Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Szecsei Noémi

A Rubik-(nem)kocka csoportelméleti invariánsai

Szakdolgozat
Matematika BSc – tanári szakirány

Témavezető:

Szabó Csaba, egyetemi tanár
Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2018

Tartalomjegyzék

A szakdolgozat témája

Szakdolgozatom célja, hogy nagyrészt a csoportelmélet eszközeivel megmutassam a *Rubik torony* működését. Ez egy, a Rubik-kockához hasonló logikai játék, mely kirakott állapotában egy $2 \times 2 \times 4$-es téglatest.

Elemei a téglatest oldalaival párhuzamos szimmetria síkok mentén mindig forgathatóak, bizonyos esetekben pedig elforgatható önállóan négy külső elem is.

Kirakott állapotában úgy néz ki, mint két $2 \times 2 \times 2$-es kocka egymáson, a forgatása során viszont igen sokféle alakzatot vehet fel. Rájöttem, hogy a középső négy elem szemléletesen megfeleltethető egy $2 \times 2 \times 2$-es Rubik-kockának. Ezek a belső elemek meg vannak toldva egy-egy sarokkockával, melyek önálló forgathatósága függ az aktuális „toronyállástól”.

Ezen megfigyelések után a torony működése könnyen leírható, ha értjük a $2 \times 2 \times 2$-es kocka működését.

Szakdolgozatom nagyrészt a $2 \times 2 \times 2$ Rubik-kocka csoportelméleti tárgyalásával foglalkozik. Először megfeleltetem a kockát egy algebrai struktúrának, mely segítségével megfogalmazom és bizonyítom az általam megfigyelt szabályosságokat. Végül ezeket az összefüggéseket felhasználom a Rubik-torony elemzésénél.

1. fejezet

A $2 \times 2 \times 2$-es Rubik-kocka

Jelölések

A Rubik-kockán elvégezhető *elemi forgatás*okat a következőképpen jelöljük:

T: a kocka *tetejének* elforgatása;

A: a kocka *aljának* elforgatása;

B: a kocka *bal oldali lapjának* elforgatása;

J: a kocka *jobb oldali lapjának* elforgatása;

E: a kocka *elülső lapjának* elforgatása;

H: a kocka *hátsó lapjának* elforgatása.

A kocka *pozicionálásán* a továbbiakban olyan műveletet értünk, amikor nem forgatjuk el egymáshoz képest az elemeket, hanem az egész Rubik-kocka helyzetén változtatunk úgy, hogy meghatározzuk például két szomszédos oldalának a helyét. (Megadhatunk olyan pozicionálást is, mely nem egyértelműsíti a kocka helyzetét – ez nem probléma, ilyen esetben a feltételt kielégítő bármely pozicionálás alkalmazható, viszont itt (is) fontos a kiindulási állapot megjegyzése.) Belátható, hogy minden pozícionálás leírható elemi forgatások egymásutániságával, így valid műveletnek tekinthető. Használata bizonyos esetekben szemléletesebb és célravezetőbb, mint a neki megfelelő forgatássorozat megadása.

Az elemi forgatásokat az irány egyértelműsége miatt a következő módon értelmezzük: a Rubik-kockát az adott oldallal (teteje, alja stb.) magunk felé pozicionáljuk, majd az így felénk eső oldalt 90°-kal elforgatjuk az *óramutató járásával megegyező* irányba. Ezután a kockát visszapozicionáljuk a kezdeti transzformációs állapotába.

A 90°-os forgatás miatt evidens, hogy tetszőleges elemi forgatásra $Elemi^4 = id$, vagyis óramutató járásával ellentétes irányú forgatásra $Elemi^{-1} = Elemi^3$.

1.1. A sarokkockák permutációja

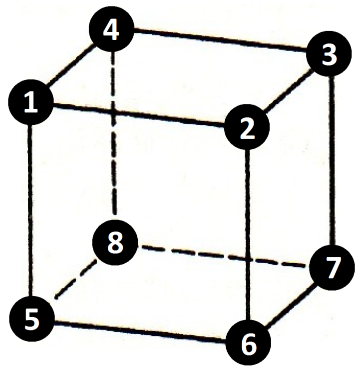
A $2 \times 2 \times 2$-es Rubik-kocka 8 elemét, melyeknek egyenként 3 látható oldala (úgynevezett *lapkája*) van, *sarokkockáknak* nevezzük. Tekintsük először ezeknek az elhelyezkedését, ezeket hívjuk a *sarokkockák permutációinak*.

Reprezentálja a 8 db sarokkockát a $\mathcal{H} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmaz.

Legyen alaphelyzet az (1.1) ábrán látható elhelyezkedés, és rendeljük hozzá ehhez az S_8 szimmetriacsoport identitását.

A későbbiekben az alapállapotú kocka számozása szerint fogunk az (aktuálisan) *első (számú) helyen*, *második (számú) helyen* stb. *lévő* sarokkockára hivatkozni.

Vegyük a sarokkockák egy tetszőleges lépéssorozat után kapott elhelyezkedéseit, és rendeljük hozzá mindegyikhez azt az S_8-beli permutációt, melyet az alaphelyzetben lévő sarokkockákon kellene elvégeznünk ahhoz, hogy a sarokkockák forgatás utáni permutációját kapjuk.



1.1. ábra.

Látható, hogy a sarokkockák helyzete egyértelműen meghatározza ezt a permutációt (hiszen minden sarokkockának csak egy helye és kiindulási pontja lehet), és ugyanezen okok miatt bármely S_8-beli permutációhoz a sarokkockáknak legfeljebb egy permutációja tartozhat (az még kérdéses, hogy mindegyikhez létezik-e).

Ezen permutációkat tartalmazó halmaz legyen $\mathcal{K}_s$.

1.1.1. Állítás. *A $2 \times 2 \times 2$-es Rubik-kocka sarokkockáinak permutációi csoportot alkotnak, és ez a csoport izomorf S_8 egy részcsoportjával.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy az alaphelyzetű kockán végzett $\Phi : \mathcal{K}_s \to \mathcal{K}_s$ tetszőleges forgatássorozatot. A sarokkockák helyzete ennek következtében

$$\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \varphi^{-1}(3), \varphi^{-1}(4), \varphi^{-1}(5), \varphi^{-1}(6), \varphi^{-1}(7), \varphi^{-1}(8),$$

ahol $i, j \in \mathcal{H}, (i \neq j) : \varphi^{-1}(i) \neq \varphi^{-1}(j)$, és minden $\varphi^{-1}(i)$ azt a $\mathcal{H}$-beli elemet jelöli, amelyet Φ forgatássorozat az i sarokkocka identitásbeli helyére visz.

$$\Phi(id) = \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(2) & \varphi^{-1}(3) & \varphi^{-1}(4) & \varphi^{-1}(5) & \varphi^{-1}(6) & \varphi^{-1}(7) & \varphi^{-1}(8) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Legyen E *elemi forgatás*ok tetszőleges egymásutánja. Vizsgáljuk meg, hogyan hat ez a tetszőleges állapotú kisrubik sarokkockáin.

Jelölje $\varepsilon(i)$ azt a $\mathcal{H}$-beli elemet, melyre E az aktuálisan i-edik helyen lévő sarokkockát viszi.

$$\mathrm{E}\left(\Phi(id)\right) = \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(2) & \varphi^{-1}(3) & \varphi^{-1}(4) & \varphi^{-1}(5) & \varphi^{-1}(6) & \varphi^{-1}(7) & \varphi^{-1}(8) \\ \varepsilon(1) & \varepsilon(2) & \varepsilon(3) & \varepsilon(4) & \varepsilon(5) & \varepsilon(6) & \varepsilon(7) & \varepsilon(8) \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy ez pontosan az a permutáció, amit akkor kapunk, ha $\Phi(id)$-t megszorozzunk azzal a $\mathcal{K}_{\mathrm{s}}$-beli elemmel, mely *az alapállapotú kockán végrehajtott* E forgatás utáni sarokkockák helyzetének van megfeleltetve:

$$\Phi(id)\cdot \mathrm{E}(id) = \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(2) & \dots & \varphi^{-1}(8) \\ 1 & 2 & \dots & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 8 \\ \varepsilon(1) & \varepsilon(2) & \dots & \varepsilon(8) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(2) & \dots & \varphi^{-1}(8) \\ \varepsilon(1) & \varepsilon(2) & \dots & \varepsilon(8) \end{pmatrix} = \mathrm{E}\left(\Phi(id)\right).$$

Mivel $\Phi(id)$ egy tetszőleges permutációjú Rubik-kockát reprezentál, ez bármely $\mathcal{K}_{\mathrm{s}}$-ben reprezentált állapotú kockára teljesül.

A forgatásoknak megfeleltetett permutációkkal való szorzásra, mint műveletre, a $2\times2\times2$-es Rubik-kocka sarokkockáinak permutációi csoportot alkotnak. Jelöljük ezt a $(\mathcal{K}_{\mathrm{s}},\cdot)$ csoportot $\mathcal{P}$-vel.

Mivel $\mathcal{K}_{\mathrm{s}}$ minden eleme S_8-beli, a $\cdot$ művelet pedig azonos a szimmetriacsoportbeli kompozícióval, $\mathcal{P}\le S_8$. Az állítás tehát teljesül. □

A következőkben pontosan meghatározzuk a $\mathcal{P}$ csoport elemeit.

1.1.2. Segédtétel. *Ha két egymás melletti sarokkocka a többi helybenhagyása mellett megcserélhető, akkor bármely két sarokkocka megcserélhető.*

Bizonyítás. A bizonyítást két lépésben végezzük:

1. Bizonyítjuk, hogy bármely két *egymás melletti* sarokkocka felcserélhető.

2. Bizonyítjuk, hogy bármely két sarokkocka felcserélhető.

1. lépés

A feltételt kielégítő forgatássorozatot jelöljük C-vel.

Észrevehető, hogy minden sarokkocka-párt egyértelműen meghatároz a Rubik-kocka egy éle. Legyen a C forgatássorozat által megcserélt sarokkockákhoz tartozó él e_{kit}.

Tekintsük a kocka egy tetszőleges e_i élét, továbbá jelöljük az e_i mentén lévő sarokkockákat megcserélő forgatássorozatot $C(e_i)$-vel ($C(e_{\mathrm{kit}})=C$). A kocka mozgáscsoportja segítségével tetszőleges él átvihető egy másik tetszőleges élbe. Legyen M egy olyan mozgatás, mely e_i-t e_{kit}-be viszi. Ekkor $C(e_i)=MCM^{-1}$ forgatássorozat megcseréli az e_i mentén lévő sarokkockákat. Tehát *ha adott két szomszédos sarokkocka megcserélhető, akkor bármely két szomszédos sarokkocka megcserélhető.*

2. lépés
Következő lépésként belátjuk, hogy bármely két sarokkocka megcserélető.

Tekintsük az (1.1) ábra alapján a rubik kocka sarokkockáit úgy, mint egy gráf pontjait; két pont között pontosan akkor fut él, ha a neki megfeleltetett sarokkockák szomszédosak. Ez a gráf összefüggő, vagyis definíció szerint bármely két pont között létezik út. (Továbbá bármely két pont közötti legrövidebb út legfeljebb 3 élen halad át, a bizonyításhoz azonban ez nem szükséges). Mikor két szomszédos sarokkockát megcserélünk, egy adott élhez tartozó végpontokat cserélünk fel.

Vegyünk tetszőleges i, j gráfpontokat, és a közöttük lévő egyik utat alkossák $u_1, u_2, \ldots, u_n$ élek. Ekkor $C(u_1)C(u_2)\ldots C(u_{n-1})C(u_n)C(u_{n-1})\ldots C(u_2)C(u_1)$ megcseréli az i, j pontokat. (A legrövidebb utat választva ez a szorzat legfeljebb 5 tagú.) Ezzel a segédtételt bizonyítottuk. $\square$

1.1.3. Tétel. *A $2\times2\times2$-es Rubik-kocka sarokkockáinak permutációcsoportja izomorf az S_8 szimmetriacsoporttal.*

Bizonyítás. Az (1.1.1) tétel kimondja, hogy $\mathcal{P} \leq S_8$. Az izomorfia bizonyításához azt kell belátnunk, hogy az elemi forgatások generálják az S_8-at.

Ismeretes, hogy *minden permutáció előáll transzpozíciók szorzataként.* Azaz ha belátjuk, hogy a segédtétel feltétele teljesül, akkor minden S_8-beli transzpozíció eleme $\mathcal{P}$-nek, ezek pedig generálják S_8-at.

A sarokkockák helyét tekintve, az elemi forgatások megfelelnek az alábbi permutációknak:

$$\begin{aligned} T &= (1432), \qquad & B &= (1584), \qquad & E &= (1265), \\ A &= (5678), \qquad & J &= (2376), \qquad & H &= (3487). \end{aligned}$$

A következő egy ismert forgatássorozat, mely felcseréli az egyes és kettes számú helyen lévő sarokkockákat:

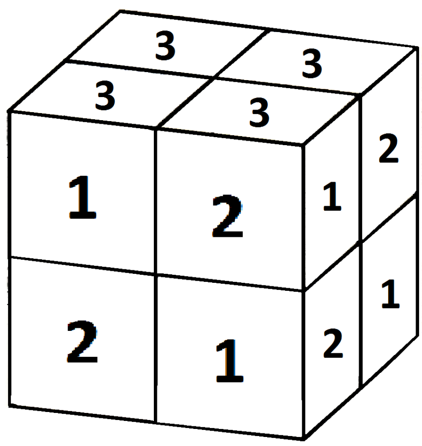
$$\begin{gathered} C_{12} = B^{-1}T^{-1}BETE^{-1}B^{-1}TBT^2 = \\ = (1485)(1234)(1584)(1265)(1432)(1562)(1485)(1432)(1584)(13)(42) = \\ = (12)(3)(4)(5)(6)(7)(8). \end{gathered}$$

Mivel C_{12} egy megfelelő C forgatássorozat, a tételt bizonyítottuk. $\square$

1.2. A sarokkockák orientációi

A sarokkockák elhelyezkedéseiről, azaz $\mathcal{P}$ permutációcsoportról már beláttuk, hogy S_8 szimmetriacsoporttal izomorf, de azzal még nem foglalkoztunk, hogy a sarokkockák lapkái merrefelé állnak. Nevezzük ezt a tulajdonságot egy adott elem esetében a *sarokkocka orientációs állapotának* (röviden *orientációjának*). Az összes sarokkocka orientációs állapotát tartalmazó halmaz lesz magának a *Rubik-kockának az orientációs állapota*. Jelöljük ezt a halmazt $\mathcal{O}$-val.

