A_i \subset V : x_1, x_2 \in A_i \Rightarrow m \geq n$. A tétel kimondása előtt következzen néhány definíció és állítás [3] és [12] nyomán.

2.7. Definíció $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$ halmazhármast illeszkedési struktúrának nevezünk, ha $V \cap \mathbf{B} = \emptyset$ és $I \subseteq V \times \mathbf{B}$. Ha $x \in V$, $B \in \mathbf{B}$ –re $(x, B) \in I$, a továbbiakban így jelöljük: $x\, I\, B$.

V elemeit pontoknak, $\mathbf{B}$ elemeit blokkoknak nevezzük. Ha V is, $\mathbf{B}$ is véges halmaz, akkor véges illeszkedési struktúráról beszélhetünk. A véges projektív síkokat, mint speciális esetet tekinthetjük.

2.8. Definíció Legyen $\deg(x) = |\{B \in \mathbf{B} : x\, I\, B\}|$, melyet az $\{x\}$ ponthalmaz fokának, pontosabban $X \subseteq V$, akkor $\deg(X) := |\{B \in \mathbf{B} \mid \forall x \in X\text{–re } x\, I\, B\}|$; míg $B_1 \in \mathbf{B}$ –re $\deg(B_1) := |\{x \in V \mid x\, I\, B\}|$ -et a B_1 blokk fokának nevezzük.

Ha $B_1 \neq B_2$, $\deg(B_1) = \deg(B_2)$ előfordulhat, akkor $(V, \mathbf{B})$ –t mint halmazcsaládot, ha nem, mint halmazrendszert tekinthetjük. Ez utóbbi esetben egyszerű illeszkedési struktúráról beszélhetünk. A továbbiakban egyszerű struktúrákról lesz szó, $\mathbf{B}$ elemei pedig V részhalmazai lesznek. Ilyenkor tehát V részhalmazát tekintjük $\mathbf{B}$ helyett, I –t pedig $\in$ relációval helyettesítjük.

2.9. Definíció Legyen $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$ és $\mathbf{D'} = (V', \mathbf{B'}, I')$ két illeszkedési struktúra. A $\varphi : V \cup \mathbf{B} \to V' \cup \mathbf{B'}$ bijektív leképezést izomorfizmusnak nevezzük, ha $\varphi(V) = V'$, $\varphi(\mathbf{B}) = \mathbf{B'}$, $x\, I\, B \Leftrightarrow \varphi(x)\; I'\; \varphi(B)$. Ekkor $\mathbf{D} \cong \mathbf{D'}$. Ha $\mathbf{D} = \mathbf{D'}$, akkor φ -t automorfizmusnak mondjuk.

2.10. Definíció Legyen $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$ illeszkedési struktúra, $V = \{x_1, \dots, x_v\}$ és $\mathbf{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$. Az $(m_{ij}) = M \in \mathbf{N}^{v \times b}$ mátrixot $\mathbf{D}$ (0, 1) - illeszkedési mátrixának nevezzük, ha

$$(m_{ij}) = \begin{cases} 1, \text{ ha } p_i\, I\, B_j \\ 0 \text{ különben.} \end{cases}$$

2.11. Definíció $\mathbf{D} = (V, \mathbf{B}, I)$ véges illeszkedési struktúrát (v, k, λ) paraméterű blokkrendszernek nevezzük, ahol $v, k, \lambda \in \mathbf{N}$ és $v > k > 1$, ha a következő feltételek teljesülnek:

(i) $|V| = v$,

(ii) $\forall \{x,y\} \in \binom{V}{2}$ -re $\deg(x, y) = \lambda$, azaz bármely 2 különböző pontra pontosan λ blokk illeszkedik,

(iii) $\forall B \in \mathbf{B}$ -re $\deg(B) = k$, azaz minden blokkra k pont illeszkedik (= k uniform).

E definíció szerinti $\mathbf{D}$ –t Steiner – rendszernek is nevezik, és $S_\lambda(2, k; v)$ –val, $\lambda = 1$ esetén $S(2, k; v)$ –val jelölik. Más jelölése: $2 - (v, k, \lambda)$ -rendszer. Ha a blokkok foka nem rögzített, de minden blokk legalább 2 pontot tartalmaz, bármely 2 pontra pontosan egy blokk illeszkedik, s legalább 2 blokk van, akkor a lineáris terekhez juthatunk el. Másutt a $\lambda = 1$ blokkrendszereket, másképp az uniform lineáris tereket nevezik Steiner – rendszernek.

2.12. Állítás Legyen **D** 2–(v, k, λ) – rendszer. Ekkor $\forall x \in V$ -re $\deg(x) = \dfrac{\lambda(v-1)}{k-1} =: r$, $|\mathbf{B}| = \dfrac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)} =: b$.

Bizonyítása megtalálható például [3] –ban. Mindezek után megfogalmazható a Bose-Fisher tétel duálisa, ahol **B** a korábbi **F** halmazrendszer, $v = n$.

2.13. Tétel (Bose – Fisher) Legyen **D** 2 – (v, k, λ) -rendszer, ahol $v > k$, $|\mathbf{F}| = b$. Ekkor $b \geq v$.

Bizonyítás Legyen **D** illeszkedési mátrixa M, mely v darab sorból és b oszlopból áll.

$$MM^T = \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda & r \end{pmatrix}, \text{ a főátlóban: } \sum_{j=1}^{b} m^2_{ij} = r, \text{ a többi: } \sum_{j=1}^{b} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = \lambda.$$

MM^T -ben az 1. oszlopot a többiből kivonva, majd az 1. sor helyett az összes sor összegét írva kapjuk:

$$\begin{pmatrix} r+(v-1)\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & r-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & r-\lambda \end{pmatrix}.$$

Innen $\det(MM^T) = (r-\lambda)^{v-1}[(v-1)\lambda + r] = (r-\lambda)^{v-1} rk$, a 2.12. Állítás miatt.
Mivel $v > k \Rightarrow r \neq \lambda$, így $\det(MM^T) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(MM^T) = v$ (hiszen MM^T $v \times v$ –s mátrix). M mátrix oszloprangjáról tudjuk, $\mathrm{rg}(M) \leq b$, ezért $v = \mathrm{rg}(MM^T) \leq \mathrm{rg}(M) \leq b$, így $v \leq b$. ■

Egyenlőség két példacsaládra ismert jelenleg. $\lambda = 1$ –re tudjuk, hogy a projektív sík nemdegenerált esete. A további példákra sejtés fogalmazódott, mely megtalálható például [9] -ben és [12] –ben.

A következő tételben nemuniform blokkokat tekintünk, ahol több metszetméret is megengedett lesz, ám előbb szükség lesz az alábbi definíciókra, ld. [6] –ot és [10] -et.

2.14. Definíció Legyen $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_s\}$, ahol $0 \leq l_1 < \ldots < l_s < k$. Az $\mathbf{F} \subset \binom{V}{k}$ halmazrendszert L – rendszernek nevezzük, ha $\forall A \neq B$, $A, B \in \mathbf{F}$ –re $|A \cap B| \in L$.

2.15. Definíció **F** -et t – metszőnek nevezzük, ha L – rendszer és $L = \{t, t+1, \ldots, k-1\}$.

2.16. Tétel (Frankl–Wilson) Legyen $\mathbf{F} \subseteq 2^V$, s legyen $\{l_1, l_2, \dots, l_s\} = L$ nemnegatív, n –nél kisebb egészek halmaza. Ha bármely két különböző A, B $\in$ **F** –re $|A \cap B| \in L$, akkor

$$|\mathbf{F}| \le \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}.$$

Bizonyítás (Babai) Legyen $\mathbf{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ úgy, hogy $|A_1| \le |A_2| \le \dots \le |A_m|$, és A_i karakterisztikus vektora, $\underline{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$. (Definícióját ld. 2.6. Tételnél.) Definiáljuk az n dimenziós, valós $\underline{x}$ vektorok halmazán az $f_i : \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega = \{0, 1\}^n \subset \mathbf{R}^n$ függvényt (tulajdonképpen többváltozós polinomot) az alábbi módon:

$$f_i(\underline{x}) = \prod_{l_j < |A_i|} (\underline{v}_i \underline{x} - l_j) = \prod_{l_j < |A_i|} (v_{i1} x_1 + \dots + v_{in} x_n - l_j).$$

Egyrészt $f_i(\underline{v}_j) = 0$, ha $i > j$, akkor $|A_i| \ge |A_j|$ a sorba rendezésből adódóan, hiszen ekkor $\underline{v}_i \underline{v}_j = l_k$, melyre $l_k < |A_i|$, s ekkor $f_i(\underline{v}_j)$ –ben szerepel 0 egyik tényezőként, mint $(\underline{v}_i \underline{v}_j - l_k)$.

Másrészt $f_i(\underline{v}_i) \ne 0$, hiszen ez $\prod_{l_j < |A_i|} (|A_i| - l_j)$. Az f_i-ben minden j –re x_j különböző hatványai szerepelnek, ezért érdemes f analógiájára egy másik függvényt, g –t definiálni, következőképpen.

Legyenek $g_i(\underline{x})$ –ek azok a függvények, melyeket a megfelelő $f_i(\underline{x})$ –ekből úgy kapunk, hogy f_i -ben minden helyen x_j hatványai helyére csak x_j -t helyettesítünk. (Ekkor g_i -ben minden x_j csak első hatványon szerepel, minden változóban lineáris, azaz multilineáris polinomot kapunk.) Mivel csak 0 – 1 vektorokat helyettesítünk f –be, ill. g –be, így $f(\underline{v}_i) = g(\underline{v}_i)$. Ahogy eddig is, teljesül, hogy $g_i(\underline{v}_j) = 0$, ha $i > j$, és $g_i(\underline{v}_i) \ne 0$, a helyettesítés ezen nem változtat.

Mindezek különböző függvények lesznek. g_i függvényből m darab van, hiszen A_i -ből is m darab volt. Itt is szeretnénk belátni, hogy $g_1, \dots, g_m$ függvények lineárisan függetlenek.

Tegyük fel, hogy minden $\underline{x}$ –re $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\underline{x}) = 0$. Indirekt tegyük fel, hogy $g_1, \dots, g_m$ összefüggő; $\exists \lambda_j \ne 0$ a számok között, s ekkor

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\underline{v}_1) = \lambda_1 g_1(\underline{v}_1), \quad g_1(\underline{v}_1) \ne 0, \quad (g_i(\underline{v}_1) = 0) \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Ugyanígy $\underline{x}$ helyére $\underline{v}_2$ -t írva és $\lambda_1 = 0$ –t felhasználva az összegzést $i = 2$ –től indítjuk:

$$0 = \sum_{i=2}^{m} \lambda_i g_i(\underline{v}_2) = \lambda_2 g_2(\underline{v}_2) \Rightarrow \lambda_2 = 0,$$

s ily módon indukcióval folytathatjuk, felhasználva, hogy $i = k$ –ra $\lambda_i = 0$, s az összes addigi λ_i is, majd belátjuk $i = k + 1$ –re. Mivel a fentiek nyomán minden λ_i együttható 0, ez ellentmond az indirekt feltevésnek, $g_1, \dots, g_m$ tehát lineárisan független.

Minden g_i -ben minden x_j csak első hatványon szerepel, míg $\deg g_i \le s$, hiszen

$$f_i(\underline{x}) = \prod_{l_j < |A_i|} (\underline{v}_i \underline{x} - l_j),$$

azaz s darab elsőfokú tényező szorzata; a fokszámot így s határozza meg. A $g_1, \dots, g_m$ függvények száma pedig nem nagyobb, mint ha vennénk az összes lehetséges $1, 2, \dots, s$ – edfokú multilineáris polinomot, beleértve a konstans polinomokat is ($\underline{v}_i$ n dimenziós) és tekintenénk e térnek a dimenzióját. Ehhez észrevehető, hogy az $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$ ($t \le s$) bázist alkotnak, azaz x_i -ből t darab van, $t \le s$, és $t = 0, 1, 2, \dots, s$ –re így

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{s}$ -et kapunk, tehát igaz, hogy

$$m \le \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{s} = \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{k}.$$

$|\mathbf{F}| = m$, így teljesül a tétel állítása. ■

A 2.16. tételt nemuniform Ray – Chaudhuri – Wilson tételnek is nevezik. A Frankl – Wilson tétel k-uniform változata az alábbi, [1] szerint.

2.17. Tétel (Ray – Chaudhuri – Wilson) Legyen $|V| = n$, $\mathbf{F} \subseteq 2^V$, $\mathbf{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ k-uniform, L –metsző halmazrendszer, $|L| = s$. Ekkor $m \le \binom{n}{s}$.

