Gömbi háromszögek

Kiszi Gergely

Témavezető: Moussong Gábor

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematika Bsc, tanári szakirány

2017

Bevezetés

Először a középiskolai matematika tanárom, Dr. Kálmán Attila tett kisebb megjegyzéseket az euklideszi geometriától eltérő geometriákról, viszont a 12. évfolyamosok részére egy délutáni foglalkozáson többet mesélt a gömbi-, és a hiperbolikus geometriáról. Ez az egy alkalom azonban még mindig csak ízelítő volt, komolyabban a témába csak egyetemi éveim alatt tudtam elmélyülni.

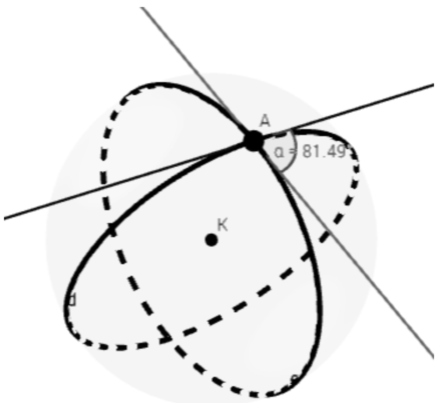
A síkháromszögek tulajdonságainak, nevezetes vonalainak és pontjainak valamik az azokhoz kapcsolódó tételeknek az oktatása már az általános iskolától kezdve jelen van a tananyagban. Szakdolgozatomban ezeknek próbálom a gömbi geometriai megfelelőit megtalálni, kimondani és bebizonyítani, úgy, hogy azok egy középiskolás számára is érthető legyen. Egyes tételeknél éppen ebből kifolyólag többféle bizonyítást is leírtam, ugyanis olyan állítást tartalmaz az egyik féle bizonyítás, ami nem szerepel a középiskolai tananyagban. Számos tételnek, illetve nevezetes ponthalmaznak azonban nem találtam gömbi megfelelőt, ilyen például a Feuerbach kör, vagy az Euler-egyenes. Ezeket általában többszöri sikertelen kísérlet után elvetettem, amelyeket először a Lénárt gömbön, majd a GeoGebra programmal próbáltam megszerkeszteni.

1. A gömbi geometria elemei

A gömbi geometriában az alakzatok egy gömb felületén helyezkednek el. Ennek a gömbnek a sugara tetszőleges nagyságú lehet, azonban szakdolgozatomban szereplő definíciók, tételek és bizonyítások mind az egységsugarú gömbön vannak kimondva. Mindegyiknek megvan a tetszőleges sugarú gömbön kimondott megfelelője. Középpontos szimmetriára hivatkozva ezeket könnyen megkaphatók.

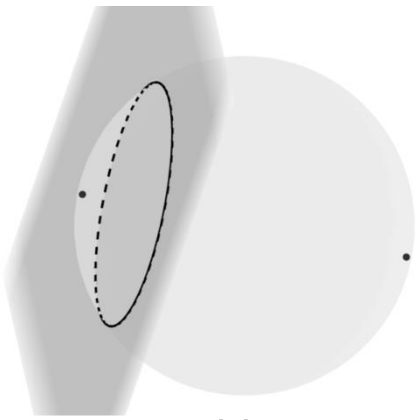
Adott O középponttól egységnyi távolságra lévő pontokat nevezzük a gömbi geometria pontjainak. Azok a síkok, melyek átmennek az O ponton, a gömbből egység sugarú köröket metszenek ki. Ezeket a köröket gömbi főköröknek nevezzük. Bármely két különböző pont között pontosan egy gömbi főkör húzható, abban az esetben, ha a két pont nem átellenes. A két pont között egyértelműen meghatározható az őket összekötő szakasz. Abban az esetben, ha a két pont átellenes végtelen sok főkör van, és végtelen sok őket összekötő szakasz.

Bármely két különböző gömbi főkörnek pontosan 2 metszéspontja van. Ezek a pontok átellenesek. Az egyik metszéspontnál a gömbi főkörök érintői által bezárt szöget, a gömbi egyenesek által bezárt szöget nevezzük.



Gömbi szögmérés

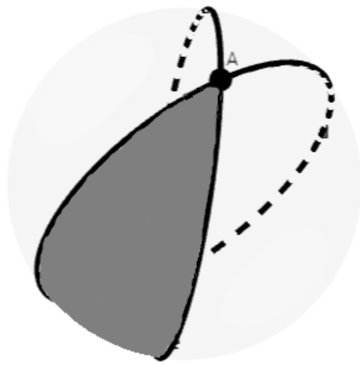
Adott két különböző pont a gömbön. A helyvektorai által közbezárt szög a két pontot összekötő szakasz hosszának nevezzük. Az átellenes pontok távolsága mindig π. Továbbá következik, hogy a gömbi egyenes hossza 2π. A szakaszfelező- illetve szögfelező egyenes meghatározása az euklideszi geometria definícióhoz rendkívül hasonló. A szakaszfelező merőleges az a gömbi főkör, amelyik a szakasz 2 végpontjától egyenlő távolságra vannak. Adott szög szögfelező főkörein azokat a főköröket nevezzük, amelynek pontjai a szög két szárától egyenlő távolságra van.



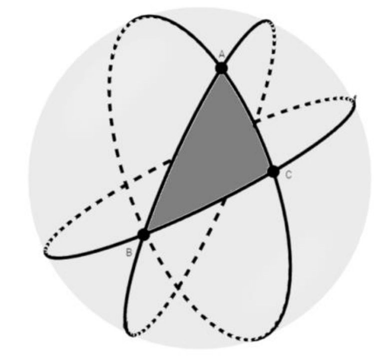
Gömbi kör

Vegyünk egy síkot, ami metszi a gömböt. A sík és a gömb metszetét nevezzük gömbi körnek. Az az egyenes, ami merőleges a síkra, és átmegy a gömb középpontján 2 pontban döfi a gömbfelületet. Ezek közül azt amegyiknek a távolsága kisebb a kör pontjaitól mint $\frac{\pi}{2}$, azt nevezzük a kör középpontjának. Ha a sík átmegy a középponton, egy gömbi főkört kapunk.