A forgatássorozatok hatással vannak a sarokkockák elhelyezkedésére és a lapkák irányára is. Az előbbira úgy fogunk hivatkozni, hogy az adott forgatássorozat a sarokkockákon hogyan végez permutációt (röviden permutálja őket), az utóbbira pedig, hogy egy adott sarokkockán, illetve azok összességén miképpen végez orientálást (röviden orientálja őket).[1]

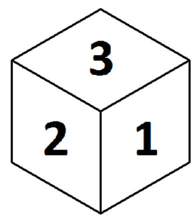


1.2. ábra.

Mindegyik sarokkocka lapkáit számozzuk be 1-től 3-ig oly módon, hogy az alaphelyzetben lévő[2] kockát tekintve a 3-as szám minden esetben felül, illetve alul helyezkedjen el ((1.2) ábra), továbbá egy adott sarokkocka csúcsát magunk felé fordítva, az óramutató járásával ellentétes irányban kövessék egymást az 1, 2, 3 számok ((1.3) ábra).

Vegyük a Rubik-kocka minden, az alapállapotból forgatássorozatokkal elérhető helyzetét, és rendeljük hozzá –, a megfelelő $\mathcal{P}$-beli elemen felül –, egytől nyolcig az adott helyen lévő sarokkocka aktuális orientációját. Az orientációt egy S_3-beli elemnek feleltessük meg, identitásnak véve, amikor a 3-as szám felül vagy alul van (az alaphelyzetnek megfelelően). Ezen S_3-beli elemek a $\mathcal{H}' = \{1, 2, 3\}$ halmaz elemeit permutálják.

Legyen $\mathcal{R}$ az a halmaz, mely a permutációkat és orientációkat együttesen leíró állapotokat tartalmazza. $\mathcal{R}$ elemei (p, o) alakúak, ahol $p \in \mathcal{P}$, $o \in \mathcal{O}$. Az elempár második tagja S_3^8-beli elem, mely a sarokkockák orientációit határozza meg rendre az *első, második, ..., nyolcadik helyen.* Hogy egy adott helyen lévő sarokkocka a nyolc közül melyik, azt p határozza meg.



1.3. ábra.

Az 1-től 3-ig való lapkaszámozás hasznunkra van, ha azt akarjuk szemléltetni, hogy

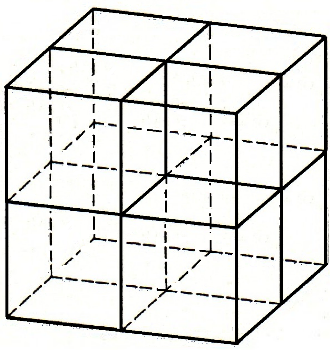
[1]Az orientálás is egyfajta permutálás, a lapkák egymással való felcserélése – a könnyebb megkülönböztetés miatt fogunk rájuk orientálásként hivatkozni.

[2]Minden sarokkocka a helyén van, a kezdeti orientációban, azaz „színre forgatva”.

egy sarokkocka orientációjához elég a hozzá tartozó három lapka helyét meghatároznunk. A következő észrevételt viszont könnyebb belátni, ha másfajta reprezentációt használunk.

1.2.1. Állítás. *Ha egy adott sarokkockát önmagában is kockaként tekintünk, és megvizsgáljuk, hogyan hat rá*[3] *egy forgatássorozat, abból egyértelműen meghatározhatjuk a sarokkockának mind a permutációs, mind az orientációs állapotát.*

Bizonyítás. Számozzuk be minden sarokkocka oldalait az (1.5) ábra szerint. Észrevehető, hogy ekkor egy adott szám megfeleltethető a Rubik-kocka egy színének.



1.4. ábra.

Vizsgáljuk meg a sarokkocka orientációit, mint az ismert viselkedésű *kocka automorfizmusainak mozgáscsoportját*, melyet jelen esetben az oldalakkal reprezentálunk. Erről tudjuk, hogy megfeleltethető egy 24 elemű permutációcsoportnak.[4]

Az elemi forgatások a következő módon permutálják a sarokkockák oldalait:[5]

$$T_{\text{o}} = (1245), \qquad B_{\text{o}} = (2653), \qquad E_{\text{o}} = (1643),$$
$$A_{\text{o}} = (1542), \qquad J_{\text{o}} = (2356), \qquad H_{\text{o}} = (1346).$$

Jelöljük a sarokkocka állapotait azon S_6-beli elemekkel, melyek az oldalak permutációi az alapállapothoz képest. Az (1.1.1) állítás bizonyításában szereplő módszerrel ezekről az elemekről belátható, hogy:

1. Tetszőleges helyzetű sarokkockán egy adott forgatássorozat olyan állapotot eredményez, mint ha az adott állapotot jelölő S_6-beli permutációt megszoroznánk a forgatássorozatot alkotó forgatások $(T_{\text{o}}, B_{\text{o}} \ldots)$ szorzatával.

2. Ezek a szorzók szintén megfeleltethetőek egy állapotot jelző permutációnak, melyet akkor kapunk, ha az identikus helyzetben lévő kockán végezzük el az adott forgatássorozatot.

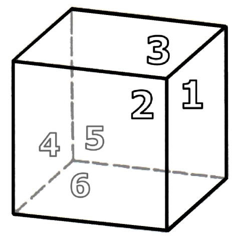
3. A kocka állapotai S_6 egy részcsoportját alkotják.

[3]Melyik lapja néz felénk, illetve felfelé, lefelé stb.

[4]Ennek felépítését, tulajdonságait külön nem bizonyítjuk.

[5]Az elemi forgatások valójában 90°-os tengely körüli forgatást végeznek a sarokkockákon. Ez felírható a sarokkocka megfelelő négyfogású forgástengelye körüli forgatás és egy eltolás kompozíciójaként, az utóbbi komponenssel viszont nem szükséges foglalkoznunk.

Legyen az említett csoport $\mathcal{K}$.



1.5. ábra.

Mivel ezen permutációk tengely körüli forgatások, ezért irányítástartóak, tehát csak mozgáscsoportbeli elemeket eredményezhetnek. Továbbá ezekkel a forgatásokkal tetszőlegesen meghatározható két szomszédos lap, vagyis előállítható mind a $6 \cdot 4 = 24$ db mozgáscsoportbeli elem.

Az 1-től 6-ig való számozást tekintve, a sarokkockák látható oldalainak halmazai a következők:

$$\mathrm{s}_1 = \{3, 2, 4\}, \qquad \mathrm{s}_2 = \{3, 1, 2\}, \qquad \mathrm{s}_3 = \{3, 5, 1\}, \qquad \mathrm{s}_4 = \{3, 4, 5\},$$
$$\mathrm{s}_5 = \{6, 4, 2\}, \qquad \mathrm{s}_6 = \{6, 2, 1\}, \qquad \mathrm{s}_7 = \{6, 1, 5\}, \qquad \mathrm{s}_8 = \{6, 5, 4\}.$$

Tekintsünk egy tetszőleges i. sarokkockát, mely az egyik $k \in \mathcal{K}$-beli állapotban van. A hozzá tartozó s_i oldalak k általi képei egyértelműen meghatározzák, hogy az i. sarokkocka hányas számú helyen van a Rubik-kockában: ugyanis minden ilyen ponthármashoz tartozik egy csúcs, és annak a csúcsnak a képe meghatározza, hogy a vele szomszédos oldalhármast mely oldalhármasba (s_j-be) viszi a transzformáció. Mivel s_i-k különbözőek, ezért a sarokkocka helye egyértelmű.

Az orientációt az alapján határozzuk meg, hogy az (1.2) ábra számozása szerinti $1, 2, 3$ lapkáknak megfelelő s_i-beli elemeket k mely s_j-nek megfelelő $\mathcal{H}'$-beli lapkákba viszi. Mivel k minden oldal képét meghatározza, így meghatározza az orientációt is. □

Szemléletesen: Tetszőleges sarokkockához mind a 8 helyen 3 orientáció tartozhat, mely orientáció megfeleltethető egy, a látható oldalak halmazán végzett permutációval. Ez a $8 \cdot 3 = 24$ különböző állapot kiteszi a teljes $\mathcal{K}$ mozgáscsoportot, mely egyértelműen meghatározza az adott sarokkockának mind a helyzetét, mind pedig az orientációját.

1.2.2. Segédtétel. *A sarokkockák tetszőleges permutációja elvégezhető úgy, hogy minden sarokkocka megőrizze a permutálás előtti orientációs állapotát.*

Bizonyítás. A bizonyítást az (1.1.2) és (1.1.3) tételekben látott logika alapján a következő lépésekben végezzük:

1. Bizonyítjuk, hogy két szomszédos sarokkocka megcserélhető az adott feltételekkel.

2. Megmutatjuk, hogy ily módon bármely két sarokkocka megcserélhető.

3. Transzpozíciók segítségével belátjuk a tétel állítását.

1. lépés

Tekintsük az (1.1.3) tétel bizonyításában szereplő $C_{12} = B^{-1}T^{-1}BETE^{-1}B^{-1}TBT^2$ forgatássorozatot, mely megcseréli az első és második helyen lévő sarokkockákat. A bizonyítás további részében jelöljük egyszerűen C-vel. Vizsgáljuk meg, hogyan hat ez a forgatássorozat az egyes sarokkockák orientációjára.

Megjegyzés. A következőkben az identikus helyzetű kockából indulunk ki. Ezt megtehetjük, mivel az S_6-beli elemek a kocka mozgás*csoport*jának elemei, ezért az i. számú sarokkocka oldalaira való hatásokat tekinthetjük úgy, hogy az éppen i. helyen lévő sarokkocka oldalainak képei hová fognak kerülni. Emiatt az orientáció változatlansága igaz lesz bármilyen állapotú kockából kiindulva.

		$\mathrm{s_i}$ szerinti számozás							
		$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$	$\mathbf{s_3}$	$\mathbf{s_4}$	$\mathbf{s_5}$	$\mathbf{s_6}$	$\mathbf{s_7}$	$\mathbf{s_8}$
$\mathcal{H}'$ szerinti számozás	**1**	2	1	5	4	4	2	1	5
	2	4	2	1	5	2	1	5	4
	3	3	3	3	3	6	6	6	6

1.1. táblázat. A sarokkockák S_3-beli számozásának S_6-beli megfeleltetése

Előző fejezetben a sarokkockákat a $\mathcal{H} = 1, \ldots, 8$ halmaz elemeivel, egyszerűen számokkal jelöltük. Itt viszont, hogy ne keveredjen a sarokkockák és az oldalak számozása, az i. helyen lévő sarokkockát k_i-vel jelöljük.

Az első sarokkockát B^{-1} elviszi a 4-be, így T^{-1}-nél azt kell figyelni, hogy hat-e a négyesen; igen, visszaviszi 1-be; ezután B elviszi az 5-be, amit E vissza 1-be, majd T ismét a 4-be; E^{-1} viszont *nem hat* a négyes számú sarokkockán, ezért a következő, mely k_1 meghatározásánál számításba jön, az B^{-1}, mely elviszi a 8-ba; T nem hat 8-on, B viszont elviszi 8-at a 4-be, majd végül T^2 a 2-be. Vagyis az egyes számú sarokkockán sorban hatnak a B^{-1}, T^{-1}, B, E, T, B^{-1}, B, T^2 forgatások, amiből következik:

$$C_{\mathrm{k}_1} = B_{\mathrm{o}}^{-1}T_{\mathrm{o}}^{-1}B_{\mathrm{o}}E_{\mathrm{o}}T_{\mathrm{o}}B_{\mathrm{o}}B_{\mathrm{o}}^{-1}T_{\mathrm{o}}^{2} =$$
$$= (2356)(1542)(2653)(1643)(1245)(2653)(2356)(14)(25) = (1542)(3)(6).$$

(Az alsó indexszel (k_i) azt jelöljük, hogy az adott forgatássorozatnak a i-edik helyen lévő sarokkocka mozgáscsoportjára való hatását vizsgáljuk.)

Az első számú sarokkocka $\mathrm{s}_1 = \{3, 2, 4\}$ valós oldalait a $\{3, 1, 2\} = \mathrm{s}_2$ halmazba viszi – vagyis, amit már eddig is tudtunk, a sarokkocka a második számú helyen lesz. Továbbá az 1-től 3-ig való számozást tekintve, a 3-as s_1-ben és s_2-ben is a 3; az 1-es s_1-ben 2, s_2-ben 1; ill. a 2-es s_1-ben 4, s_2-ben pedig a 2.

