EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

ELTE TTK MATEMATIKAI INTÉZET

Számítógéptudományi Tanszék

Mit mutatnak meg egy gráfról a sajátértékei?

Hatala Csaba László

matematika alapszak

tanári szakirány

Szakdolgozat

Témavezető:

Nagy Zoltán Lóránt

Tudományos munkatárs

Budapest, 2017

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A gráfelmélet számomra a matematika tudomány egyik legkedvesebb ága, az algebra pedig mindig biztos pont volt a bizonyítások útvesztőiben. Így könnyű szívvel fogadtam el a felajánlott *gráfok sajátértékei* témakört szakdolgozati témámnak.

Míg az algebra több ezer éves tudományág, a gráfelmélet történetének kezdetét legtöbben 1736-ra datálják, amikor Euler felvetette a Königsbergi hidak problémáját. A gráf, mint fogalom 1878-ban jelent meg, és rögtön egy algebrai analógiával kapcsolatban. A gráfelmélet fejlődése során – melyben nemegyszer magyar matematikusok voltak az úttörők – számos sejtésre csak az algebra segítségével tudtak bizonyítást adni. Így a két tudományágat szoros szálak fűzik egymáshoz.

Amikor egy gráfot elképzelünk, valószínűleg egy pontokból és élekből álló ábrát látunk magunk előtt. Egyszerűbb esetben szembeötlőek a szerkezeti tulajdonságai. A legtöbb esetben viszont egyáltalán nem látszik egy gráfon, hogy egyáltalán összefüggő-e, esetleg reguláris, netán erősen reguláris. Bizonyos esetekben egy egyszerű algoritmus is választ ad ezekre a kérdésekre, más esetekben a gráfok sajátértékei tudnak támpontot adni a gráf szerkezetével kapcsolatban.

Ez a dolgozat egy bevezető jellegű összefoglaló a gráfok spektrumáról és a témához szükséges algebrai eszközökről. Ennek megfelelően a dolgozat első harmadában összegyűjtöm a szükséges gráfelméleti definíciókat, illetve az alkalmazandó algebrai fogalmakat és állításokat, valamint az ezekhez használt jelöléseket. Továbbá egyfajta bemutatóként felsorolom néhány egyszerűbb gráf sajátértékeit, illetve ezekhez kapcsolódóan felhívom a figyelmet néhány, később részletesen is bemutatott összefüggésre a gráfok sajátértékei és szerkezete között.

A következő nagyobb részben arról írok, hogy a felsorolt algebrai eszközök segítségével hogyan tudjuk megállapítani egy gráf sajátértékeit. A dolgozat utolsó harmadában a gráf szerkezeti tulajdonságai és a spektrum között fennálló összefüggésekről írok. Végül röviden a téma korlátairól is beszámolok, tehát olyan tulajdonságokat mutatok be, melyeket nem tudunk meghatározni a spektrum alapján.

A dolgozat során törekszem a precizitásra, de bizonyos esetekben a magától értetődő dolgokat nem mondom ki külön. Például a gráfok pontjait mindig automatikusan úgy indexelem, hogy kényelmes legyen vele dolgozni, illetve az egyetlen élt sem tartalmazó gráffal nem szeretnék foglalkozni.

1. Definíciók, jelölések

Ebben a fejezetben a gráfelmélet releváns alapfogalmait definiálom, illetve az általam használt jelöléseket sorolom fel. Az egész dolgozatban véges, egyszerű, tehát párhuzamos és hurokélektől mentes, továbbá irányítatlan gráfokról írok, tehát a definíciók során az egyéb gráfoktól eltekintek.

1.1. Alapfogalmak

- *Gráf:* Élek és pontok halmaza, ahol az élek pontosan két pontra illeszkednek.
- *Szomszédság:* Két pont szomszédos, ha van közös élük.
- *Fokszám:* Egy pont fokszáma a szomszédainak száma.
- *Séta:* Szomszédos pontok és élek váltakozó sorozata, mely ponttól pontig tart.
- *Út:* Önmagát nem metsző séta, ha kezdő és végpontja nem azonos.
- *Kör:* Önmagát nem metsző séta, ha kezdő és végpontja azonos.
- *Összefüggőség:* Egy gráf összefüggő, ha bármely két pontja között vezet út.
- *Átmérő:* Az összes pontpár között keressük meg a legrövidebb utat. A gráf átmérője ezek közül a leghosszabb út hossza. Összefüggő gráfra értelmezzük.
- *Fa:* Körmentes, összefüggő gráf.
- *Páros gráf:* Olyan gráf, melyen belül elkülöníthetünk két olyan diszjunkt ponthalmazt, hogy élek csak a ponthalmazok között vannak, azokon belül nem.
- *Teljes (páros) gráf:* Olyan (páros) gráf, mely a definícióban megengedett élek közül mindet tartalmazza.
- *Teljes párosítás:* Olyan diszjunkt élhalmaz, mely minden pontot lefed.
- *Csillag:* Olyan teljes páros gráf, melyben az egyik ponthalmaz egyetlen pont.
- *Regularitás:* Egy gráf k-reguláris, ha minden pont fokszáma k.
- *Erős regularitás:* Egy n pontú gráf erősen reguláris (n, k, α, β) paraméterekkel, ha k-reguláris és van olyan $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, hogy bármely két szomszédos x,y pontra $|N(x) \cap N(y)| = \alpha$, két nem szomszédos u,v pontra $|N(u) \cap N(v)| = \beta$ teljesül.
- *Gráf felfújtja:* Egy gráf n-szeres felfújtján azt az új gráfot érjük, melyben minden pontot egy n elemű pontosztály helyettesít, és élek csak a pontosztályok között vannak, ha az eredeti gráfban a nekik megfelelő pontok között voltak. *Megjegyzés:* Ekkor két szomszédos pontosztály teljes páros gráfot alkot.

- *Komplementer gráf:* Egy gráf komplementerén azt az azonos ponthalmazú gráfot értjük, melynek pontosan azok a (definícióban megengedett) élek elemei, melyek az eredeti gráfnak nem voltak.
- *Egy n pontú gráf szomszédsági (adjacencia) mátrixa:* Olyan $[A] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, melyben (a gráf pontjainak egy I={1,…,n} indexelése esetén) $[A]_{ij}$ és $[A]_{ji}$ helyen 1 áll, ha az i és j indexű pont szomszédos, és 0, ha a két pont nem szomszédos.
- *Egy gráf spektruma:* A gráf szomszédsági mátrixának sajátértékeiből álló multihalmaz. Egy elemet többször is tartalmazhat.

1.2. Jelölések

- Gráf, továbbá pontjainak, ill. éleinek halmaza: **G**, **V(G)** ill. **E(G)**
- Az n pontú teljes gráf, csillag, kör, út: $\mathbf{K_n}$, $\mathbf{S_n}$, $\mathbf{C_n}$, $\mathbf{P_n}$
- Az n és m elemű pontosztályokból álló teljes páros gráf: $\mathbf{K_{n,m}}$
- Egy gráf átlagos, ill. maximális fokszáma: $\mathbf{d_{av}}$ ill. $\mathbf{d_{max}}$
- Egy gráf átmérője, ill. kromatikus száma: **diam(G)** ill. $\boldsymbol{\chi}$**(G)**
- Egy gráf komplementere ill. n-szeres felfújtja: $\mathbf{\overline{G}}$ ill. **G[n]**
- Mátrix, egységmátrix: **[A], [I]**
- Csupa 1 elemű mátrix, ill az [A] mátrix transzponáltja: **[J]**, $\mathbf{[A]^T}$
- Mátrix nyoma, ill. determinánsa: **Tr[A]** ill. **det[A]**
- Vektor, ill. csupa 1 elemű vektor: $\underline{\mathbf{v}}$ ill. $\underline{\mathbf{1}}$
- Két vektor merőleges, ill. párhuzamos: $\underline{\mathbf{v}} \perp \underline{\mathbf{w}}$ ill. $\underline{\mathbf{v}} \,||\, \underline{\mathbf{w}}$
- Egy mátrix oszlopvektorai: $\underline{\boldsymbol{\omega}}_i$
- A gráf egy x pontjának szomszédai: **N(x)**
- Egy gráf szomszédsági (adjacencia) mátrixa: $\mathbf{[A_G]}$
- Egy gráf (szomszédsági mátrixának) sajátértékei: $\boldsymbol{\lambda_i}$
- A legkisebb, ill. legnagyobb sajátérték: $\boldsymbol{\lambda_{min}}$ ill. $\boldsymbol{\lambda_{max}}$ vagy $\boldsymbol{\lambda_1}$
- Egy gráf spektruma: $\mathbf{Sp(G)=\{\, \lambda_{max} > \ldots > \lambda^{(k)} > \ldots > \lambda_{min} \,\}}$ – a multiplicitás az egyes sajátértékek kitevőjében, zárójelben szerepel. Ha |V(G)| = n, akkor multiplicitással számolva n darab sajátérték szerepel a felsorolásban.
- A állításból következik B állítás: A → B

  Megjegyzés: Ugyanezt a jelet (→) határértékek esetében is használom.
- Forrásmegjelölés: **[forrás sorszáma,** ***oldalszám*****]**

2. Lineáris algebrai alapok

Ez a fejezet a sajátértek fogalom rövid bevezetését és a témakörhöz kapcsolódó lineáris algebrai ismereteket tartalmazza. Mivel egy egyszerű, irányítatlan gráf szomszédsági mátrixa mindig szimmetrikus és az elemei egész számok, ezért a dolgozatban szereplő minden mátrix $\mathbb{R}^{n\times n}$-belinek tekintendő, (kivéve, ha külön jelezve van, hogy nem ilyen). A fejezet alapja a Freud Róbert: Lineáris Algebra könyv **[1]**.

