Transzverzális tételek euklideszi síkon

Diplomamunka

Írta: Csáki Attila

Matematikus szak

Témavezető:

Böröczky Károly, egyetemi tanár
Geometriai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**

1.1. Történeti áttekintés . . . 1

1.2. A dolgozat felépítése . . . 2

1.3. Alapfogalmak,definíciók,alkalmazott tételek . . . 2

2. Egy ovális diszjunkt eltoltjainak esete **3**

2.1. Kör eltoltjainak esete . . . 3

2.2. Az eltolt diszjunkt paralelogrammák esete . . . 4

2.3. Végül az általános eset . . . 6

3. Ellenpéldák **7**

3.1. A T(5) feltétel élessége kongruens körök eltoltjaira . . . 7

3.2. A T(5) feltétel élessége paralelogramma eltoltjaira . . . 8

3.3. Az elforgatás problémája . . . 9

3.4. A kongruensség feltételének szükségessége köröknél . . . 9

3.5. Az átmetszés megengedése kongruens körök eltoltjaiból álló családra . . . 10

4. A T tulajdonság alakulása a feltételek függvényében kongruens körök eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$ esetén **11**

4.1. Alapfogalmak,definíciók . . . 11

4.2. Át nem metsző kongruens körök esete . . . 11

4.3. Átmetsző kongruens körök esete . . . 13

4.4. $\alpha\mathcal{F}$-re vonatkozó tételek: . . . 17

4.5. A körközéppontok távolságát és a T tulajdonság összefüggését leíró függvény . . . 18

4.5.1. A tételek és a függvény . . . 18

4.5.2. A fenti tételek bizonyításai . . . 20

4.6. Legújabb eredmények $\alpha\mathcal{F}$-re . . . 24

5. A Katchalski-Lewis problémakör **25**

6. Transzverzális szélesség **28**

6.1. Kongruens körök eltoltjaiból álló családokra vonatkozó eredmények . . . 28

6.2. Általános oválisok eltoltjaiból álló családokra vonatkozó eredmények . . . 29

7. Kitekintés: transzvezális tételek magasabb dimenziókban **32**
7.1. A T tulajdonság magasabb dimenzióban 32
7.2. Katchalski-Lewis-típusú eredmények magasabb dimenzióban 34

Irodalomjegyzék **36**

Ábrák jegyzéke

2.1. Kéve . . . 3
2.2. Középponti kéve . . . 3
2.3. 1. eset elrendezése . . . 5
2.4. 2. eset elrendezései . . . 6

3.1. T(4),de nem T tulajdonságú körcsalád . . . 7
3.2. T(4),de nem T tulajdonságú paralelogrammacsalád . . . 8
3.3. T(3),de nem T tulajdonságú tetszőleges véges sok körből álló család . . . 8
3.4. T(5),de nem T tulajdonságú oválisccsalád,ahol a forgatás is megengedett . . . 9
3.5. Inkongruens körök . . . 9
3.6. Átmetsző kongruens körök . . . 10

4.1. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ éles . . . 12
4.2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$-ε . . . 12
4.3. $\sqrt{2}$ éles . . . 12
4.4. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ éles . . . 13
4.5. . . . 15
4.6. . . . 15
4.7. . . . 16
4.8. A k értékének alakulása a tágasság függvényében . . . 17
4.9. T(3)⇒T . . . 19
4.10. T(4)⇒T . . . 19
4.11. . . . 21
4.12. . . . 21
4.13. . . . 22
4.14. . . . 22
4.15. . . . 23

6.1. . . . 29
6.2. Kéve oválishoz és eltoltjához . . . 30
6.3. Középponti kéve oválishoz és eltoltjához . . . 31

7.1. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ gömbátmérőnél nagyobb gömbközépponttávolságra $T(3) \not\Rightarrow T$ . . . 33