Az S_3 szerinti orientációkat tekintve $\mathrm{A_o}(\mathbf{o}_{\mathrm{k_i}}) = \mathbf{o}_{\mathrm{A_p}^{-1}(\mathrm{k_i})}$ pontosan akkor teljesül, ha minden oldal képe – a sarokkocka új helyének megfelelően – azonos számú helyre kerül. Mivel $C(2_{\mathrm{s_1}}) = 1_{\mathrm{s_2}}$, $C(4_{\mathrm{s_1}}) = 2_{\mathrm{s_2}}$ és $C(3_{\mathrm{s_1}}) = 3_{\mathrm{s_2}}$, így $\mathrm{k_1}$ megtartja az orientációját.

Vizsgáljuk meg a második sarokkockát. Ezen C szerint sorban hatnak T^{-1}, T, E^{-1}, B^{-1}, T, T^2, azaz

$$C_{\mathrm{k_2}} = T_{\mathrm{o}}^{-1} T_{\mathrm{o}} E_{\mathrm{o}}^{-1} B_{\mathrm{o}}^{-1} T_{\mathrm{o}} T_{\mathrm{o}}^2 = E_{\mathrm{o}}^{-1} B_{\mathrm{o}}^{-1} T_{\mathrm{o}}^3 = (1346)(2356)(1542) = (14)(23)(56).$$

Ez $\mathrm{s_2}$-nek az $1,2,3$ elemeit rendre az $\mathrm{s_1}$ $4,3,2$ elemeibe képezi, vagyis a $\mathcal{H}'$-vel reprezentált orientációkat tekintve –, figyelembe véve az (1.1) táblázatban szemléltetett megfeleltetést, $o_{\mathrm{k_1}} = (123)$. (Az indexben helyesen $\mathrm{k_1}$ szerepel, hiszen a sarokkocka aktuális helyét jelenti.)

A harmadik sarokkockán hatnak T^{-1}, B, E, T, E^{-1}, B^{-1}, T, B, T^2, vagyis

$$C_{\mathrm{k_3}} = T_{\mathrm{o}}^{-1} B_{\mathrm{o}} E_{\mathrm{o}} T_{\mathrm{o}} E_{\mathrm{o}}^{-1} B_{\mathrm{o}}^{-1} T_{\mathrm{o}} B_{\mathrm{o}} T_{\mathrm{o}}^2 =$$
$$= (1542)(2653)(1643)(1245)(1346)(2356)(1245)(2653)(14)(25) = (153)(264).$$

Az $\mathrm{s_3} = \{5,1,3\}$ halmazt C az (153) permutációval önmagára képezi, vagyis a sarokkocka helyben maradása mellett a $\mathcal{H}'$-beli reprezentációval vett permutáció $o_{\mathrm{k_3}} = (213)$.

A negyedik sarokkockára $C_{\mathrm{k_4}} = B_{\mathrm{o}}^{-1} B_{\mathrm{o}} T_{\mathrm{o}} T_{\mathrm{o}} T_{\mathrm{o}}^2 = id$, amiből következik a helybenmaradása, illetve az orientációjának változatlansága is.

A $\mathrm{k_4}$-hez hasonlóan $\mathrm{k_5}$, $\mathrm{k_6}$, $\mathrm{k_7}$ és $\mathrm{k_8}$ esetében is az identitást kapjuk.

Végezzük el a C elvégzése után kapott kockán a $D = TG^2T^2GT$ forgatássorozatot, ahol a sarokkockák elhelyezkedésének szempontjából

$$G = (J^{-1}A^{-1}JA)^2 = ((2673)(5876)(2376)(5678))^2 = ((26)(3)(5)(78))^2 = id,$$
$$\Longrightarrow \; D = T \cdot id^2 \cdot T^2 \cdot id \cdot T = T^4 = id.$$

Az orientációkat vizsgálva $G_{\mathrm{k_1}} = G_{\mathrm{k_4}} = id$, hiszen ezekre G semmilyen módon nem hat. Továbbá

$$G_{\mathrm{k_2}} = J_{\mathrm{o}}^{-1} A_{\mathrm{o}}^{-1} A_{\mathrm{o}} J_{\mathrm{o}}^{-1} A_{\mathrm{o}}^{-1} J_{\mathrm{o}} = J_{\mathrm{o}}^2 A_{\mathrm{o}}^{-1} J_{\mathrm{o}} = (25)(36)(1245)(2356) = (132)(465),$$
$$G_{\mathrm{k_3}} = (J_{\mathrm{o}}^{-1} J_{\mathrm{o}})^2 = id;$$
$$G_{\mathrm{k_5}} = (A_{\mathrm{o}}^{-1} A_{\mathrm{o}})^2 = id;$$
$$G_{\mathrm{k_6}} = J_{\mathrm{o}}^{-1} A_{\mathrm{o}}^{-1} J_{\mathrm{o}} J_{\mathrm{o}}^{-1} A_{\mathrm{o}}^{-1} A_{\mathrm{o}} = J_{\mathrm{o}}^{-1} A_{\mathrm{o}}^{-1} = (2653)(1245) = (126)(345);$$
$$G_{\mathrm{k_7}} = J_{\mathrm{o}}^{-1} J_{\mathrm{o}} A_{\mathrm{o}} A_{\mathrm{o}}^{-1} J_{\mathrm{o}} A_{\mathrm{o}} = J_{\mathrm{o}} A_{\mathrm{o}} = (2356)(1542) = (156)(234);$$
$$G_{\mathrm{k_8}} = A_{\mathrm{o}}^{-1} J_{\mathrm{o}} A_{\mathrm{o}} J_{\mathrm{o}}^{-1} J_{\mathrm{o}} A_{\mathrm{o}} = A_{\mathrm{o}}^{-1} J_{\mathrm{o}} A_{\mathrm{o}}^2 = (1245)(2356)(14)(25) = (132)(465).$$

Eszerint G forgatásorozat a felső négy sarokkockából egyedül a második helyen lévőn végez orientálást, továbbá az alsó négy sarokkockához 1 db első-, ill. 3 db harmadfokú forgatást rendel, miközben helyüket nem változtatja. (Ha a sarokkockák helyei változatlanok egy forgatássorozat hatására, akkor annak egyszerű kiszámítani a hatványait, mert többedszerre is ugyanazt a hatást végzik egy adott sarokkockán.)

Ez alapján D forgatássorozat a következőket teszi: T-vel a második számú helyre viszi a hármas számú sarokkockát, majd elvégzi rajta a $G^2_{\mathrm{k}_2} = (123)(456)$ testátlóra való forgatást; T^2-tel a második számú helyre viszi az egyes számú sarokkockát, amin elvégzi a $G_{\mathrm{k}_2} = (132)(465)$ testátlóra való forgatást; visszaforgatja T-vel a felső sarokkkockákat a kiindulási helyüre. Eközben a négy alsó sarokkockán 3-szor elvégzi G-t, s mivel az ezekhez rendelt permutációk helybenhagyóak és rendjük osztója 3-nak, a (K-beli) identitást kapjuk mind a négy esetben.

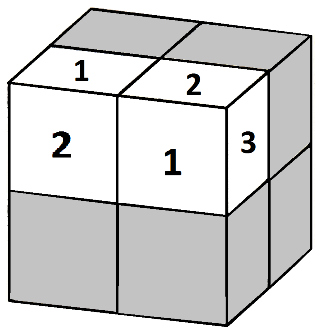
Mivel a C és D forgatássorozatok kizárólag az első és harmadik helyen lévő sarokkockák permutációit változtatják, vizsgáljuk meg ezeket, figyelembe véve, hogy a C felcseréli az első és második számú helyeken lévő sarokkockákat:

$$C_{\mathrm{k}_2} D_{\mathrm{k}_1} = C_{\mathrm{k}_2} T^3_{\mathrm{o}} G_{\mathrm{k}_2} T_{\mathrm{o}} = (14)(23)(56) \cdot (1542) \cdot (132)(465) \cdot (1245) = (1245);$$
$$C_{\mathrm{k}_3} D_{\mathrm{k}_3} = C_{\mathrm{k}_3} T_{\mathrm{o}} G^2_{\mathrm{k}_2} T^3_{\mathrm{o}} = (153)(264) \cdot (1245) \cdot (123)(456) \cdot (1542) = id.$$

Mivel $\forall i \in \mathcal{H}' : D(C(i_{\mathrm{s}_2})) = i_{\mathrm{s}_1}$, ezért a kettes számú sarokkocka is megőrizte orientációját. Ebből, továbbá a segédtétel tetszőleges kiindulási állapotra vonatkozó megjegyzéséből következik, hogy CD forgatássorozat úgy cseréli meg az első és második helyen lévő sarokkockákat, hogy teljesíti a segédtétel feltételét.

Kérdés: Alkalmazható-e a fenti CD forgatássorozat (megfelelő pozicionálás után) tetszőleges két sarokkocka felcseréléséhez?

A CD forgatássorozat az (1.5) ábrán szemléltetett jelölés szerinti, $3, 6$ számokkal reprezentált oldalak középpontján áthaladó négyfogású forgástengelyen való forgatást végez k_1-en és k_2-n; ez a módszer azonban csak akkor működhet, ha a felcserélendő sarokkockák CD által stabilizált látható oldalai a $\mathcal{H}'$-beli számozást tekintve egyenértékűek.



1.6. ábra.

Ez a feltétel a Rubik-kocka felső vagy alsó lapján „osztozó” sarokkockák esetében teljesül (azaz tetszőleges sarokkockánál a 3 szomszédjából kettőnél); ekkor a kocka megfelelő pozicionálása után a CD forgatássorozat alkalmazható.

A maradék 4 esetben (k_1–k_5, k_2–k_6, k_3–k_7, k_4–k_8), a k_1–k_2 helyére pozicionálva a sarokkockapárt, a (1.6) ábrán látható módon helyezkednek el a $\mathcal{H}'$ szerint számozott lapkák. Jelöljük az ebben az állapotban i. helyen lévő sarokkockát k'_i-vel.

		Módosított számozás	
		$\mathbf{s}'_1$	$\mathbf{s}'_2$
H' szerinti számozás	**1**	3	2
	2	2	3
	3	4	1

1.2. táblázat.

A megcserélendő sarokkockákat leszámítva továbbra is a $\mathcal{K}$-beli identitást követeljük meg k'_i-ktől, így elég ennek megfelelően a $\mathrm{k}'_1, \mathrm{k}'_2$ sarokkockák $\mathcal{H}'$-beli megfeleltetését módosítani (ld. (1.2) táblázat).

C-t elvégezve vizsgáljuk meg a kritikus $\mathrm{k}'_1, \mathrm{k}'_2, \mathrm{k}'_3$ kockákat (hiszen a többi változatlanul a helyén marad).

$C_{\mathrm{k}'_1} = (1542)(3)(6)$ esetében az orientáció nem számít identikusnak, (1.2) táblázat alapján $o_{\mathrm{k}'_2} = (123)$. $C_{\mathrm{k}'_2} = (14)(23)(56)$-ből azonban $o_{\mathrm{k}'_1} = id$-et kapjuk, $C_{\mathrm{k}_3} = (153)(264)$ pedig továbbra is „korrigálásra szorul".

Legyen $D' = GTG^2T^{-1}$. Ekkor $C_{\mathrm{k}'_3} D'_{\mathrm{k}'_3} = C_{\mathrm{k}'_3} T_{\mathrm{o}} G^2_{\mathrm{k}'_2} T_{\mathrm{o}}^{-1} = id$, továbbá

$$C_{\mathrm{k}'_1} D'_{\mathrm{k}'_2} = C_{\mathrm{k}'_1} G_{\mathrm{k}'_2} T_{\mathrm{o}} T_{\mathrm{o}}^{-1} = (1542)(3)(6) \cdot (132)(465) = (14)(23)(56).$$

Ez identikus orientáció, mivel $D'(C(3_{\mathrm{s}_1})) = 2_{\mathrm{s}_2}$, $D'(C(2_{\mathrm{s}_1})) = 3_{\mathrm{s}_2}$ és $D'(C(4_{\mathrm{s}_1})) = 1_{\mathrm{s}_2}$, az (1.2) táblázatból pedig kiolvasható, hogy pontosan ezek a $\mathcal{H}'$-n vett identitásnak megfelelő képek. Ezzel beláttuk, hogy bármely két szomszédos sarokkocka megcserélhető a segédtétel feltétele mellett.

2. lépés

Most, az (1.1.2) állításban mutatott levezetéshez hasonlóan, tekintsük a sarokkockákat, mint egy gráf pontjait ((1.1) ábra). Két pont között pontosan akkor fut él, ha a megfeleltetett sarokkockák szomszédosak. Mivel ez a gráf összefüggő, tetszőleges i, j pontok között létezik út. Álljon ez az út $u_1, u_2, \ldots, u_n$ élekből. Ekkor az első lépésben bizonyítottak miatt $\forall u_i \in U =$ élek halmaza$\exists C(u_i)$ megfelelő forgatássorozat, mely megycseréli az u_i menti pontokat (vagyis sarokkockákat), miközben az orientációkat változatlanul hagyja. Az ilyen cserék $C(u_1)C(u_2)\ldots C(u_{n-1})C(u_n)C(u_{n-1})\ldots C(u_2)C(u_1)$ kompozíciója tehát megcseréli i, j pontokat, s mivel az orientációk minden lépésben változatlanok, a végeredményben is azok lesznek.