Bizonyítás (Alon – Babai – Suzuki) Definiáljuk az n dimenziós, valós $\underline{x}$ vektorok halmazán az $f_i : \Omega \to \mathbf{R}$, $\Omega = \{0, 1\}^n \subset \mathbf{R}^n$ függvényt a következőképpen:

$$f_i(\underline{x}) = \prod_{r=1}^{s} (\underline{v}_i \underline{x} - l_r), \quad \deg f_i(\underline{x}) \le s.$$

A 2.16. tétel bizonyításának $f_i(\underline{x})$ függvényéhez hasonlóan erre az $f_i(\underline{x})$ –re, ahol $\underline{v}_j$ az A_j karakterisztikus vektora:

$$f_i(\underline{v}_j) = \begin{cases} \neq 0, & \text{ha } j = i, \\ = 0, & \text{ha } j \neq i. \end{cases}$$

A továbbiakban is a 2.16. Tétel bizonyításához hasonlóan haladunk, ám itt nemcsak azt kell belátni, hogy eme f_i függvények lineárisan függetlenek, hanem azt is, hogy $x_I \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - k\right)$ -kat hozzávéve továbbra is lineárisan függetlenek maradnak, ahol $I \subseteq V$, $|I| \le s-1$, $x_I := \prod_{i \in I} x_i$, $x_\emptyset = 1$. Feltesszük tehát,

$$\exists \lambda_i, \mu_I \in \mathbf{R} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i + \sum_{|I| \le s-1} \mu_I x_I \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - k \right) = 0. \tag{2}$$

Az egyenletbe x_j helyére $\underline{v}_i$ -t írva a második összeg minden tagja eltűnik, mert $\mathbf{F}$ k-uniform, k –t kivonva 0 –t kapunk. Az $f_i(\underline{v}_j)$ –nél leírtak szerint az 1. tag olyan összeget jelöl, ahol $j \neq i$ kivételével λ_i -tól függetlenül 0 –kat adunk össze, míg egyenlőség esetén a tag csak akkor lehet 0, ha λ_i is, tehát $\forall \lambda_i = 0$, így (2) –ben a lineáris függetlenség csak a 2. tagon, pontosabban, μ_I -ken múlik; ha nem $\underline{v}_i$ -t írunk be, akkor elég a 2. tag esetében megnézni, melyet lemma segítségével láthatunk be.

2.18. Lemma Tegyük fel, hogy $\exists I : |I| \le r$ valamely $r \in \mathbf{R}^+$ -ra, s $f(\underline{v}_i) \neq 0$, ekkor

$\{ x_I f : |I| \leq r\}$ lineárisan független, mint az $\Omega \to \mathbf{R}$ függvények által alkotott, $\mathbf{R}$ feletti vektortér elemei.

Bizonyítás (lemmáé) Rendezzük V részhalmazait számosságuk szerint. Látható, hogy $I, J \subseteq V$ –re

$$x_I(\underline{v}_J) = \begin{cases} 1, & \text{ha } I \subseteq J \\ 0, & \text{különben} \end{cases}, \tag{3}$$

ahol $(\underline{v}_J)$ J karakterisztikus vektora, ezért $\forall$ J, I -re, ha $|J|, |I| \leq r$, akkor

$$x_I(\underline{v}_J) f(\underline{v}_J) = \begin{cases} f(v_I) \neq 0, & \text{ha } |J| = |I|, \\ 0, & \text{ha } |J| < |I|. \end{cases}$$

Innen $x_I f$ lineáris függetlenségét is megkaphatjuk, indirekt feltéve, hogy $\exists \lambda_{I_0} \neq 0$, melyre $\sum \lambda_I x_I(\underline{v}_j) f(\underline{v}_j) = 0$. Legyen ezen I_0 index, ill. az ahhoz tartozó I_0 halmaz számossága a lehető legkisebb, s hogy elkerüljük a 0 együtthatót $x_I(\underline{v}_J) f(\underline{v}_J)$ -nél, legyen $J = I_0$. Ekkor azonban (3) nyomán ellentmondásra jutunk. ■

A 2.18. lemma szerint (2) -nél $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - k\right)$ -ben nem 0 állhatna, kivéve, ha minden $\mu_I = 0$, így ez a rész is lineárisan független.

A fentiek nyomán $m + \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i}$ darab lineárisan független függvényt található. E polinomok terének dimenziója $\sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}$, ahogy az a 2.26. Tételben látható, így $m \leq \binom{n}{s}$. ■

2.19. Tétel (Páratlanváros) Legyen $|V| = n$, $\{A_1, \ldots, A_m\}$ V olyan különböző részhalmazai, melyekre igaz, hogy tetszőleges $|A_i|$ páratlan és $\forall$ i, j, $i \neq j$ –re $|A_i \cap A_j|$ páros. Ekkor $m \leq n$.

Bizonyítás Vegyük $A_1, \ldots, A_m$ karakterisztikus vektorait, $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\} \in T^n$ vektorokat (ld. 2.6. Tételnél), ahol $T = \mathbf{Z}_2$. E T –nek az lesz a szerepe, hogy könnyebb legyen vele megadni bármely részhalmaz, ill. bármely két részhalmaz metszetének paritását, hiszen tetszőleges $\underline{v}_i \underline{v}_j$ akkor 0, ha $|A_i \cap A_j|$ páros, és 1, ha a metszet páratlan; továbbá $i = j$ esetén 0 csak páros, 1 csak páratlan elemszámú A_i esetén lehet. Mivel T^n n dimenziós, így legfeljebb n lineárisan független $\underline{v}_i$ (ennek megfelelően legfeljebb n darab A_i) lehet. Ha e vektorok is függetlenek, a tétel igaz. Tekintsünk lineáris kombinációt, melyre

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \underline{v}_i = \underline{0}, \quad c_i \in \mathbf{R}. \text{ Rögzített, tetszőleges } \underline{v}_j \text{ -vel szorozva } \sum_{i=1}^{m} c_i \underline{v}_i \underline{v}_j = 0.$$

A fentiek s a tétel feltétele nyomán $\underline{v}_i \underline{v}_j = 0$, kivéve, ha $i = j$, ekkor a skalárszorzat 1.

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \underline{v}_i \underline{v}_j = 0 \Rightarrow c_j \underline{v}_j \underline{v}_j = 0 \Rightarrow c_j = 0.$$

A $\underline{v}_j$ vektor tetszőleges, ezért a vektorok függetlenek. Egyenlőség például fennáll, ha egyelemű halmazok vannak, elemszámuk, 1 páratlan, metszetük 0, páros, így megfelelők, ilyen halmazból éppen n darab van, így biztosan létezik keresett halmazrendszer m = n esetén. ■

2.20. Tétel (Párosváros) Legyen $|V| = n$, $\{A_1, \ldots, A_m\}$ V olyan különböző részhalmazai, melyekre teljesül, hogy tetszőleges $|A_i|$ páros és $\forall$ i, j: $i \neq j$ –re $|A_i \cap A_j|$ is páros. Ekkor $m \leq 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

Bizonyítás Ha V –t diszjunkt elempárokra bontjuk, s tekintjük az összes ezekből képezhető halmazt, akkor ennyi lehet, hiszen V –nél diszjunkt elempárból $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ darabot tudunk választani, és $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ elemű halmaz összes részhalmazainak száma $2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

A tétel feltétele alapján $\forall$ i, j –re $\underline{v}_i \underline{v}_j = 0$, másként $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ által generált U vektortérben bármely két vektor merőleges egymásra, $U \subseteq U^{\perp} \Rightarrow \dim U \leq \dim U^{\perp}$, ahol $U^{\perp}$ az U minden elemére merőleges vektorok halmazát jelenti, azaz $U^{\perp} = \{\underline{v} \in V \mid (\underline{u} \in U \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = 0)\}$. Mivel U altér V –ben, így $U^{\perp}$ is.

Tudjuk, hogy $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$, ezért $\dim U \leq \left\lfloor \frac{\dim V}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, tehát

$m \leq |U| = 2^{\dim U} \leq 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. ■

Megjegyzés Ha $A_1, \ldots, A_m$ -re $|A_i|$ is, $\forall$ i, j $i \neq j$ –re $|A_i \cap A_j|$ is páros, $m < 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists A_{m+1}, \ldots, A_{2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}$, melyre szintén $|A_i|$ is, $\forall$ i, j $i \neq j$ –re $|A_i \cap A_j|$ is páros.

Az előbbi két tétel és számos változata megtalálható [7] –ben.

2.21. Állítás Legyen $\mathbf{F} \subseteq 2^V$, $\mathbf{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ halmazrendszer, és $\forall A_i, A_j \in \mathbf{F}$ –re $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Ekkor $|\mathbf{F}| \leq 2^{n-1}$.

Bizonyítás Legyen A részhalmaza V –nek. Ekkor $A \cap (V \setminus A) = \emptyset$. $\{A, V \setminus A\}$ párból 2^{n-1} van, mint ahány A, s e párokból páronként legfeljebb egy eleme **F** –nek, ezért $|\mathbf{F}| \leq 2^{n-1}$. ■

2.22. Definíció $|V| = n$, $\mathbf{F} \subseteq 2^V$ esetén az $\mathbf{F} := \{A_1, \ldots, A_m\}$ halmazrendszert $|\mathbf{F}| = 2^{n-1}$ esetén optimálisnak nevezzük.

2.23. Példa (optimális halmazrendszer, [11] nyomán) Legyen $x \in V$ fix és $\mathbf{F} = \{A \subseteq V : x \in A\}$, vö. $|V| = n$ –nek 2^n darab részhalmaza lehet, ha x minden A -ban benne lesz, akkor csak azt kell megnézni, hány ilyen A halmaz hozható létre $V \setminus \{x\}$ –ből, $|V \setminus \{x\}| = n - 1$, melyhez mindig hozzávesszük x –et: 2^{n-1} darab.

2.24. Példa (másik, optimális halmazrendszerre) Legyen $|A_0| = 3$,

$\mathbf{F} = \{A \subseteq V \mid |A \cap A_0| \geq 2\}$.
Ez azért lesz jó, mert minden $A \in V$ –re $|A \cap A_0| \geq 2$, vagy $|A \cap A_0| < 2$ (a metszet elemszáma 1 vagy 0), de akkor $|(V \setminus A) \cap A_0| \geq 3 - 1 = 2$, így a példa az összes $(A, V \setminus A)$ párt számba tudja venni.

A 2.21. Állítás alapján metsző halmazrendszerekre a következő állítás igaz, hasonlóan a 2.20. Tétel utáni megjegyzéshez, tekintve [4] –et.

2.25. Állítás Legyen $|V| = n$, $\mathbf{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ metsző halmazrendszer, ahol $A_i \subseteq V$, $\forall i \neq j$ esetén $A_i \neq A_j$, s tegyük fel, hogy $m < 2^{n-1}$. Ekkor található olyan $A_{m+1}, \dots, A_{2^{n-1}}$ részhalmaza V –nek, melyek mindegyikét $\mathbf{F}$ –hez hozzávéve továbbra is metsző halmazrendszert kapunk, méghozzá 2^{n-1} eleműt.

Bizonyítás A 2.21. Állításnál látható volt, hogy $(A, V \setminus A)$ párból 2^{n-1} van, $1 \leq i \leq m$ –re A_i -k m darab párban vannak benne. Legyen $(F, V \setminus F)$ olyan pár, hogy $F \neq A_i$, $V \setminus F \neq A_i$, $i = 1, \dots, m$. F akkor vehető hozzá $\mathbf{F}$ –hez, ha metsz minden A_i -t, ekkor legyen $F = A_{m+1}$. Ha nem metszi mindet, akkor $\exists i$: $A_i \cap F = \emptyset$, tehát $A_i \subseteq V \setminus F$. Ekkor $V \setminus F = A_{m+1}$ metsz minden A_j -t, hiszen így $j = i$ –re biztosítottuk, $j \neq i$ -re pedig már eddig is $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ volt. Mindezt folytatva megkaphatjuk $A_{m+1}, A_{m+2}, \dots, A_{2^{n-1}}$ halmazt. ■

Három halmaz metszőségére a következők gondolhatók meg.

2.26. Állítás Legyen $|V| = n \geq 2$, $\mathbf{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ halmazrendszer, $\forall i \neq j$ esetén $A_i \neq A_j$, és minden különböző $i, j, k \leq m$ –re $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \emptyset$ (ha minden három halmaz metsző, akkor minden kettő is). Ekkor $m \leq 2^{n-1}$, s ha $m = 2^{n-1}$, akkor $A_1 \cap \dots \cap A_m \neq \emptyset$, azaz $m = 2^{n-1}$ -re $\mathbf{F}$ az összes olyan halmaz, mely egy rögzített $x \in V$ –t tartalmaz.