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Történeti áttekintés

A problémakör alapja a Helly-tétel,amely szerint ha korlátos konvex halmazok egy családjára igaz,hogy bármely háromnak van közös pontja,akkor az összes halmaznak van.
A transzverzálisok problémája azt vizsgálja,hogy ha korlátos konvex halmazok egy családjáról tudjuk,hogy közülük bármely néhánynak van közös szelője (transzverzálisa),akkor az összesnek van-e. Végtelensok halmazra Hadviger belátta,hogy igaz,ha bármely háromnak van közös transzverzálisa,akkor az összesnek is van. De véges sokra ez nem igaz,amint majd látni fogjuk.
A véges sok konvex halmazból álló család esetében az első eredmény Danzertől származik,1957-ből körökre. Majd Grünbaum 1958-ban oldotta meg a problémát paralelogrammákra.Mindketten kör,illetve paralelogramma eltolt példányaiból álló családra igazolták eredményüket. De csak 1989-ben,Tverbergnek sikerült általánosan korlátos konvex halmazok (ovális) eltoltjaiból álló családjára eredményt elérnie.A ma ismert eredmények konvex halmazok eltoltjainak családjáról szólnak.Látni fogjuk,hogy a forgatás illetve a hasonlóság megengedése problémákat okozhat.
Az idők során több vizsgálódási irány is kialakult.Ahogy a dolgozatban is látni fogjuk,a fent leírt problémán kívül lehet vizsgálni még a feltételek és következményeik egymástól való függését,például,hogy mit lehet mondani,ha kevesebbet teszünk fel,illetve,hogy a következmény gyengítése milyen gyengébb feltételek mellett is teljesül.Ezeknek többféle módját is ismertetjük.Ilyenek konkrétan a kongruens körök esetében az átmetszés megengedése bizonyos megszorításokkal,melyek,mint majd látni fogjuk,szükségesek lesznek.Danzer ugyanis csak érintkező vagy diszjunkt kongruens körök eltoltjainak családjával foglalkozott.
Ilyen problémakör még,amikor sok kongruens kör van,ami azok elhelyezkedésére ad bizonyos korlátozást.Ezt Jeronimo vizsgálta.Végül ilyen a Katchalski-Lewis problémakör,amikor a következményt enyhítjük azzal,hogy bizonyos számú kivételes kört (ezek kivételével a többinek létezik közös transzverzálisa) megengedünk.Végül némi általánosabb eredményt is megemlítünk,magasabb dimenzióra.
Fontos megjegyezni ugyanis,hogy a problémakör az euklideszi síknál általánosabban,tetszőleges dimenzióban,sőt hiperbolikus síkon,gömbön is létezik,de a legtöbb eredmény az euklideszi síkon ismert és ebben a dolgozatban is lényegében csak ezzel foglalkozunk.

1.2. A dolgozat felépítése

A dolgozatban túlnyomórészt eltolt kongruens körökből álló véges elemű családokkal fogunk foglalkozni a felmerülő problémák tükrében.Időnként paralelogrammákkal kapcsolatos vizsgálatokat is végzünk,sőt az általános esetre is itt-ott röviden ki fogunk térni.Igyekszünk a bizonyításokban az érdekes ötleteket bemutató bizonyításokat részletezni,illetve azokat,amelyek rávilágítanak a definíciók és a segédtételek alkalmazására,a lényegében csak diszkussziókat tartalmazó bizonyítások részleteire nem térünk ki.Az irodalomjegyzékben felsorolt cikkekben azokat megtalálhatja az érdeklődő. Ezen kívül ábrákon és ellenpéldákon át igyekszünk rámutatni a probléma jellegére és a konstrukciók mikéntjére.Ezek nagyban segítik a problémakör megértését és követését.

1.3. Alapfogalmak,definíciók,alkalmazott tételek

Most bemutatásra kerülnek azon alapvető fogalmak és tételek,melyeket minden problémakörnél lépten-nyomon használunk. Először a jelöléseket és az alapfogalmakat ismertetjük:

DEFINÍCIÓ: Ovális olyan kompakt konvex halmaz,amelynek nem üres a belseje.
DEFINÍCIÓ: $\mathcal{F}$ jelöli oválisok egy osztályát az euklideszi síkon.
DEFINÍCIÓ: Ha $\mathcal{F}$ minden n elemének van közös transzverzálisa,akkor $\mathcal{F}$ T(n) tulajdonságú.
DEFINÍCIÓ: Ha $\mathcal{F}$ minden eleméhez van közös transzverzális,akkor $\mathcal{F}$ T tulajdonságú.