3. lépés

Megmutattuk, hogy tetszőleges transzpozíció előállítható az orientációk megtartása mellett. Mivel a transzpozíciók generálják az egész S_8-at, ezért tetszőleges p sarokkocka permutáció előállítható megfelelő $\mathrm{A} = (\mathrm{A_p}, \mathrm{A_o})$ forgatássorozattal oly módon, hogy $\mathrm{A_p} = p$ és $\forall i \in \mathcal{H} : \mathrm{A_o}(o_{\mathrm{k}_i}) = o_{\mathrm{A_p}^{-1}(\mathrm{k}_i)}$, ahol o_{k_i} az i. helyen lévő sarokkocka orientációs állapota az A elvégzése előtt. Ezzel a segédtételt bizonyítottuk. $\square$

1.2.3. Következmény. *A sarokkockák orientációinak halmazára teljesül:* $\mathcal{O} \leq S_3^8$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy o_{k_i} $(i \in \mathcal{H})$, vagyis az i. helyen lévő aktuális sarokkocka felveheti az $s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{in} \in S_3$ értékeket. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ azok a forgatássorozatok, melyek ezeket az orientációkat előállítják az alapállapotú $\mathrm{k}_{j_1}, \mathrm{k}_{j_2}, \ldots, \mathrm{k}_{j_n}$ sarokkockákon, melyek tekintve a permutációt, k_i-nek az adott A_i-hez tartozó ősei. Ekkor az (1.2.2) segédtétel miatt léteznek megfelelő $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forgatássorozatok, ahol B_i az orientációk meghagyása mellett k_i sarokkockát visszaviszi az A_i-nek megfelelő k_{j_i} ősbe. Ezáltal o_{k_i} a lehetséges orientációknak bármilyen kompozícióját felveheti.

Mivel S_3 halmaz véges, ezért a fenti állítás miatt az egység és az inverzek előállnak, így $\forall i \in \mathcal{H} : \mathrm{Orb}(o_{\mathrm{k}_i}) =< s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{in} > \Longrightarrow \mathrm{Orb}(o_{\mathrm{k}_i}) \leq S_3 \Longrightarrow \mathcal{O} \leq S_3^8$. □

1.2.4. Következmény. *Ha valamely* k_i *i. helyen lévő sarokkocka orientációja felveheti az* $s_1, \ldots, s_n \in S_3$ *értékeket, akkor tetszőleges* k_j *j. helyen lévő sarokkocka felveheti azokat.*

Bizonyítás. Az (1.2.2) segédtételből az állítás egyértelműen következik, hiszen ha egy k_i sarokkocka s_i orientációban van, akkor megfelelő forgatásokkal tetszőleges j. helyre átvihető eme orientáció megtartása mellett, így $o_{\mathrm{k}_j} = s_i$ teljesülni fog. Tehát az $\mathcal{O}$-t alkotó 8 db sarokkocka-orientáció ugyanazon lehetséges értékeket veheti fel. □

1.2.5. Definíció. Ha adottak a H és K csoportok és egy $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ homomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy H **hat a** K **csoporton**. Jelölés: tetszőleges $h \in H$, $k \in K$ elemekre

$$k^h = k(h\varphi).\ [2]$$

1.2.6. Definíció. Legyen H, K csoport és H hasson K-n. A $H \times K$ halmazon definiáljuk a szorzást a következőképpen:

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1^{h_2} k_2).$$

Állítás: az így kapott grupoid csoport, melynek neve a K**-nak** H**-val vett (külső) szemidirekt szorzata** (a $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ hatás mellett), és jele $H \ltimes_\varphi K$. [2]

1.2.7. Tétel. *Legyen* $\varphi : \mathcal{P} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ *homomorfizmus, mely egy* $p \in \mathcal{P}$ *permutációhoz a következő automorfizmust rendeli:*

$$\forall o = (o_{\mathrm{k}_1}, o_{\mathrm{k}_2}, \ldots, o_{\mathrm{k}_8}) \in \mathcal{O} : o^p = (o_{p^{-1}(\mathrm{k}_1)}, o_{p^{-1}(\mathrm{k}_2)}, \ldots, o_{p^{-1}(\mathrm{k}_8)}).$$

A Rubik-kocka $\mathcal{R}$ *permutációcsoportja izomorf az* $\mathcal{O}$*-nak* $\mathcal{P}$*-vel vett szemidirekt szorzatával* ($\mathcal{P} \ltimes_\varphi \mathcal{O}$).

Bizonyítás. Azt már beláttuk az előző szakaszban, hogy $\mathcal{P}$ izomorf S_8 csoporttal, így a $(p_1, o_1) \cdot (p_2, o_2) = (p_1 p_2, o_1^{p_2} o_2)$ szorzat első tagja valóban ilyen alakú.

Tetszőleges $o_1, o_2 \in \mathcal{O}$ elemekre a szorzatot tekintsük:

$$o_1 o_2 = (o_{\mathrm{k}_1 1} o_{\mathrm{k}_1 2}, o_{\mathrm{k}_2 1} o_{\mathrm{k}_2 2}, \ldots, o_{\mathrm{k}_8 1} o_{\mathrm{k}_8 2}).$$

A következőket kell belátnunk:

1. $\varphi : \mathcal{P} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ valóban hatás;

2. A megadott reprezentációkkal és műveletekkel a forgatások

$$k_1 \cdot k_2 = (p_1, o_1) \cdot (p_2, o_2) = (p_1 o_2, o_1^{p_2} o_2)$$

alakban írhatóak.

1. lépés

$\varphi : \mathcal{P} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ hatás az $\mathcal{O}$-beli elemek S_3-beli elemeit permutálja, vagyis tetszőleges $p \in \mathcal{P}$-re, $o \in \mathcal{O}$-ra: $o^p_{\mathrm{k}_i} = o_{p(\mathrm{k}_i)}$, ahol $p(\mathrm{k}_i)$ az S_8-beli p permutációban az $i \in H$ elemhez tartozó k_i (az i. helyen lévő) sarokkocka képét jelöli.

Először lássuk be, hogy φ valóban $\mathrm{Aut}(\mathcal{O})$-ba képez.

Létezik olyan forgatássorozat, mely segítségével az adott sarokkockákhoz tartozó orientációk megőrzése mellett tetszőlegesen permutálhatjuk a sarokkockákat (ld. (1.2.2) segédtétel). Így a megfelelő forgatássorozatot egy o állapotú kockán végrehajtva az orientáció o^p alakú lesz, vagyis $\forall o \in \mathcal{O},\ p \in \mathcal{P} : o^p \in \mathcal{O}$. Tehát a művelet $\mathcal{O}$-ból $\mathcal{O}$-ba képez.

$\mathcal{P} \cong S_8$ miatt tetszőleges o_i orientációs állapotra és p permutációra $o_i^p = o_j$ kép és $o_j^{p^{-1}} = o_i$ ős egyértelmű lesz, tehát a leképezés bijektív is.

A művelettartás szintén szintén teljesül, mivel

$$\begin{gathered}
o_1^p o_2^p = (o_{\mathrm{k}_1 1}, o_{\mathrm{k}_2 1}, \ldots, o_{\mathrm{k}_8 1})^p (o_{\mathrm{k}_1 2}, o_{\mathrm{k}_2 2}, \ldots, o_{\mathrm{k}_8 2})^p = \\
(o_{p^{-1}(\mathrm{k}_1)1}, o_{p^{-1}(\mathrm{k}_2)1}, \ldots, o_{p^{-1}(\mathrm{k}_8)1})(o_{p^{-1}(\mathrm{k}_1)2}, o_{p^{-1}(\mathrm{k}_2)2}, \ldots, o_{p^{-1}(\mathrm{k}_8)2}) = \\
(o_{p^{-1}(\mathrm{k}_1)1} o_{p^{-1}(\mathrm{k}_1)2}, o_{p^{-1}(\mathrm{k}_2)1} o_{p^{-1}(\mathrm{k}_2)2}, \ldots, o_{p^{-1}(\mathrm{k}_8)1} o_{p^{-1}(\mathrm{k}_8)2}) = \\
(o_{\mathrm{k}_1 1} o_{\mathrm{k}_1 2}, o_{\mathrm{k}_2 1} o_{\mathrm{k}_2 2}, \ldots, o_{\mathrm{k}_8 1} o_{\mathrm{k}_8 2})^p = (o_1 o_2)^p.
\end{gathered}$$

Ezzel beláttuk, hogy ezen permutációk valóban automorfizmusok.

Állítás: Ez a leképezés pontosan akkor hatás, ha bármely $p_1, p_2, p \in P$ és $o_1, o_2, o \in \mathcal{O}$ elemekre:

(1) $o^1 = o$;

(2) $(o_1 o_2)^p = o_1^p o_2^p$ és

(3) $(o^{p_1})^{p_2} = o^{p_1 p_2}$. [2]

Az első feltétel triviális, hiszen ha egy $o \in \mathcal{O}$ orientáció ($S_3 - beli$) elemeit helyben hagyjuk, önmagát kapjuk.

A második feltételt már az automorfizmus bizonyításánál beláttuk. A kifejezések közti különbség annyi, hogy baloldalon a permutálás előtt szorozzuk össze az S_3-beli elemeket, jobboldalon pedig utána.

A harmadik feltételhez elegendő a permutációk asszociatív tulajdonsága, mivel p_1 és p_2 az $o_{\mathrm{k}_1}, o_{\mathrm{k}_2}, \ldots, o_{\mathrm{k}_8}$ elemek sorrendjét változtatja.

Ezzel beláttuk, hogy $\varphi : \mathcal{P} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ hatás.

2. lépés

Tekintsünk egy tetszőleges $\Phi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ forgatás utáni állapotot, ahol $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$. A sarokkockák helye (φ_1) megfeleltethető egy S_8-beli elemnek.

Legyen az aktuálisan i-edik helyen lévő sarokkocka orientációja $(\varphi_2)_i$, továbbá jelölje $(\varphi_2)^{-1}_{\varphi_1^{-1}(i)}(j)$ azt a $\mathcal{H}'$-beli elemet, mely a forgatás következtében az i-edik sarokkocka identikus orientációbeli j számú oldalának helyére kerül. Vagyis az orientációk minden $i \in \mathcal{H}$-val reprezentált sarokkockára:[6]

$$(\varphi_2)_i = \begin{pmatrix} (\varphi_2)^{-1}_{\varphi_1^{-1}(i)}(1) & (\varphi_2)^{-1}_{\varphi_1^{-1}(i)}(2) & (\varphi_2)^{-1}_{\varphi_1^{-1}(i)}(3) \\ 1_i & 2_i & 3_i \end{pmatrix}.$$

Végezzünk el a kockán egy tetszőleges $\mathrm{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ forgatást. Ez egyrészt permutálja a sarokkockákat, másrészt hatással van az orientációjukra.

Mivel $\mathcal{O}$ elemeinek sorrendjét aszerint határoztuk meg, hogy *mely helyen lévő* sarokkocka orientációját vesszük, ezért a $\mathcal{P}$ permutáció megváltoztatja ezek sorrendjét, továbbá az orientáción is végrehajt változtatásokat: jelöljük $(\varepsilon_2)_i(j)$-vel azt a $\mathcal{H}'$-beli elemet, melyre az i-edik helyre kerülő sarokkocka – az identikus orientációt tekintve – j-edik ($j \in \mathcal{H}'$) helyen lévő lapkáját viszi.

$$\varepsilon_2((\varphi_2)_{\varepsilon_1^{-1}(i)})_i = \begin{pmatrix} (\varphi_2)^{-1}_{\varphi_1^{-1}(\varepsilon_1^{-1}(i))}(1) & (\varphi_2)^{-1}_{\varphi_1^{-1}(\varepsilon_1^{-1}(i))}(2) & (\varphi_2)^{-1}_{\varphi_1^{-1}(\varepsilon_1^{-1}(i))}(3) \\ (\varepsilon_2)_i(1) & (\varepsilon_2)_i(2) & (\varepsilon_2)_i(3) \end{pmatrix},$$

ahol $\varepsilon_1^{-1}(\varphi_1^{-1}(i))$ azt a $\mathcal{H}$-beli elemet jelöli, amelyik helyről E az i-edik helyre permutálja az ottani sarokkockát.

Formálisan tehát először elvégezzük E-nak ε_1 komponensét, és attól függően, hogy ez hová vitte a sarokkockákat, elvégezzük rajtuk sorra a megfelelő orientálást.