2.1. Definíció: A $\underline{\omega}_1, \ldots, \underline{\omega}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha csak úgy teljesülhet, az $\Sigma\mu_i\underline{\omega}_i = 0$ egyenlőség, ha minden $\mu_i = 0$ ($\mu_i \in \mathbb{R}$).

Megjegyzés: Ha ez nem teljesül, akkor a vektorok összefüggők, és létezik olyan vektor, mely kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

2.2. Definíció: Egy mátrix oszloprangja / sorrangja k, ha az oszlopvektorai / sorvektorai között található k darab, melyek független rendszert alkotnak, és bármely k+1 darab már összefüggő. ($k \in \mathbb{Z}^+$)

2.3. Tétel: Egy mátrix oszlop- és sorrangja mindig egyenlő.

Megjegyzés: Ezt a közös értéket nevezzük a mátrix rangjának.

2.4. Definíció: Egy $[A] \in \mathbb{R}^{nxn}$ mátrixot teljes rangúnak nevezünk, ha rangja n. ($n \in \mathbb{Z}^+$)

Megjegyzés: Ha egy mátrix nem teljes rangú, rangja n-k, akkor det[A] = 0, és létezik k darab lineárisan független, nem nulla $\underline{\mu}$ vektor, melyekre $\Sigma\mu_i\underline{\omega}_i = 0$ teljesül. ($k \in \mathbb{Z}^+$)

2.5. Definíció: Egy [A] mátrixnak $\lambda \in \mathbb{R}$ szám sajátértéke, és $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektor λ-hoz tartozó sajátvektora, ha teljesül rájuk a következő egyenlet: $\mathbf{[A]\underline{v} = \lambda\underline{v}}$

Megjegyzés: Ha $\underline{v}$ sajátvektora [A]-nak, akkor $\alpha\underline{v}$ is, hiszen az egyenlőség mindkét oldalán megjelenik az α. ($\alpha \in \mathbb{R}$)

2.6. Állítás: Ha $[A]\underline{v} = \lambda\underline{v}$, akkor $[A]^2\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$, illetve $[A]^n\underline{v} = \lambda^n\underline{v}$. ($n\in\mathbb{Z}^+$)

Bizonyítás: $[A]\underline{v} = \lambda\underline{v}$, mindkét oldalt [A]-val balról szorozva $[A][A]\underline{v} = [A]\lambda\underline{v}$, ami a számmal való szorzás kommutativitása miatt $[A]^2\underline{v} = \lambda[A]\underline{v}$, ami eredeti sajátérték egyenlet alapján $[A]^2\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$. A fenti lépéseket alapján indukcióval bizonyíthatjuk a tetszőleges pozitív egész n esetén az egyenlőséget. □

2.7. Állítás: Minden sajátvektorhoz egyértelműen tartozik sajátérték.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\underline{v}$ sajátvektorhoz λ és μ különböző sajátértékek. Ekkor a definíció miatt $[A]\underline{v} = \lambda\underline{v} = \mu\underline{v}$, és mivel $\underline{v} \neq \underline{0}$, ezért $\lambda = \mu$. □

2.8. Definíció: Egy λ szám k multiplicitású sajátértéke [A] mátrixnak, ha létezik k darab (de nem több), független rendszert alkotó nem nulla vektor, melyek mind λ-hoz tartozó sajátvektorok.

2.9. Definíció: Altérnek nevezzük egy test feletti vektortér nem üres részhalmazát, ha a részhalmaz maga is vektortér a test felett az adott műveletekre.

2.10. Tétel: Egy T test feletti V vektortérben $U \neq \emptyset$ részhalmaz altér, akkor és csak akkor, ha $\underline{u}, \underline{v} \in U \rightarrow \underline{u}+\underline{v} \in U$ és $\underline{u} \in U, \lambda \in T \rightarrow \lambda\underline{u} \in U$.

Megjegyzés: Az egyik irány definíció alapján, a másikat nem bizonyítom.

2.11. Tétel: Egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok és a $\underline{0}$ alteret alkotnak. Az ilyen altereket az adott sajátértékhez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

Bizonyítás: Azt kell belátnunk, hogy a λ-hoz sajátvektorok halmaza zárt összeadásra és számmal ($\alpha \in \mathbb{R}$) való szorzásra. $[A](\underline{v}+\underline{u}) = [A]\underline{v}+[A]\underline{u} = \lambda\underline{v}+\lambda\underline{u} = \lambda(\underline{v}+\underline{u})$ teljesül, hasonlóan igaz a $[A](\alpha\underline{v}) = \lambda(\alpha\underline{v})$ egyenlőség is. □

2.12. Definíció: Egy [A] mátrix karakterisztikus polinomja: $k_{[A]}(\lambda) = \det[A-\lambda I]$.

2.13. Tétel: Egy λ szám [A] mátrix sajátértéke akkor és csak akkor, ha gyöke a mátrix karakterisztikus polinomjának, azaz $k_{[A]}(\lambda) = 0$.

Bizonyítás: A 2.5. definíció alapján λ sajátérték akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektor, hogy $[A]\underline{v} = \lambda\underline{v}$, azaz $[A-\lambda I]\underline{v} = \underline{0}$. Ez azt jelenti, hogy λ pontosan akkor sajátérték, ha ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, tehát ha $\det[A-\lambda I] = 0$. □

2.14. Definíció: Egy bázis ortonormált, ha a bázisvektorok normája 1 és páronként merőlegesek egymásra.

2.15. Definíció: Egy [A] mátrix szimmetrikus, ha $[A] = [A]^T$.

Megjegyzés: Ha egy mátrix szimmetrikus, akkor minden bázisban szimmetrikus.

2.16. Tétel (Főtengelytétel): Egy mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha szimmetrikus. **[8]**

Megjegyzés: A diagonális mátrix szimmetrikus, tehát a 2.15. megjegyzés miatt az egyik irány triviális. A másik irány a Gram-Schmidt ortogonalizációval bizonyítható.

Megjegyzés: Ez alapján az általunk vizsgált gráfok szomszédsági mátrixai diagonalizálhatók ortonormált bázisban. Ezt ki is fogjuk használni.

2.17. Tétel: Egy $n \times n$-es [A] mátrix diagonalizálható akkor és csak akkor, ha létezik n darab lineárisan független sajátvektora.

Megjegyzés: 2.16. és 2.17. alapján az általunk vizsgált gráfoknak létezik n darab lineárisan független sajátvektora.

Megjegyzés: A sajátvektorokhoz tartozik, multiplicitással számolva, n darab sajátérték, ezek állnak a diagonális mátrix főátlójában.

2.18. Tétel: Ortonormált bázisban egy diagonális mátrix sajátalterei páronként merőlegesek egymásra. **[8]**

Megjegyzés: 2.16. és 2.18. alapján ez minden általunk vizsgált gráfok szomszédsági mátrixára teljesülni fog. Ez szintén hasznos megállapítás.

2.19. Definíció: Egy mátrix irreducibilis, ha nem rendezhető olyan P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22} blokkokból álló alakba, melyben P_{11} és P_{22} négyzetes mátrixok, és P_{12} csupa nullából áll. *(v.ö. 5.1.1.)* **[7]**

2.20. Tétel (Perron-Frobenius): [6] Egy irreducibilis, nem negatív elemű mátrixnak mindig létezik egy valós, pozitív λ_1 sajátértéke, melyre igazak az alábbiak:

1) $\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ teljesül minden egyéb λ_i $(i = 2,\ldots,n)$ sajátértékre.

2) λ_1 egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak.