A gömbön a legkisebb zárt alakzat a gömbkétszög. Két átellenes pontot összekötő szakaszok által közrezárt terület gömbkétszögnek nevezzük. A gömbkétszög, melynek oldalai által bezárt szög α, területe 2α, hiszen $r = 1$, és a képlet egy ilyen gömbszeletnek $T_\alpha = 4 * r^2 * \pi * \frac{\alpha}{2*\pi}$.



Gömbkétszög



Gömbháromszög

A kör középpontjából kiinduló három nem egy síkban fekvő félegyenes, melyek közül semelyik kettő sem esik egy egyenesre, amelyek a gömböt 3 pontban metszik. A három pontot összekötő szakaszt gömbháromszögnek nevezzük.

Sepciális háromszögek

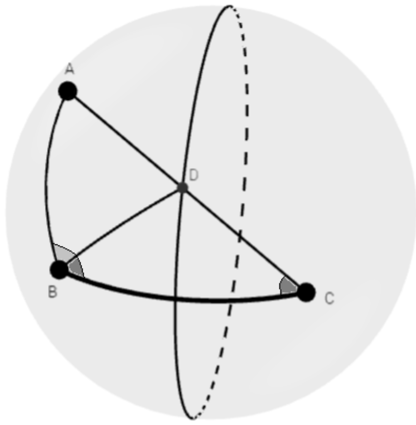
Egyenlőszárú gömbháromszönnek azt a gömbi háromszöget nevezzük melynek 2 oldala egyenlő egymással.

Szabályos gömbháromszögnek azt a gömbi háromszöget nevezzük, aminek minden oldala egyenlő. **Oktáns**nak azt a gömbháromszöget nevezzük, aminek oldalainak hossza $\pi/2$. Itt már rögtön észrevehető, hogy van olyan gömbháromszög, melynek szögösszege π-nél nagyobb. Ebből kiindulva létezik olyan gömbháromszög, melynek minden szöge tompaszög.

1.1.Tétel: A nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal található.

Bizonyítás:

Adott ABC háromszög. Állítsunk felező merőlegest az a oldalra. Amennyiben a háromszög A csúcsa rajta van ezen az egyenesen, így a háromszög egyenlőszárú. Ebből szimmetria miatt következik, hogy alapon fekvő szögei egyenlők.

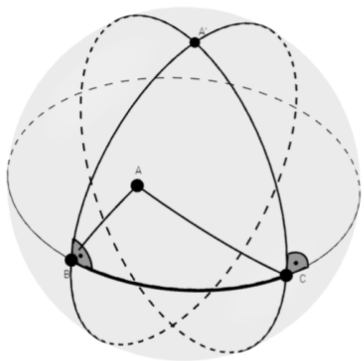


Nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal

Ha az A pont az említett főkör által határolt egyik, például az B pontot tartalmazó félgömb belsejében van, akkor $b > c$ és feladatunk, az $\beta > \gamma$ egyenlőtlenség bizonyítása. Mivelhogy a háromszög B és C csúcsa más-más félgömbön van, az a oldalt a felezőmerőleges D pontban metszi. Az AD gömbi szakasz két részre bontja a β szöget. Az említett szimmetriából következik, $BD = CD$, tehát az BDC alapon fekvő szögei egyenlők Ebből következik hogy: $\beta > \gamma$.■

2. Polaritás a gömbön

Ebben a fejezetben egy, a gömbi geometria sajátosságáról fogok megemlítés tenni. A polaritás, vagy dualitás, sok helyen jelen a matematikában, ám az elemi síkgeometriától eltér. Eddigiek alapján már észre lehet venni hogy egyenes és pont között a gömbön van egy érdekes kapcsolat. Minden ponthoz egyértelműen hozzá lehet rendelni egy egyenest, és minden egyeneshez hozzá lehet rendelni 2 átellenes pontot. Egy főkör síkjára merőleges egyenest állítva a kör középpontjában, az egyenes a gömböt 2 pontban metszi, amit a főkör **póluspontjainak** nevezünk. Ezeket a pontokat úgy kapjuk meg, hogy a főkör két tetszőleges nem átellenes pontjába merőlegest állítunk, és az egyenesek metszéspontjai a póluspontok.



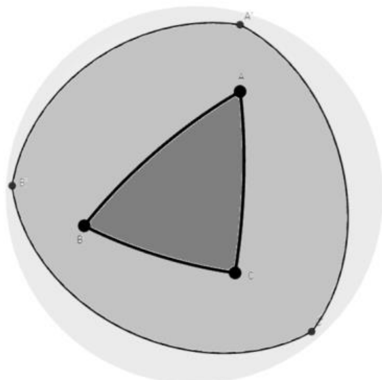
Póluspont

2.1.Definíció: Adott ABC gömbháromszög. Az a oldalegyenes póluspontjai közül, amelyik egy tartományban van a A csúccsal az a oldal egyenese által elkülönített félgömbök közül az a oldalhoz tartozó póluspontnak nevezzük. Jelölés: A'.

A definícióból következik, hogy $|C, C'| < \pi/2$. Legyen

C és C' pontokat összekötő szakaszt meghosszabbítva a c oldal egyenesét T_C pontba metszi. Akkor a $|C', T_C| = \pi/2$. Mivel a $T_C C'$ szakaszon rajta van a C pont így tényleg igaz hogy $C, C'| < \pi/2$.

2.2.Definíció: Adott ABC háromszög. Az oldalaihoz tartozó póluspontokból keletkezett háromszöget az ABC polárisháromszögének nevezzük.



Polárisháromszög

<u>2.3.Tétel:</u> Bármely gömbháromszög polárisháromszögének a polárisháromszöge önmaga.

Bizonyítás:

Tekintsük az ABC gömbháromszöget, és az ahhoz tartozó $A'B'C'$ polárisháromszöget. Mivel az eredeti háromszög oldalegyeneseből állított merőlegesek metszéspontjai a póluspontok, ezért:

$$|A, B'| = |A, C'| = \pi/2.$$

A *2.1.definíció* következményéből továbbá adódik, hogy $|A, A'| < \pi/2$

A fenti megfigyelések igazak a háromszög B és C pontjára is. Felcseréve a megfelelő csúcsokat, akkor def iníció szerint szerkesztve ugyan ezeket az eredményeket kapjuk meg, tehát az $A'B'C'$ háromszög polárháromszöge az ABC gömbháromszög. ∎

Megjegyzés: A fenti tétel miatt kimondhatjuk, hogy minden gömbháromszöghöz egyértelműen meghatározható egy másik gömbháromszög, amik egymásnak polárisháromszögei.