Néhány egyszerű segédtétel nagy mértékben segíti a vizsgálódásokat:

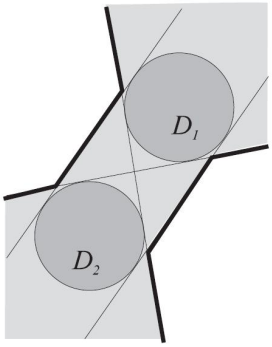
1.SEGÉDTÉTEL: Elég centrálszimmetrikus oválisokat vizsgálni.
Ez egyszerűen a centrálszimmetrizáció illeszkedéstartásából látható.
2.SEGÉDTÉTEL: Az ovális helyett vizsgálható annak affin transzformációval nyert képe.
Ez az affinitás illeszkedéstartásából látszik.

2. fejezet

Egy ovális diszjunkt eltoltjainak esete

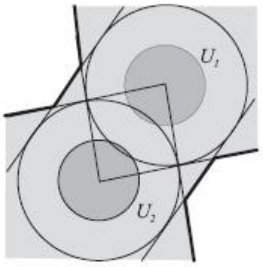
2.1. Kör eltoltjainak esete

Most $\mathcal{F}$ egy adott kör diszjunkt eltolt példányaiból álló véges család,ahol a körök érintkezése még meg van engedve.Mielőtt kimondanánk Danzer tételét először bemutatjuk a problémakör során alkalmazott eszközöket.
Fontos eszköz az úgynevezett *kéve* (2.1. ábra),amely azt mutatja meg,hogy két kör esetén hová kerülhetnek további körök úgy,hogy azoknak ezen kettővel legyen közös transzverzálisuk,ezeknek ugyanis kell,hogy legyen közös pontjuk a kévével.



2.1. ábra. Kéve

Kongruens körök esetén a középpontok helyére is következtethetünk a közös transzverzális létezéséből.A középpontok lehetséges helyét megadó alakzatot ***középponti kévének*** hívjuk(2.2. ábra).



2.2. ábra. Középponti kéve

További alkalmazott technika,hogy a közös transzverzális létezése helyett az ezzel ekvivalens alábbi feltételt alkalmazzuk:
A rendszer lefedhető egy körátmérő kétszerese szélességű sávval.

Vagy középpontokra:
A körközéppontok lefedhetők körátmérő szélességű sávval.

A hasonlóság nem változtat a problémakör feltételein és következményein,így a család kongruens köreiről feltehető,hogy például egységsugarúak.Máshol kényelmesebb lesz majd azt feltenni,hogy egységátmérőjűek.
Most már a fogalmak és az eszközök ismeretében kimondhatjuk Danzer tételét:

$TÉTEL(Danzer, 1957)$: *Kongruens körök eltolt példányaiból álló* $\mathcal{F} - re\ T(5) \Rightarrow T$.

A Helley-tétel analógiájára azt várnánk,hogy T(3) $\Rightarrow$ T.Végtelensok körre ez valóban így is van.Azonban míg a Helley-tétel véges sok halmazra is azonos feltétel mellett teljesül,addig itt látható,hogy véges sok kongruens kör diszjunkt eltoltjaira már T(5) a szükséges feltétel.Ráadásul itt több kikötést is tettünk.Egyrészt,hogy a köröknek kongruenseknek kell lenniük,másrészt,hogy a körök nem metszhetnek egymásba (az érintkezést megendgedjük).Mint azt látni fogjuk,ezek a feltételek nem hagyhatók el.Sőt átmetsző körök esetében még további feltételek kellenek,ugyanis a túlságosan nagy átmetszés esetében konstruálható ellenpélda,amint azt látni fogjuk.