3) A λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektor komponensei pozitívak.

Megjegyzés: A tételt nem bizonyítom. Összefüggő gráfokhoz hasznos eszköz, ugyanis, mint látni fogjuk, a nem összefüggő gráfok szomszédsági mátrixára nem teljesül az irreducibilitás feltétele.

2.21. Definíció: Egy $[A] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nyoma a főátlóbeli elemek összege: $\mathrm{Tr}[A] = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$.

Megjegyzés: Egy mátrix nyoma minden bázisban ugyanannyi.

3. Egyszerűbb példák gráfok sajátértékeire

Ebben a fejezetben konkrét példákat mutatok gráfok sajátértékeire, melyeket a mátrixuk karakterisztikus polinomjának gyökeiként kapok meg. Emellett megjegyzések formájában jelzem, hogy milyen témákat érintenek a példák.

3.1. Teljes gráfok

A teljes gráfok szomszédsági mátrixában a főátlón kívül mindenhol 1-es áll, hiszen minden pont szomszédos. Tehát a K_n gráfok mátrixai így néznek ki:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \ddots & \mathbf{1} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{1} & \ddots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Ezek karakterisztikus polinomjai és sajátértékei néhány konkrét esetben:

- n=3: $-(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0 \rightarrow \lambda_1=2$, $\lambda_{2,3}=-1$, azaz $Sp(K_2)=\{2,-1^{(2)}\}$
- n=4: $-(\lambda+1)^3(\lambda-3) = 0 \rightarrow \lambda_1=3$, $\lambda_{2,3,4}=-1$, azaz $Sp(K_3)=\{3,-1^{(3)}\}$
- n=5: $-(\lambda+1)^4(\lambda-4) = 0 \rightarrow \lambda_1=4$, $\lambda_{2,3,4,5}=-1$, azaz $Sp(K_4)=\{4,-1^{(4)}\}$

Ezek alapján az a sejtés, hogy $Sp(K_n)=\{n-1,-1^{(n-1)}\}$. A 4. fejezetben láthatjuk, hogy mind az n-1 szám sajátértéksége, mind a -1 sajátérték (n-1)-szeres multiplicitása igazolható algebrai eszközökkel.

3.2. Csillagok

A csillagok szomszédsági mátrixában, egy adott i esetén az egész i. sorban és i. oszlopban 1-es áll (kivéve: $a_{ii}=0$), mindenhol máshol 0, hiszen minden pont csak a csillag „közepével” szomszédos. Tehát a S_n gráfok mátrixai így néznek ki:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Ezek karakterisztikus polinomjai és sajátértékei néhány konkrét esetben:

- n=2: $\lambda^2-1 = 0 \rightarrow \lambda_1=2$, $\lambda_{2,3}=-1$, azaz $Sp(S_2)=\{\pm 1\}$
- n=3: $\lambda(\lambda^2-2) = 0 \rightarrow \lambda_1=3$, $\lambda_{2,3,4}=-1$, azaz $Sp(S_3)=\{0, \pm\sqrt{2}\}$
- n=4: $\lambda^2(\lambda^2-3) = 0 \rightarrow \lambda_1=4$, $\lambda_{2,3,4,5}=-1$, azaz $Sp(S_4)=\{0^{(2)}, \pm\sqrt{3}\}$

Ezek alapján az a sejtés, hogy $Sp(S_n)=\{0^{(n-2)}, \pm\sqrt{n-1}\}$. A 4. fejezetben ez a sejtést is igazolom algebrai eszközökkel.

3.3. Teljes páros gráfok

A teljes páros gráfok ponthalmaza két olyan egymástól diszjunkt ponthalmazból (legyenek ezek A és B) áll, melyre igaz, hogy minden i∈A esetén N(i) = B, és minden j∈B esetén N(j) = A. Tehát egy halmazon belül nincs él, viszont minden pont össze van kötve a másik halmaz összes pontjával. Ez a szabályosság a gráf szomszédsági mátrixában is megjelenik:

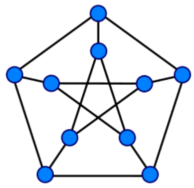
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Néhány konkrét gráf spektruma:

- $K_{2,2}$ gráf spektruma: $Sp(K_{2,2}) = \{0^{(2)}, \pm 2\}$
- $K_{2,3}$ gráf spektruma: $Sp(K_{2,3}) = \{0^{(3)}, \pm\sqrt{6}\}$

Ezek alapján sejtés: $Sp(K_{n,m}) = \{0^{(n+m-2)}, \pm\sqrt{nm}\}$. Bizonyítás a 4. fejezetben.

3.4. Petersen-gráf



A Petersen-gráf a gráfelmélet egyik gyakran használt példája. Ebben a témában is több szempontból is érdekes, többek között az a szembeötlő tulajdonsága, hogy 3-reguláris. A gráf spektruma: $Sp(Petersen)=\{3, 1^{(5)}, -2^{(4)}\}$.

Megjegyzés: Az eddig látott példák közül a K_n, $K_{n,n}$, és Petersen gráfok regulárisak. Az a jelenség, hogy ezekben az esetekben a regularitás foka a maximális sajátérték, egy általános tulajdonsága a spektrumnak. Az 4. és 5. fejezetben ezzel bővebben is foglalkozok.

Megjegyzés: Nem reguláris esetben is erős összefüggés mutatkozik a fokszámok halmaza és a maximális sajátérték között. (Lásd: 4. fejezet)

Megjegyzés: A Petersen gráf vagy bármely reguláris gráf szimmetriatulajdonságai szembeötlőek. Általánosságban is igaz, hogy minél szimmetrikusabb egy gráf, annál kevesebb sajátértéke lesz, nagy multiplicitásokkal. Ezzel a jelenséggel az 5. fejezetben foglalkozok.

4. Hogyan állapíthatjuk meg a gráfok sajátértékeit?

4.1. Alapvető megállapítások

4.1.1. Állítás: Legyen G n pontú gráf. Ekkor G n darab sajátértéke valós. **[2]**

Megjegyzés: Mivel $[A_G]$ szimmetrikus, az állítás triviális, mindenesetre érdemes kimondani ezt az állítást.

4.1.2. Állítás: G gráf sajátértékei mind a $[-d_{max}, d_{max}]$ intervallumba esnek. **[2]**

Bizonyítás: Legyen $\underline{v}$ sajátvektor (mely 2.5. miatt nem $\underline{0}$), legnagyobb abszolút értékű komponense pedig v_k. Az $[A_G]\underline{v}$ szorzat bármely koordinátájának abszolút értéke felülről becsülhető $d_{max}v_k$-val, tehát $[A_G]\underline{v}$ legfeljebb d_{max}-szorosa, legalább $-d_{max}$-szorosa $\underline{v}$-nek. □

4.2. A sajátvektorok felől közelítve

A sajátértékek keresését lehet a sajátvektorok irányából is kezdeni. Ehhez tekintsük a következő konstrukciót: Vegyünk egy G gráfot és rendeljünk minden $i \in V(G)$ ponthoz egy x_i valós számot, azaz a ponthalmazhoz egy $\underline{x}$ vektort.

4.2.1. Állítás: A fenti hozzárendelés sajátvektort rendel a gráfhoz, ha minden $i \in V(G)$-re igaz, hogy $j \in N(i)$ indexekre $\Sigma x_j = \lambda x_i$, valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ számra. Ez a λ az adott vektorhoz tartozó sajátérték.

Bizonyítás: A fenti egyenlet valójában az $[A_G]\underline{v} = \lambda\underline{v}$ sajátérték egyenlet egy-egy sorát jelenti, hiszen azokat az x_j-ket összegezzük, melyek az adott pont szomszédjaihoz tartoznak. Tehát az egyenlet bal oldalára igaz, hogy $j \in N(x)$ $\Sigma x_j = \Sigma[A_G]_{ij}x_j$, mert az $[A_G]_i$ sornak csak azok a j. elemei 1 értékűek, melyekre igaz, hogy $j \in N(i)$. Az egyenlet jobb oldalán pedig szemmel láthatóan a $\lambda\underline{v}$ megfelelő eleme áll. □

4.2.2. Állítás: A csillagok spektruma, $Sp(S_n) = \{0^{(n-2)}, \pm\sqrt{n-1}\}$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\underline{x}$ $[A_G]$ egy sajátvektora. Legyen a minden más ponttal szomszédos ponthoz rendelt szám x_1. Ekkor S_n egy sajátérték egyenlete így néz ki:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} \\ \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix}$$

1. eset:

Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Ekkor a fenti egyenletek alapján $x_1 = \lambda x_2 = \ldots = \lambda x_n$. Sajátvektor nem lehet $\underline{0}$, ezért $x_1 \neq 0$, tehát $x_1/\lambda = x_2 = \ldots = x_n$. A 2.5. megjegyzés miatt feltehető, hogy $1 = x_2 = \ldots = x_n$ és $x_1 = \lambda$.