<u>2.4.Tétel:</u> A gömbháromszög bármely oldalának a polárháromszögbeli szögnek a kiegészítő szöge. Megfelelő jelölések mellett:

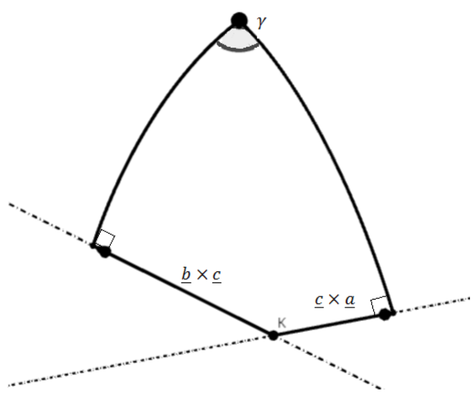
$$a + \alpha' = b + \beta' = c + \gamma' = \pi$$
$$a' + \alpha = b' + \beta = c' + \gamma = \pi$$

Bizonyítás:

Vizsgáljuk az ABC háromszöget. Az a oldalra merőlegeseket állítva kapjuk meg a póluspontot, tehát a A' helyvektora merőleges az $\underline{c}$ és $\underline{b}$ vektorokra. Ugyanígy elmondható $\underline{b'}$ vektorra, hogy merőleges az $\underline{c}$ és $\underline{a}$ vektorokra.

$$\underline{a'} = \underline{b} \times \underline{c} / |\underline{b} \times \underline{c}|$$
$$\underline{b'} = \underline{c} \times \underline{a} / |\underline{c} \times \underline{a}|$$

Vizsgáljuk meg az $\underline{a'}$és $\underline{b'}$ közrezárt szöget. Mivel szögeket vizsgálunk így a vektorok konstanssal való osztás elhagyható. Így elég csak a $\underline{b} \times \underline{c}$ és $\underline{c} \times \underline{a}$ vektorokkal foglalkozunk. A két vektor merőleges a háromszög oldalainak síkjára. Ebből következik, hogy a két vektor közrezárt szöge kiegészítő szöge a γ szögnek. ∎



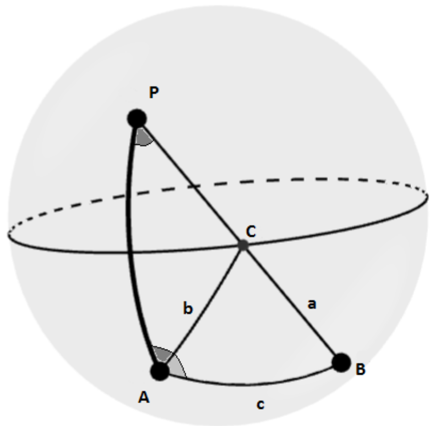
Megjegyzés: Oktánsnak a polárisháromszöge önmaga.

3. Terület és kerület

Már korábbi fejezetben találkoztunk a gömbkétszög területének a képletével. A következő fejezetben a gömbháromszög területének a képletnek meghatározásához szükséges tételeket szeretném ismertetni majd Gérald formulát.

<u>3.2. Tétel [háromszög-egyenlőtlenség]</u>: A gömbháromszög bármely két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldal.

Bizonyítás:



Tegyük fel hogy $a + b < \pi$. Meghosszabbítva az a oldalt a C csúcs irányában egy b hosszú szakasszal. Ennek a végpontja P. Mivel $|AC| = |CP|$, így egy egyenlőszárú háromszöget kaptunk, amelynek az alapon fekvő szögei egyenlők. Vizsgáljuk meg a ABP háromszöget. Az előbb kimondott tétel alapján, nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal található, azaz $c < |PB|$. $|PB| = b + a$ egyenlőséget behelyettesítve, a keresett egyenlőtlenséget kapjuk.

$a + b > \pi$ eset vizsgálata egyszerű, hiszen a gömbháromszög oldalai kisebbek mint π. Tehát ha $c < \pi$, akkor megkaptuk, hogy $a + b > c$.■

Ebben a fejezetben bizonyított tételek, és bizonyítások mindegyike, kisebb eltéréssel ugyan, de megtalálható az euklideszi geometriában. A kerületnek a síkgeometriában nincs felső korlátja, ezzel ellentétben a most következő tétel a gömbháromszög kerületéről mond ki felső- és alsó korlátot.

<u>3.3.Tétel:</u> A gömbi háromszög oldalösszege nagyobb, mint 0, de kisebb mint 2π.

Bizonyítás:

Vegyük az ABC gömbháromszöget. Az a, illetve a b oldal meghosszabbításával keletkezett BAC' háromszöget. Alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(\pi - a) + (\pi - b) > c.$$

Rendezve az egyenlőtlenséget a kerület felső korlátot kapjuk:

$$a + b + c < 2\pi. \blacksquare$$

Az alsó korlát egyértelmű, viszont szükséges a következő tételhez, ami a gömbháromszögek belső szögösszegére vonatkozik.

<u>3.4.Tétel:</u> A gömbháromszögek szögösszege π és 3π közé esik.

Bizonyítás:

Vegyünk egy tetszőleges ABC háromszöget, és pólusháromszögét. Az ABCháromszög szög- és a polárisháromszög oldalösszege $3 * \pi$, az *2.4.tétel* miatt.

$$\alpha + a' + \beta + b' + \gamma + c' = 3\pi$$

Az előző tétel miatt a polárisháromszög oldalösszegére fel lehet írni az alábbi összefüggést:

$$0 < a' + b' + c' < 2\pi$$

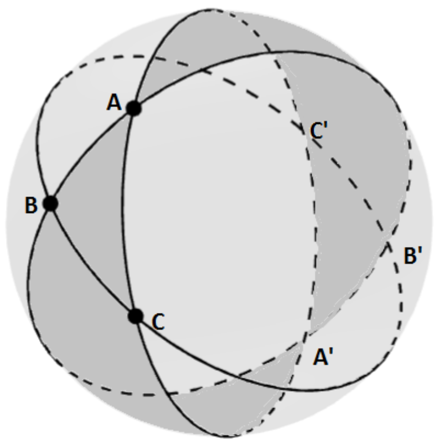
Ha kivonjuk a polárisháromszög oldalösszegét, akkor megkapjuk a bizonyítandó tételt:

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$$

<u>3.5.Tétel [Girard-tétel]:</u> A gömbháromszög területe a háromszög szögösszegének π-től vett különbsége.

$$T_\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

1.Bizonyítás:



Adott ABC háromszög. A gömbháromszög oldalegyenesei a gömböt kétszögekre bontják. Az átellenes pontokat jelöljük $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$. Az átellenes pontok által keletkezett $\dot{A}\dot{B}\dot{C}$ háromszög szimmetrikus az eredeti háromszöggel, ebből adódóan a területe is egyenlő. Adjuk össze azoknak a gömbkétszögek területét, amelyek tartalmazzák az ABC vagy az $\dot{A}\dot{B}\dot{C}$ háromszöget. Ezeknek a kétszögeknek a szöge: α, β, γ

$$2(T_\alpha + T_\beta + T_\gamma) = 4(\alpha + \beta + \gamma)$$

Vizsgáljuk meg, egész pontosan milyen gömbháromszögek keletkeznek az oldal egyenesek meghosszabbításával, és ezek milyen kapcsolatban állnak a fent összeadott kétszögekkel:

$$2T_\alpha = T_{ABC} + T_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}} + T_{\dot{C}\dot{B}A} + T_{CB\dot{A}}$$
$$2T_\beta = T_{ABC} + T_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}} + T_{\dot{A}\dot{C}B} + T_{AC\dot{B}}$$
$$2T_\gamma = T_{ABC} + T_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}} + T_{\dot{A}\dot{B}C} + T_{AB\dot{C}}$$

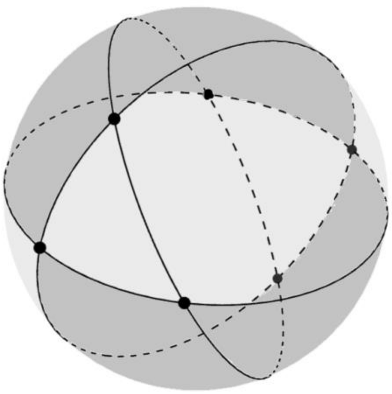
Az egyenlőségeket összeadva megkapjuk a bal oldalon a fenti egyenlőség bal oldalát, míg a jobb oldalon a gömbháromszögek kitesznek teljes gömbfelület és még azon felül marad $4T_{ABC}$

$$4(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi + 4T_{ABC}$$

Átrendezve megkapjuk a gömbháromszög területének képletét, amit Girard formulának nevezünk:

$$T_{ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi \ \blacksquare$$

2.Bizonyítás



Vegyük az előző bizonyítást alapul, azaz hosszabbítsuk meg az oldalegyeneseket. Vizsgáljuk a háromszög csúcsaihoz tartozó külső szögéhez tartozó gömbkétszöget. Egy ilyen kétszög sem fogja tartalmazni a gömbháromszöget, sem az átellenes pontokhoz tartozó háromszöget, ami az eredetivel egybevágó. Ha összeadjuk az összes ilyen gömbkétszög területét, a háromszög, és annak átellenes háromszög kivételével a gömb felületének maradékát kétszer fedik le.

$$2T_{ABC} = 4\pi - 2[(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)]$$

$$2T_{ABC} = 4\pi - 6\pi + 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$T_{ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi \ \blacksquare$$

<u>3.6.Tétel:</u> A gömbháromszög területének és a polárisháromszög kerületének összege, valamint a gömbháromszög kerületének és a polárisháromszögének területének összege 2π.

Bizonyítás:

A tétel bizonyításában a *2.4.tételt* alkalmazzuk, mégpedig a gömbháromszög szögeivel és a polárisháromszög oldalaival:

$$\alpha + a' + \beta + b' + \gamma + c' = 3\pi$$

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi + a' + b' + c' = 2\pi$$

A fenti egyenlőségben pont a tételben szereplő állítás szerepel. A tétel másik fele hasonló képen bebizonyítható. ∎

4. Nevezetes vonalak és pontok

Az alábbi fejezetben a háromszögek nevezetes pontjait fogjuk vizsgálni gömbön, külön kihangsúlyozva a különbségeket a gömbi- és az euklideszi geometriában tulajdonságban és szerkesztésben.

<u>4.1 Tétel:</u> Adott a gömbön egy pont, és a ponthoz tartozó érintő sík. Vetítsük a gömb ponjait és vonalait a középpontjából a síkra. Ekkor az összes olyan gömbi derékszög, amelynek egyik szögszárán rajta van a pont, a síkon lévő képe is derékszög lesz. ■

Bizonyítás:
Legyen a pont A, és sík S. Az A pontot középpontosan vetítve S síkra, önmagát kapjuk. A derékszögnél lévő csúcsot jelöljük B-vel. Vizsgáljuk azt a síkot (S_{ABK}), amelyik átmegy a $K, A, \text{és } B$ pontokon. Ez a sík tartalmazza az A, B pontokat tartalmazó főkör B pontbeli érintőjét. A B szögnél lévő másik főkőrt jelöljük e-vel. A főkőr síkja (S_e) szintén tartalmazza a B pontba húzott érintőt. Az S és S_{ABK} síkok metszete lesz az egyenes, amit a gömbi AB főkör középpontos vetítésével keletkezek. Az S és S_e metszete az e képe lesz. A síkok metszete egy pontban metszik egymást, ami a B pontnak a képe, mivel mind a három síkon rajta van. Mivel az érintők derékszögben metszették egymást a B pontban, így a képen keletkező szög is derékszög lesz.

4.1.Definíció: A háromszög magasságán a háromszög egy csúcsából a vele szemközti oldalra állított merőleges szakaszt nevezzük Jele: m_a, m_b, m_c.