Bizonyítás Lássuk be az $m \leq 2^{n-1}$ állítást. Legyen p, $1 \leq p \leq m$ a legnagyobb olyan index, melyre $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p \in \mathbf{F}$. Ha $p = m$, akkor $A_1 \cap \dots \cap A_m = A_i \neq \emptyset$, azaz $\exists x : x \in A_i$ $\forall i$ –re. Ekkor $m = 2^{n-1}$ esetén $\mathbf{F}$ -et a 3.5. Példa adja meg.
Ha $p < m$, akkor $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p \cap A_{p+1} \notin \mathbf{F}$, mert p a legnagyobb volt, s ugyanezért van ilyen A_{p+1} $\mathbf{F}$ –ben. $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p \cap A_{p+1}, A_1, \dots, A_m$ $m + 1$ darab, páronként különböző halmazt jelent, ahol bármely kettő metszete nem üres, hiszen $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p = A_k \in \mathbf{F}$, $A_k \cap A_{p+1} \cap A_i \neq \emptyset$ az állítás feltétele miatt. A 2.21. Állítás miatt $m + 1 \leq 2^{n-1}$, ezért m nem lehet 2^{n-1}, csak kisebb. ■

A 2.21. tételbeli ötlet alapján bizonyítható az Erdős – Ko - Rado tétel $k = \dfrac{n}{2}$ esete.

2.27. Állítás (Erdős – Ko – Rado – tétel k-uniform, $k = \dfrac{n}{2}$ esete)

Legyen $\mathbf{F} \subseteq 2^V$, $\mathbf{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ k-uniform halmazrendszer, $\forall A_i, A_j \in \mathbf{F}$: $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, és $k = \frac{n}{2}$. Ekkor $|\mathbf{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Bizonyítás Ha $n = 2$, akkor $k = 1$, számolással $1 = m \leq \binom{n-1}{k-1}$ teljesül.

Csak $n \geq 3$ –tól érdekes. Legyen $\mathbf{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$. Ha $k = \frac{n}{2}$, számoljuk itt is az $\{A_i, V \setminus A_i\}$ párokat, ahol $V \setminus A_i \notin \mathbf{F}$, különben sérülne, hogy páronként nem lehetnek diszjunktak.

Itt $m = |\mathbf{F}| \leq \frac{1}{2}\binom{n}{k}$, hiszen $|V| = n$, k elemű részhalmazokat számolunk, s ebben az esetben is a párok közül legfeljebb az egyik (az összes lehetségesnek maximum a fele) lesz jó.

$$\frac{1}{2}\binom{n}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) = \frac{1}{2}\frac{n}{k}\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\right) = \frac{1}{2}\frac{n}{k}\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}\right) =$$

$= \frac{1}{2}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$, tekintve, hogy $k = \frac{n}{2}$ miatt $\frac{n}{k} = 2$. Így fennáll, hogy

$$m \leq \frac{1}{2}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}.$$ ■

Az eredeti, 2.23. Példabeli tulajdonság ($|A_1 \cap \dots \cap A_m| = 1$) természetesen felborul, hiszen az $(A_i, V \setminus A_i)$ párokból tetszőlegesen választhatunk.

2.28. Példa **F** elemeit az összes lehetséges $(A_i, V \setminus A_i)$ párból, ahol $|A_i| = \frac{n}{2} = k$, pontosan az egyiket tetszőlegesen választva kaphatjuk. Ez azt is mutatja, hogy itt nem várható az $\frac{1}{2}\binom{n}{k}$ elemű halmazrendszer leírása.

3. Erdős – Ko – Rado tétel

3.1. Erdős – Ko – Rado tétel

Az előbbiek alapján érdemes kimondani a tételt is ([6] alapján).

3.1. Tétel (Erdős – Ko – Rado) Ha $\mathbf{F} \subseteq 2^V$ k-uniform halmazrendszer, $k < \frac{n}{2}$, és $\forall$ A, B $\in$ **F** –re $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $|\mathbf{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Bizonyítás (Katona, ciklikus permutációkkal) V elemeinek $(n-1)!$ ciklikus permutációinak egyikét jelölje $\pi = (a_1, \dots, a_n)$. $\mathbf{F}(\pi)$ az **F** azon elemeinek halmaza, melyek π -ben (ciklikusan) egymás mellett vannak. A továbbiakhoz az alábbi állítás belátása szükséges.

3.2. Állítás Tegyük fel, hogy $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}(\pi)$ metsző halmazrendszer. Ekkor $|\mathbf{G}| \leq k$.

Bizonyítás (3.2. Állítás) Feltehető, hogy $A := \{a_1, \dots, a_k\} \in \mathbf{G}$. Mivel **G** metsző $\Rightarrow$ $\forall$ $G \in \mathbf{G}$ –nek vagy az első vagy utolsó eleme benne van A –ban. Mivel $|A| = k$, ez legfeljebb 2k darab G –t jelentene, de ebből le kell vonni két rossz esetet: ha valamely G első eleme a_1, illetve, ha G utolsó eleme a_k, így $2(k-1)$ lehet. E (maximum) $2(k-1)$ darab G –t rakjuk párokba úgy, hogy ha az egyik pár utolsó eleme a_i, akkor a párja az a_{i+1} -gyel kezdődő legyen (i –t mod n tekintve). E párok éppen ezért diszjunktak, így **G** –be csak egyikük kerülhet, így **G** elemszáma e párokkal, s A –val együtt:

$$|\mathbf{G}| \leq 1 + k - 1 = k. \qquad \blacksquare$$

A továbbiakban becsüljük az (A, π), $A \in \mathbf{F}(\pi)$ párok számát, M –et. Adott A mellett $k!\,(n-k)!$ permutáció lehet (A elemei $k!$ -féleképpen, a „maradék” $(n-k)!$ -féleképpen rakható sorba), így

$M = |\mathbf{F}|\, k!\, (n-k)!$ Másrészt, 3.1. Állítás miatt $M \leq k\,(n-1)!$ (az összes elem $(n-1)!$ sorrendet jelent, s legfeljebb k darab A lehetséges). E kettőből

$$|\mathbf{F}|\, k!\, (n-k)! \leq k\,(n-1)!\,, \text{ tehát } |\mathbf{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}. \qquad \blacksquare$$

A tételre, melyre a későbbiekben EKR jelölés használatos, további bizonyítások következnek, majd enyhítjük a tétel feltételeit Sperner-rendszerekre, ám előbb megfogalmazható az alábbi állítás, ha **F** elemei nem feltétlenül k eleműek.

3.3. Állítás Legyen $|V| = n$, $\mathbf{F} \subseteq 2^V$, $\forall A \in \mathbf{F}$–re $|A| \leq k$, ahol $k \leq \frac{n}{2}$, és $\forall$ A, B $\in$ **F** -re $A \cap B \neq \emptyset$. Ekkor $|\mathbf{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} + \dots + \binom{n-1}{0}$.

Bizonyítás Írjuk fel **F** –et a részhalmazok elemszáma szerint, ekkor **F** = $\mathbf{F}_k \bigcup \mathbf{F}_{k-1} \bigcup \ldots$, ahol $\mathbf{F}_i$ az **F** –beli i elemű részhalmazokból áll. A 2.27. Állítás alapján $|\mathbf{F}_i| \le \binom{n-1}{i-1}$, s ha ezeket összeadjuk:

$$|\mathbf{F}| \le \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} + \ldots + \binom{n-1}{0}. \qquad \blacksquare$$

Ez a korlát éles, hiszen, ha rögzítjük V egy x elemét, és vesszük az összes olyan, legfeljebb k-elemű részhalmazt, mely tartalmazza x –et, akkor pontosan ennyi részhalmazt választottunk.

Érdekes kérdés, hogy ha $|\mathbf{F}| = \binom{n-1}{k-1}$ és **F** k-uniform, akkor **F** csak az egy ponton átmenő halmazokból állhat-e. Ennél jóval többet látott be Hilton és Milner.

3.4. Definíció Legyen $\mathbf{H} = \{H \in \binom{V}{k}$ **:** $1 \in H, \{2, \ldots, k+1\} \cap H \neq \emptyset\} \bigcup \{2, \ldots, k+1\}$,

$$\mathbf{G} \coloneqq \{G \in \binom{V}{k} : |G \cap \{1, 2, 3\}| \ge 2\}.$$

Látható, hogy **H** is, **G** is metsző, $\cap\mathbf{H} = \emptyset$, $\cap\mathbf{G} = \emptyset$, valamint k = 2 –re **G** = **H**, **H** hasonló a projektív síkoknál látott degenerált esethez, vö. a 2.2 Tétel előtti megjegyzés b) esetét. Továbbá

$|\mathbf{H}| = \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1-k}{k-1} + 1$, hiszen $\{2, \ldots, k+1\}$ egy darab elem, H -kat az összes – rossz elve alapján számoljuk. $|\mathbf{G}|$ -t kétféleképp megkaphatjuk: összeszámoljuk az $\{1, 2, 3\}$ –at 3, majd pontosan 2 elemben metsző G –ket (az utóbbinál is összes – rosszat számolunk) :

$|\mathbf{G}| = \binom{n-3}{k-3} + 3\left(\binom{n-2}{k-2} - \binom{n-3}{k-3}\right) = \binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2}$, de kidobhatjuk V k elemű részhalmazaiból a rosszakat; az $\{1, 2, 3\}$ halmazt pontosan 0, ill. 1 elemben metszőket:

$|\mathbf{G}| = \binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} - 3\binom{n-3}{k-1}$. A két számolás ugyanazt adja.

3.5. Példa k = 3 –ra:

$$|\mathbf{H}| = \binom{n-1}{2} - \binom{n-4}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-4)(n-5)}{2} + 1 = 3n - 8$$

$|\mathbf{G}| = 1 + 3(n-3) = 3n - 8$,
azaz ekkor $|\mathbf{H}| = |\mathbf{G}|$, de **H** nem izomorf **G** –vel. (Elég meggondolni, hogy **H** –ban egy kivételével minden részhalmaz tartalmaz egy kitüntetett elemet, míg **G** –ben nincs ilyen elem.)

3.6. Tétel (Hilton – Milner) Legyen $\mathbf{F} \subset \binom{V}{k}$, $\mathbf{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ metsző, $n > 2k$, $k > 2$,

$\cap\mathbf{F} = F_1 \cap \ldots \cap F_m = \emptyset$, ekkor $|\mathbf{F}| \leq |\mathbf{H}| = \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1$, és

$|\mathbf{F}| = |\mathbf{H}| \Leftrightarrow \mathbf{F} \cong \mathbf{H}$, vagy $k = 3$ és $\mathbf{F} \cong \mathbf{G}$.

E tétel egy bizonyítása [5] –ben található. Itt jegyezhető meg az is, hogy a $\cap\mathbf{F} = \emptyset$ feltétel zárja ki azt, hogy a halmazok mindegyike tartalmazzon egy rögzített x pontot.

3.2. Balra tolt halmazrendszerek

EKR bizonyítására más lehetőség nyílik a balra tolás eszközével, (ld a továbbiakban [5] és [6] –ot), sőt, az eredeti tétel bizonyításában is szerepet játszik, ld 4.2. fejezetet.

3.7. Definíció Legyen $\mathbf{F} \subset 2^V$, $1 \leq i < j \leq n$, s legyen $S_{ij}(\mathbf{F}) = \{S_{ij}(A) : A \in \mathbf{F}\}$, ahol

$$S_{ij}(A) := \begin{cases} A' = (A \setminus \{j\}) \cup \{i\}, \text{ha } j \in A,\ i \notin A \text{ és } A' \notin \mathbf{F}, \\ \qquad\qquad A, \text{ különben.} \end{cases}$$

Ekkor S_{ij} -t balra tolásnak nevezzük.

A_k -nál nincs S_{ij} balra tolás, ha $i \in A_k$ vagy $j \notin A_k$. Ha $\exists\, r, s : S_{rs}(A_k) = A_l \in \mathbf{F}$, akkor a definíció alapján szintén nem toljuk balra, hiszen a „balra tolt" halmaz is eleme $\mathbf{F}$ -nek.

3.8. Állítás (i) $|S_{ij}(A)| = |A|$,

(ii) $|S_{ij}(\mathbf{F})| = |\mathbf{F}|$,

(iii) ha $\mathbf{F}$ k –uniform, akkor $S_{ij}(\mathbf{F})$ is,

(iv) ha $\mathbf{F}$ metsző, akkor $S_{ij}(\mathbf{F})$ is,

(v) általánosabban: ha $\mathbf{F}$ t – metsző, akkor $S_{ij}(\mathbf{F})$ is.

Bizonyítás (i), (ii) és (iii) közvetlenül a definícióból következik, (iv) –t kétféleképpen is beláthatjuk: közvetlenül, illetve (v) -ből is következik.