Ezek alapján pedig a következő egyenletrendszer adódik:

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{I. } x_1 = \lambda\cdot 1 & \textit{(az i = 2, 3... n sor alapján)} \\ \textbf{II. } n-1 = \lambda x_1 & \textit{(1. sor)} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} n-1 = \lambda^2 \\ \underline{\pm\sqrt{n-1} = \lambda} \end{array}$$

Tehát az S_n csillagok sajátértékei között szerepel a következő két szám: $\pm\sqrt{n-1}$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig így néznek ki: $x_1 = \pm\sqrt{n-1}$, $x_2 = \ldots = x_n = 1$. □

2. eset:

Tegyük fel, hogy $\lambda = 0$. Akkor a sajátérték egyenlet: $[A_G]\underline{x} = 0\underline{x}$. Itt a bal oldalon a sajátérték definíciója miatt úgy kell $\underline{0}$-t kapni, hogy $\underline{x} \neq \underline{0}$. Tudjuk, hogy az $[A_G]\underline{x}$ szorzat koordinátái az első kivételével $1 \cdot x_1$, tehát ahhoz, hogy az eredmény nullvektort legyen, x_1-nek nullának kell lennie. Tudjuk továbbá, hogy a $[A_G]\underline{x}$ szorzat első koordinátája: $\sum_{i=2}^{n} x_i$, ezért olyan további koordinátákat keresünk, melyekre: $\sum_{i=2}^{n} x_i = 0$. Erre egy alkalmas független rendszer:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Ez a rendszer n-2 darab független vektorból áll, tehát n-2 dimenziós alteret alkotnak. Ezek a vektorok sajátvektorai a 0-nak, ami azt jelenti, hogy az S_n csillagoknak sajátértéke a 0, n-2-szeres multiplicitással. Tehát a csillagok spektruma valóban $\mathbf{Sp(S_n) = \{0^{(n-2)}, \pm\sqrt{n-1}\}}$. □

4.2.3. Állítás: Legyen $k,s \in V(G)$. Ha $N(s) = N(k)$, akkor a nulla sajátérték.

Bizonyítás: Ha két pont szomszédhalmaza egyenlő, akkor az $[A_G]$ mátrixban a hozzájuk tartozó sor/oszlop is ugyanolyan. Ehhez könnyen előállítható 0 sajátértéhez tartozó $\underline{x}$ sajátvektor, oly módon, hogy a k és s sorhoz/oszlophoz koordináták lehetnek egymás ellentettjei ($x_s = -x_k$), a többi koordináta pedig nulla. □

4.2.4. Állítás: Ha létezik a fenti módon (4.2.3.) előállítható $\underline{x}$ sajátvektor, akkor a nem nullához tartozó $\underline{y}$ sajátvektorokban $y_k = y_s$.

Bizonyítás: 2.18. alapján minden nem nullához tartozó sajátvektor merőleges minden nullához tartozó sajátvektorra, így a fenti módon előállíthatóra is. Az azt jelenti, hogy $\underline{x}$ és $\underline{y}$ skaláris szorzata nulla. Ebből az következik, mivel az $\underline{x}$-ben minden más koordináta nulla, hogy $0 = \underline{x}_s\underline{y}_s + \underline{x}_k\underline{y}_k$. Ha ehhez hozzávesszük, hogy $x_s = -x_k$, akkor a $0 = \underline{x}_s\underline{y}_s - \underline{x}_s\underline{y}_k$, tehát $0 = \underline{y}_s - \underline{y}_k$, vagyis $\underline{y}_s = \underline{y}_k$. □

4.3. Az adjacencia mátrix tulajdonságai alapján

Sok esetben egy vagy több sajátértéket a szomszédsági mátrix vizsgálatával is meg lehet találni. Ebben a függetlenség, a determináns és a nyom segítenek.

4.3.1. Állítás: Egy gráf adjacencia mátrixának nyoma nulla.

Megjegyzés: A definícióból adódóan.

4.3.2. Állítás: Egy gráf sajátértékeinek (multiplicitással számolt) összege mindig nulla.

Bizonyítás: Az adjacencia mátrix diagonalizálható ortonormált bázisban (2.16.), a diagonális mátrix főátlójában a sajátértékek állnak (2.17.), a főátlóbeli elemek összegéről tudjuk, hogy nulla (4.3.1.), tehát a sajátértékek összege nulla. □

4.3.3. Állítás: A $0 \in Sp(G)$ akkor és csak akkor, ha A_G nem teljes rangú ($\det[A_G] = 0$).

Bizonyítás: A_G diagonalizálható ortonormált bázisban (2.16.), a diagonális mátrix főátlójában a sajátértékek állnak (2.17.), ebben az esetben a determináns ezek szorzata, tehát ha a 0 sajátérték, akkor a szorzat is nulla és fordítva. □

4.3.4. Állítás: Ha $[A_G]$ rangja n-k, akkor $0^{(k)} \in Sp(G)$. ($|V(G)|=n$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $|V(G)|=n$, $k<n$)

Bizonyítás: Ha k=0, akkor $[A_G]$ teljes rangú, $\det[A_G] \neq 0$ és 0 nem sajátérték. Ha k>0, akkor $[A_G]$ oszlopvektorai ($\underline{\omega}_i$) nem függetlenek, azaz létezik olyan $\underline{\mu}$ vektor, hogy $\Sigma\mu_i\underline{\omega}_i = 0$ úgy, hogy $\underline{\mu} \neq \underline{0}$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\underline{\mu}$ sajátvektor $\lambda=0$ sajátértékhez. Ha $[A_G]$ nem teljes rangú, rangja n-k, akkor k darab lineárisan független nem nulla $\underline{\mu}$ vektor létezik, melyek kielégítik a $\Sigma\mu_i\underline{\omega}_i = 0$ egyenletet (2.4.). Tehát k darab ilyen tulajdonságú sajátvektor van, ezért $0^{(k)} \in Sp(G)$. □

Megjegyzés: A gondolatmenetet megfordítva könnyen belátható, hogy ha $0^{(k)} \in Sp(G)$, akkor $[A_G]$ rangja legfeljebb n-k lehet.

4.3.5. Állítás: Ha $[A_G - \lambda I]$ rangja n-k, akkor $\lambda^{(k)} \in Sp(G)$. ($|V(G)|=n$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k<n$)

Bizonyítás: A 2.13. tétel alapján λ pontosan akkor sajátérték, ha $\det[A-\lambda I] = 0$. Ha k=0, akkor $[A_G - \lambda I]$ teljes rangú, $\det[A_G - \lambda I] \neq 0$, a λ nem sajátérték. Ha k>0, akkor bizonyítás a 4.3.4. pont bizonyításával analóg módon történik. □

Megjegyzés: A gondolatmenetet megfordítva könnyen belátható, hogy ha $\lambda^{(k)} \in Sp(G)$, akkor $[A_G - \lambda I]$ rangja legfeljebb n-k lehet.

4.3.6. Állítás: A teljes gráfok spektruma $\mathbf{Sp(G=K_n) = \{n-1, -1^{(n-1)}\}}$.

Bizonyítás: A dolgozat több pontján volt már szó a teljes gráf szomszédsági mátrixáról, melyet most ilyen alakban vizsgálunk: $[A_G] = [J-I]$. Könnyen be tudjuk látni, hogy a -1 (n-1)-szeres sajátérték, hiszen az $[A_G - \lambda I] = [J-I-(-1I)] = [J]$, melynek a rangja 1. Ekkor a 4.3.5. állítás alapján: $-1^{(n-1)} \in Sp(G)$.

Az n-1 sajátérték azzal van összefüggésben, hogy a gráf minden pontjának n-1 szomszédja van, azaz (n-1)-reguláris, tehát a szomszédsági mátrixának minden sorában n-1 darab 1-es van. Ekkor könnyen látható, hogy a $\underline{1}$ megfelelő sajátvektor az n-1 sajátértékhez. □

4.3.7. Állítás: A teljes páros gráfok spektruma $\mathbf{Sp(K_{n,m}) = \{0^{(n+m-2)}, \pm\sqrt{nm}\}}$.

Megjegyzés: A nem nulla sajátértékek bizonyítása nagyon hasonlóan történik, mint csillagok esetében, hiszen a csillagok is teljes páros gráfok valójában. A nullás sajátértékek hasonlóan bizonyíthatók, mint a teljes gráfok esetén. A $K_{n,m}$ szomszédsági mátrixának rangja n+m-2, ahogy az a 3.3. részben szereplő ábra alapján triviális, ezért a 4.3.4. állítás miatt $0^{(n+m-2)} \in Sp(K_{n,m})$.