A síkon ez a definíció minden oldalhoz egyértelműen meghatároz egy szakaszt. A gömbi geometria esetében viszont, ezt már nem mondhatjuk el. Egy háromszögnek ugyanis több derékszöge lehet. Vizsgáljuk meg azt az egyenlőszárú ABC háromszöget, aminek a c oldalon alapon fekvő szögei $\frac{\pi}{2}$ nagyságúak. Ebben az esetben, a c oldalhoz tartozó gömbi főkör bármely pontjából húzott merőleges átmegy a C ponton, és távolsága $\frac{\pi}{2}$. A sík geometriában a magasság egyenesek egyértelműsége miatt, bármely háromszögnek egyértelműen meg lehetett adni a magasságpontját, ez a gömbre nem igaz. Viszont ha legfeljebb egy derékszöge van a gömbháromszögnek, akkor a mind a három magasság vonal egyértelmű.

<u>4.2.Tétel:</u> Ha a gömbháromszögnek legfeljebb egy derékszöge van, a háromszög magasság egyenesei 2 pontban metszik egymást, amit a háromszög magasságpontjainak nevezünk.

Analitikus bizonyítás:

A magasságok főköreinek a síkjára bocsájtott merőleges vektort $\underline{m_a}$, $\underline{m_b}$, $\underline{m_c}$

Megjegyzés: Minden gömbi főkört meghatároz, a rá merőleges helyvektor.

A magasság egyenes merőleges az oldalakra, valamint az oldallal szemközti csúcsba mutató helyvektorra.

$$\underline{m_a} = \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$$

$$\underline{m_b} = \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a})$$

$$\underline{m_c} = \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b})$$

Abban az esetben, ha a gömbháromszögnek egynél több derékszöge lenn, akkor a fenti vektorok közül, legalább az egyik a $\underline{0}$-ral lenne egyenlő, hiszen merőleges vektorok vektoriális szorzata $\underline{0}$.

A magasságvonalak síkjai mindegyike tartalmazza a gömb középpontját, így ha a három merőleges vektor lineárisan összefüggő, akkor a három sík egy egyenesben metszi egymást, amelyik a gömböt 2 pontban metszik, melyek a gömbháromszög magasság pontjai. Elegendő belátni:

$$\underline{m_a} + \underline{m_b} + \underline{m_c} = 0$$

$$\underline{a} \times \left(\underline{b} \times \underline{c}\right) + \underline{b} \times \left(\underline{c} \times \underline{a}\right) + \underline{c} \times \left(\underline{a} \times \underline{b}\right) = 0$$

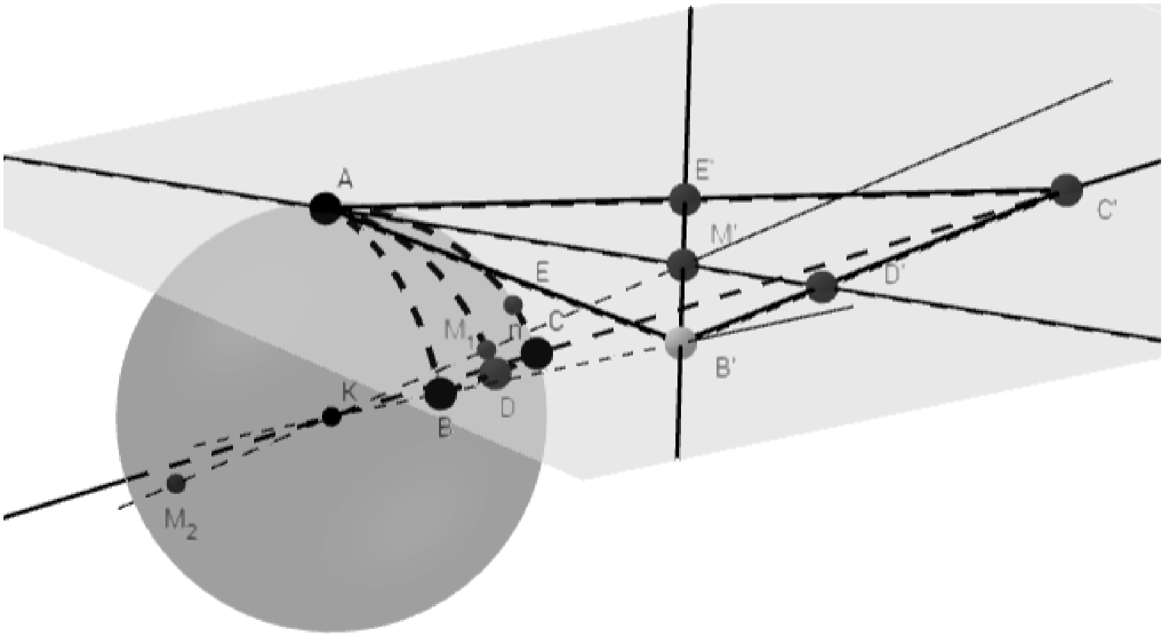
Használjuk a kifejtési tételt a zárójelek felbontására:

$$\left(\underline{a}\,\underline{c}\right)\underline{b} - \left(\underline{a}\,\underline{b}\right)\underline{c} + \left(\underline{b}\,\underline{a}\right)\underline{c} - \left(\underline{b}\,\underline{c}\right)\underline{a} + \left(\underline{c}\,\underline{b}\,\right)\underline{a} - \left(\underline{c}\,\underline{a}\right)\underline{b} = 0$$

A skaláris szorzás kommutatív tulajdonsága miatt, a fenti egyenlőség valóban teljesül, tehát a három sík egy egyenesben metszi egymást, ha a gömbháromszögnek legfeljebb 1 derékszöge van ■

Geometriai bizonyítás:

Vegyük az B pontban vett érintősíkot (S) és vetítsük ki a háromszög további csúcsait erre az S síkra. Jelöljük a pontokat: B' és C'. Az így keletkező $AB'C'$ háromszögnek létezik magasság pontja, M'. Az A hoz tartozó magasságvonal a $B'C'$ szakaszt a D' pontba metszi. Ennek a pontnak a képe a gömbön éppen az a pont lesz, ahol a gömbi BC szakaszra merőlegest állítva átmegy az A ponton. Mivel az AKB síkban minden vetítősugár benne van így a síkbeli magasságvonalak képe a gömbi magasságvonalai lesznek. Ebből adódóan a gömbháromszög magasságpontjai a KM' szakasz egyenesének és a gömbnek a metszéspontjai lesznek.