(iv)

Tegyük fel indirekt, hogy $\exists\, A, B \in \mathbf{F}$, ahol $\mathbf{F}$ metsző, melyre $S_{ij}(A) \cap S_{ij}(B) = \emptyset$.
Mivel $A \cap B \neq \emptyset$ feltevés szerint, és az egyetlen elem, amit töröltünk, csak j lehet, ezért $A \cap B = \{j\}$. Ha mind A –t, mind B –t balra toljuk az előbbiek szerint, akkor $i \in S_{ij}(A) \cap S_{ij}(B)$, ami ellentmond annak, hogy e metszet üres, így feltehetjük, hogy csak az egyiket toljuk el, mondjuk B –t: $S_{ij}(A) = A$, $S_{ij}(B) = (B \setminus \{j\}) \cup \{i\}$.
Mivel feltettük, hogy $S_{ij}(A) \cap S_{ij}(B) = \emptyset$, és $i \in S_{ij}(B)$, ezért i nem lehet eleme A -nak, ezért $S_{ij}(A) = A$ úgy lehet, ha A balra tolt „változata" is benne van $\mathbf{F}$ -ben (ld. balra tolás definícióját), $A' = (A \setminus \{j\} \cup \{i\})$ –re $A' \in \mathbf{F}$.
$A' \cap B = \emptyset$, hiszen i és j pontosan az egyikben lehet benne, más közös elem $A \cap B = \{j\}$ és a balra tolás révén nem lehet, ám két $\mathbf{F}$ -beli metszete lett üres, ez pedig ellentmondás.

(v)
Legyen $A_1, A_2 \in S_{ij}(\mathbf{F})$, míg a megfelelő $B_1, B_2 \in \mathbf{F}$ úgy, hogy $S_{ij}(B_\nu) = A_\nu$, $\nu = 1, 2$ –re. Mivel $|A_1 \cap A_2| \geq |B_1 \cap B_2|$ -ből következne, hogy $|A_1 \cap A_2| \geq t$, hiszen $|B_1 \cap B_2| \geq t$, ezért csak azt az esetet nézzük meg, amikor $|A_1 \cap A_2| < |B_1 \cap B_2|$. Ekkor $j \in B_1 \cap B_2$, mert csak ezt az elemet dobhatjuk ki, de mind B_1 -t, mind pedig B_2 -t nem tolhatjuk el, i sem lehet mindkettő eleme, $\{i, j\} \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
Tegyük fel, hogy $j \notin A_1$, ekkor $A_1 = S_{ij}(B_1) = (B_1 \setminus \{j\}) \cup \{i\}$, s így $A_2 = B_2$. Ha $i \notin B_2$ és $j \in B_2$, akkor B_2 -t el kellett volna tolni, ha mégsem, akkor azért nem, mert $B_3 = (B_2 \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathbf{F}$. Innen $|A_1 \cap A_2| = |B_1 \cap B_3| \geq t$. ■

3.9. Definíció Ha $\forall 1 \leq i < j \leq n$ –re $S_{ij}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}$, akkor $\mathbf{F}$ -et balra tolt, más szóval stabil halmazrendszernek mondjuk.

Érdekességként meggondolható, hogy a balra tolásokat elvégezve $\forall 1 \leq i < j \leq n$ –re stabil halmazrendszerhez jutunk, méghozzá $\binom{n}{2}$ lépésben.

3.10. Állítás Legyen $\mathbf{F} \subset 2^V$. Mind az $\binom{n}{2}$ darab balra tolást abban a sorrendben, pontosan egyszer végrehajtva, ahol S_{ij} megelőzi $S_{i'j'}$ -t, ha $j' < j$, stabil halmazrendszerhez jutunk.

A 3.10. Állítás bizonyításának vázlata megtalálható [5] –ben. A lépésszámtól eltekintve másképp is megkapható a stabil halmazrendszerhez való eljutás, meggondolva a következőket. $\mathbf{F} \subseteq 2^V$, $V = \{1, \dots, n\}$ –re, legyen $\deg(\mathbf{F}) = \sum_{F \in \boldsymbol{F}} \sum_{i \in F} i$. Látható, hogy $\deg(\mathbf{F}) \geq 0$, és $\forall 1 \leq i < j \leq n$ -re $\deg(S_{ij}(\mathbf{F})) < \deg(\mathbf{F})$, kivéve, ha $S_{ij}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}$. Az előbbi egyenlőtlenség miatt, hiszen 0 –nál kevesebbhez nem juthatunk el, véges sok balra tolás után elérhető, hogy $\forall 1 \leq i < j \leq n$ -re $\deg(S_{ij}(\mathbf{F})) = \deg(\mathbf{F})$, azaz $\mathbf{F}$ stabil.

Szükség lesz még a következő állításra, mely kulcsfontosságú lesz az EKR bizonyításánál.

3.11. Állítás Tegyük fel, hogy $\mathbf{F}$ k –uniform, t – metsző és balra tolt halmazrendszer. Ekkor $\forall F_1, F_2 \in \mathbf{F} : |F_1 \cap F_2 \cap \{1, \dots, 2k-t\}| \geq t$.

Bizonyítás Indirekt úton. Vegyünk olyan ellenpéldát, $F_1, F_2 \in \mathbf{F}$ -et, melyre $|F_1 \cap \{1, \dots, 2k-t\}|$ maximális, mégis $|F_1 \cap F_2 \cap \{1, \dots, 2k-t\}| < t$. $\mathbf{F}$ t –metsző, $\exists j \in (F_1 \cap F_2)$, hogy $j > 2k-t$, különben az eredeti állítás teljesülne, így $F_1 \cup F_2 \not\subset \{1, \dots, 2k-t\}$. Ekkor megadható $i \notin F_1 \cup F_2$, $i \leq 2k-t$ (ha nem lenne, $\{1, \dots, 2k-t\} \subset F_1 \cup F_2$, sőt, $\{1, \dots, 2k-t\} = F_1 \cup F_2$ lenne, mert $\mathbf{F}$ k-uniform és t-metsző), az S_{ij} balra tolás végrehajtható, mellyel F_1 helyett $(F_1 \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathbf{F}$ a balra toltság miatt, ellentmondva annak, hogy $|F_1 \cap \{1, \dots, 2k-t\}|$ a lehető legnagyobb. ■

Ily módon két új bizonyítás adható EKR -re.

EKR bizonyítása balra tolással

A) (egyik bizonyítás)

$t = 1$, $n \geq 2k$ esetére. Vegyük a k szerinti indukciót. $k = 1$ –re triviális. A továbbiakat bontsuk két esetre:

a)
$n = 2k$, ld. 2.27. Állítást.

b)
$n > 2k$.
A 3.8. Állítás miatt feltehető, hogy **F** balra tolt. Legyen $\mathbf{F}_i = \{F \cap \{1, \dots, 2k\} : F \in \mathbf{F}, |F \cap \{1, \dots, 2k\}| = i\}$. A 3.11. Állítás nyomán $\mathbf{F}_i$ metsző. Az indukció szerint az állítás $k-1$ –ig igaz; $i = 0, 1, \dots, k-1$ –re $|\mathbf{F}_i| \leq \binom{2k-1}{i-1}$, $i = k$ –ra pedig 2.27. miatt igaz. Adott $F_i \in \mathbf{F}_i$ -hez **F** -ben legfeljebb $\binom{n-2k}{k-i}$ darab olyan $F \in \mathbf{F}$ elem lehet, melyre $F \cap \{1, \dots, 2k\} = F_i$, hiszen az $\{1, \dots, 2k\}$ –n kívüli $n-2k$ elem közül kell az F_i i darab eleméhez további $(k-i)$ –t választani, így

$$|\mathbf{F}| \leq \sum_{1 \leq i \leq k} |\mathbf{F}_i| \binom{n-2k}{k-i} \leq \sum_{1 \leq i \leq k} \binom{2k-1}{i-1}\binom{n-2k}{k-i},$$ s ez éppen

$$\sum_{1 \leq i \leq k} \binom{2k-1}{i-1}\binom{n-2k}{k-i} = \sum_{1 \leq i \leq k} \binom{2k-1}{i-1}\binom{n-2k}{(k-1)-(i-1)}.$$

A jobb oldalon levő kifejezés ismerős: másképp felírva tanulmányokból ismert állítást vehetünk észre. Mindehhez érdemes megváltoztatni a jelölést. Legyen tehát $N = 2k-1$, $M = n-2k$, $r = k-1$, $j = i-1$. Így már ismerős lehet, hogy

$$\sum_{0 \leq j \leq r} \binom{N}{j}\binom{M}{r-j} = \binom{N+M}{r}, \tag{4}$$

mely – szemléletesen – jelentheti azt, hogy hányféleképpen választható ki $N + M$ emberből (N fiúból és M lányból) r tagú küldöttség. Jobb oldalon azt látjuk, hogy $N + M$ –ből hogyan választható ki r fő, bal oldalon pedig nemenként: N fiúból j ($\leq r$), M lányból a maradék $r-j$. A két oldal nyilván egyenlő. Eredeti jelölésre visszatérve $\binom{N+M}{r} = \binom{n-1}{k-1}$, tehát

$$\sum_{1 \leq i \leq k} \binom{2k-1}{i-1}\binom{n-2k}{k-i} = \binom{n-1}{k-1}, \tag{5}$$

mellyel beláttuk a tételt. ■

B) (másik bizonyítás)

E bizonyításban n szerinti indukciót használunk.
Legyen $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}$, $\mathbf{F}_i = S_{in}(\mathbf{F}_{i-1})$, $i = 1, \dots, n-1$. A 3.8. állítás miatt $|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}_{n-1}|$ és

$\mathbf{F}_{n-1} \subset \binom{V}{k}$ metsző. Legyen $\mathbf{G} = \{A \in \mathbf{F}_{n-1} : n \notin A\}$, $\mathbf{H} = \{A \setminus \{n\} : n \in A \in \mathbf{F}_{n-1}\}$.

$|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}_{n-1}| = |\mathbf{G}| + |\mathbf{H}|$, így az indukció nyomán $|\mathbf{G}| \le \binom{n-2}{k-1}$, hiszen **G** metsző és egy n – 1 elemű halmaz k elemű részhalmazaiból áll, így $|\mathbf{H}| \le \binom{n-2}{k-2}$ belátása elegendő lenne, hogy megmutassuk az $|\mathbf{F}| \le \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k-1}$ egyenlőtlenséget. Ha $\mathbf{H} \subset \binom{\{1,2,\ldots,n-1\}}{k-1}$ metsző (ld. alább), akkor a kívánt felső becslés, s vele EKR teljesül. ■

3.12. Állítás **H** metsző.

Bizonyítás Indirekt tegyük fel, hogy létezik H, H′ diszjunkt halmaz, $H, H' \in \mathbf{H}$.
Mivel $|H \cup H'| = 2(k-1) < n-1$, (k-uniform halmazrendszerről lévén szó, s feltettük, hogy $n \ge 2k$), ezért $\exists i : 1 \le i < n$, melyre $i \notin H \cup H'$. Definíció szerint $A = H \cup \{n\} \in \mathbf{F}_{n-1}$, s mivel $n \in A$, így $1 \le i \le n-1$ –re $A \in \mathbf{F}_i$, $S_{in}(A) = A$, tehát A –t nem toltuk el az S_{in} balra tolásnál. Mindez csak akkor lehetett, ha $(A \setminus \{n\}) \cup \{i\} = (H \cup \{i\}) \in \mathbf{F}_{i-1}$, innen $(H \cup \{i\}) \in \mathbf{F}_{n-1}$ következik. $(H \cup \{i\}) \cap (H' \cup \{n\}) = \emptyset$, ami ellentmondás, hiszen ezek $\mathbf{F}_{n-1}$ elemei, ám az metsző. ■

3.3. Az Erdős – Ko – Rado tétel egy általánosítása

E fejezet [6] alapján készült. Az L – rendszer definícióját ld. 2.14. Definíciónál.

3.13. Tétel (Deza – Erdős – Frankl) Tegyük fel, hogy $\mathbf{F} \subset \binom{V}{k}$ és L – rendszer. Ekkor

$$|\mathbf{F}| \le \prod_{l \in L} \frac{n-l}{k-l}, \text{ ha } n \ge k\binom{3k}{k}.$$

Megjegyzés Mivel $\binom{n-t}{k-t}$ felső korlát $L = \{t, \ldots, k-1\}$ –re, ha n nagy, ld. 4.9. Tételt, ezért ez a tétel az EKR általánosítása, ha n nagyon nagy, (ld. $n \ge k\binom{3k}{k}$). Szemben a Frankl – Wilson tétellel itt a felső becslés használja az L halmaz elemeit, nem csupán $|L| = s$ –et.

Bizonyítás Alkalmazzunk $|L| = s$ szerinti indukciót! $s = 0$ esetben $L = \emptyset$, tehát **F** –ben nem lehet két különböző halmaz, a felső határ $|\mathbf{F}| \le 1$, igaz az állítás. Tegyük fel, hogy igaz $(s-1)$ –re, így nézzük meg az $|L| = s$ esetét! Az indukciós feltevést $\{l_2, \ldots, l_s\}$ –re fogjuk alkalmazni, indukciós lépésként l_1 -et hozzávéve, két esetre bontva l_1 értéke szerint.

a) $l_1 = 0$.