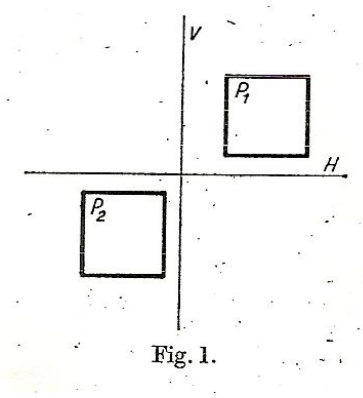
2.2. Az eltolt diszjunkt paralelogrammák esete

Most $\mathcal{F}$ egy paralelogramma eltolt példányaiból álló véges elemű család.

$TÉTEL(Grünbaum, 1958)$: *Paralelogramma diszjunkt eltolt példányaiból álló* $\mathcal{F} - re$ $T(5) \Rightarrow T$.
BIZONYÍTÁS:

A 2.SEGÉDTÉTEL szerint feltehető,hogy a paralelogrammák négyzetek,ugyanis megfelelő affin transzformációval négyzetbe vihető tetszőleges paralelogramma.Most tehát $\mathcal{F}$ egy négyzet diszjunkt eltoltjaiból áll.Vagyis tengelypárhuzamos négyzetekből. Az egyszerű áttekinthetőség kedvéért képzelhetjük úgy,hogy a négyzetek egyik oldalpárja függőleges,másik vízszintes. 2 eset lehetséges.

1. eset: Létezik egy függőleges V és egy vízszintes H egyenes és két négyzet,P_1 és $P_2 \in \mathcal{F}$,hogy P_1 és P_2 két szemben lévő síknegyedben vannak a H és V által negyedelt síkon. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük,hogy ezek a 2.3. ábrán látható módon helyezkednek el.



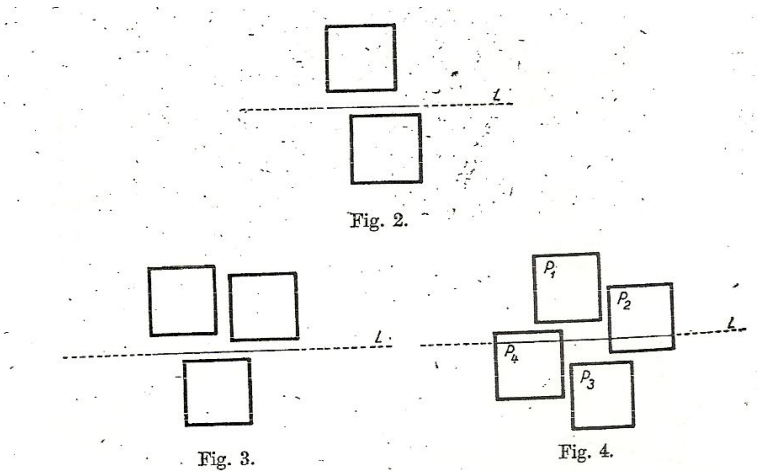
2.3. ábra. 1. eset elrendezése

Ekkor minden P_1-et és P_2-t metsző egyenes "emelkedő".Vagyis nem lehet H-val vagy V-vel párhuzamos,illetve az I. vagy III. síknegyedben csak egy kis intervallum eshet az egyenesből.A T(5) tulajdonságból emiatt $\mathcal{F}$ bármely három eleme metszhető egy emelkedő egyenessel.Ugyanis a T(5) tulajdonságba P_1-et,P_2-t és tetszőleges három négyzetet véve,ezeknek létezik közös transzverzálisuk,ami a fentiek miatt,mivel metszi P_1-et és P_2-t,csak emelkedő lehet. Ekkor azonban a tétel következik Helly tételének alábbi,Hadwigertől és Debrunnertől származó,következményéből.

KÖVETKEZMÉNY: *Tetszőleges párhuzamos oldalú paralelogrammákból álló családra,amelyben bármely három metszhető emelkedő egyenessel,létezik az összes paralelogrammát metsző emelkedő egyenes.* Ez pedig valóban a T tulajdonságot adja $\mathcal{F}$-re.