A $(\varphi_2)^{-1}_{\varphi_1^{-1}(i)}(j)$ ($i \in \mathcal{H}$, $j \in \mathcal{H}'$) kifejezést jelöljük röviden $\varphi^{-1}_{i'}(j)$-vel, továbbá a $(\varphi_2)^{-1}_{\varphi_1^{-1}(\varepsilon^{-1}(i))}(j)$-t $\varphi^{-1}_{i''}(j)$-vel (i' és i'' i-nek a megfelelő ősei). Továbbá vegyük azt az $\mathcal{R}$-beli reprezentánst, melyet akkor kapunk, ha az identitáson végrehajtjuk az E

[6]Lehetne a függvények által felvett értékeket is indexelni (pl. $(\varphi_2)^{-1}_{\varphi_1^{-1}(i)}(\mathbf{1}_{\varphi_1^{-1}(\mathbf{i})})$), de mivel a függvénynek az indexe már elég az egyértelműséghez, ezért ezt elhagyom. Az alsó sor elemeinek indexelése a későbbiekben lesz lényeges.

forgatássorozatot, s legyen ez $\mathrm{E_r} = (\mathrm{E_p}, \mathrm{E_o})$. Vegyük észre a következőt:

$$\left[\begin{pmatrix} \varphi_{1'}^{-1}(1) & \varphi_{1'}^{-1}(2) & \varphi_{1'}^{-1}(3) \\ 1_1 & 2_1 & 3_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_{2'}^{-1}(1) & \varphi_{2'}^{-1}(2) & \varphi_{2'}^{-1}(3) \\ 1_2 & 2_2 & 3_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} \varphi_{8'}^{-1}(1) & \varphi_{8'}^{-1}(2) & \varphi_{8'}^{-1}(3) \\ 1_8 & 2_8 & 3_8 \end{pmatrix}\right]^{\varepsilon_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_{1'}^{-1}(1) & \varphi_{1'}^{-1}(2) & \varphi_{1'}^{-1}(3) \\ 1_{\varepsilon_1(1)} & 2_{\varepsilon_1(1)} & 3_{\varepsilon_1(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_{2'}^{-1}(1) & \varphi_{2'}^{-1}(2) & \varphi_{2'}^{-1}(3) \\ 1_{\varepsilon_1(2)} & 2_{\varepsilon_1(2)} & 3_{\varepsilon_1(2)} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} \varphi_{8'}^{-1}(1) & \varphi_{8'}^{-1}(2) & \varphi_{8'}^{-1}(3) \\ 1_{\varepsilon_1(8)} & 2_{\varepsilon_1(8)} & 3_{\varepsilon_1(8)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_{1''}^{-1}(1) & \varphi_{1''}^{-1}(2) & \varphi_{1''}^{-1}(3) \\ 1_1 & 2_1 & 3_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_{2''}^{-1}(1) & \varphi_{2''}^{-1}(2) & \varphi_{2''}^{-1}(3) \\ 1_2 & 2_2 & 3_2 \end{pmatrix}\cdots$$

$$\cdots\begin{pmatrix} \varphi_{8''}^{-1}(1) & \varphi_{8''}^{-1}(2) & \varphi_{8''}^{-1}(3) \\ 1_8 & 2_8 & 3_8 \end{pmatrix} = \varphi_2(id)^{\varepsilon_1}, \text{ továbbá}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{i''}^{-1}(1) & \varphi_{i''}^{-1}(2) & \varphi_{i''}^{-1}(3) \\ 1_i & 2_i & 3_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_i & 2_i & 3_i \\ (\varepsilon_2)_i(1) & (\varepsilon_2)_i(2) & (\varepsilon_2)_i(3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_{i''}^{-1}(1) & \varphi_{i''}^{-1}(2) & \varphi_{i''}^{-1}(3) \\ (\varepsilon_2)_i(1) & (\varepsilon_2)_i(2) & (\varepsilon_2)_i(3) \end{pmatrix}.$$

Vagyis egy tetszőleges Φ helyzetű kockán végzett E forgatás után azt a helyzetet kapjuk, mint ha $\varepsilon_1(= \mathrm{E_p})$ S_8-beli permutáció elvégzése után az orientációkat rendre beszoroznánk $\mathrm{E_o}$ megfelelő tagjával.

Mivel tetszőleges forgatást és kiindulási helyzetet vizsgáltunk, így minden forgatási műveletet azonosíthatunk az identitáson való végrehajtás után kapott $\mathcal{R}$-beli elemmel való szorzással (a fenti szabály szerint), azaz

$$\forall r_1, r_2 \in (R) : r_1 \cdot r_2 = (p_1, o_1) \cdot (p_2, o_2) = (p_1 o_2, o_1^{p_2} o_2) \text{ teljesül.}$$

□

A permutációkhoz hasonlóan, most az orientációkat leíró csoportot is addig szűkítjük, míg pontosan meg tudjuk határozni.

1.2.8. Tétel. *A Rubik-kocka orientációinak csoportjára:* $\mathcal{O} \leq Z_3^8$.

Bizonyítás. Az elemi forgatások $(p, \{o_{\mathrm{k}_1}, \ldots, o_{\mathrm{k}_8}\})$ alakban felírva:

$$T = ((1432), \{id, id, id, id, id, id, id, id\}),$$
$$A = ((5678), \{id, id, id, id, id, id, id, id\}),$$
$$B = ((1584), \{(123), id, id, (132), (132), id, id, (123)\}),$$
$$J = ((2376), \{id, (132), (123), id, id, (123), (132), id\}),$$
$$E = ((1265), \{(132), (123), id, id, (132), (132), id, id\}),$$
$$H = ((3487), \{id, id, (132), (123), id, id, (123), (132)\}).$$

Vegyük észre, hogy egy sarokkocka orientációja a következő 3 értéket veheti fel: id, (123), (132). Az identitáson kívüli két elem harmadrendű, továbbá egymás inverzei, így ezek pontosan megfeleltethetőek egy-egy Z_3-beli elemnek.

Mivel az elemi forgatásokkal hozunk létre minden lehetséges helyzetet, és ezekre $\forall i \in \mathcal{H} : o_{\mathrm{k}_i} \in Z_3$ teljesül, a szemidirekt szorzatban

$$\forall o_1, o_2 \in \mathcal{O}, p \in \mathcal{P} : o_1^p o_2 \text{ tagjaira} : o_{p^{-1}(\mathrm{k}_i)1} o_{\mathrm{k}_i 2} \in Z_3 \Longrightarrow o_1^{p_2} o_2 \in Z_3^8.$$

Az (1.2.2) segédtétel miatt $\forall i \in \mathcal{H} : o_{\mathrm{k}_i}$ tetszőleges Z_3-beli értéket felvehet $\Longrightarrow$ $\mathcal{O} \leq Z_3^8$. □

A következő megállapítás triviális lehet azok számára, akik az összekevert Rubik-kockát forgatások segítségével szokták kirakni, és nem „átmatricázással". Így ha a lenti megállapításnak ellentmondó állapotot tapasztalunk, fogjunk gyanút.

1.2.9. Következmény. *Egy sarokkockának két lapkája, a harmadik helybenhagyása mellett nem cserélhető fel.*

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges i. helyen lévő sarokkockát. Az állításban szereplő állapothoz tartozó o_{k_i} permutáció –, mely lehetne (12), (23), és (31) –, minden esetben másodrendű és páratlan, melyből már a felsorolás mellőzésével is megállapítható, hogy nem lehet Z_3-nak eleme. (Hiszen Z_3 elemei mind párosak, rendjük pedig 3 vagy 1.) □

1.2.10. Tétel. *Az $\mathcal{O}$ csoport pontosan azokat a Z_3^8-beli elemeket tartalmazza, amelyekre $o_{\mathrm{k}_1} \cdot o_{\mathrm{k}_2} \cdot \ldots \cdot o_{\mathrm{k}_8} = id$ teljesül.*

Bizonyítás.

1. lépés - Szükségesség

Az elemi forgatásokra o_{k_i} mindegyike a *ciklikus* Z_3 eleme. Ismeretes, hogy ciklikus csoport kommutatív; továbbá az elemi forgatások mindegyikére teljesül, hogy $o_{\mathrm{k}_1} \cdot o_{\mathrm{k}_2} \cdot \ldots \cdot o_{\mathrm{k}_8} = id$.

Végezzünk el az alapállapotú kockán egy tetszőleges $r \in R$ forgatást, ahol $r = \mathrm{E}_1 \mathrm{E}_2 \ldots \mathrm{E}_n$ elemi forgatások sorozata. Jelölje $a(o_{\mathrm{k}_i})$ azt az orientációt, melyet az i. helyen lévő sarokkocka vesz fel, ha egy tetszőleges a forgatássorozatot elvégzünk az alapállapotú kockán. Ekkor a kommutativitás miatt a $\prod_{i \in H} r(o_{\mathrm{k}_i})$ felírható az elemi forgatások által létrehozott orientációk szorzataként, vagyis

$$\prod_{i \in H} r(o_{\mathrm{k}_i}) = \prod_{i \in H} id(o_{\mathrm{k}_i}) \cdot \prod_{i \in H} \mathrm{E}_1(o_{\mathrm{k}_i}) \cdot \prod_{i \in H} \mathrm{E}_2(o_{\mathrm{k}_i}) \cdot \ldots \cdot \prod_{i \in H} \mathrm{E}_n(o_{\mathrm{k}_i}).$$

Mivel $\prod_{i \in H} id(o_{\mathrm{k}_i}) = id$ és $\forall j \in \{1, \ldots, n\} : \prod_{i \in H} \mathrm{E}_j(o_{\mathrm{k}_i}) = id$ teljesül, ezért ezek szorzata is identitás lesz. Tehát tetszőleges állapotra fennáll, hogy teljesíti a feltételt.

2. lépés - Elégségesség

Az elégségességhez megmutatjuk, hogyan lehet tetszőleges, az állításban szereplő tulajdonsággal rendelkező állapotot létrehozni.

Tekintsük az identikus permutációs állapotot, továbbá az (1.2.2) segédtételben leírt $G = (J^{-1}A^{-1}JA)^2$ forgatássorozatot. G helyben hagy minden sarokkockát, a második helyen lévő sarokkockán ($= \mathrm{k}_2$) elvégzi az (132) elemnek megfelelő forgatást, k_1, k_3, k_4 sarokkockákat pedig orientáció szempontjából is változatlanul hagyja.

Határozzuk meg, milyen orientációt szánunk a második helyen lévő sarokkockának, majd ettől függően végezzük el a G-t egyszer, kétszer vagy egyszer sem; ezután végezzük el a T forgatást, majd az előző módon orientáljuk G segítségével a hármas számú sarokkockát; hasonló módon járjunk el a négyes számú sarokkockával, végül az első számú sarokkocka kettes helyre forgatása után végezzük el annyiszor G-t, hogy ezzel együtt az összesen elvégzett G forgatások száma osztható legyen hárommal – ezáltal k_5, k_6, k_7 és k_8 orientációja az eredeti állapotába kerül.

Pozicionáljuk úgy felülre a kocka alsó oldalát, hogy az egyes számú helyre az ötös, a kettesre pedig a nyolcas számú sarokkocka kerüljön. Ezután a fentivel azonos módszerrel forgassuk megfelelő orientációs állapotba a nyolcas, hetes majd hatos számú sarokkockát, végül az egyes sarokkockához hasonlóan addig pozicionáljuk az ötös számút, míg a jelenleg alul lévő sarokkockák a pozicionálás előtti orientációs állapotba kerülnek.

Az egyes és ötös kivételével most már minden sarokkocka a nekünk tetsző orientációs állapotban van.

Ha az ötös sarokkocka orientációján változtatni szeretnénk, pozicionáljuk az ötöst a második helyre, az egyes sarokkocka pedig kerüljön a helyére, majd a kívánt pozicionálásnak megfelelő $i \in \{1,2\}$-vel végezzük el a $G^i T^{-1} G^{(3-i)} T$ forgatássorozatot.

A kocka identikus permutációjú állapotába való viszapozicionálás után ekkor egy olyan állapotot kaptunk, ahol $p = id$, o_{k_i}-ket pedig $\forall i \in H, i \neq 1$-re meghatároztuk.

Kérdés: Problémát okoz-e, hogy a nyolcból egy sarokkocka nem pozicionálható tetszőlegesen?

A feltétel szükségessége miatt $o_{\mathrm{k}_1} \cdot o_{\mathrm{k}_2} \cdot \ldots \cdot o_{\mathrm{k}_8} = id \Longrightarrow o_{\mathrm{k}_1} = (o_{\mathrm{k}_2} \cdot \ldots \cdot o_{\mathrm{k}_8})^{-1}$; vagyis láthatóan az első sarokkocka orientációja előáll a többi orientáció szorzatának inverzeként, tehát egyértelműen meghatározott. (Hasonló elvet követve, bármely hét sarokkocka orientációja meghatározza a nyolcadikét.) Legyen ez az állapot $r_1 = (id, o_{\mathrm{tetsz}})$.

Beláttuk, hogy az identikus állapotú kockánál –, a feltétel megszorításai mellett –, valóban tetszőleges orientáció előállítható. Az (1.2.2) segédtétel miatt az identikus állapotú kockából tetszőleges p permutáció előállítható egy megfelelő A forgatássorozattal, hogy $\mathrm{A} = (p, \{id^8\})$. Az ilyen állapotú kockán a fent leírt orientációs lépések elvégzésével az $r_2 = (p, o_{\mathrm{tetsz}})$ állapotú kockát kapjuk. Mivel p tetszőleges, valóban minden olyan állapot előállítható, ahol az orientációk szorzata az identitás. Ezzel a tételt bizonyítottuk. □

Az előző tételből triviálisan következik egy sokat emlegetett állítás a Rubik-kockával kapcsolatban:

1.2.11. Következmény. *Egy sarokkocka önmagában „nem forgatható maga körül", vagyis nem lehet a Rubik-kockának olyan állása, hogy egyedül egy sarokkocka nincs identikus orientációs állapotban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a Rubik-kockának csak egy k_t sarokkockájára teljesül: $o_{\mathrm{k}_t} = a, a \neq id$. Ez esetben $\prod_{i \in H} o_{\mathrm{k}_i} = a$, ami ellentmond az előző tételnek. □

Megjegyzés. Természetesen semmilyen más, az (1.2.10) tételnek ellentmondó orientációs helyzet nem állhat elő.

A következő állítás az (1.2.10) tételből egyszerűen levezethető. Célja, hogy olyan összefüggést adjon a lehetséges kockaállásokra, mely nem igényli a permutációk ismeretét – így mélyebb matematikai ismeretekkel nem rendelkező személy is alkalmazhatja. Használatához mindössze arra van szükségünk, hogy a lapkákat 1-től 3-ig beszámozzuk az (1.3) ábra alapján.

1.2.12. Következmény. *A Rubik-kocka pontosan azokat az állapotokat veheti fel, amikor bármely két szemben lévő oldalára fennáll, hogy a rajtuk lévő $\mathcal{H}'$-beli számok összege 3-mal osztható.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az (1.2.10) állítás feltétele pontosan akkor teljesül, ha o_{k_i}-k között az (123) és (132) permutációk előfordulásának különbsége osztható hárommal, mivel ezek harmadrendű permutációk, továbbá egymás inverzei.

Vizsgáljuk meg az alsó-felső oldalpárt.

1. Vegyük $m = \min\{|(123)|, |(132)|\}$ előfordulások minimumát; ekkor m db sarokkocka esetében kerül az 1-es és a 2-es is a felső vagy az alsó oldalra (vagyis a 3-as helyére), így ezek összege osztható hárommal.