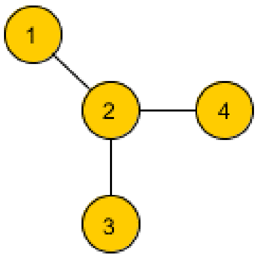
4.4. Egy másik gráf spektrumából kiindulva

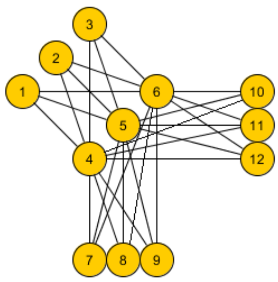
Egyszerűbb gráfok esetén a karakterisztikus polinom gyökeiként tudjuk meghatározni a spektrumot. Bizonyos esetekben a sajátvektorokra felírt egyenletek vagy a szomszédsági mátrix vizsgálatának segítségével kaphatjuk meg a sajátértékeket. Ha ezek a módszerek nem vezetnek eredményre, akkor még mindig próbálkozhatunk azzal, hogy megpróbáljuk előállítani a spektrumot egy „rokon” gráf spektrumából. Ez a felfújtak és bizonyos komplementerek esetében nagyon kényelmesen működik.

4.4.1. Állítás: G k-szoros felfújtjának spektruma: $Sp(G[k]) = k \cdot Sp(G) \cup \{0^{(n(k-1))}\}$, ahol k-val az Sp(G) ***elemeit*** szorozzuk, és G n pontú gráf. ($k \in \mathbb{Z}^+$)

Bizonyítás: Először tekintsük az állítás azon részét, hogy G sajátértékeinek k-szorosa sajátértéke lesz G[k]-nak. Ehhez a 4.2. fejezetben használt modellt alkalmazzuk, tehát a gráf pontjaihoz alkalmas x_i skalárokat rendelünk. A 4.2.1. állításból tudjuk, hogy az ezekből a skalárokból álló $\underline{x}$ vektor akkor sajátvektor, ha minden ponthoz olyan számot rendelünk, ami a szomszédos pontokhoz rendelt számok összegének λ-szorosa ($\lambda \in \mathbb{R}$). Ezek alapján könnyen látható, hogy ha $\lambda \in Sp(G) \rightarrow k \cdot \lambda \in Sp(G[k])$. Ugyanis az eredeti gráfban egy adott ponthoz tartozó skalárt rendeljük az új gráf megfelelő pontosztályának minden pontjához, így G[k]-ben minden pont szomszédaihoz tartozó skalárok összege pontosan k-szor lesz nagyobb, mint G-ben (az ősképükhöz szomszédaihoz tartozó) volt. Ezért ehhez a sajátvektorhoz tartozó sajátérték is k-szor nagyobb lesz.

Az, hogy a 0 sajátérték, rögtön látszik a 4.2.3. állítás alapján, hiszen egy gráf felfújtjában gyakori, hogy két pont szomszédainak halmaza megegyezik. Az, hogy legalább n(k-1)-szeres sajátérték, a 4.3.4 alapján látható be a legkönnyebben. Ehhez csak annyit kell meggondolni, hogy a szomszédsági mátrixban az egy pontosztályhoz tartozó sorok/oszlopok egyenlők, ahogy azt a S_3 és egy felfújtja $S_3[3]$ szomszédsági mátrixán is látni lehet:





$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Tehát egy adott pontosztályhoz tartozó vektorok lineárisan összefüggők, így (k-1)-gyel csökkentik a mátrix rangját. Ez mind az n pont esetén így van ezért a nulla legalább n(k-1)-szeres sajátérték. □

4.4.2. Állítás: Ha G-ben $\underline{1}$ sajátvektor, és $Sp(G) = \{ \lambda_1 = k \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \} \rightarrow \overline{G}$ spektruma kifejezhető Sp(G)-ből: $Sp(\overline{G}) = \{n\text{-}k\text{-}1 \geq -1-\lambda_n \geq -1-\lambda_{n-1} \geq \ldots \geq -1-\lambda_2\}$.

Bizonyítás: Az, hogy az $\underline{1}$ sajátvektor az pontosan azt jelenti, hogy a gráf reguláris. Ilyenkor a maximális sajátérték a regularitás foka. (lásd: 5.3.1. és 5.3.2.) Könnyen belátható, hogy ha G k-reguláris, akkor $\overline{G}$ n-k-1-reguláris, így legnagyobb sajátértéke n-k-1 lesz.

A többi sajátérték kiszámításához vizsgáljuk meg $\overline{G}$ adjacencia mátrixát: $[A_{\overline{G}}] = [J] – [I] – [A_G]$. Itt a csupa 1-es mátrixból kivettük a főátlót, így a teljes gráf szomszédsági mátrixát kaptuk, majd ebből kinulláztuk a G-beli éleknek megfelelő 1-eseket.

A továbbiakban ki fogjuk használni, hogy $[A_{\overline{G}}]$ diagonalizálható ortonormált bázisban (2.16.), ezért a sajátalterei páronként merőlegesek; illetve, hogy a Perron-Frobenius tétel miatt n-k-1 egyszeres multiplicitású sajátérték.

Legyen a λ_i-hez tartozó sajátérték $\underline{v}_i$ és $\lambda_i < \lambda_1 \rightarrow$ a fentiek miatt $\underline{v}_i \perp \underline{1}$ $(=\underline{v}_1)$. Ez azzal jár, hogy minden λ_i $(<\lambda_1)$ vektor koordinátáinak összege nulla, hiszen csak így tud nullát adni $\underline{v}_i$ és $\underline{1}$ skalárszorzata, ami a merőlegesség feltétele.

Ekkor, ha G sajátértékegyenlete $[A_G]\underline{v}_i = \lambda_i\underline{v}_i \rightarrow [A_{\overline{G}}]\underline{v}_i = (-1-\lambda_i)\underline{v}_i$, ugyanis a $[A_{\overline{G}}]\underline{v}_i = [J]\underline{v}_i – [I]\underline{v}_i – [A_G]\underline{v}_i$ sajátértékegyenletet jobb oldalát tagonként nézve:

- $[J]\underline{v}_i = \underline{0}$, mert minden koordináta $\underline{v}_i$ koordinátáinak összege, ami 0.
- $[I]\underline{v}_i = \underline{v}_i$, mert az egységmátrixszal való szorzás nem változtat a vektoron.
- $[A_G]\underline{v}_i = \lambda_i\underline{v}_i$, a G gráf sajátértékegyenlete.

Ez összegezve: $[A_{\overline{G}}]\underline{v}_i = (-1-\lambda_i)\underline{v}_i$, mely egyenlet alapján bizonyított, hogy $Sp(\overline{G}) = \{n\text{-}k\text{-}1 \geq -1-\lambda_n \geq -1-\lambda_{n-1} \geq \ldots \geq -1-\lambda_2\}$. □

Megjegyzés: A fentiekből az is kiderült, hogy G és $\overline{G}$ sajátvektorai ugyanazok.

4.5. Becslés a gráfok legnagyobb sajátértékére

Előfordulhat, hogy egy gráf sajátértekéit nem tudjuk meghatározni. Ilyenkor lehetőségük van becsült értékkel dolgozni. Ez a becslés hasznos lesz a továbbiakban.

4.5.1. Állítás: Egy tetszőleges gráf esetén a legnagyobb sajátértékre a következő becslés adható: $\max\{d_{av}, \sqrt{d_{max}}\} \leq \lambda_{max} \leq d_{max}$. **[3]**

Megjegyzés: Nem bizonyítom. **[3**, *6***]** Hasznos eszköz lesz a következő fejezetben.

5. A spektrum és a gráf szerkezeti tulajdonságainak összefüggései

Az eddigi fejezetekben főként a sajátértékek megtalálásáról volt szó. Ebben a fejezetben betekintést szeretnék nyújtani abba, hogy mit is mutatnak meg a sajátértékek a gráfról, milyen összefüggések vannak a spektrum és a gráf szerkezet között. Ebben a fejezetben az összefüggőségnek nagy jelentősége van, hiszen ezen múlik a Perron-Frobenius tétel alkalmazhatósága. Ezért először az összefüggőségről fogok írni, a későbbikben pedig jelzem, hogy az adott állításban összefüggő vagy nem összefüggő gráfról van szó.