2. eset:Most $\mathcal{F}$ bármely két négyzetéhez létezik egy vízszintes vagy függőleges egyenes,amely mindkettőt metszi.Ekkor azt tehetjük fel,mivel diszjunktak a négyzetek,hogy létezik őket elválasztó függőleges,illetve vízszintes egyenes.
A T(5) tulajdonság miatt $\mathcal{F}$ nyilván legalább 5 négyzetből áll,ugyanakkor 5 négyzetre nyilván T(5) ekvivalens T-vel,így csak az az eset érdekes,ha $\mathcal{F}$ legalább 6 elemű.Ekkor a fentiek miatt van legalább három pár négyzet,melyeket páronként elválasztja egy vízszintes,vagy függőleges egyenes. Legyen $\mathcal{F}^*$ $\mathcal{F}$ azon maximális részhalmaza,amelyre igaz,hogy bármely két eleme elválasztható függőleges egyenessel.Ha $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$,akkor a T tulajdonság következik az alábbi megfontolásból:
$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$ esetén a négyzetek úgy helyezkednek el,hogy bármely kettőt elválasztja egy függőleges egyenes,vagyis a négyzeteket függőleges egyenesekkel el lehet sorban választani és így azok balról jobbra haladva valamilyen sorrendben következnek egymás után.Vegyük a négyzetek közül a legalsót és a legfelsőt!Ha több ilyen is van,akkor ezek közül egyiket.Ha mind egy szintben van,nyilván létezik közös transzverzálisuk.Ekkor ezen két négyzethez választva bármely 3-mat $\mathcal{F}$-ből,a T(5) tulajdonság miatt ezeknek lesz közös transzverzálisuk.Ez pedig attól függően,hogy a legfelső vagy a legalsó négyzet van előbb balról jobbra haladva,egy emelkedő,illetve ereszkedő egyenes lesz.Vagyis a négyzetek közül bármely 3-nak van egy emelkedő (illetve ereszkedő) közös transzverzálisa,így a fenti KÖVETKEZMÉNY miatt az összesnek is van.
Így csak az $\mathcal{F}^* \neq \mathcal{F}$ eset marad. A feltevésünk szerint ekkor azonnal látható,hogy csak a 2.4. ábrán vázolt három eset lehetséges (illetve ennek szimmetriával kapható változatai).
Ugyanis vehetjük a fent említett egyik négyzetpárt.Ehhez lehet,hogy nincs 3. négyzet csak L-en.Ha van,akkor az csak úgy helyezkedhet el,hogy ne lehessen a már meglévő kettőtől mind vízszintes,mind

függőleges egyenessel elválasztani,ami csak az ábrán látható elrendezésben lehetséges,illetve persze ugyanígy lehet alul is a 3. négyzet.4 négyzet esetén pedig arra is oda kell figyelni,hogy a két újat se lehessen függőleges és vízszintes egyenesekkel egyaránt elválasztani.Végül 5. négyzet pedig éppen ezért nem is fér már csak L kipontozott részére. Az ábrán $\mathcal{F}$ nem ábrázolt elemei metszik az L egyenes pontozott részét.