$\forall$ x $\in$ V –re legyen $\tilde{\mathbf{F}}(x) = \{F \in \mathbf{F} : x \in F\}$. E halmazrendszer L′ – rendszer, ahol

$L' := \{ l_2, \dots, l_s \}$. Az indukciós feltevésből: $|\tilde{\mathbf{F}}(x)| \le \prod_{2\le i\le s} \frac{n-l_i}{k-l_i}$.

Az összes $\{(x, F) \mid x \in F\}$ párt összeszámolva)

$$\sum_{x\in V} \sum_{x\in F\in \mathbf{F}} 1 = \sum_{x\in V} |\tilde{\mathbf{F}}(x)|,$$

de megszámolhatjuk eme (x, F) –eket úgy is, hogy a két $\sum$ -t felcseréljük, azaz rögzített F (ezek száma |**F**| darab) esetén megnézzük, hányszor számoltuk meg V azon elemeit, melyet tartalmaznak: mivel **F** k-uniform, így k-szor. Az (x, F) párok száma tehát k |**F**|. Kaptuk:

$\sum_{x\in V} |\tilde{\mathbf{F}}(x)| = k|\mathbf{F}|$. Ezért, tekintettel arra, hogy |V| = n, $|\mathbf{F}| \le \frac{n}{k} \prod_{2\le i\le s} \frac{n-l_i}{k-l_i} = \prod_{l\in L} \frac{n-l}{k-l}$

(hiszen $l_1 = 0$, beszorzunk $\frac{n-0}{k-0}$ -lal $\le \frac{n-l_1}{k-l_1}$), így $|\mathbf{F}| \le \prod_{l\in L} \frac{n-l}{k-l}$ is teljesül.

b) $l_1 > 0$.

1. Ha $\forall$ F, F′ $\in$ **F** –re $|F \cap F'| \ne l_1$, akkor **F** $\{l_2, \dots, l_s\}$ –rendszer, $|\mathbf{F}| \le \prod_{2\le i\le s} \frac{n-l_i}{k-l_i}$

, következik az indukcióból, tehát $|\mathbf{F}| \le \prod_{l\in L} \frac{n-l}{k-l}$ még inkább igaz.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\exists F_1, F_2 \in \mathbf{F}$, hogy $|F_1 \cap F_2| = l_1$. Legyen $G = F_1 \cap F_2$.

2. Ha $\forall F \in \mathbf{F} : G \subset F$, akkor vegyük **F** helyett $\{F \setminus G : F \in \mathbf{F}\}$ –t, k helyett $k - l_1$ -et, L helyett $\{0, l_2 - l_1, \dots, l_s - l_1\}$ –et, s így visszajutunk az a) esethez.

3. Végül tegyük fel, hogy $\exists F_3 \in \mathbf{F}$, hogy $F_1 \cap F_2 = G \not\subset F_3$. Ekkor

3.14. Állítás $\forall F \in \mathbf{F} : |F \cap (F_1 \cup F_2 \cup F_3)| > l_1$.

Bizonyítás (3.14. Állítás) Legyen F $\in$ **F** tetszőleges, **F** L – rendszer, i = 1, 2, 3 –ra $|F \cap F_i| \ge l_1$.

Ha $|F \cap (F_1 \cup F_2)| = l_1$, akkor $F \cap F_1 = F \cap F_2 = G$. $|F \cap F_3| \ge l_1$ -ből

$F \cap (F_3 \setminus G) \ne \emptyset$, ám ez további elem(ek)et jelent G elemein felül, melyből következik az állítás. ■

Visszatérve a 3.13. Tételhez, $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ -beli tetszőleges $l_1 + 1$ ($> l_1$) elemű H halmazra legyen $\tilde{\mathbf{F}}(H) = \{F \in \mathbf{F} : H \subset F\}$. $\tilde{\mathbf{F}}(H)$ $\{l_2, \dots, l_s\}$ –rendszer, s mivel $\forall F \in \mathbf{F}$ –et legalább egyszer számoltunk a 3.14. Állítás miatt:

$|\mathbf{F}| \le \sum_{\substack{H\subset(F_1\cup F_2\cup F_3),\\ |H|=l_1+1}} |\tilde{\mathbf{F}}(H)| \le \sum_{\substack{H\subset(F_1\cup F_2\cup F_3),\\ |H|=l_1+1}} \prod_{2\le i\le s} \frac{n-l_i}{k-l_i}$ az indukciós feltevés szerint.

Tudjuk, hogy $3k \geq |F_1 \cup F_2 \cup F_3|$ és H –t $\binom{|F_1 \cup F_2 \cup F_3|}{l_1+1}$ -féleképp választhatjuk, továbbá

$$\binom{|F_1 \cup F_2 \cup F_3|}{l_1+1} \leq \binom{3k}{l_1+1} < \binom{3k}{k}, \text{ így}$$

$$\sum_{\substack{H \subset (F_1 \cup F_2 \cup F_3), \\ |H| = l_1+1}} \prod_{2 \leq i \leq s} \frac{n-l_i}{k-l_i} < \binom{3k}{k} \prod_{2 \leq i \leq s} \frac{n-l_i}{k-l_i}, \quad \text{mivel } n \geq k\binom{3k}{k},$$

$$\frac{n}{k} \geq \binom{3k}{k} \text{ és így } \frac{n-l_1}{k-l_1} > \binom{3k}{k}, \text{ tehát } |\mathbf{F}| \leq \prod_{l \in L} \frac{n-l}{k-l},$$ belátva ezzel a 4.13. Tételt. ■

E tétel elég nagy n –ekre (n $\geq k\binom{3k}{k}$) jobb becslést adhat, mint a 2.17. Tétel. Ha pl. $1000 \approx k$ nagy, s = 2, L = {2, 3}, akkor a 2.27. Tétel szerint $\frac{n \cdot (n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$, míg a fenti tétel nyomán $\frac{(n-l_1)}{k-l_1} \cdot \frac{n-l_2}{k-l_2}$, itt $\frac{(n-2)(n-3)}{998 \cdot 997} \approx \frac{n^2}{995006}$, tehát jóval kisebb felső korlát.

4. Sperner – rendszerek

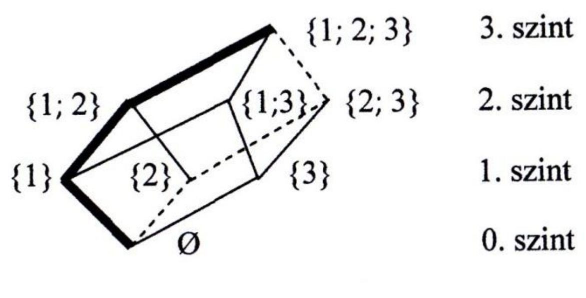
4.1. Sperner - rendszerek

Ebben az alfejezetben olyan halmazrendszerekről lesz szó [10] és [11] nyomán, melynek elemei nem tartalmazhatják egymást.

4.1. Definíció Ha **F** halmazrendszerre igaz, hogy $\forall$ A, B $\in$ **F**, A $\neq$ B –re A $\not\subset$ B és B $\not\subset$ A, akkor Sperner – rendszernek nevezzük.

4.2. Tétel (Sperner) Legyen **F** $\subseteq 2^V$ Sperner – rendszer. Ekkor |**F**| $\leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

Bizonyítás (visszavezetés párosításokra)
V összes részhalmazát páronként diszjunkt láncokra bontjuk. (Lánc alatt itt V teljesen rendezett részhalmazait értjük $\subset$ -ra; az $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_l$, $A_i \subseteq V$ láncokat.) Legyenek e láncok olyanok, hogy $A_{i+1} \setminus A_i$ egyetlen elemet tartalmazzon. **F** azon tulajdonsága alapján történik a bizonyítás, hogy Sperner – rendszer, ezért minden láncból csak egy elemet tartalmazhat, s mivel így az elemmel megadható a lánc, e láncok számából adható becslés |**F**| -re.



2. ábra

V összes részhalmazát, mint 2^n csúcsú gráfot tekintjük, ahol a csúcsok mintegy szinteken helyezkednek el. Az egyes i szintek V i elemű részhalmazainak felelnek meg, tehát n + 1 szint van, sorszámuk 0 –tól n –ig megy. V = = {1; 2; 3} –ra a bizonyításban szereplő gráf a 2. ábrán látható, a vonalak tartalmazást jelentenek, a vastag, ill. szaggatott vonal, például, egy – egy (tartalmazásra nézve) maximális láncot jelöl, ám csak a vastag mellett a szaggatott {2}, {2, 3} és a vékony vonallal jelölt {3}, {1, 3} láncot tekintjük, 3 diszjunkt lánc látható.

Az i –edik szinten eszerint $\binom{n}{i}$ csúcs van. Az élek a tartalmazást fejezik ki; csak az i –edik és az
(i + 1) –edik szint csúcsai között mehetnek, s A és B között, A, B $\subset$ V akkor megy él, ha |A| = i, |B| = i + 1 és A $\subset$ B; ekképp páros gráfot hozunk létre minden i –re az i –edik és az (i + 1) –edik szint között, ahol az i –edik szinten levő csúcsok foka (n – i), hiszen egy i –elemű részhalmazhoz
(n – i) -féleképp vehetünk hozzá egy elemet a felső szinten levő, i + 1 elemű részhalmazokból (ez lényegében további V –beli elem hozzávételét jelenti), míg az (i + 1) –edik szinten levő csúcsok foka

i + 1, amit a részhalmazonkénti egy – egy elem elhagyásával kapunk. E gráfban olyan diszjunkt utakat számolunk meg, melyek láncok, s mivel a lehető legnagyobb értéket keressük, ezért az i –edik és (i + 1) –edik szint közti gráfban olyan párosítást keresünk, mely az i –edik szint minden csúcsát fedi, s így haladunk tovább $i < \frac{n}{2}$ –ig, a gráf „közepéig".

A megfelelő, kevesebb csúcsú osztályt fedő párosítás létezését ún. „fiktív pontok" bevezetésével láthatjuk be; az i –edik szinthez $|B| - |A| = \binom{n}{i+1} - \binom{n}{i}$ fiktív pontot véve ($i < \frac{n}{2}$ miatt $i + 1 \leq n - i$), s összekötve az (i + 1) –edik szint csúcsaival úgy, hogy (n – i) – reguláris páros gráfot kapjunk, ebben ui. van teljes párosítás a Kőnig – tétel szerint, mely ismert, itt nem bizonyítjuk.

A gráf eredeti, fiktív pontok nélküli részét véve van az i –edik szintet fedő párosítás. Ez a Hall – feltétel teljesülésével is ellenőrizhető. Hall – tétel szerint legyen X az alsó szint csúcsainak egy tetszőleges részhalmaza, Y azon felső csúcsok halmaza, melyek X pontjaival össze vannak kötve, H pedig az $X \cup Y$ által kifeszített részgráf. Az X és Y között menő (H –beli) élek száma az i -edik szintről számolva $|X|\,(n - i)$, míg Y minden pontjának foka H –ban legfeljebb i + 1, így az élek száma H –ban legfeljebb $|Y|\,(i + 1)$.

Innen $|X|\,(n - i) \leq |Y|\,(i + 1)$, s mivel $i < \frac{n}{2}$ -ig mentünk, tehát $i < n - i$, így $i + 1 \leq n - i$, ezért teljesül, hogy $|X| \leq |Y|$, a Hall – tétel szerint tehát van párosítás.

E párosítások lehetővé teszik diszjunkt utak (láncok) kiépítését szintről – szintre a középső szint(ek)ig, ahol „tükrözve" (vö. 2. ábra) megkapjuk (az utakra bontott) V –t, ahol minden út tartalmaz a középső szint(ek)ből pontot vagy élt. (Ha n páros, akkor egy középső szint van, s akkor pontot, élt a két középső szint között, ha páratlan.) Az utak száma ezért megegyezik a középső szint(ek) csúcsszámával, vagyis $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ -vel. Mivel **F** minden útból (láncból) legfeljebb egy pontot tartalmazhat, így valóban

$$|\mathbf{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}. \qquad \blacksquare$$

A további tételekben, ahol erre külön utalás nincs, [8] nyomdokain haladunk.

4.3. Tétel (Yamamoto) Ha $\mathbf{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ Sperner – rendszer, akkor

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1, \quad \text{(LYM – egyenlőtlenség)}, \tag{6}$$

másképp $\sum_{k=0}^{n} f_k \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 1$, ahol f_k az **F** –ben szereplő k elemű halmazok számát jelenti.