2. Ha az egyik permutációnak nagyobb az előfordulása, akkor az háromszor vagy hatszor viszi ugyanazt az elemet (vagy az 1-et, vagy a 2-t) a háromba, így ezek összege is hárommal osztható lesz.

3. Az eddig nem beszámolt (ha van ilyen) o_{k_i}-k szükségképpen identitások, vagyis a tekintett oldalpárjárra a sarokkockák 3-mal számozott lapkái kerülnek.

Mivel az alsó-felső oldalpáron lévő lapkák összege a fenti három esetben számolt részösszegekből áll, melyek mindegyike osztható hárommal, az ide vonatkozó oszthatósági szabály miatt 3 osztója lesz az összegnek is.

A következő észrevétel tesszük: a kocka bármely $r \in \mathcal{R}$ állapotában megtehetjük, hogy a kocka tetszőleges párhuzamos oldalpárját az alsó-felső oldalpár helyére pozicionáljuk (jobb-balt pl. EH^{-1}-zel, első-hátsót BJ^{-1}-zel); ekkor pont azok a lapkák alkotják az aktuális alsó-felső oldalpárt, melyek előtte a jobb-balt vagy az első-hátsót, ezért szükségképpen ezekre is teljesülnie kell, hogy az összegük hárommal osztható. $\square$

Ahhoz, hogy egy kockaállapot szabályosságát („kirakhatóságát”) megállapítsuk, nem kell mindenképpen 24 lapkát megvizsgálni. Ha feltesszük, hogy maguk a sarokkockák helyesen vannak színezve, és csak a kontár összerakás fenyeget minket, a következő észrevételt tehetjük:

Mivel a sarokkockákat egységesen címkéztük fel $\mathcal{H}'$ halmaz elemeivel, elég sarokkockánként egy lapkát megnézni. Ebből ((1.3) ábra) egyértelműen megállapítható az (1.2.10) tételhez (orientációk szorzata = identitás) szükséges 8 db orientáció, vagyis a szabályosság 8 lapka vizsgálatával is kielégíthető.

Ugyanez elmondható az (1.2.12) állításról: ugyanis ha két szemközti oldalát tekintjük a Rubik-kockának, és az a modulo hármas feltételt kielégíti, akkor a levezetés alapján, helyes számozás esetén a másik két oldalpárra is teljesülni fog, hogy lapkáik összege osztható hárommal.

Az utóbbi módszerrel azt a lépést is megspóroljuk, hogy végig kelljen gondolni az orientációkat és azok szorzatát, így javasolt azt a meghatározó 8 lapkát egy párhuzamos oldalpárról kiválasztani.

1.3. A lehetséges kockaállások számossága

Az előzőekből tudjuk, hogy a 8 db sarokkockából pontosan 7 szabadon orientálható, és ezek mindegyikéhez tetszőleges permutációt rendelhetünk. Ezzel összesen $(7 \cdot 3) \cdot 8! = 846\,720$ esetet számolhatunk össze. Ez tehát az $\mathcal{R}$ csoport számossága.

Kérdés: Ebből hány olyan eset van, melyek nem vihetőek egymásba pozicionálással (azaz az egészében vett Rubik-kocka helyzetváltoztatásával)?

A válasz egyszerű: ha a pozicionálással egymásba vihető kockaállásokat azonosnak tekintjük, akkor $\mathcal{R}$-ben minden állapotot annyiszor számoltunk, ahány különböző $r \in \mathcal{R}$ elemnek megfeleltethető. Mivel bármely két különböző pozicionálással a 8 sarokkockából lesznek olyanok, melyek nincsenek azonos helyen, ezek mind különböző $\mathcal{R}$-beli elemek lesznek, tehát egy adott állás előfordulása a kocka mozgáscsoport-elemszámának felel meg. Vagyis az esetek száma $846\,720 : 24 = 35\,280$.

Hogy kicsit tudományosabbak legyünk, vegyük a $\mathcal{G} \leq \mathcal{R}$ pozicionálások alkotta részcsoportot. (Ez láthatóan részcsoport, hiszen ha a kirakott kockánkat különböző módokon rakosgatjuk az asztalra, továbbra is egyszínűek maradnak az oldalai. Például $< T^{-1}A, B^{-1}J >$ generálja a részcsoportot, ennek elemei és számossága matematikailag igazolják az állítást.)

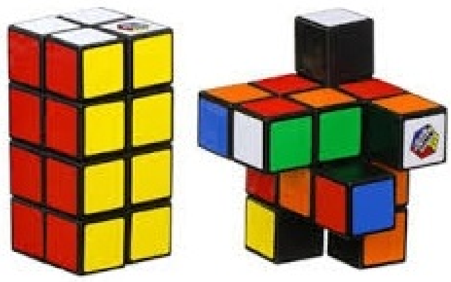
Lagrange tétele miatt a részcsoport indexére $|\mathcal{R} : \mathcal{G}| = |\mathcal{R}| : |\mathcal{G}| = 35\,280$, ahol a mellékosztályok pontosan azon elemeket teszik egy osztályba, melyek pozicionálással egymásba vihetőek.

2. fejezet

A Rubik torony

A Rubik torony bemutatása, problémák a kirakással

A Rubik torony látszólag olyan, mintha két $2 \times 2 \times 2$-es kocka lenne egymáson; elforgatás után viszont kevesen gondolnák, hogy visszavezethető a „kistestvérére”, mi több: a kocka közismert algoritmusainak birtokában –, egy kis okoskodással –, kirakható a torony is.



2.1. ábra.

Mikor a toronnyal elkezdünk játszani, hamar megszűnik „torony”-nak lenni: különböző érdekes alakzatokat vesz fel (ld. például (2.1) ábra), melytől a lelkes rubikozó úgy érezheti: jóval nehezebb dolga lesz, mint a kocka esetében. Ez viszont csak a látszat; valójában ennek a rejtvénynek a megoldásához kevesebb algoritmus ismerete szükséges, mint például a $3 \times 3 \times 3$ Rubik-kocka kirakásához.

Annak ellenére, hogy nekem a $2 \times 2 \times 2$-es kocka tanulmáyozása után a torony már egyszerűnek tűnik, azt tapasztaltam, hogy mások számára kifejezetten nehéz.

A következőkben ismertetem az erre vonatkozó meglátásaimat, és hogy ezekkel kapcsolatban milyen konklúzióra jutottam.

Amikor a tornyot összekevert állapotban mások kezébe adtam, szinte minden esetben igaz volt, hogy elsődleges céljuknak azt tűzték ki, hogy újra téglatestet csináljanak belőle. Ez valójában ugyanaz a művelet, mint ha a $2 \times 2 \times 2$-es kockának megpróbálnánk minden sarokkockáját identikus orientációs állapotba hozni, függetlenül azok aktuális helyétől.

Ennek ellenére, olyanoknak is nehezére esett megvalósítani már csak az orientálást is, akik egyébként a $2 \times 2 \times 2$-es és a $3 \times 3 \times 3$-as Rubik-kockát is ki tudják rakni.

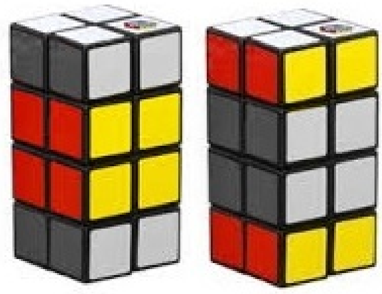
Ennek egyik oka véleményem szerint a hozzáállás: a problémát nehéznek találják, ezért konkrét taktika helyett csak véletlenszerűen próbálkoznak, és semmiféle összefüggést nem keresnek az általuk ismert kockákkal.

Másik oka lehet a sikertelenségnek maga a cél, melyet kitűztek, mert nem egyezik a megszokott rutinnal. Ugyanis a legtöbb esetben, mikor kirakunk egy Rubik-kockát, első lépésben egy választott oldalát rakjuk ki, helyes orientációkkal. Ezután foglalkozunk a többi oldalával, ahol szokás szerint két külön lépésként oldjuk meg az elemek permutációját, majd azok orientációit (esetleg fordítva).[1]

Talán ez a berögzült hozzáállás okozza, hogy az orientációkat a próbálkozó a permutációk logikájával próbálja megoldani. Ugyanezt erősítheti az a zavaró tényező, hogy a mindenfelé kiálló és eltérő színű sarokkockák azt az érzetet keltik, hogy az adott elem nincs a helyén. Pedig valójában a kitűzött cél eléréséhez minden esetben minden sarokkocka megfelelő helyen van, a „zavaró tényezők” pedig segítségünkre is lehetnek, ha tudjuk, hogyan tekintsünk rájuk.

[1]Léteznek eltérő módszerek, ún. „gyors algoritmusok”, de ezekkel most nem foglalkozunk.

2.1. Visszavezetés a $2 \times 2 \times 2$-esre, permutációk



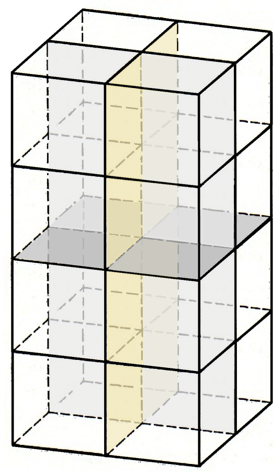
2.2. ábra.

Tekintsük úgy a tornyot, mintha lenne egy kocka középen, egy másik pedig „közrefogná" ((2.2) ábra). A középső 8 db elemet –, melyek működésük szempontjából sarokkockának tekinthetők –, feleltessük meg úgy egy $2 \times 2 \times 2$-esnek, hogy az (1.2) ábra számozását tekintve a hármas számú oldalt nem egy szín, hanem egy plusz sarokkocka jellemzi.

A külső elemektől való megkülönböztetés miatt ezeket az elemeket a későbbiekben *élkockáknak*[1] nevezzük.

Kiindulási helyzetben az egymás alatt lévő élkockáknak az egy síkba eső lapkái ugyanolyan színűek, de a két elem ettől még nem tekinthető egyformának. Nincs olyan forgatás, amely során egy élkockához oda, ahol előtte sarokkocka volt, másik élkocka kapcsolódhatna, és viszont. Így a körüljárási irány miatt, a rajta lévő sarokkocka színeitől függetlenül, az élkocka egyértelmű.

A belső részkocka alaphelyzetben felső és alsó képzeletbeli lapkáinak tekintsük kizárólag azt a tulajdonságát, hogy egy-egy sarokkocka csatlakozik hozzájuk. Feleltessük meg az alapállapotú torony (2.4) ábra szerinti $1, 2, \ldots, 8$ élkockáiknak a $2 \times 2 \times 2$-es azonos számú sarokkockáit, és ennek megfelelően azok lapkáit az előző fejezetben leírt módon az (1.2) ábra szerint. Ekkor a (2.3) ábrán kiemelt síkok mentén tekergetve a tornyot, *az élkockák permutációi és orientációi megfeleltethetőek az $\mathcal{R}$ csoport elemeinek*, ahol $\mathcal{R} = \mathcal{P} \ltimes \mathcal{O}$ a $2 \times 2 \times 2$-es Rubik-kocka állapotainak csoportja.



2.3. ábra.

Fontos megjegyeznünk, hogy ezen három sík mentén a torony elemeinek elhelyezkedése bármikor változtatható. Minden ilyen $90°$-os forgatás megfeleltethető a $2 \times 2 \times 2$-es kocka azon elemi forgatásának, mely az (2.4) ábrát tekintve a kocka azonos számú elemein ugyanazt permutációt végzi, mint amit a torony forgatása a középső elemeken.

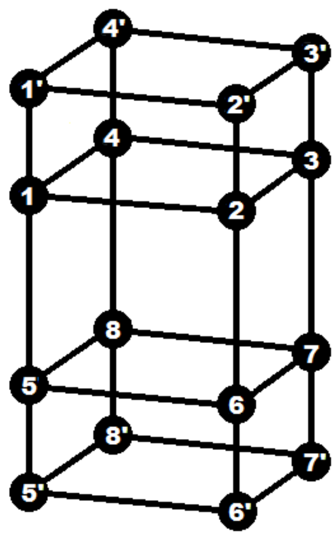
A belső részkockához hasonlóan a külső részkocka elemeit is feleltessük meg rendre a kisrubik sarokkockáinak ((1.1) ábra): $1'$-t az 1-nek, $2'$-t a 2-nek, $\ldots$, $8'$-t a 8-nak.

Nézzük meg, milyen forgatás típusokat hajthatunk végre, s ezek milyen hatással vannak az elemekre:

[1]Az elnevezés hagyományosan a $3 \times 3 \times 3$-as Rubik-kocka kétszínű elemeire használatos.

1. Forgathatunk a (2.3) ábra síkjai mentén: ez a sarokkockák és az élkockák helyzetét is változtatja.

2. Ha egy adott oldalra eső minden sarok- és élkocka hárommal számozott (létező vagy képzeletbeli) lapkája párhuzamos az adott oldal síkjával, akkor lehetőség van kizárólag az ottani sarokkockákat permutálni.[2]



2.4. ábra.

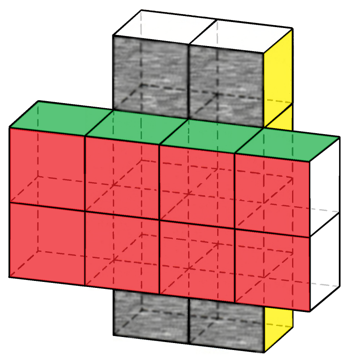
Első esetben az élkockák egymás helyére kerülnek, a sarokkockák viszont nem minden esetben. Ezért a sarokkockák permutációjára ki kell találnunk egy egyértelmű konstrukciót, mellyel az orientációktól függetlenül azonosíthatjuk a helyüket. Erre több lehetőségünk is van:

1. Vizsgálhatjuk, hogy a sarokkocka az alaphelyzetű toronyban az 1–8 számokkal jelölt *élkocka-helyek* melyikéhez csatlakozik, függetlenül az éppen ott lévő elemtől.