Abban az esetben ha a háromszögnek kettő vagy három derékszöge van, akkor a csúcsoknak nincs képe az érintő síkon. Ugyanis a K és B valamint a K és C pontokat összekötő egyenesek párhuzamosak lesznek az S síkkal. Ebből adódóan ha a gömbháromszögnek kettőnél több derékszöge van, nincs magasságpontja. ■

A háromszög köré-, és a háromszögbe írható kör középpontjára vonatkozó tételek, azon kevés tételek közé tartozik, ahol nem szükséges eltérnünk az euklideszi geometriában használt bizonyítástól, így az előbbinél a bizonyítást lépésről-lépésre nézzük végig, majd utóbbi tételt bizonyításától eltekintek.

<u>**4.3.Tétel:**</u> A háromszög oldalfelező merőlegesei két pontban metszik egymást. Ezek közül a pontok közül az egyiket, amelyiknek a csúcsoktól vett távolsága kisebb mint $\frac{\pi}{2}$, a háromszög köré írható körének a középpontjának nevezzük.

Bizonyítás:

A bizonyítás nagyon hasonló módon történik mint az euklideszi geometriában. Felhasználjuk a felező merőlegesek tulajdonságát, azaz hogy bármely pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától Tehát ha a c és a oldal felezőmerőlegese metszéspontja $K,$ akkor:

$$|AK| = |BK| \text{ és } |BK| = |CK|$$

Mivel a gömbi geometriában is igaz, hogy két egyenlő szakasz bármelyike egyenlő egy harmadikkal, akkor a másik, így $|AK| = |CK|$. Ebből következik hogy a K rajta van a b oldalfelező felezőmerőlegesén. ■

__**4.4.Tétel:**__ A háromszög szögfelezői 2 pontban metszik egymást. Ezek közül a pontok közül azt, amelyik az oldalaktól kevesebb mint $\frac{\pi}{2}$, távolságra van, a gömbháromszögbe írható kör közép pontja.

__**4.5.Tétel:**__ A gömbháromszög köré írható körének középpontja a pólusháromszögének a beírható körének a középpontja.

Bizonyítás:

Használjuk fel az *4.3.tételt*, az ABC háromszög szakaszfelező merőlegesei K pontban metszik egymást. A polárisháromszög csúcsai A', B', C'. AK szakasz egyenese merőleges a a' oldalra, talppontja $T_{A'}$, továbbá az $|AT_{A'}| = \frac{\pi}{2}$. Ugyan ez elmondható a BK és CK egyeneseire is. Mivel a K pont a háromszög köré írható kör középpontja, így $|AK| = |AB|$. Ebből következik, hogy $|T_{A'}K| = |T_{B'}K|$. Tehát a $T_{A'}K$ és $T_{B'}K$ egyenlő, és merőleges a polárháromszög oldalaira, és ez elmondható a $T_{C'}K$ szakaszról is, így a K pont a polárháromszög beírható körének pontja. ■

A fenti tétel bizonyításából az is kiderül, hogy a háromszög köré írt körének sugara és a polárisháromszögének a beírt körének sugara összesen $\frac{\pi}{2}$.

__**4.6.Tétel:**__ A gömbháromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a háromszög súlypontja.

Analitikus bizonyítás:

Ahogy a *4.2.tétel* bizonyításánál is használtuk az gömbi főkőröket meghatározó vektorokat, a súlypont analitikus bizonyításánál is erre hagyatkozunk. A súlyvonalak vektorai merőlegesek a csúcsok helyvektoraira, valamint a szakaszfelező pontokba mutató vektorokra.

$$\underline{s_A} = \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c})$$

$$\underline{s_B} = \underline{b} \times (\underline{c} + \underline{a})$$

$$\underline{s_C} = \underline{c} \times (\underline{a} + \underline{b})$$

. Mivel a súlyvonalak síkjainak van 1 közös pontjuk(O), így ha a három vektor lineárisan összefüggő, akkor a három sík metszete egy egyenes.

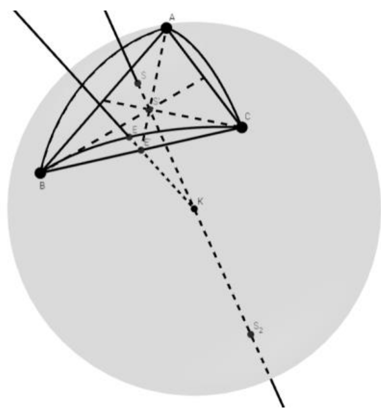
$$\underline{a} \times \left(\underline{b} + \underline{c}\right) + \ \underline{b} \times \left(\underline{c} + \underline{a}\right) + \underline{c} \times \left(\underline{a} + \underline{b}\right) = 0$$

$$\underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{b} = 0$$

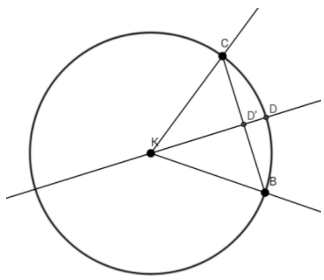
Felhasználva a $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$ azonosságot, megkapjuk hogy a vektorok összefüggőek. ■

Geometriai bizonyítás:

Vizsgáljuk meg az ABC nem gömbi háromszöget. Ennek a háromszögnek a súlyvonalai egy pontban metszik egymást.



Ha belátjuk, hogy O-ból középpontos vetítéssel a háromszög súlyvonalainak képe a gömbön, a gömbi háromszög súlyvonalai, akkor a gömbön is létezik súlypont. Vizsgáljuk a A-hoz tartozó súlyvonalat. Az A képe önmaga. Az oldalfelező pont képe a gömbi szakaszt szintén felezi (D), elvégre a húrfelező merőleges átmegy a középponton, és felezi a 2 pont közötti körívet. A vetítősugarak mindegyike benne van az A, O és D pontok által meghatározott síkban, így az A-hoz tartozó súlyvonal képe a gömbi háromszög súlyvonala. Ez elmondható a B és C csúcshoz tartozó gömbi súlyvonalakról, amiből következik, hogy a gömbháromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. ■



5. Trigonometriai tételek

Ebben a fejezetben a sík háromszöggel kapcsolatos tételek közül próbálok néhányat átültetni a gömbi háromszögekre. Először vizsgáljuk meg a csúcsokba mutató vektorok közötti szorzatokat:

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin(c)$$
$$(\underline{a}\ \underline{b}) = |\underline{a}||\underline{b}| \cos(c)$$

Mivel a csúcsokba mutató vektorok hossza 1 így:

5.1. Lemma:

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = \sin(\mathrm{c})$$
$$(\underline{a}\ \underline{b}) = \cos(\mathrm{c})$$

5.2.Tétel [Szinusztétel]: A gömbháromszög oldalainak szinuszai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti szögek szinuszai, azaz a szokásos jelölés mellett:

$$\sin a / \sin b \ / \sin c = \sin \alpha / \sin \beta \ / \sin \gamma$$

Bizonyítás:

Vegyük a $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c})$ szorzatot, és alkalmazzuk rá a kifejtés tételt.