Bizonyítás Legyen 2^V -ben maximális lánc $\emptyset \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n = V$, ahol $|L_i| = i$. E lánc az alaphalmaz elemei egy permutációjának felel meg (lényegében minden „láncszemnél" hozzáveszünk az alaphalmazból 1 – 1 újabb elemet), tehát n! darab ilyen lánc

lehet. Egy tetszőleges maximális láncnak legfeljebb egy eleme lehet **F** –ben, különben az egyik része lesz a másiknak, s akkor **F** nem Sperner – rendszer.
Megnézzük, hogy hány láncban szerepel a tetszőleges $A \in \mathbf{F}$ halmaz. Ha $|A| = k$, akkor $k!\,(n-k)!$ darab maximális lánc tartalmazza A –t. (A lehetséges permutációkat számoltuk össze mind A –nál mind pedig a láncok maradék elemeinél. Ha minden A –hoz hozzárendeljük az őt tartalmazó maximális láncokat, akkor mindent egyszer számoltunk, mivel egy láncban nem lehet két elem a Sperner – rendszerből, ekkor a tartalmazás miatt vagy a lánc vagy a Sperner – tulajdonság sérülne.) Kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k\, k!\,(n-k)! \le n! \quad \text{(tudjuk, hogy } \sum_{k=0}^{n} f_k = |\mathbf{F}|\text{), eme egyenlőtlenségből}$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \le 1, \text{ megkaptuk az állítást.}$$ ■

(LYM vagy YBLM Yamamoto, Bollobás, Lubell és Meshalkin nevéből ered.) A fenti tétel segítségével, (6) –ot felhasználva belátható másképp is a 4.2. Tétel.

Új Bizonyítás 4.2. Tételre (Sperner – tétel bizonyítása LYM – egyenlőtlenséggel)

Tudjuk, hogy $\forall$ k –ra $\binom{n}{k} \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ha $\binom{n}{k}$ helyett $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ -t írunk (6) –ban, akkor a bal oldalt csökkentjük, $|\mathbf{F}| \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ -t szeretnénk tehát belátni. Láttuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} f_k \frac{1}{\binom{n}{k}} \le 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} f_k \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \le \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{1}{\binom{n}{k}} \le 1,$$ a bal oldal csökken. Felszorozva $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ -vel

$$|\mathbf{F}| = \sum_{k=0}^{n} f_k \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$ adódik, vagyis igaz az egyenlőtlenség. ■

4.4. Tétel A LYM – egyenlőtlenségben akkor és csak akkor teljesül egyenlőtlenség, ha **F** az összes k elemű halmazból áll.

Bizonyítás (EKR Katona-féle bizonyításának ötletét (ld. 3.1.) használjuk fel.)
V –nek ama ciklikus permutációit tekintjük, melyekben **F** –nek van olyan eleme, mely a permutációban ív, azaz a permutáció egymást követő, néhány eleméből álló részhalmaz. A továbbiakhoz e permutáció-ív párokat számoljuk össze, méghozzá kétféleképp.
$G \in \mathbf{F}$ –re, ahol G ív, a permutáció – ív párok száma $\sum_{G \in \mathbf{F}} |G|!\,(n-|G|)!$ (Az ívben levő elemek lehetséges sorrendje, s a többi elem lehetséges sorrendje szerint.)
Legyen π_k egy π permutációban a k hosszúságú **F** –beli ívek száma. Mivel **F** Sperner-rendszer, bármely két részhalmaza nem egyezhet meg első elemében, mert akkor egyik

tartalmazná a másikat; minden elem csak egy ív kezdőpontja lehet, s így $\sum_{k=1}^{n} \pi_k \leq$ n, mivel n –nél több kezdőpont nincs, s itt a π –hez tartozó összes lehetséges hosszúságú ívet számoltuk össze. Ha egyenlőség áll fenn, akkor minden elemnél kezdődik ív. Az ívek ráadásul ugyanannyi hosszúak, minden ív k hosszú, különben volna olyan ív, hogy a rákövetkező ív rövidebb nála, ekkor tartalmazná egymást a két halmaz.

A ciklikus permutációk száma $(n-1)!$ $\left(= \frac{n!}{n}\right)$, a permutáció – halmaz párok száma legfeljebb $(n-1)!\, n$, az előbbi egyenlőtlenséget, mint felső becslést használva. Pontosan ennyi, ha bármely permutációban az ívek hossza egyenlő, a permutáció – halmaz párok száma pedig akkor és csak akkor ennyi, ha bármely két halmaz elemszáma egyenlő, azaz minden halmaz mérete ugyanazon k.

Ehhez $f_k \frac{1}{\binom{n}{k}} = 1$ miatt $f_k = \binom{n}{k}$, azaz **F** az alaphalmaz összes k elemű részhalmazát tartalmazza. ■

Mindezek nyomán látható, hogy Sperner – rendszereknél az egyenlőség, $|\mathbf{F}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ akkor teljesül, ha n páros és $\forall A \in \mathbf{F}: |A| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$; ha páratlan, akkor az $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ elemű; azaz vagy az összes $\frac{n-1}{2}$ vagy az összes $\frac{n+1}{2}$ elemű V –beli részhalmazok által meghatározott **F** –re teljesül, de nem vehetjük vegyesen az előző tétel alapján. ($\frac{n+1}{2}$ elemű A –k megfelelő volta a párosításoknál látott „tükrözésből” is látszik.)

4.2. Az eredeti Erdős – Ko – Rado tétel

Az eddigi eszköztár bemutatása után, minden eddigi megkoronázásaként elmondható, hogy Sperner-rendszerekre is megfogalmazható az EKR, sőt, eredetileg e rendszerekre fogalmazódott, majd láthatjuk ennek változatát t-metszőkre is [4] és [5] nyomán.

4.5. Tétel (EKR) Legyen $\{A_1, \dots, A_m\}$ Sperner-rendszer V felett, hogy $|V| = n$, $\forall i$: $|A_i| \leq k$, ahol $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, és $\forall i, j$: $|A_i \cap A_j| \geq 1$. Ekkor $m \leq \binom{n-1}{k-1}$. Ha $\exists i$: $|A_i| < k$, akkor $m < \binom{n-1}{k-1}$.

Bizonyítás

1. eset Legyen $\forall i$ -re $|A_i| = k$.

Ha $k = \frac{n}{2}$, ld. 2.27. Tételnél. Ha $k < \frac{n}{2}$, akkor két részre bontjuk az 1. esetet, tehát azt, amikor k –uniform a halmazrendszer.

a)

Tegyük fel, hogy $\forall\, i : \forall \lambda \in V \setminus A_i$ -re $n \in A_i \in \mathbf{F}$ esetén $A_i \setminus \{n\} \cup \{\lambda\} \in \mathbf{F}$, mely tehát azt jelenti, hogy $S_{\lambda n}(A_i) = A_i$, és n szerinti indukciót alkalmazunk. Rendezzük úgy az A_i halmazokat, hogy valamely $m_0 < m$, $i \le m_0$ esetén $n \in A_i$, $m_0 < i \le m$ esetén pedig $n \notin A_i$.

Legyen $B_i = A_i \setminus \{n\}$ (ha $i \le m_0$). $j < i < m_0$ -ra $|A_j \cup A_i| < 2k < n$ (a két halmaz uniójának számossága nem lehet $2k$ a metszőség miatt), ám ezért a „maradékból"
$\exists \lambda \in (V \setminus A_i) \cap (V \setminus A_j)$. A feltétel szerint $B_j \cup \{\lambda\} \in \mathbf{F}$, így tetszőleges i, j -re
$B_i \cap B_j = (B_j \cup \{\lambda\}) \cap B_i = (B_j \cup \{\lambda\}) \cap A_i$, hiszen se λ, se n nem lesz benne a metszetben, így $B_i \cap B_j = (B_j \cup \{\lambda\}) \cap A_i \neq \varnothing$, mivel két $\mathbf{F}$ –beli metszete, de akkor $\{B_1, \dots, B_{m_0}\}$ is metsző halmazrendszer $V \setminus \{n\}$ felett), ám itt $|B_i| = |A_i| - 1$, $k - 1 \ge 1$.

$k < \dfrac{n}{2}$, $|B_i| = k - 1 < \dfrac{n}{2} - 1$, $2(k-1) < n - 2 < n - 1$, melyből az indukciós feltevés nyomán: $m_0 \le \binom{n-2}{k-2} = \binom{(n-1)-1}{(k-1)-1}$.

Hasonlóan, $m_0 < i \le m$ –re $\{A_{m_0}, \dots, A_m\}$ metsző halmazrendszer $V \setminus \{n\}$ felett,
$|V \setminus \{n\}| = n - 1$, $\forall A_i$ -re $|A_i| = k$, ezért $m - m_0 \le \binom{(n-1)-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-1}$.

($k < \dfrac{n}{2}$, $2k \le n - 1$). Így $m = m_0 + (m - m_0) \le \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$, teljesül a tételbeli állítás.

b)

Azt szeretnénk belátni, hogy minden más, tehát b) eset ellentmondásra vezet. Célunk érdekében legyen rögzített k, n, m esetén $f(A_1, \dots, A_m)$ minimuma az $s_1 + \dots + s_m$ -nek, ahol s_i az A_i elemeinek összege, a minimumot az összes, a tétel feltételeinek megfelelő halmazrendszerre véve. Ellentmondásra úgy próbálunk jutni, hogy ezzel az f függvénnyel V felett a minimumnál kisebb értéket kapjunk.

Tegyük fel, $\exists A_i \in \mathbf{F}$, melyre $\exists \lambda \in V \setminus A_i$, $\lambda < n$, hogy $n \in A_i$ és $((A_i \setminus \{n\}) \cup \{\lambda\}) \notin \mathbf{F}$, s hogy gyakorlatilag $S_{\lambda n}$ -nel balra tolhassunk, vegyük az $1 \le m_0 \le m_1 \le m_2 \le m$ felosztást, melyre:

1. $m_2 \le i \le m$, ekkor $n \notin A_i$, ekkor $A_i =: B_i$,
2. $m_1 \le i < m_2$, ekkor $n \in A_i$, $\lambda \in A_i$, ekkor $A_i =: B_i$.

A másik két esetben $S_{\lambda n}(A_i) \neq A_i$ a balra tolásnál.

3. $m_0 < i \le m_1$, ekkor $n \in A_i$, $\lambda \notin A_i$, ezért $A_i =: B_i$ és $C_i := ((A_i \setminus \{n\}) \cup \{\lambda\}) \in \mathbf{F}$,
4. $i \le m_0$, ekkor $n \in A_i$, $\lambda \notin A_i$, így $B_i := ((A_i \setminus \{n\}) \cup \{\lambda\}) \notin \mathbf{F}$.

Cél, hogy belássuk, $\{B_1, \dots, B_m\}$ még így is a feltételeknek megfelelő halmazrendszer, melyhez elég csak azt belátni, hogy $i \neq j$ –re $B_i \cap B_j \neq \varnothing$. A 3.8. Állítás bizonyításának sémája szerint haladunk.

Ha $j < i < m_0$, akkor $B_i \cap B_j = \{\lambda\}$.

Ha $m_0 \le j < i$, akkor is biztosan teljesül $B_i \cap B_j \ne \emptyset$, hiszen $A_i = B_i \in \mathbf{F}$, $A_j = B_j \in \mathbf{F}$.

Ha $j < m_0 \le i$, akkor

lehet $m_0 \le i < m_1$, ám A_j, $C_i \in \mathbf{F}$, így $A_j \cap C_i \ne \emptyset \Rightarrow \exists \mu : \mu \in A_j$ és $\mu \in C_i$ és

$\mu \ne n$ és $\mu \ne \lambda$, hiszen egyik az A_j, másik a C_i halmazban nincs $\Rightarrow \mu \in B_j$, ill.

$\mu \in A_i = B_i$ (lévén szó a 3. esetről) $\Rightarrow \mu \in B_j \cap B_i \ne \emptyset$,

lehet $m_1 \le i < m_2$, $\lambda \in B_j$, $\lambda \in A_i$, így $\lambda \in B_i \Rightarrow \lambda \in B_i \cap B_j \ne \emptyset$,

lehet $m_2 \le i < m$, ld. az $m_0 < i \le m_1$ esetet.

$B_i \cap B_j \ne \emptyset$, minden esetben, tehát $\{B_1, \ldots, B_m\}$ megfelelő halmazrendszer. Az előbbiek nyomán:

$f(B_1, \ldots, B_m) - f(A_1, \ldots, A_m) = m_0(-n + \lambda) < 0$, (hiszen a két halmazrendszer éppen a legnagyobb elemben, ill. a helyébe került λ –ban tér el, s $\lambda < n$), mely ellentmond annak, hogy $f(A_1, \ldots, A_m)$ a legkisebb. Az 1. b) eset tehát nem állhat fenn.

2. eset (nem k-uniform eset)

Legyen $k_0 = \min |A_i|$, $i = 1, \ldots, n$, melyre $|A_i| = k_0 \le k$. (Ha $k_0 = k$, akkor ld. az 1. esetet.) Elég tehát $k_0 < k$ –ra nézni. Tekintsük a $k - k_0$ szerinti indukciót! Feltehető, hogy $|A_i| = k_0$, ha $i \le m_0$, s $|A_i| > k_0$, ha $m_0 < i \le m$, ahol $1 \le m_0 \le m$.