2.4. ábra. 2. eset elrendezései

Nevezzük az ábrán látható sémákon ábrázolt kettő,három,illetve négy négyzetet $\mathcal{F}$ principális négyzeteinek!Jelölje A (D) azt az emelkedő (ereszkedő) egyenest,ami $\mathcal{F}$ principális négyzeteit metszi és L-lel a legkisebb szöget zárja be!Nyilván létezik a principális négyzeteket metsző emelkedő vagy ereszkedő egyenes a T(5) tulajdonság miatt,ezek közül pedig van olyan,ami L-lel a legkisebb szöget zárja be,így ez a definíció értelmes. Ha csak A vagy D egyike létezik,akkor annak metszenie kell a nem principális négyzeteket is a T(5) tulajdonság miatt és amiatt,hogy azok a négyzetek metszik L-et.Ekkor pedig nyilván teljesül a T tulajdonság. Így feltehető,hogy A és D is létezik.
Azokban az esetekben,amikor 2 vagy 3 principális négyzet van,minden nem principális négyzetet metsz A vagy D,esetleg mindkettő.Ha valamelyiket nem metszi A (vagy D),akkor azt metszenie kell D-nek (illetve A-nak),ezért a T(5) tulajdonság miatt a többit is metszenie kell D-nek (illetve A-nak).Ha pedig minden nem principális négyzetet metsz A és D,akkor nyilván igaz a T tulajdonság. Tehát ezekben az esetekben beláttuk a tételt.
Így csak az az eset maradt,amikor 4 principális négyzet van.Most A-t nyilván P_1 és P_3 határozza meg (ezeket metszenie kell,ezek vannak a „legmeredekebb helyzetben”),míg D-t egy olyan négyzetpár,melyek a P_2 és P_4 pártól különbözőek (P_1 vagy P_3 egyike „meredekebb” ereszkedő helyzetben van valamelyik négyzettel).Vagyis A-t és D-t a 4 közül csak 3 principális négyzet határozza meg.Így a fenti gondolatmenetet alkalmazva ismét látható,hogy A vagy D valamelyike $\mathcal{F}$ minden elemét metszi. Ezzel beláttuk a tételt.

□

2.3. Végül az általános eset

$TÉTEL(Tverberg, 1989)$: *Diszjunkt oválisok eltolt példányaiból álló* $\mathcal{F} - re\ T(5) \Rightarrow T$.

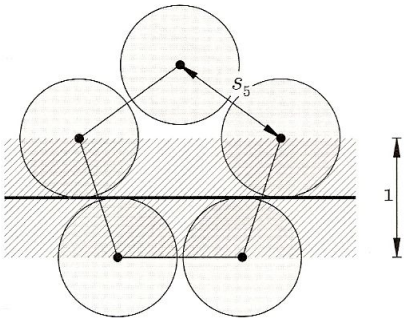
3. fejezet

Ellenpéldák

Az alábbiakban a korábban már beígért ellenpéldákat fogjuk látni.Többek között azt,hogy egy diszjunkt kongruens körökből,illetve paralelogramma eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$ családra T(4) $\not\Rightarrow$ T. Azt is megmutatjuk,hogy a körök esetén a kongruensség miért nem hagyható el.Látni fogjuk továbbá az átmetsző kongruens körök esetében felmerülő problémákat is.Arra is mutatunk példát,hogy ha nem csupán eltolt példányokat tekintünk,hanem megengedjük például,hogy az oválisok el legyenek forgatva egymáshoz képest,akkor még a T(5) $\Rightarrow$ T sem teljesül.

3.1. A T(5) feltétel élessége kongruens körök eltoltjaira

Az alábbi,3.1. ábra jól mutatja,hogy a T(4) tulajdonság teljesülése esetén T még nem feltétlenül teljesül diszjunkt kongruens körök eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$-re.