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c}) = [\underline{a}(\underline{b} \times \underline{c})]\underline{b} - [\underline{b}(\underline{b} \times \underline{c})]\underline{a}$$

$[\underline{b}(\underline{b} \times \underline{c})] = 0$, hiszen egymásra merőleges vektorok skaláris szorzata 0, így megkapjuk, hogy $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c})\underline{b}$. Mivel $|\underline{b}| = 1$ ezért az alábbi egyenlőség áll fent:

$$(\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}) = |(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c})| = |\underline{a} \times \underline{b}||\underline{b} \times \underline{c}| * \sin \beta.$$

Az *5.1.lemma* miatt:

$$(abc) = \sin c \ \ \sin a \ \ \sin \beta.$$

Ugyan ilyen gondolatmenettel vizsgáljuk: $(\underline{c} \times \underline{a}) \times (\underline{a} \times \underline{b})$ szorzatot.

$$(\underline{c} \times \underline{a}) \times (\underline{a} \times \underline{b}) = [\underline{c}(\underline{a} \times \underline{b})]\underline{a} - [\underline{a}(\underline{a} \times \underline{b})]\underline{c} = [\underline{c}(\underline{a} \times \underline{b})]\underline{a} = (\underline{c}\ \underline{a}\ \underline{b})\underline{a}$$

$$(\underline{c}\ \underline{a}\ \underline{b}) = |(\underline{c} \times \underline{a}) \times (\underline{a} \times \underline{b})| = \sin b \sin c \sin \alpha$$

Mivel vegyes szorzatokra igaz, hogy $(\underline{c}\ \underline{a}\ \underline{b}) = (\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c})$, továbbá $c > 0$, így oszthatunk $\sin c$-vel.

$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha$$

Átrendezve megkapjuk, hogy az oldalak szinuszainak aránya egyenlő a szögek szinuszainak arányával. ■

5.3.Tétel [Koszinusztétel]: A gömbháromszög oldalira és szögeire, a szokásos jelölés mellett teljesül az alábbi 2 egyenlőség:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b$$

Bizonyítás:

Vizsgáljuk meg a $(\underline{a} \times \underline{b})$ és $(\underline{b} \times \underline{c})$ skaláris szorzatát. A szorzat szétbontásához használjuk a felcserélési tételt, és a kifejtés tételt.

$$(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{b} \times \underline{c}) = [(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{b}]\underline{c} = [(\underline{a}\ \underline{b})\underline{b} - (\underline{b}\ \underline{b})\underline{a}]\underline{c} = (\underline{a}\ \underline{b})(\underline{b}\ \underline{c}) - (\underline{a}\ \underline{c})$$

Megjegyzés: a $(\underline{b}\ \underline{b}) = 1$ mivel párhuzamos egységvektorok.

A fenti egyenlőségből következik, hogy:

$$\sin a \sin c \cos(\pi - \beta) = \cos c \cos a - cos\ \ b$$

Az egyenletet átrendezve és a $\cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$ azonosságot felhasználva megkapjuk a gömbháromszög oldalakra vonatkozó koszinusztételét.

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

A második egyenlőéghez használjuk az ABC gömbháromszög pólusháromszög oldalaira felírt koszinusztételt:

$$\cos b' = \cos a' \cos c' + \sin a' * \sin c\,' \cos \beta'$$

A szögekre vonatkozó koszinusztételt a *2.4.tétel* segítségével bizonyítjuk be.

$$\cos(\pi - \beta) = \cos(\pi - \alpha)\cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \alpha)\sin(\pi - \gamma)\cos(\pi - b)$$

Az előbbi bizonyítás során használt $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$, valamint a $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ azonosságok segítségével megkapjuk a tétel második egyenlőségét is, azaz:

$$\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b. \blacksquare$$

A koszinusz tétel egy speciális esete, amikor a háromszög egyik szöge derékszög. Síkgeometriában ezt Pitagorasz-tételnek nevezzük. A gömbi geometria esetében azonban azzal, hogy a gömbháromszög több szögei is lehet derékszög, így akar ugyan arra a háromszögre több Pitagorasz-tétel is felírható.

5.4.Tétel [Pitagorasz-tétel]

Adott egy gömbháromszög melynek legalább az egyik szöge derékszög. A derékszöggel szembeni oldal koszinusza egyenlő a másik oldal koszinuszának szorzatával.

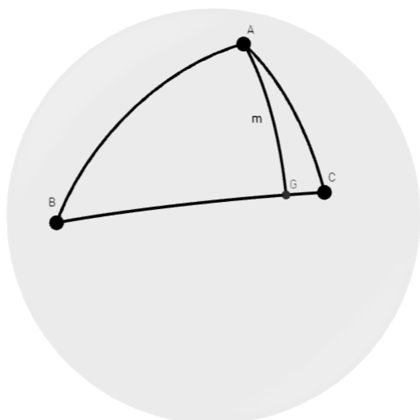
$$\cos a = \cos b \cos c\,, ahol\ \alpha = \pi/2$$

5.5.Tétel: Ha egy gömbháromszögeknek legalább az egyik szöge derékszög akkor:

$$\sin m = \frac{\sin b \sin c}{\sin a}\ (\alpha = \frac{\pi}{2}).$$

Bizonyítás:

Vizsgáljuk azt az ABC gömbháromszöget, ahol $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Írjuk fel a szinusztételt a b és a oldalára:



$$\frac{\sin \mathrm{b}}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Behelyettesítve:

$$\frac{\sin \mathrm{b}}{\sin a} = \sin \beta$$

A háromszög magassága az a oldalt D pontban metszi. Írjuk fel a szinusz tételt a BDA derékszögű gömbháromszögre a szinusztételt:

$$\frac{\sin \mathrm{m}}{\sin c} = \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin \beta$$