2. Tekinthetjük egy sarokkocka helyét aszerint, hogy melyik konkrét élkockához csatlakozik.

A torony helyzeteit jelölje a $(p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{S}})$ pár, ahol az első tag az élkockák, a második pedig a sarokkockák permutációját jelöli ($p_{\mathrm{E}} \in \mathcal{P}_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{S}} \in \mathcal{P}_{\mathrm{S}}$). Tekintsük példaként a torony (2.5) ábrán látható helyzetét. Ekkor az állapotot leíró kifejezés az első konstrukció szerint $((1265), (1'2'6'5'))$, a második konstrukció szerint pedig $((1265), id)$.

A továbbiakban a számomra kézenfekvőbb, első konstrukcióval dolgozom. Vegyük észre, hogy *ha csak a közös síkok mentén forgatunk, akkor p_{E} és p_{S} ugyanazon permutációk lesznek* – leszámítva a formalitást, miszerint a sarokkockákat vesszős számokkal jelöljük.


2.5. ábra.

Korábban már megmutattuk, hogy az élkockák helyzetei –, permutációk és orientációk egyaránt –, $\mathcal{R}$ csoportnak feleltethetőek meg, amiből a permutációs tagra vonatkozóan következik, hogy $\mathcal{P}_{\mathrm{E}} \cong \mathcal{P} \cong S_8$.

Most nézzük a sarokkockák permutációit. Minden $\mathcal{P}_{\mathrm{E}}$-beli elemnek megfelelő permutáció előáll $\mathcal{P}_{\mathrm{S}}$-ben, amiből következik, hogy $\mathcal{P}_{\mathrm{S}} \leq \mathcal{P}_{\mathrm{E}}$. Mivel 8 elem permutációja S_8 csoportnál bővebb nem lehet, és $\mathcal{P}_{\mathrm{E}} \cong S_8$, ezért szükségszerűen $\mathcal{P}_{\mathrm{S}} \cong S_8 \cong \mathcal{P}_{\mathrm{E}}$ is teljesül.

[2] Ez alapállapotban a felső és alsó oldalakra teljesül.

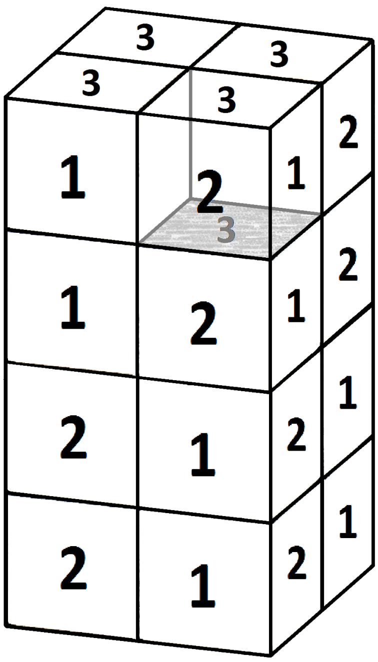
Ezzel külön-külön már megállapítottuk a permutációkat; kérdés viszont, hogy ezek hogy függnek egymástól, továbbá hogy mikor tudunk független forgatásokat végezni a sarokkockákon.

2.2. Élkockák és sarokkockák függőségei, orientációk

A torony élkockáinak lapkáit és azok orientációs állapotát reprezentáljuk hasonló módon, mint a $2 \times 2 \times 2$-es kockánál. Annyi az eltérés, hogy az élkockák hármas számú oldalai azok lesznek, melyekhez sarokkocka kapcsolódik. Ha a 3-as oldalra egy képzeletbeli lapkaként tekintünk[1], akkor az élkockák orientációit a kockánál mutatott levezetéssel azonos módon megfeleltethetünk egy-egy $\mathcal{O}$-beli elemnek. ($\mathcal{O}$ a Rubik-kocka sarokkockáinak orientációs állapotait tartalmazó csoport.)

A belső részkocka összes állapotára, szintén a már korábban alkalmazott módszerekkel levezethető, hogy izomorf az $\mathcal{R} \cong \mathcal{P} \ltimes_{\varphi} \mathcal{O}$ csoporttal.

Jelölje az élkockák csoportját és részcsoportjait hasonló módon $\mathcal{R}_{\mathrm{E}} \cong \mathcal{P}_{\mathrm{E}} \ltimes_{\varphi} \mathcal{O}_{\mathrm{E}}$.



2.6. ábra.

Számozzuk be a sarokkockákat is ugyanúgy 1-től 3-ig, mint az élkockákat. Ebben az esetben viszont szükséges átfogalmaznunk, hogy mit értünk orientációs állapot alatt. Míg a Rubik-kocka esetében egy adott elemhez tartozó lapkák fizikailag is egy (másik) elem lapkáinak helyére kerülnek, a torony esetében ez a legtöbb esetben nem teljesül.

Vegyük például a (2.5) ábrán látható $(1'2'6'5')$ permutációt: ekkor az $1'$ sarokkockának egyik lapkája sem kerül a $2'$ valamely lapkájának identikus helyére, s ugyanígy elmondható ez a többi elmozdított elemről is annak képével kapcsolatban.

Definiáljuk ezért a lapkák helyzetét aszerint, hogy identikus helyzetben az ott lévő sarokkocka azonos számú lapkája fölfelé, lefelé, balra, jobbra, előre vagy hátra néz.

Ily módon a sarokkockák orientációi, ugyanúgy, mint a permutációk, a közös tengelyeken való forgatások során az élkockák orientációival azonosak lesznek, mivel a sarokkockák 3-mal jelölt lapkája mindig párhuzamos marad a hozzá csatlakozó élkockának a képzeletbeli oldalával az ilyen forgatások alatt. Ebből következik, hogy a sarokkockák orientációi minden $\mathcal{O}$-beli állapotot felvehetnek. Jelölje a sarokkockák orientációit $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$. Megállapítottuk, hogy $\mathcal{O} \leq \mathcal{O}_{\mathrm{S}}$.

Kérdés: Lehet-e a sarokkockák orientációja $\mathcal{O}$-nál bővebb?

A torony szerkezete olyan, hogy sarokkockákat akkor tudunk élkockáktól függetlenül mozgatni egy adott oldalon (elöl, hátul stb.), ha az oldalhoz tartozó négy sarokkocka „arra áll kifelé”, vagyis ahogy már korábban említettük, ha a 3-mal reprezentált

[1]Ez azért hasznos, hogy lássuk, a lapkák a forgatások hatására egymás helyére kerülnek.

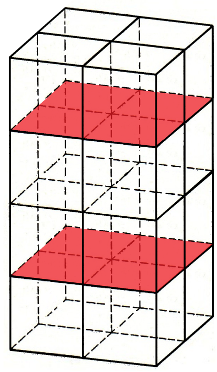
lapkák mind párhuzamosak a torony tekintett oldalára.

Ekkor a négy sarokkocka az elemi forgatások mintájára 90°-onként, ciklikusan permutálható anélkül, hogy ez az élkockák helyzetén változtatna. A mozgatást ekkor a tekintett oldallal párhuzamos, az él- és sarokkockák találkozásánál lévő sík mentén végezzük (alaphelyzetben például a felső és alsó oldalakon, a (2.7) ábrán látható síkok mentén). Egy ilyen forgatás után, ha nem jutunk vissza a kezdeti állapotba, a tekintett sarokkockák másik élkockákhoz fognak kapcsolódni, mint előtte.

Vegyük észre, hogy egy ilyen forgatásnál egy sarokkocka lapkái pontosan egy másik sarokkocka lapkáinak helyére kerülnek. Ez azt jelenti, hogy ezen orientációk leírhatóak egy már létező $\mathcal{O}$-beli elemmel, vagyis $\mathcal{O}_\mathrm{S} \cong \mathcal{O}$.

A független forgatások a sarokkockák permutációját és orientációt tekintve ugyanúgy megfeleltethetőek egy, a kockánál definiált elemi forgatásnak, mint a közös síkok mentén való forgatások – annyi különbséggel, hogy az utóbbi a torony minden elemén hat, míg ezek az élkockákat nem mozgatják. Ebből következik, hogy a sarokkockák állapotai is egy $\mathcal{R}$-rel izomorf csoportot alkotnak. Jelöljük ezt $\mathcal{R}_\mathrm{S}$-sel, ahol $\mathcal{R}_\mathrm{S} \cong \mathcal{P}_\mathrm{S} \ltimes_\varphi \mathcal{O}_\mathrm{S}$.

A független forgatások orientációinak $\mathcal{O}$-beliségét másképpen is beláthatjuk, ha észrevesszük, hogy az érintett sarokkockák orientációi független forgatás esetén ugyanazok lesznek, mintha az élkockákkal együtt forgattuk volna el őket – ezekről a helyzetekről pedig már láttuk, hogy megfelelő definiálás után megfeleltethetőek az $\mathcal{R}$-beli orientációs csoport elemeinek.



2.7. ábra.

Megjegyzés. Független forgatás lehetősége egyszerre legfeljebb a torony két oldalán –, egy szemközti oldalpáron – állhat elő, de léteznek olyan állapotok, amikor csak egy oldalon, illetve egyáltalán nem lehetséges.

Az eddigiekből megállapíthatjuk, hogy a Rubik torony minden helyzete felírható egy $\mathcal{R}_\mathrm{E}$-beli és egy $\mathcal{R}_\mathrm{S}$-beli elem szorzataként. Jelöljük az ezen állapotokat tartalmazó halmazt $\mathcal{T}$-vel. $\mathcal{T}$ nem lehet bővebb $\mathcal{R}_\mathrm{E} \times \mathcal{R}_\mathrm{S}$-nél.

Ha csak a közös tengely mentén forgatunk, akkor az ilyen állapotok részcsoportot alkotnak $\mathcal{R}_\mathrm{E} \times \mathcal{R}_\mathrm{S}$-ben, és pontosan azokat az elemeket tartalmazzák, ahol az $\mathcal{R}_\mathrm{E}$-beli tag megegyezik az $\mathcal{R}_\mathrm{S}$-belivel (eltekintve a formális jelöléstől).

Ne korlátozzuk a gondolatmenetet azzal, hogy egy adott sarokkocka-helyzetet milyen forgatások egymásutánisága hozott létre, és figyeljünk csak a végeredményre.

Tekintsünk úgy egy adott oldalhoz tartozó 4 sarokkocka független forgatására, hogy a tornyot először egy megfelelő H forgatássorozattal olyan orientációs állapotba hozzuk, ahol ez a forgatás fizikailag lehetséges, ezután elvégezzük a kívánt forgatást, majd H^{-1}-zel visszavisszük a tornyot az ezt megelőző állapotába. Belátható, hogy ilyen H létezik és kizárólag a közös síkok mentén való forgatásokkal létrehozható: a közös síkok mentén való forgatásokat tekintve az $\mathcal{R}_\mathrm{S}$ izomorf az $\mathcal{R}$ csoporttal, az előző fejezetben pedig meghatároztuk az $\mathcal{R}$-ben előállítható orientációs állapotokat, melyek így $\mathcal{R}_\mathrm{S}$-ben is előállnak.

Ezzel a megengedő hozzáállással a Rubik-kockához hasonló módon a toronyról is belátható, hogy az állapotainak halmaza csoportot alkot, amiből az eddigiek alapján következik, hogy $\mathcal{T} \leq \mathcal{R}_\mathrm{E} \times \mathcal{R}_\mathrm{S}$.

A következőkben a direkt szorzatot addig szűkítjük, míg pontosan meg nem tudjuk határozni $\mathcal{T}$ elemeit.

2.2.1. Állítás. *A Rubik toronynál egy élkocka és a rajta lévő sarokkocka lapkáira mindig teljesül, hogy az azonos számozású lapkák egymással párhuzamosak.*

Bizonyítás. Az alapállapotú toronynál az állítás teljesül. Mivel egy közös sík mentén való rotáció során minden érintett toronyelemet azonos szöggel forgatunk el, ezért így kapott tetszőleges állapotú toronyra is teljesülni fog. A kérdés az, mi történik, ha sarokkockákat az élkockáktól függetlenül mozgatunk.

Tegyük fel, hogy eddig csak a közös síkok mentén forgattunk. Jelölje a négy tetszőleges sarokkockát s_1, s_2, s_3, s_4, melyeket a hozzájuk kapcsolódó élkockáktól függetlenül szeretnénk forgatni. Ekkor ezek szükségszerűen egyazon irányba állnak a 3-mal reprezentált lapkáikkal.

Jelölje a független forgatást φ. Mivel a forgatás síkja párhuzamos a 3-as számú lapkákra, és tudjuk, hogy a sarokkockák lapkái egymásba képződnek, ezért $\varphi(3_{\mathrm{s}_i}) = 3_{\varphi(\mathrm{s}_i)}$ teljesül minden $i \in \{1, 2, 3, 4\}$-re.

Azt is tudjuk, hogy egy sarokkocka orientációja csak (123), (132) vagy az identitás lehet. A 3-as számú lapka képe egyértelműen meghatározza, hogy ez az identitás, amiből következik, hogy minden helyen az odakerülő sarokkockától függetlenül az orientáció változatlan marad.

Ez azt jelenti, hogy 1 számú lapka helyére csak 1-es, 2 számú helyére csak 2-es, 3 számú helyére pedig csak 3-as kerülhet, vagyis ha a feltétel a kiindulási állapotban teljesült, a forgatás után is teljesülni fog.