Legyenek $H_1, \ldots, H_s$ olyan különböző halmazok, melyekre

$$\exists i : i \le m_0,\ A_i \subset H_j \subset V,\ |H_j| = k_0 + 1. \qquad (7)$$

A továbbiakhoz lemma segítségére van szükség.

4.6. Lemma (Sperner) Az $\{A_1, \ldots, A_{m_0}\}$ –t véve, ahol $i \le m_0$, így az előbbiek alapján $|A_i| = k_0$, akkor legfeljebb $m_0(n - k_0)(k_0 + 1)^{-1}$ darab (7) –nek megfelelő H_j halmaz létezik.

Bizonyítás (4.6. Lemma) Legyen m_5 darab feltételeknek megfelelő H_j halmaz, mely így szintén Sperner - rendszer. Az (i, H_j) párokat kétféleképpen összeszámolva $m_0(n - k_0) \le m_5(k_0 + 1)$ –et kapunk, mivel bal oldalon i –hez, másképp A_i -hez (melyből m_0 -nál kevesebb van) keressük azt az A_i -n kívüli + 1 elemet, hogy H_j -t kapjuk; jobb oldalon H_j szerint (melyből m_5 van) számoljuk a párokat, így $|H_j| = |A_i| + 1$ eleméből kell kiszedni a $k_0 + 1$ –et. Innen:

$$m_0(n - k_0)(k_0 + 1)^{-1} \le m_5, \text{ tehát teljesül az állítás.} \qquad \blacksquare$$

2. eset folytatása

Ekkor $(k_0 + 1) - (n - k_0) \le 2(k - 1) - (n - 1) \le 0$, tudván, hogy $k < \frac{n}{2}$. Innen, s a lemma nyomán $m_5 \ge m_0$, tehát $\{H_1, \ldots, H_{m_5}, A_{m_0}, \ldots, A_m\}$ a tétel feltételének megfelelő halmazrendszer, sőt, Sperner-rendszer, ahol $\{A_{m_0}, \ldots, A_m\}$ -ben a legkisebb halmaz $k_0 + 1$ elemű, s $k - k_0$ szerinti indukció miatt $m_5 + (m - m_0) \le \binom{n-1}{k-1}$, és $m_0 \le m_5$ miatt

$m \le m_5 + (m - m_0)$ ■

A következő tételekben áttérünk a metszőségről a t-metszőségre.

4.7. Tétel (EKR, általános, t-metsző eset) Legyen $\mathbf{F} \subseteq 2^V$ k –uniform, t–metsző halmazrendszer és $n \ge n_0(k, t)$. Ekkor $|\mathbf{F}| \le \binom{n-t}{k-t}$.

Azt mondjuk, hogy EKR igaz (n, k, t) –re, $n \ge 2k - t$, ha $|V| = n$ esetén minden t-metsző $\mathbf{F} \subset \binom{V}{k}$ -re $|\mathbf{F}| \le \binom{n-t}{k-t}$.

4.8. Állítás Tegyük fel, hogy EKR igaz $\forall j : \forall$ (n_0, j, t) –re, ahol n_0, t rögzített, $n \ge 2k - t$, és $t \le j \le k$. Ekkor (n, k, t) –re is igaz a tétel minden $n > n_0$ esetén.

Bizonyítás Legyen $\mathbf{F} \subset \binom{V}{k}$ a lehető legnagyobb t-metsző, stabil halmazrendszer, s legyen $\mathbf{F}_j := \{F \cap \{1, \dots, n_0\} : F \in \mathbf{F}, |F \cap \{1, \dots, n_0\}| = j\}$. $\mathbf{F}_j$ t-metsző, vö. 3.11. Állítás, teljesül, hogy

$$|\mathbf{F}_j| \le \binom{n_0 - t}{j - t}, \text{ innen } |\mathbf{F}| \le \sum_{t \le j \le k} |\mathbf{F}_j| \binom{n - n_0}{k - j} \le \sum_{0 \le i \le k-t} \binom{n_0 - t}{i}\binom{n - n_0}{k - t - i} =$$
$$= \binom{n-t}{k-t}.$$

Itt az EKR balra tolással történő bizonyítása **A**) változatának (5) részéhez hasonlóan (ld. 3. fejezet) egy rögzített $F_j \in \mathbf{F}_j$ -hez a további k – j elemet $\binom{n - n_0}{k - j}$ -féleképpen választhatjuk. ■

4.9. Tétel (EKR) Legyen $\{A_1, \dots, A_m\}$ Sperner – rendszer V felett, melyre $\forall$ i, j : $|A_i| \le k$ ahol $1 \le k \le \frac{n}{2}$, és $|A_i \cap A_j| \ge t$. Legyen $t \le k$, $m \ge 2$. Tegyük fel, hogy vagy

1.) $2k \le t + n$, $|A_i| = k$ vagy
2.) $2k \le 1 + n$, $|A_i| \le k$. Ekkor

a) vagy (i) $|A_1 \cap \dots \cap A_m| \ge t$, akkor $m \le \binom{n-t}{k-t}$,

vagy (ii) $|A_1 \cap \dots \cap A_m| < t < k < n$, $m \le \binom{n-t-1}{k-t-1}\binom{k}{t}^3$;

b) ha $n \ge t + (k - t)\binom{k}{t}^3$, akkor $m \le \binom{n-t}{k-t}$.

Megjegyzés A 4.8. tételbeli $n \geq n_0(k, t)$ –re jó az itt látható $n \geq t + (k-t)\binom{k}{t}^3$ becslés.

Meggondolható továbbá $t = 1$ –re, hogy a) –ból következik b). Ekkor

a) (i) $m \leq \binom{n-1}{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$, (ii) $m \leq \binom{n-2}{k-2} k^3 = \dfrac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} k^3 =$

$= \binom{n-1}{k-1} \dfrac{k-1}{n-1} k^3$ a megfelelő feltételek teljesülése esetén,

b) ha $n \geq 1 + (k-1)k^3$, akkor $\dfrac{n-1}{k-1}\dfrac{1}{k^3} \geq 1$, így $m \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Bizonyítás

Ha $t = k \Rightarrow$ egyetlen A_i van, $|A_i| = k$, $m = 1 \leq \binom{n-k}{k-k} = n-k$, b) triviális.

Ha $t < k$ és $n \geq t + (k-t)\binom{k}{t}^3$, akkor $\binom{n-t}{k-t} = \binom{n-t-1}{k-t-1}\dfrac{n-t}{k-t} \geq \binom{n-t-1}{k-t-1}$

$\binom{k}{t}^3 \geq m,$

tehát a) (ii) –ből következik b), elég tehát a) –t belátni.

I.. eset: $t = 0$. Ekkor azt az esetet érdemes nézni, hogy $2k \leq 1 + n$, $|A_i| \leq k$, mert az uniformitás gyengébb feltétel. Ilyenkor a) (ii) nem lehetséges, a) (i) pedig egybeesik b) –vel, tehát elég azt belátni, hogy $m \leq \binom{n}{k}$.

Bontsuk két részre, mint a 4.5. Tétel 2. eseténél, legyen $|A_i| = k_0$, ha $i < m_0$, $|A_i| > k_0$, ha $m_0 \leq i < m$, ahol $1 \leq m_0 \leq m$, ahol $k_0 \leq k$, $1 \leq m_0 \leq m$.

Ha $k_0 = k$, akkor, $|A_i| = k$, $m \leq \binom{n}{k}$.

Legyen $k_0 < k$, és alkalmazzunk $k - k_0$ szerinti indukciót. Legyenek $H_1, \ldots, H_m$ különböző halmazok az 4.6. lemma feltételei szerint. Ekkor ismét fennáll, hogy

$(k_0 + 1) - (n - k_0) \leq 2(k-1) - (n-1) \leq 0$, s újra fennáll az 4.5. Tétel 2. esetét lezáró egyenlőtlenség, melybe most $t = 0$ –t helyettesítve $m \leq m_5 + (m - m_0) \leq \binom{n}{k}$ teljesül.

II.. eset: $t > 0$.

1.) $2k \leq t + n$, $|A_i| = k$ (ld. a tétel kimondását). (A 2.) feltétel következik az 1.) –ből.)

Legyen $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m| = r$. Először azt látjuk be, ha $r \geq t$, akkor (i) rész teljesül. Ekkor $n - r$ elemű halmazokból $k - r$ eleműeket kiválasztva, valamint a binomiális együtthatók tulajdonságait ismerve igaz, hogy

$m \leq \binom{n-r}{k-r} = \binom{n-r}{n-k} \leq \binom{n-t}{n-k} = \binom{n-t}{k-t}$, tehát (i) igaz.

Most legyen $|A_1 \cap \ldots \cap A_m| = r < t$, ekkor (ii) –t akarjuk belátni.
$|A_1 \cap \ldots \cap A_m| = r < t \leq |A_0 \cap A_1| < |A_0| = k$, $2k \leq t + n < k + n$, a feltételek szerint.
A halmazrendszerhez olyan további, V –beli részhalmazokat egyesével hozzávéve, mellyel k-uniform, t-metsző és Sperner –rendszer marad a halmazrendszer, egészen addig, míg eme új halmazrendszer tovább nem bővíthető, $\{A_1, \ldots, A_p\}$ –hez jutunk, vö. 2.25. Állítás bizonyításával, ahol $p \geq m$ a legnagyobb p egész, melyre mindez teljesül. Legyen $\mathbf{A}' = \{A_i : i \leq p\}$. A továbbiakhoz előbb egy állítást kell igazolni.

4.10. Állítás Az $\{A_1, \ldots, A_p\} =: \mathbf{A}'$ halmazrendszer nem $(t + 1)$ –metsző.

Bizonyítás (4.10. Állítás) Indirekt tegyük fel, hogy $\forall$ i, j –re $|A_i \cap A_j| \geq t + 1$. $A_q \in \mathbf{A}'$ -höz (mivel kiegészítettük az eredeti halmazrendszert, ezért biztosan) $\exists A'_q \subset V : |A'_q| = k$, $|A_q \cap A'_q| = k - 1$ (egy elemben változtattuk), $\forall B \in \mathbf{A}'$ -re $|A'_q \cap B| \geq |A_q \cap B| - 1 \geq t$ (az utóbbi $|A_i \cap A_j| \geq t + 1$ feltétel miatt). Mivel p maximális, $A'_q \in \mathbf{A}'$. Lehetséges összes A'_q -et keresve, többszöri alkalmazással a balra toláshoz hasonlóan végül kapjuk: $\{1, \ldots, k\}, \{n - k + 1, \ldots, n\} \in \mathbf{A}'$, ezért ($A'_q$ -ek, ill. B -k száma) :
$t < |\{1, \ldots, k\} \cap \{n - k + 1, \ldots, n\}| = k - (n - k) \leq t$, ám ez ellentmondás, így $\forall A_q$:
$\exists B \in \mathbf{A}'$, hogy $|A_q \cap B| = t$. ■

Legyen A_q és $B \in \mathbf{A}'$ olyan, mint a fenti bizonyításban, $|A_q \cap B| = t$. Mivel
$|A_1 \cap \ldots \cap A_p| \leq |A_1 \cap \ldots \cap A_m| < t$, ezért, s az előbb belátott állítás miatt $\exists C \in \mathbf{A}'$, hogy
$|A_q \cap B \cap C| < t$.
Rögzített A_q, B, C –re jelölje T az (X, Y, Z) halmazhármasok halmazát, ha $X \subset A_q$,
$Y \subset B$,
$Z \subset C$, $|X| = |Y| = |Z| = t$, $|X \cup Y \cup Z| \leq k$. Legyen $\phi(X, Y, Z) = \{D : X \cup Y \cup Z \subset D \in \mathbf{A}'\}$. Ekkor az $\{A_1, \ldots, A_p\}$ halmazrendszerre megállapítottak szerint $\mathbf{A}' = \bigcup_{(X,Y,Z) \in T} \phi(X, Y, Z)$. (Eme D -k éppen A_i -nek megfelelők, s $t < k$ miatt mindig találunk megfelelő X, Y, Z –t, s így A_q, B, C –t, $\forall D \in \mathbf{A}'$ -ra $|D \cap A_q| \geq t$, $|D \cap B| \geq t$, $|D \cap C| \geq t$, ahol a metszetek X, Y, Z –t adják, más, nem D elem tehát $\mathbf{A}'$ -ben nem lehet.)

Ha $(X, Y, Z) \in T$, és $s = |X \cup Y \cup Z|$, akkor $s > t$, különben azt az ellentmondást kapjuk, hogy
$t > |A_q \cap B \cap C| \geq |X \cup Y \cup Z| = |X| = t$ ($s \leq t$, ill. $|X| = t$ –ből).