5.1. Összefüggőség

5.1.1. Állítás: Ha G összefüggő, akkor a maximális sajátérték egyszeres és választható hozzá pozitív komponensű sajátvektor. **[2]**

Bizonyítás: Ha G összefüggő, akkor $[A_G]$ irreducibilis, ezért a Perron-Frobenius tételből következik az állítás. Vizsgáljuk meg, hogy tényleg irreducibilis-e az összefüggő gráfok mátrixa! Ehhez tegyük fel indirekt, hogy az összefüggő gráfok mátrixa nem irreducibilis, tehát ha felosztjuk 2.19. szerint blokkokra, akkor P_{21} és P_{12} (a szimmetria miatt) csak nullákat tartalmaznak:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P_{11}} & \boldsymbol{P_{12}} \\ \boldsymbol{P_{21}} & \boldsymbol{P_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0/1} & \cdots & \mathbf{0/1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0/1} & \cdots & \mathbf{0/1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0/1} & \cdots & \mathbf{0/1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0/1} & \cdots & \mathbf{0/1} \end{bmatrix}$$

Legyen P_{11} k x k nagyságú blokk. Ha a mátrixban kódolt információt megvizsgáljuk, akkor látjuk, hogy a gráf első k pontjából nem vezet él a k-nál nagyobb indexű pontokba, hiszen minden lehetséges helyen nulla áll. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy a gráfban van két pontosztály melyek között nincsnek élek, tehát a gráf nem összefüggő. Ellentmondásra jutottuk, melynek következménye, hogy az összefüggő gráfok mátrixa tényleg irreducibilis. □

Megjegyzés: Ezzel az állítással annyit biztosan megtudtunk, hogy ha a legnagyobb sajátérték multiplicitása nagyobb mint 1, akkor a gráf nem összefüggő.

5.1.2. Állítás: Ha G nem összefüggő, akkor Sp(G) a komponensek spektrumának diszjunkt uniója. Ha G két komponensből áll (G_1 és G_2), melyek között nincs él, akkor $Sp(G) = Sp(G_1) \cup Sp(G_2)$, ahol a multiplicitások összeadódnak.

Bizonyítás: Az 5.1.1. állításhoz tartozó ábráról kiderült, hogy valójában a nem összefüggő (két komponensből álló) gráfok mátrixa néz így ki. Triviális, hogy ekkor az egyes komponensek adjacencia mátrixa a P_{11} és a P_{22} blokkok. Így tehát az egyes komponensekhez tartozó sajátvektorok, alkalmas mennyiségű nullával kiegészítve, G-nek is az eredeti sajátértékükhöz tartozó sajátvektorai lesznek. Tehát a fent leírt módon G_1 és G_2 spektrumát „egyesítve" G spektrumát kapjuk. Több komponens esetén teljesen hasonlóan működik minden. □

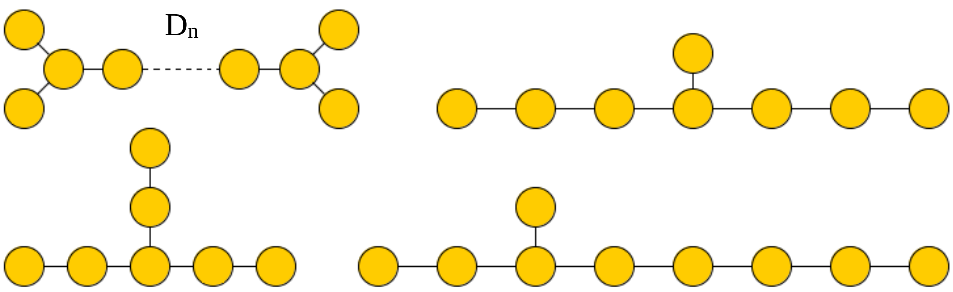
Megjegyzés: Ez alapján, több gráf egymás mellé helyezésével létrejött új gráf spektruma az eredeti gráfok spektrumainak diszjunkt uniója.

5.1.3. Állítás: Ha G k-reguláris, akkor a k sajátérték multiplicitása egyenlő a komponensek számával. ($k \in \mathbb{Z}^+$, a reguláris gráfokról bővebben: 5.3. fejezet)

Bizonyítás: A dolgozat több pontján is említettem, hogy reguláris gráfok esetén a regularitás foka a maximális sajátérték (lásd: 5.3.2.). Ha G összefüggő, akkor a Perron-Frobenius tétel miatt k multiplicitása 1. Ha a gráf nem összefüggő, akkor az egyes komponensek spektrumának legnagyobb eleme k. Az 5.1.2 állítás alapján ekkor Sp(G)-ben k multiplicitása a komponensek számával egyenlő. □

5.2. Gráfok, melyek legnagyobb sajátértéke legfeljebb 2.

5.2.1. Állítás: Ha egy összefüggő gráf legnagyobb sajátértéke 2, akkor a gráf vagy C_n (n>2) vagy egy speciális fa az alábbiak közül:



Megjegyzés: Nem bizonyítom, forrás **[5,** *34.***]**. C_n esetén a 4.5.1. becslés alapján triviális, hogy a legnagyobb sajátérték 2, hiszen $d_{av} = d_{max} = 2$. Érdemes megfigyelni, hogy önmagában az, hogy egy gráfnak sok pontja van, még nem jelenti azt, hogy nagy sajátértékek tartoznának hozzá, lásd C_n vagy D_n (bal felül).

5.2.2. Állítás: Ha egy összefüggő gráf legnagyobb sajátértéke, $\lambda_1 \leq 2$, akkor a gráf részgráfja az 5.2.1. állításban felsorolt gráfok egyikének.

Megjegyzés: Nem bizonyítom, forrás **[5,** *34.***]**.

5.2.3. Állítás: Ha egy összefüggő gráf legnagyobb sajátértéke, $\lambda_1 \geq 2$, akkor a gráf részgráfként tartalmazza az 5.2.1. állításban felsorolt gráfok egyikét.

Megjegyzés: Nem bizonyítom, forrás **[5,** *35.***]**.

5.3. Regularitás

5.3.1. Állítás: Egy összefüggő gráf reguláris akkor és csak akkor, ha az $\underline{1}$ sajátvektor. Ekkor az $\underline{1}$-hez tartozó sajátérték a regularitás foka.

Bizonyítás: Egy gráf k-reguláris ($k \in \mathbb{Z}^+$), akkor és csak akkor, ha adjacencia mátrixának minden sorában (és oszlopában) k darab 1-es van. Ha egy mátrixot az $\underline{1}$ vektorral szorzunk, akkor olyan vektort kapunk eredményül, melynek minden koordinátája a mátrix megfelelő sorában lévő elemek összege, vagyis ebben az esetben k. Tehát a szorzás eredménye $k\underline{1}$, ezért az $\underline{1}$ sajátvektor, k pedig sajátérték. A fordított gondolatmenet az állítás másik irányát bizonyítja. □

5.3.2. Állítás: A reguláris gráfok maximális sajátértéke a regularitás foka.

Bizonyítás: 5.3.1. miatt a regularitás foka sajátérték. Mivel ez egyben a legnagyobb fokszám is, ezért 4.5.1. miatt a sajátérték legfeljebb ennyi lehet. □

5.3.3. Állítás: Egy összefüggő G gráf esetén $k = d_{max}$ szám akkor és csak akkor sajátérték, ha G k-reguláris. **[2]**

Bizonyítás: A másik irányt már eléggé körüljártuk, már csak azt kell belátni, hogy ha $k = d_{max}$ sajátérték, akkor G k-reguláris. Ehhez vegyünk egy k-hoz tartozó $\underline{v}$ sajátvektort, illetve nevezzük egy $m \in V(G)$ pontot maximálisnak, ha a hozzá tartozó koordináta $v_m \geq v_i$ minden i-re ($0<i<n$, $i \in \mathbb{Z}^+$). Az $[A]\underline{v}$ szorzat minden koordinátája legfeljebb kv_m, másrészt $([A]\underline{v})_m = kv_m$, tehát m foka valóban k. Továbbá ebből a következik, hogy m összes szomszédjához tartozó koordináta értéke is v_m, tehát maximális pont szomszédjai is maximálisak. Mivel a gráf összefüggő, ezért végső soron minden pont maximális, tehát minden pont fokszáma k, azaz a gráf k-reguláris. □ **[11]**

5.4. Párosság

5.4.1. Állítás: Egy összefüggő gráf páros akkor és csak akkor, ha a legnagyobb sajátérték -1-szerese is sajátérték. **[6]**

Megjegyzés: Egy páros gráf szomszédsági mátrixa a képen látható módon négy blokkból áll. P_{11} és P_{22} csupa nulla, a másik két blokk a pontosztályok közötti szomszédságokat mutatja.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0/1 & \cdots & 0/1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0/1 & \cdots & 0/1 \\ 0/1 & \cdots & 0/1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0/1 & \cdots & 0/1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Legyen λ_1-hez tartozó sajátvektor $\underline{v}$, illetve a két pontosztály elemszáma n és m, ebben a sorrendben ($n,m \in \mathbb{Z}^+$). Ekkor a $-\lambda_1$-hez tartozó sajátvektort úgy állítjuk elő, hogy $\underline{v}$ első n elemének vagy utolsó m elemének előjelét felcseréljük. Ez a módszer csak a páros gráfok esetében működik, a szomszédsági mátrix szerkezetéből kifolyólag.