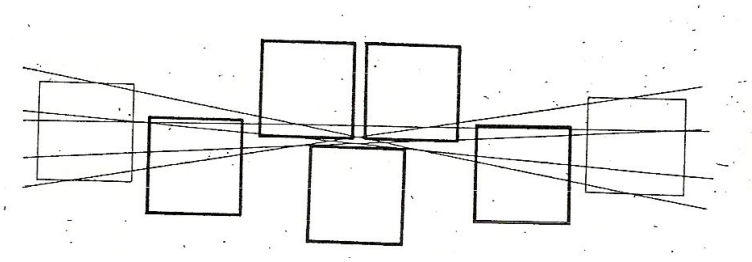


3.1. ábra. T(4),de nem T tulajdonságú körcsalád

Ez legkönnyebben abból az átfogalmazásból látható,amit még az előző fejezet elején állapítottunk meg diszjunkt kongruens körök eltoltjaiból álló családok T tulajdonságáról,miszerint a közös transzverzális létezése ekvivalens azzal,hogy a család lefedhető egy körátmérő kétszerese szélességű sávval.Most az egyszerűség kedvéért,mivel a hasonlóság nem változtat a T tulajdonságon,feltehető,hogy a körök egységátmérőjűek és a 3.1. ábrán látható módon egy $\frac{1}{\cos 18^\circ}$ oldalú szabályos ötszög csúcsaiban helyezkednek el.A rendszerből bármely 4 kört kiválasztva,azok lefedhetők 2 szélességű sávval,vagy,ahogy az ábrán látható,ezzel ekvivalens módon a középpontjaik lefedhetők egy 1 szélességű sávval,de az egész rendszer nem,így ez valóban T(4) tulajdonságú,de nem T tulajdonságú.

3.2. A T(5) feltétel élessége paralelogramma eltoltjaira

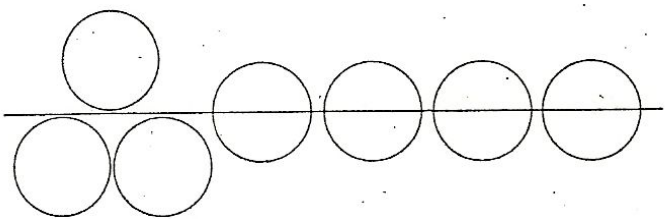
Az itt látható,3.2. ábra mutatja,hogy tetszőlegesen sok négyzet,s így korábbi meggondolsáunk szerint,azok affin képei,vagyis paralelogrammák eltoltjaiból álló család létezik,amely T(4),de nem T.



3.2. ábra. T(4),de nem T tulajdonságú paralelogrammacsalád

Mint látható,a négyzetek középen úgy vannak széthúzva,hogy nincs mind az ötöt metsző transzverzális egyenes,így a rendszer nem lehet T tulajdonságú,de az ábrán támaszegyenesekkel jelölt egyenesek közé rakhatók négyzetek,hogy a rendszer T(4) tulajdonságú maradjon.

Hasonló elrendezés körökre is adható,ahol nem csak 5 kör szerepel a példában,hanem szintén tetszőleges számú kongruens kör rakható bele,amint azt a 3.3. ábra mutatja,de a T(3) tulajdonságra.

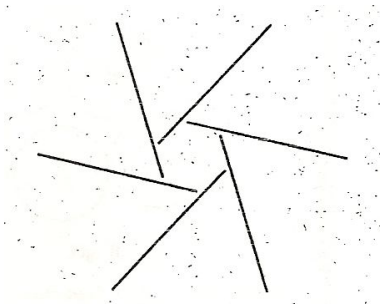


3.3. ábra. T(3),de nem T tulajdonságú tetszőleges véges sok körből álló család

Középen a 3 kör kicsit szét van húzva úgy,hogy legyen közös transzverzálisuk,ami érinti legalább mindegyiket,de a többi kör úgy helyezkedik el,hogy noha bármely 3-nak lesz közös transzverzálisa,az egésznek nem.
Sok hasonló ellenpéldát lehet konstruálni mind körökre,mind paralelogrammákra a fentiekkel analóg módon.

3.3. Az elforgatás problémája

Kongruens körökre nyilván a forgatás semmitmondó,de például paralelogrammák esetén nagyon is fontos kikötés,hogy csak eltoltakból áll a család,elforgatottakat nem engedünk meg.Ezt jól szemlélteti a 3.4. ábra.

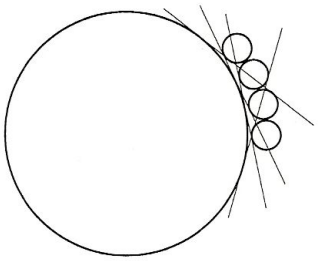


3.4. ábra. T(5),de nem T tulajdonságú oválisc sa lád,ahol a forgatás is megengedett

Itt természetesen a vonalak helyére a megfelelő oválisokat kell tenni. Az oválisok egy szabályos hatszöget formálva helyezkednek el kicsit széthúzva úgy,hogy bármely 5-nek legyen közös transzverzálisa,de az összesnek ne. Grünbaum megemlíti az 1958-as cikkében,hogy T(6)-ból viszont már valószínűleg ebben az esetben is következik a T tulajdonság.