Innen ($|\mathbf{A}'| \leq \sum_{(X,Y,Z) \in T} |\phi(X, Y, Z)|$) , rögzített X, Y, Z –re $|\phi(X, Y, Z)| \leq \binom{n-s}{k-s} = \binom{n-s}{n-k} \leq$

$\leq \binom{n-t-1}{n-k} = \binom{n-t-1}{k-t-1}$, így D –k számát is becsülhetjük, $\binom{k}{t}^3$ -féleképpen választva A_q, B, C –ből X, Y, Z –t; és e D –kből kapjuk $\mathbf{A}'$ -t:

$$m \leq p = |\mathbf{A}'| \leq \binom{n-t-1}{k-t-1}\binom{k}{t}^3,$$ mellyel beláttuk (ii) –t.

b)

Tekintsük a $2k \leq 1 + n$, $|A_i| \leq k$ esetét, ahol A_i -k Sperner-rendszert alkotnak.

Legyen $|A_i| = k_0$, ha $i \leq m_0$, $|A_i| > k_0$, ha $m_0 \leq i \leq m$, ahol $1 \leq m_0 \leq m$, ahol $k_0 \leq k$; $1 \leq m_0 \leq m$. Ha $k_0 = k$, ld. 2a) esetet. Legyen tehát $k_0 < k$, ekkor $k - k_0$ szerinti indukciót alkalmazunk.

Legyenek $H_1, \dots, H_{m_5}$ különböző halmazok a 4.6. Lemmában szereplő feltétel szerint, ahol fennáll, hogy $m_0(n - k_0)(k_0 + 1)^{-1} \leq m_5$, valamint a 4.5. Tétel 2. eseténél láttuk, hogy e halmazokra

$(k_0 + 1) - (n - k_0) \leq 2(k - 1) - (n - 1) \leq 0$ teljesül; ezért, s a lemma miatt $m_5 \geq m_0$. Mivel

$k_0 < k < n$, ezért $n - k_0 \geq 2$, H_i definíciója alapján $H_1 \cap \dots \cap H_{m_5} = A_1 \cap \dots \cap A_{m_0}$. Ha

$|H_1 \cap \dots \cap H_{m_5} \cap A_{m_0+1} \cap A_{m_0} \cap \dots \cap A_m| \geq t$, akkor ld. a tétel a) (i) esetét, melyet a 2. eset elején láttunk be.

Feltehető tehát, hogy $|H_1 \cap \dots \cap H_{m_5} \cap A_{m_0+1} \cap \dots \cap A_m| = |A_1 \cap \dots \cap A_m| < t$.

Mivel $\{H_1, \dots, H_{m_5}, A_{m_0+1}, \dots, A_m\}$ olyan V feletti halmazrendszer, melynek bármely C_i, C_j elemére teljesül, hogy $|C_i| \leq k$ és $|C_i \cap C_j| \geq t$, így az indukciós feltevésből (hiszen $(k - k_0)$ csökkent)

$$m \leq m_5 + (m - m_0) \leq \binom{n-t-1}{k-t-1}\binom{k}{t}^3,$$

ahol m_5 -tel (m_0 –ná l több) H_j -ket becsüljük, $m - m_0$ pedig a maradék. ■

Megjegyzés (S. H. Min) Legyenek $A_1, \dots, A_m$ olyan különböző halmazok, melyeknél $\forall$ i – re $A_i \subset \{0, \dots, 7\}$, $|A_i| = 4$, $|A_i \cap \{0, \dots, 3\}| = 3$. Ekkor $\mathbf{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ elemszáma, $m = 4\binom{4}{3} == 16$, $\mathbf{F}$ pedig $|V| = 8$ elemű halmaz feletti, 2-metsző halmazrendszer

($\{0, \dots, 3\}$ –ból 3 elemű részhalmazokat kiválasztva 2-metszőket kapunk). Ekkor $\binom{n-t}{k-t} =$

$= \binom{6}{2} = 15 < m$.

Kissé általánosabban nézve: legyen $r \in \mathbf{Z}^+$, s legyenek $A_1, \dots, A_m$ olyan különböző halmazok, melyeknél $\forall$ i -re $A_i \subset \{0, \dots, 4r - 1\}$, $|A_i| = 2r$, $|A_i \cap \{0, \dots, 2r - 1\}| > r$. Ekkor $|V| = 4r$, s e halmazokból képzett $\mathbf{F}$ automatikusan 2-metsző a skatulya-elv szerint, hiszen már a $\{0, \dots, 2r\}$ –be eső része is legalább két elemben metszi egymást. Így

$m = \sum_{r<j\le 2r} \binom{2r}{j}\binom{2r}{2r-j}$, hiszen az elemek egy részét a $\{0, \dots, 2r-1\}$ -ből $\binom{2r}{j}$, a maradékot $\binom{2r}{2r-j}$ -féleképpen választhatjuk.

$m = \sum_{r<j\le 2r} \binom{2r}{j}\binom{2r}{2r-j} = \frac{1}{2}\sum_{j\le 2r} \binom{2r}{j}\binom{2r}{2r-j} - \frac{1}{2}\binom{2r}{r}^2$, ui. r –nél nagyobb és kisebb j –ket is számolunk 2r -ig, ezért felezünk, hogy csak $r < j$ esetét kapjuk meg, majd kivonjuk $r = j$ esetét.

$\frac{1}{2}\sum_{j\le 2r} \binom{2r}{j}\binom{2r}{2r-j} - \frac{1}{2}\binom{2r}{r}^2 = \frac{1}{2}\binom{4r}{2r} - \frac{1}{2}\binom{2r}{r}^2$, az első tagnál vö. (4) -nél leírt indoklással

$\sum_{0\le j\le r} \binom{N}{j}\binom{M}{r-j}$ -re, mely itt 2r lányból és 2r fiúból kiválasztandó N + M tagú bizottsággal szemléltethető. Most $\binom{n-t}{k-t} = \binom{4r-2}{2r-2}$; $r > 2$ –re $\binom{n-t}{k-t} < m$, tehát azt szeretnénk kapni, hogy

$\binom{4r-2}{2r-2} = \frac{(4r-2)!}{(2r-2)!2r!} < \frac{1}{2}\binom{4r}{2r} - \frac{1}{2}\binom{2r}{r}^2 = \frac{1}{2}\frac{(4r-2)!(4r-1)4r}{(2r-2)!(2r-1)2r(2r)!} - \frac{1}{2}\binom{2r}{r}^2$, így

$\frac{4r-1}{2r-1} > 2$ miatt elég látni, hogy $\frac{(4r-2)!}{(2r-2)!2r!} < 2\frac{(4r-2)!}{(2r-2)!2r!} - \frac{1}{2}\binom{2r}{r}^2$,

$\binom{2r}{r}^2 < 2\binom{4r-2}{2r-2}$, mely egyszerű számolással adódik.

5. Keresztben metsző halmazrendszerek

Az alábbi tételek, definíció és a megjegyzés is [10] és [11] alapján készült.

5.1. Definíció Legyen $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ és $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ két rendezett halmazrendszer. **A** és **B** keresztben metsző, ha $A_i \cap B_j = \emptyset \Leftrightarrow i = j$.

5.2. Tétel (Bollobás) Legyen $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ és $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ keresztben metsző halmazrendszer. Ekkor $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1$.

Bizonyítás Tekintsük a $|V| = n$, $V = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ alaphalmaz azon permutációit, melyben $\exists\, i : A_i$ minden eleme megelőzi B_i minden elemét. Egy adott sorrendhez legfeljebb egy jó indexet lehet találni, ha ui. i és j is jó lenne, akkor $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ miatt A_i elemei között lenne egy $b_j \in B_j$ elem, ugyanígy B_i elemei között lenne $a_j \in A_j$ elem. Mivel A_i minden eleme megelőzi B_i minden elemét, így b_j megelőzi a_j -t, ám ez azzal jár, hogy a j index nem lehet jó az adott sorrendhez. Rögzített i –re a jó sorrendek száma:

$$J_i = \binom{n}{|A_i|+|B_i|}(|A_i|)!\,(|B_i|)!\,(n-|A_i|-|B_i|)!\,,$$

ahol a binomiális együtthatóval kiválasztjuk azt az $|A_i| + |B_i|$ helyet, ahová A_i és B_i elemei kerülnek. Ezek közül az első $|A_i|$ helyre kell valamilyen sorrendben elhelyezni A_i, utána B_i elemeit, végül az $A_i \cup B_i$ -be nem tartozó elemeket kell elhelyezni a fennmaradó helyekre tetszőleges sorrendben. Ha J_i -ket $i = 1, \ldots, m$ –re összeadjuk, akkor minden sorrendet legfeljebb egyszer számolunk:

$$\sum_{i=1}^{m} J_i = \sum_{i=1}^{m}\binom{n}{|A_i|+|B_i|}(|A_i|)!\,(|B_i|)!\,(n-|A_i|-|B_i|)! \leq n!$$

$$n!\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{(|A_i|+|B_i|)!\,(n-|A_i|-|B_i|)!}\right)(|A_i|)!\,(|B_i|)!\,(n-|A_i|-|B_i|)! \leq n!$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{|A_i|!\,|B_i|!}{(|A_i|+|B_i|)!}\right) = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1, \text{ ami éppen az állítás.}$$ ■

5.3. Következmény (Bollobás) Legyen $|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_m| = k$, $|B_1| = |B_2| = \ldots = |B_m| = l$, és $|A_i \cap B_j| = 0 \Leftrightarrow$ ha $i = j$. Ekkor $m \leq \binom{k+l}{k}$.

Bizonyítás 5.2. -ből tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1.$

Helyettesítsünk k –t |A $_i$| -kbe, l –et |B $_i$| -kbe, ekkor $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{k+l}{k}} \leq 1.$ Innen

m $\leq \binom{k+l}{k}$. ■

A témával kapcsolatos irodalomban sok helyen az 5.3. Következményt hívják Bollobás-tételnek.

Mivel **A** = {A$_1$, … , A$_m$} akkor és csak akkor Sperner – rendszer V felett, ha **A** és **B**, **B** ≔ {V \ A$_1$ =: B$_1$,…, V \ A$_m$ =: B$_m$} keresztben metsző halmazrendszerek (halmaznak a komplementerével vett metszete üres halmaz, A$_i$ ∩ B$_j$ = Ø, i ≠ j -ből A$_i$ = A$_i$ ∩ A$_j$, s így
A$_i$ ⊆ A$_j$ következne, sértve ezáltal a Sperner – tulajdonságot), ezért látható, hogy Bollobás tételéből következik a LYM – egyenlőtlenség. ∀ 1 ≤ i ≤ m –re |A$_i$| + |B$_i$| = |V| = n, innen
$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}}$, így 5.2. Tételből azonnal megkapható a LYM – egyenlőtlenség.

Irodalomjegyzék

[1] N. Alon, Babai L., H. Suzuki: Multilinear Polynomials and Frankl-Ray-Chaudhuri-Wilson Type Intersection Theorems, *Journal of Combinatorial Theory, series **A*** 58, (1991), 165 – 180.

[2] Bérczi G., Gács A., Szőnyi T.: Véges projektív síkok, in: *Új matematikai mozaik*, (szerk.: Hraskó A.), Typotex Kiadó, (2002), 53 – 76.

[3] F. De Clerck: An Introduction to the Theory of the Designs, in: F. De Clerck, Károlyi Gy., M. J. de Resmini: *Combinatorial Structures*, ELTE, Budapest, (1993)

[4] Erdős P., C. Ko, R. Rado: Intersection Theorems for Systems of Finite Sets, *Quart. J. Math. Oxford*, 12 (1961), pp. 313 – 320.

[5] Frankl P.: The Shifting Technique in Extremal Set Theory, in: *Surveys in Combinatorics* (ed. C. Whitehead) 1987, Cambridge University Press, (1987), 81 – 110.

[6] Frankl P., R. L. Graham: Old and New Proof of the Erdős – Ko – Rado Theorem, *Journal of Sichuan University, Natural Science Edition*, Vol. 26 Special Issue, (1989), 112 – 122.

[7] Freud R.: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, (2007)

[8] Gyárfás A. – Hraskó A.: Teljes gráfok felbontásairól, in: *Új matematikai mozaik*, (szerk.: Hraskó A.), Typotex Kiadó, (2002), 199 – 210.

[9] Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande: On the λ–Design Conjecture, *Journal of Combinatorial Theory, Series **A*** 74, (1996), 100 – 114.

[10] Katona Gy., Recski A., Szabó Cs.: *A számítástudomány alapjai*, Typotex Kiadó, Budapest, (2006)

[11] http://www.cs.elte.hu/~szonyi/sperneruj.pdf

[12] Szőnyi T: *Szimmetrikus struktúrák*, Typotex Kiadó, (2013)