A másik irány részletes bizonyítása a **[12]** forrásban található.

5.4.2. Állítás: Egy gráf páros akkor és csak akkor, ha a minden sajátérték ellentettje is sajátérték azonos multiplicitással.

Megjegyzés: Összefüggő esetben a nem nulla sajátértékek ellentettjeihez tartozó sajátvektorok az 5.4.1. megjegyzésben leírtak szerint állíthatók elő. Nem összefüggő esetben az egyes komponensek külön-külön is párosak, így spektrumaik szimmetrikusak az origóra, tehát ezek diszjunkt uniója (5.1.2.) is az lesz.

A másik irány részletes bizonyítása a **[12]** forrásban található.

5.4.3. Állítás: A $-d_{max}$ szám akkor és csak akkor sajátérték, ha G d_{max}-reguláris páros gráf. Ebben az esetben a $-d_{max}$ sajátérték multiplicitása is a komponensek számával azonos. **[2]**

Megjegyzés: A regularitásról és a párosságról szóló fejezetek állításai és bizonyításai alapján könnyen belátható.

5.5. Meghatározott hosszúságú séták két pont között

5.5.1. Állítás: Egy gráfban az i. és j. pontok közötti k hosszúságú séták száma $[A_G]_{ij}^k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$), speciálisan $[A_G]_{ii}^2$ az i. pont fokszáma, tehát $Tr[A_G]^2 = 2|V(G)|$.

Bizonyítás: Ha a $[A_G]$-t önmagával szorozzuk, akkor $[A_G]_{ij}^2$ az i. sor és a j. oszlop szorzata lesz, értéke pedig az i és j pontok közös szomszédainak száma. Ebből következik, hogy $[A_G]^2$ főátlójában a pontok fokszámai vannak, vagyis $Tr[A_G]^2 = 2|V(G)|$, illetve a főátlón kívüli elemek, $[A_G]_{ij}^2$, értéke az i és j pontok között vezető 2-hosszú séták száma. Az $[A_G]^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$), esetén az [A]-val való szorzás megszámolja azokat a pontokat, ahova egy adott pontból az addigi n-hosszú sétákat folytani lehet, így $[A_G]^{n+1}$ megfelelő eleme az eggyel hosszabb séták számát jelöli. Ez alapján teljes indukcióval bizonyítható az állítás. □

5.5.2. Állítás: G összefüggő gráfban a k-hosszú séták száma összefügg a legnagyobb sajátértékkel. Ha G nem páros, akkor $\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{M_k}$, ha G páros, akkor $\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{M_{2k}}$, ahol $M_k = \sum_{i\in V(G)} [A_G]_{ii}^k = \sum_{i\in V(G)} \lambda_i^k$. ($k \in \mathbb{Z}^+$) **[13]**

Bizonyítás: Az első bizonyítandó dolog, az M_k definíciójában szereplő egyenlőség, mely azért teljesül, mert $[A_G]$ és bármely hatványának nyoma a sajátértékek összegével egyenlő. Ezért tehát $\sqrt[k]{M_k}$-ra igaz, hogy:

$$\sqrt[k]{M_k} = \sqrt[k]{\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k} = |\lambda_1| \sqrt[k]{1 + \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} + \cdots + \frac{\lambda_{n2}^k}{\lambda_1^k}}$$

A Perron-Frobenius tétel miatt $\lambda_1 \geq \lambda_i$ (i=2…n), az összefüggőség (5.1.1.) miatt $\lambda_1 \neq \lambda_i$ (i=2…n). Tehát ha $|\lambda_1|$-et kiemeljük a gyök alól, akkor a gyök alatt 1-en kívül minden tag abszolút értékben kisebb mint 1, ezért $n \to \infty$ esetén a kifejezés határértéke λ_1.

A páros és páratlan esetet azért kell szétválasztani, mert ha egy gráf páros, akkor a $\lambda_n = -\lambda_1$, melynek a páratlan hatványai negatívak lesznek és abszolút értékben λ_1 megfelelő hatványaival egyenlők, ezért $|\lambda_1|$ kiemelése után a gyök alatt l, -1 illetve abszolút értékben 1-nél kisebb tagok lesznek. Ebből kifolyólag a határérték eredménye nulla is lenne. Ez a probléma kiküszöbölhető, ha eleve csak a páros hatványokat által alkotott sorozat határértékét nézzük. Ebben az esetben a bizonyítás teljesen analóg a nem páros esettel. □

5.5.3. Állítás: Ha G összefüggő gráf, akkor $\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{N_k}$, ahol $N_k = \sum_{i,j\in V(G)} [A_G]_{ij}^k$.

Megjegyzés: A fentiekhez hasonlóan bizonyítható, lásd **[13]**. A háttérben az áll, hogy a mátrix többi eleme nem tér el nagyságrendileg a főátlóbeli elemektől.

5.6. Szimmetria

A 3.4. részben megjegyeztem, hogy hogy minél szimmetrikusabb egy gráf, annál kevesebb sajátértéke lesz, nagy multiplicitásokkal. Láttuk, hogy a „lehető legszimmetrikusabb" gráfok, a teljes gráfok, spektruma csak két különböző sajátértéket tartalmaz. Ebben a részben megvizsgálom, a teljes gráfok és az erősen reguláris gráfok példáján, hogy vajon a kevés különböző sajátérték tényleg szükségszerűen szimmetriát jelent-e.

5.6.1. Állítás: Ha egy összefüggő G gráfnak pontosan 2 különböző sajátértéke van, akkor egy teljes gráfról van szó.

Bizonyítás: A Perron-Frobenius tétel miatt a nagyobb sajátérték multiplicitása 1, tehát a másik sajátérték (λ_2) multiplicitása n-1. A 4.3.5. ponthoz tartozó megjegyzés alapján könnyen látszik, hogy az $[A_G - \lambda_2 I]$ rangja legfeljebb 1 lehet, tehát oszlopvektorai közül bármely kettő összefüggő. Ez csak úgy lehetséges (tekintve, hogy adjacenciamátrixról van szó) ha $[A_G]$-ben a főátlón kívül minden elem 1. Ez pedig a teljes gráf mátrixa. □

5.6.2. Állítás: G erősen reguláris (n, k, α, β) paraméterekkel, akkor és csak akkor, ha $\overline{G}$ is erősen reguláris (n, n-k-1, n−2k+β−2, n−2k+α) paraméterekkel. **[4]**

Megjegyzés: A komplementer fogalmának ismeretében könnyen belátható.

5.6.3. Állítás: G erősen reguláris a következő paraméterekkel (n, k, α, β), akkor és csak akkor, ha $[A_G]^2$ főátlójában minden elem k, a többi $[A_G]_{ij}$ elem α vagy β, attól függően, hogy i és j szomszédosak-e vagy sem.

Bizonyítás: Az 5.5.1. részben láthattuk, hogy $[A_G]^2$-ben a főátlóban a pontok fokszámai, a többi helyen az adott két pont közös szomszédainak száma áll. Ezek pontosan az erős regularitás esetében jelentik azt, hogy a főátlóban csupa k áll, a többi helyen pedig α vagy β, attól függően, hogy az adott pontok szomszédosak-e vagy sem. □

5.6.4. Állítás: G erősen reguláris, akkor és csak akkor, ha legfeljebb 3 különböző sajátértéke van. **[5]**

Megjegyzés: Ekkor az $\underline{1}$ természetesen sajátvektor, és a k sajátérték, mert a gráf reguláris. Azt kell belátni, hogy pontosan két további különböző sajátérték van. A bizonyítás azon múlik, hogy 5.6.3. alapján $[A]^2$ a következő alakban is felírható: $[A]^2 = k[I] + \alpha[A] + \beta[J\text{-}I\text{-}A]$. **[5**, *115***]**

5.7. Átmérő

5.7.1. Állítás: Ha G összefüggő diam(G) = k átmérőjű gráf, akkor legalább k+1 különböző sajátértéke van. ($k \in \mathbb{Z}^+$) **[5]**

Megjegyzés: Nem bizonyítom, bizonyítás: **[5**, *5***]**

5.7.2. Állítás: Ha Sp(G)-ben k különböző sajátérték van, akkor diam(G) $\leq$ k-1. ($k \in \mathbb{Z}^+$)

Megjegyzés: 5.7.1. állítást megfordítva kapjuk ezt az eredményt.