Mivel csak ez a kétfajta (közös síkok mentén való illetve független) forgatás végezhető a tornyon, és mindkettőre igaz, hogy a párhuzamossági tulajdonságot megtartja, ezért az állítás teljesül. □

2.2.2. Következmény. *Egy élkocka és a hozzá kapcsolódó sarokkocka orientációja mindig megegyezik.*

Bizonyítás. Egy adott helyen lévő élkocka lapkáinak helyzetét ugyanúgy tekinthetjük aszerint, hogy az identikus helyzetben ott lévő sarokkocka azonos számú lapkája melyik irányba nézett, mint ahogy azt a sarokkockáknál tettük. A (2.2.1) állítás miatt az élkocka és a hozzá csatlakozó sarokkocka adott számú lapkái azonos irányba néznek, s mivel ez meghatározza az orientációkat, azok szükségszerűen megegyeznek. □

Beláttuk, hogy az $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$-beli és $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-beli orientációk mindig azonosak, így $\mathcal{T}$ szempontjából a külön jelölés elhagyató. Amit eddig tudunk, hogy

$$\mathcal{T} \leq (\mathcal{P}_{\mathrm{E}} \ltimes \mathcal{O}) \times \mathcal{R}_{\mathrm{S}} = \mathcal{P}_{\mathrm{E}} \times (\mathcal{R}_{\mathrm{S}} \ltimes \mathcal{O}) = (\mathcal{P}_{\mathrm{E}} \times \mathcal{P}_{\mathrm{S}}) \ltimes \mathcal{O}.$$

A $\mathcal{P}_{\mathrm{E}}$ és $\mathcal{P}_{\mathrm{S}}$ csoportok S_8 minden elemét tartalmazzák, az viszont még kérdés, hogy a Descartes-szorzatban mely kombinációk lehetségesek. Ha ezt meghatározzuk, $\mathcal{T}$ csoport teljesen ismertté válik számunkra.

A következő segédtételt fogjuk felhasználni annak bizonyításához, hogy a torony helyzeteinek csoportja tovább nem szűkíthető.

2.2.3. Segédtétel. *Ha létezik két szomszédos*[2] *sarokkocka a tornyon, mely a többi elem helybenhagyása mellett megcserélhető, akkor ily módon bármely két sarokkocka megcserélhető.*

Bizonyítás. Az (1.1.2) segédtétel mintájára tegyük fel, hogy ismert olyan C_{S} forgatássorozat, mely a torony tetszőleges H helyzetében megcseréli valamely s_1 és s_2 egymás melletti sarokkockákat, az élkockák és a többi sarokkocka helybenhagyása mellett.

Vegyünk egy olyan F forgatássorozatot, mely a megcserélni kívánt s_1' és s_2' sarokkockákat s_1 és s_2 helyére viszi. Mivel a torony független forgatásainál fontos az elemek orientációja, teljesüljön F-re, hogy $F_{\mathrm{o}}(o_{F_{\mathrm{p}}(\mathrm{t}_i)}) = o_{F_{\mathrm{p}}(\mathrm{t}_i)}$ minden $i \in \mathcal{H}$-ra[3] (t_i tetszőlegesen jelölhet él- vagy sarokelemet, hiszen az orientációk megegyeznek). Ilyen F létezik, mivel $\mathcal{P}_{\mathrm{S}} \cong S_8$, továbbá akár ha az él-, akár ha a sarokelemeket megfeleltetjük a kisrubik sarokkockáinak, az (1.2.10) tételből ($\mathcal{O}$ csoport pontosan azokat a Z_3^8-beli elemeket tartalmazza, amelyekre $o_{\mathrm{k}_1} \cdot o_{\mathrm{k}_2} \cdot \ldots \cdot o_{\mathrm{k}_8} = id$ teljesül) következik, hogy permutációs állapottól függetlenül megvalósíthatóak a lehetséges orientációk. H pedig egy lehetséges állapotot jelöl, tehát a hozzá tartozó orientáció eleme $\mathcal{O}$-nak.

Ekkor a H állapotú kockán $FC_{\mathrm{S}}F^{-1}$ forgatássorozatot végrehajtva s_1' és s_2' sarokkockákat megcseréljük, a többi elem pedig helyben marad – hiszen F átviszi az

[2] Két sarokkocka szomszédos, hogy egymás melletti élkockákhoz kapcsolódnak.

[3] F_{o} az $\mathcal{O}$-beli orientációs tényező, F_{p} pedig $\mathcal{P}_{\mathrm{E}} \times \mathcal{P}_{\mathrm{S}}$ megfelelő komponense, attól függően, hogy élkockát vagy sarokkockát tekintünk t_i helyen.

élkockákat H-ból egy H' állapotba, ezt az állapotot C_{S} nem változtatja, F^{-1} pedig H'-ből H állapotba visszaviszi. $\square$

Az forgatások leírásának könnyítése miatt vezessük be a

$$\begin{aligned}
T_{\mathrm{t}} &= ((1432), (1'4'3'2'), \{id, id, id, id, id, id, id, id\}),\\
A_{\mathrm{t}} &= ((5678), (5'6'7'8'), \{id, id, id, id, id, id, id, id\}),\\
B_{\mathrm{t}} &= ((1584), (1'5'8'4'), \{(123), id, id, (132), (132), id, id, (123)\}),\\
J_{\mathrm{t}} &= ((2376), (2'3'7'6'), \{id, (132), (123), id, id, (123), (132), id\}),\\
E_{\mathrm{t}} &= ((1265), (1'2'6'5'), \{(132), (123), id, id, (132), (132), id, id\}),\\
H_{\mathrm{t}} &= ((3487), (3'4'8'7'), \{id, id, (132), (123), id, id, (123), (132)\})
\end{aligned}$$

jelöléseket a közös síkok mentén való forgatásokra, és

$$\begin{aligned}
T'_{\mathrm{t}} &= (1'4'3'2'), & B'_{\mathrm{t}} &= (1'5'8'4'), & E'_{\mathrm{t}} &= (1'2'6'5'),\\
A'_{\mathrm{t}} &= (5'6'7'8'), & J'_{\mathrm{t}} &= (2'3'7'6'), & H'_{\mathrm{t}} &= (3'4'8'7')
\end{aligned}$$

jelöléseket a sarokkockák független forgatásaira.[4] (Az élkockák független forgatása ezekkel kifejezhető, például $(1432) = T_{\mathrm{t}}T_{\mathrm{t}}'^{-1}, (1584) = B_{\mathrm{t}}B_{\mathrm{t}}'^{-1}$.)

A legutóbbi segédtétel felhasználásával bizonyítjuk a következő tételt.

2.2.4. Tétel. *A Rubik torony állapotait leíró csoportra $\mathcal{T} \cong (\mathcal{P}_{\mathrm{E}} \times \mathcal{P}_{\mathrm{S}}) \ltimes \mathcal{O}$ teljesül.*

Bizonyítás. Transzpozíciók szorzataként minden permutáció előállítható, ezért ha létezik a segédtételben említett C_{S} forgatássorozat, akkor ezen transzpozíciók szorzata is helyben hagyja az élkockákat; vagyis tetszőleges élkocka permutációhoz ($\in \mathcal{P}_{\mathrm{E}}$) előállítható minden sarokkocka permutáció ($\in \mathcal{P}_{\mathrm{S}}$).

Tekintsük az identikus állapotú kockát, ezen mutatjuk meg az $((id), (1'2'), (id^8)) \in (\mathcal{P}_{\mathrm{E}} \times \mathcal{P}_{\mathrm{S}}) \ltimes \mathcal{O}$ permutációt.

Az (1.1.3) tételben meghatározott C_{12} mintájára legyen $(12)(1'2')$ cserét elvégző forgatássorozat a

$$C_{\mathrm{t}} = B_{\mathrm{t}}^{-1}T_{\mathrm{t}}^{-1}B_{\mathrm{t}}E_{\mathrm{t}}T_{\mathrm{t}}E_{\mathrm{t}}^{-1}B_{\mathrm{t}}^{-1}T_{\mathrm{t}}B_{\mathrm{t}}T_{\mathrm{t}}^{2} = ((12), (1'2'), \{(123), id, (132), id, id, id, id, id\}).$$

A (1.2.2)-beli G és D forgatássorozatok mintájára legyen

$$\begin{aligned}
G_{\mathrm{t}} &= (J_{\mathrm{t}}^{-1}A_{\mathrm{t}}^{-1}J_{\mathrm{t}}A_{\mathrm{t}})^2 = (id, id, \{id, (132), id, id, id, (132), (123), (123)\}), \text{ illetve}\\
D_{\mathrm{t}} &= T_{\mathrm{t}}G_{\mathrm{t}}^2T_{\mathrm{t}}^2G_{\mathrm{t}}T_{\mathrm{t}} = (id, id, \{(132), id, (123), id, id, id, id, id\}).
\end{aligned}$$

Ekkor C_{t} után D_{t}-t elvégezve

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{t}}D_{\mathrm{t}} &= ((12), (1'2'), \{(123), id, (132), id^4\})(id, id, \{(132), id, (123), id^4\}) =\\
&= ((12), (1'2'), \{id, id, id, id, id, id, id, id\}).
\end{aligned}$$

[4] Független forgatás esetén az $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ és $\mathcal{O}$ tagok mindig identitások, ezeket elhagyjuk a jelölésből.

Legyen ez a szorzat $C_{\mathrm{t}}D_{\mathrm{t}} = C_{\mathrm{ES}}$.

A következő észrevételt tesszük: két egymás melletti sarokkocka megcserélése megvalósítható két ilyen típusú csere segítségével; ha elvégezzük $(2'3')$ és $(3'4')$ forgatásokat, akkor –, ha lehetőség van erre az orientációkat tekintve –, elforgatva a felső négy sarokelemet, megkapjuk $(1'2')$ permutációt:

$$(2'3')(3'4')(1'2'3'4') = (1'2')(3')(4').$$

Ezt az ötletet felhasználva végezzük el az alapállapotú tornyon a $T'_{\mathrm{t}}C_{\mathrm{ES}}T'_{\mathrm{t}}C_{\mathrm{ES}}T'_{\mathrm{t}}$ forgatássorozatot.

T'_{t} a $2'$ és a $3'$ sarokkockákat az $1'$ és a $2'$ helyére viszi; az első C_{ES} megcseréli $1-2$-t és $2'-3'$-t; a következő T'_{t} $2'$-t és $4'$-et viszi az egyes és kettes sarokhelyekre; a második C_{ES} az $1-2$ élkockákat visszapermutálja, $2'-4'$-t pedig felcseréli. Ekkor a torony állapota $((id, (1'3'4'), \{id^8\})$; ezen a T'_{t}-t elvégezve a torony $((id, (1'2'), \{id^8\})$ állapotba kerül, vagyis $T'_{\mathrm{t}}C_{\mathrm{ES}}T'_{\mathrm{t}}C_{\mathrm{ES}}T'_{\mathrm{t}}$ forgatássorozat kielégíti a segédtételbeli C_S feltételeit. A tételt bizonyítottuk. $\square$

2.3. A torony állapotainak számossága, összegzés

A (2.2.4) tétel bizonyításából következik, hogy a $2 \times 2 \times 2$-es Rubik-kocka 846 720 féle helyzeténél pontosan 8!-szor több lehetőség van a Rubik toronynál, mivel egy élkockához tetszőleges sarokkocka kapcsolódhat. Ez összesen 34 139 750 400 lehetőség, ami ránézésre van annyira ijesztő, mint egy kiálló sarokkocka.

Működésre azonban nagyon hasonlít a kistestvéréhez. A $2 \times 2 \times 2$-es Rubik-kocka két ismert algoritmusára, egy-két ezekből levezethető összefüggésre, és pár kisebb átfogalmazásra volt csak szükségünk ahhoz, hogy a Rubik tornyot modellezni tudjuk a kocka alapján.

Ha valaki a kezébe veszi ezt a kombinatorikus játékot, annak azt ajánlanám, hogy bátran próbálkozzon vele. Aki pedig megérti a dolgozatban használt forgatássorozatok logikáját, az tudni fogja, hogyan kell kockából tornyot építeni, így útmutatót kap mind a kocka, mind pedig a torony kirakásához.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani azoknak, akik leginkább hozzájárultak ahhoz, hogy a szakdolgozatom elkészülhessen.

Köszönöm édesanyámnak, hogy mindig arra biztatott, azt tanuljak, amit valójában szeretnék.

Köszönöm a nagyszüleimnek, hogy elég sokszor megkérdezték, hogy állok a tanulmányaimmal, ezzel ösztönözve a haladásra.

Köszönöm a páromnak, hogy ezeket a kérdéseket soha nem tette föl, mert bízik a döntéseimben.

Köszönöm a középiskolai tanáraimnak, hogy azt éreztették velem, egyszer majd sokra vihetem. Sajnálom, ha csalatkozniuk kellett – nekem elég az elég is.

Köszönöm az egyetemi tanáraimnak, hogy felnőttként kezeltek, és ezzel együtt tolerálták különcségeimet – az ő nagyvonalúságuknak is köszönhetem, hogy elvégezhettem tanulmányaimat.

Végül pedig külön köszönöm a konzulensemnek, Szabó Csabának, hogy mindig a segítségemre volt reális és komplex ügyekben egyaránt. Nem a megoldásokat árulta el, hanem eszközöket adott a kezembe, és beállított a megfelelő irányba, hogy magamtól is végig tudjak menni az úton.

Irodalomjegyzék

[1] Fuchs László, *Algebra*
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[2] Maróti Miklós órai vázlata,
http://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/okt/2008o/szemidirekt.pdf
(letöltés: 2015. január)