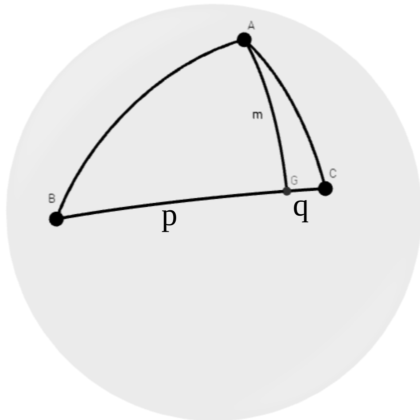
Ebből következik:

$$\frac{\sin \mathrm{b}}{\sin a} = \frac{\sin \mathrm{m}}{\sin c}.$$

Rendezve az egyenlőséget a kívánt tételt kapjuk, azaz:

$$\sin \mathrm{m} = \frac{\sin \mathrm{b} \sin \mathrm{c}}{\sin \mathrm{a}}. \blacksquare$$

<u>5.6. Tétel [Magasságtétel]:</u> Legyen az ABC gömbháromszögben az a oldallal szemközti szög derékszög. A a oldalhoz tartozó magasságot, m, az CB oldalt T pontban metszi és két részre osztja az oldalt: $\mathrm{BT} = \mathrm{p}$ és $\mathrm{CT} = \mathrm{q}$. Ekkor :



$$\sin^2(m) = \mathrm{tg}(\mathrm{q})\,\mathrm{tg}(\mathrm{p})$$

Bizonyítás:

Írjuk fel a c oldalra a szögösszegek koszinuszára vonatkozó addíciós tételt.

$$\cos c = \cos(p+q) = \cos \mathrm{p} \cos \mathrm{q} - \sin \mathrm{p} \sin \mathrm{q}\,.$$

Osszuk el az egyenlőséget $\cos \mathrm{p} \cos \mathrm{q}$-vel Abban az esetben, ha p vagy q valamelyik $\frac{\pi}{2}$ nagyságú lenne, az azt jelentené hogy a gömbháromszögnek egynél több derékszöge van.

$$\frac{\cos c}{\cos p \cos q} = 1 - \frac{\sin \mathrm{p} \sin \mathrm{q}\,.}{\cos \mathrm{p} \cos \mathrm{q}}$$

Bővítsük az egyenlőség bal oldalát $\cos^2 m$-mel, valamint vegyük észre, hogy a jobb oldalon megjelennek a tg p tg q.

$$1 - \frac{\cos \mathrm{c} \cos^2 m}{(\cos m \cos p)\,(\cos m \cos q)} = \mathrm{tg\,p\,tg\,q}$$

Használjuk fel a *5.4 tételt* a BTA és CTA derékszögű háromszögekre, a nevező alakításához.

$$1 - \frac{\cos \mathrm{c} \cos^2 m}{\cos a \cos b} = \mathrm{tg\,p\,tg\,q}.$$

Szintén a Pitagorasz-tételt felhasználva az ABC háromszögben

$$1 - \cos^2 m = \mathrm{tg\,p\,tg\,q}.$$

$$\sin^2 m = \mathrm{tg\,p\,tg\,q}. \blacksquare$$

5.7. Tétel [Befogó tétel]: Legyen az ABC gömbháromszögben az c oldallal szemközti szög derékszög. A c oldalhoz tartozó magasságot, m, az AB oldalt T pontban metszi, és két részre osztja az oldalt: $\mathrm{AT} = \mathrm{p}$ és $\mathrm{BT} = \mathrm{q}$. Ekkor :

$$\mathrm{tg}^2(a) = \mathrm{tg(c)}\,\mathrm{tg(p)}$$

Bizonyítás:

Írjuk fel az b oldalra vonatkozó koszinusz tételt és fejezzük ki $\cos\beta$.

$$\cos \mathrm{b} = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\frac{\cos \mathrm{b} - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = \cos \beta$$

Használjuk fel Pitagorasz-tételt, $\cos \mathrm{b}$ kiküszöbölésére.

$$\frac{\frac{\cos \mathrm{c}}{\cos a} - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = \cos \beta$$

Kiemelve $\cos \mathrm{c}$-t:

$$\cos \beta = \frac{1}{\mathrm{tg\ c}} \frac{\frac{1}{\cos a} - \cos a}{\sin a}$$

Vegyük észre, hogy a $\frac{\frac{1}{\cos a} - \cos a}{\sin a} = \tan a$, hiszen:

$$\frac{\frac{1}{\cos a} - \cos a}{\sin a} = \frac{1}{\cos a}\left(\frac{1 - \cos^2 a}{\sin a}\right) = \frac{1}{\cos a}\frac{\sin^2 a}{\sin a} = \frac{\sin a}{\cos a}$$

Ebből következik hogy:

$$\cos \beta = \frac{\mathrm{tg\ a}}{\mathrm{tg\ c}}.$$

Hasonló elgondolás alapján:

$$\cos \mathrm{m} = \cos a \cos q + \sin a \sin q \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\cos \mathrm{m} - \cos a \cos q}{\sin a \sin q} = \frac{\frac{\cos \mathrm{a}}{\cos q} - \cos a \cos q}{\sin a \sin \mathrm{q}}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\mathrm{tg\ a}}\frac{\frac{1}{\cos q} - \cos q}{\sin q} = \frac{tg\ q}{tg\ p}$$

A két egyenlőséget összevetésével megkapjuk a gömbháromszög befogótételét.

$$\frac{tg\ q}{tg\ p} = \frac{\mathrm{tg\ a}}{\mathrm{tg\ c}}$$

$$\mathrm{tg}^2(a) = \mathrm{tg(q)\ tg(c)}\ ■$$

Irodalom jegyzék

Hajós György: Bevezetés a geometriába [1999,]

Lénárt István: Sík és gömb[2009, Lénárt Oktatási, Kereskedelmi és Szolgáltató Bt.]

Kurusa Árpád: Nemeuklideszi geometriák [2009, Polygon]

Felhasznált Program: Geogebra [Pánczél Robert anyaga alapján]

Tartalomjegyzék