5.8. Kromatikus szám

5.8.1. Tétel: A G gráf kromatikus száma a következőképpen becsülhető a legnagyobb és a legkisebb sajátérték segítségével: $\chi(G) \geq 1 - \lambda_{max}/\lambda_{min}$. **[3]**

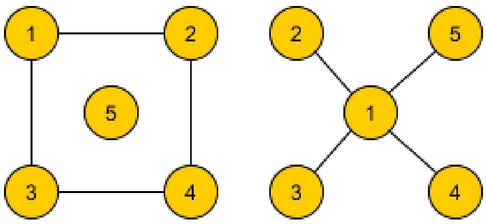
Megjegyzés: Hoffman-korlát, bizonyítás: **[3**, *7-8***]**

6. Mit nem mutat meg a gráf spektruma?

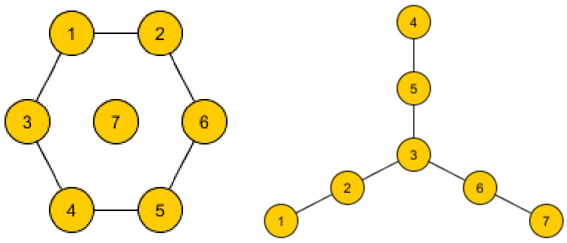
Az 5. fejezetben láthattuk, hogy a spektrum alapján a gráf számos szerkezeti tulajdonsága megállapítható. A teljes gráfok esetén a spektrum egyértelműen meg is határozza a gráfot. Ez sokszor nincs így, egy adott spektrum több gráfhoz is tartozhat, ezeket a gráfokat kospektrális gráfoknak nevezzük. Ha két gráf kospektrális, és valamilyen szerkezeti tulajdonságuk nem egyezik meg, akkor ebből arra következtethetünk, hogy spektrum alapján ez a tulajdonság nem megállapítható. Ebben a fejezetben erre szeretnék példákat mutatni.

6.1. Példák kospektrális gráfokra

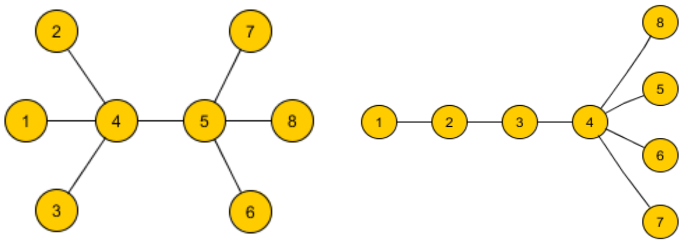
6.1.1. Példa: Az alábbi két gráf spektruma egyaránt $\{2, 0^{(3)}, -2\}$. **[5]**



6.1.2. Példa: Az alábbi két gráf spektruma egyaránt $\{2, 1^{(2)}, 0 , -1^{(2)}, -2\}$. **[5]**



6.1.3. Példa: Az alábbi két gráf karakterisztikus polinomja egyaránt $t^4(t^4 - 7t^2 + 9)$, tehát kospektrálisak. **[9]**



6.2. Összefüggőség nem reguláris esetben

Abban az esetben, ha egy gráf nem összefüggő, a spektrum az egyes komponensek spektrumának diszjunkt uniója (5.1.2.). Reguláris esetben az 5.1.3. állítás segítségével a spektrum alapján tudjuk a komponensek számát. Nem reguláris esetben viszont a spektrum alapján többnyire nem tudjuk megállapítani az összefüggőséget. Erre jó példa a 6.1.1. és a 6.1.2. pontokban szereplő két-két gráf, melyek közül egy-egy összefüggő, kospektrális „párjuk” viszont nem.

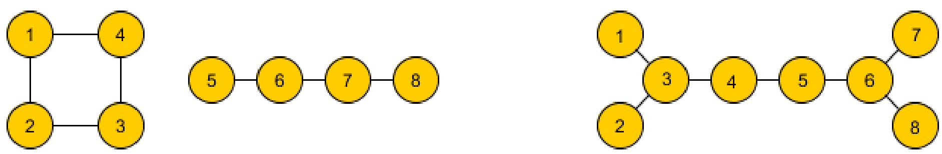
Megjegyzendő, hogy bármilyen esetben a legnagyobb sajátérték 1-nél nagyobb multiplicitása (a Perron-Frobenius tétel miatt) arra utal, hogy a gráf nem összefüggő, viszont a komponensek pontos számáról ez legfeljebb támpontot ad.

6.3. Fokszámok halmaza, maximális fokszám

A 4.5.1. állításból megtudtuk, hogy a legnagyobb sajátértékkel felülről tudjuk becsülni az átlag fokszámot, illetve annak négyzetével a maximális fokszámot. Mindazonáltal a fokszámok halmaza, vagy a maximális fokszám nem határozható meg pontosan a spektrumból. Erre jó példa az összes gráf a 6.1. részből, ahol mindegyik pár esetén különbözik a maximális fokszám, illetve jól látszik, hogy a fokszámok halamaza is teljesen különböző lehet azonos spektrum esetén is.

6.4. Létezik-e a gráfban teljes párosítás

Kőnig tétele alapján tudjuk, hogy a reguláris páros gráfokban van teljes párosítás. A spektrum alapján mind a regularitás, mind a párosság eldönthető. Kérdés, mi a helyzet abban az esetben, ha a gráf nem felel meg mindkét feltételnek. Nem reguláris esetben az alábbi gráfok, $C_4 + P_4$, illetve a vele kospektrális (az 5.2.1. fejezetben megismert) D_8 bizonyítják, hogy a spektrumból nem dönthető el a teljes párosítás léte.



A fenti példa tetszőleges P_n (ha $n \in \mathbb{Z}^+$ páros) esetén jó. **[10]**

Kitekintés

A dolgozat során tárgyaltam néhány gráfparaméter és a spektrum kapcsolatát. A témakör ennél természetesen sokkal több mindent rejt magában, számos bizonyítás során megkerülhetetlen a spektrális szemlélet. A témakörben való további tájékozódáshoz, elmélyüléshez az [5] és [6] forrásokat ajánlom, melyek nagy segítségemre voltak a dolgozat készítése során.

Felhasznált irodalom

[1] **FREUD RÓBERT**: Lineáris algebra – ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996

[2] **HAJNAL PÉTER**: Gráfelmélet / Diszkrét matematika MSc hallgatók számára, 13. előadás, 2009
http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/MSc_Diszkret/MSc_kombi09/ea13.pdf

[3] **LOVÁSZ LÁSZLÓ**: Eigenvalues of graphs, 2007
http://www.cs.elte.hu/~lovasz/eigenvals-x.pdf

[4] **SZŐNYI TAMÁS**: Szimmetrikus struktúrák – Typotex, Budapest, 2013

[5] **ANDRIES E. BROUWER, WILLEM H. HAEMERS**: Spectra of Graphs – Springer-Verlag, New York, 2012

[6] **DRAGAN STEVANOVIC**: Spectral Radius of Graphs – Academic Press, Amsterdam, 2015

[7] **STOYAN GISBERT, TAKÓ GALINA**: Numerikus módszerek 1. – Typotex, 2005
http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/numerikus-modszerek-1/ch04s07.html

[8] **KISS EMIL**: Lineáris algebra jegyzet – ELTE TTK, 2012
http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/Alg2_print_8.pdf és
http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/12t.n/Alg2_print_9.pdf

[9] **L. COLLATZ, U. SINOGOWITZ**: Spektren endlicher Grafen – Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 21, 63–77. oldal, 1957 in [5]

[10] **Z. BLÁZSIK, J. CUMMINGS, W. HAEMERS**: Cospectral regular graphs with and without a perfect matching – arXiv:1409.0630v2 [math.CO], 2014
https://arxiv.org/pdf/1409.0630.pdf

[11] **FRIEDL K., RECSKI A., SIMONYI G.**: Gráfelméleti feladatok – Typotex, Budapest, 2006 (17. fejezet, 25. feladat)

[12] **LOVÁSZ LÁSZLÓ:** Kombinatorikai problémák és feladatok – Typotex, 2000 (11. fejezet, 19. feladat)
http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/kombinatorikai-problemak/index.html

[13] **DRAGAN STEVANOVIC**: Walk counts and the spectral radius of graphs – Bulletin T. CXLVIII. de l’Acedémie serbe des sciences et des arts, Beograd, 2015
http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/Teze/Bilten40n.pdf