3.4. A kongruensség feltételének szükségessége köröknél

Az előbb láttuk,hogy a forgatás megengedésével ugyan T(5) $\not\Rightarrow$ T,de valószínűsíthető,hogy T(6) $\Rightarrow$ T. Azonban ha a hasonlóságot engedjük meg a körökre,korántsem ilyen jó a helyzet.

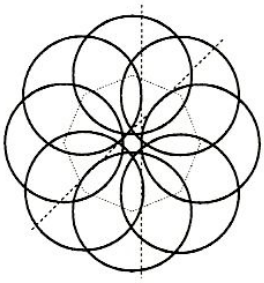


3.5. ábra. Inkongruens körök

Amint az a 3.5. ábrán látható,tetszőleges n-re konstruálható olyan család,amelyben egy nagy és sok kicsi kör van és az T(n) tulajdonságú,de nem T.Az ábra az n=4 esetet mutatja,de nyilván megfelelő arányú hasonlósággal tetszőleges n-re működik a konstrukció.A kicsi köröknek és a nagynak bármelyik n-1 db kicsi körrel van közös transzverzálisuk,de az összes körnek nincs.

3.5. Az átmetszés megengedése kongruens körök eltoltjaiból álló családra

Végül még azt nézzük meg,mi a helyzet akkor,ha megengedjük a kongruens körök eltoltjaiból álló családnak,hogy a körök átmetsszék egymást.Ekkor,amint azt a 3.6. ábra mutatja,szintén az előzőhöz hasonlóan rossz helyzet áll elő.



3.6. ábra. Átmetsző kongruens körök

Itt az n kör olyan,hogy azok átmérője $1 + \cos(\frac{2\pi}{n})$,ha n páros és $\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(\frac{2\pi}{n})$,ha n páratlan és középpontjaik egy egységkörbe írt szabályos n-szög csúcsaiban helyezkednek el.Ebben az esetben n $\geq$ 6-ra a körök nem lesznek páronként diszjunktak és könnyen látható,hogy a rendszer T(n-1),de nem T.Például a korábban is használt sávos technikával ez egyszerűen belátható. Az ábra az n=8 esetet szemlélteti és így a T(7) $\not\Rightarrow$ T-re ad példát,ha a diszjunktsági feltételt elhagyjuk.

Ahogy az a példán is látszik,ahogy n nő,a körközéppontok egyre közelebb kerülnek egymáshoz.Bizonyos tágassági megszorítások mellett ezért mégis garantálható,hogy
a T(5) tulajdonságból következzen a T.Erre később még visszatérünk részletesebben.

***

A fenti példákban tehát láthattuk,hogy a korábban kikötött feltételeink nem hagyhatók el.A következő fejezetekben szó lesz arról,hogy milyen módon gyengíthetők mégis ezek a feltételek,illetve,hogy milyen gyengébb állítás érvényes,ha bizonyos feltételeket elhagyunk.Az ezirányú vizsgálódások többségében körökre vonatkoznak,így a dolgozat is leginkább a körök esetére fog szorítkozni,de időnként paralelogrammákra,esetleg általánosan,oválisokra is kitérünk.

4. fejezet

A T tulajdonság alakulása a feltételek függvényében kongruens körök eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$ esetén

Korábban láttuk a T tulajdonság szükséges feltételét kongruens körökre,de csak diszjunkt körök eltoltjaira.Most megvizsgáljuk,mi a helyzet akkor,ha a körök át is metszhetik egymást.Megvizsgáljuk,hogyan alakul a T tulajdonság szükségességének feltétele a körközéppontok távolságának függvényében. Korábban már ejtettünk szót arról,milyen problémákat jelent az,ha a körök át is metszhetik egymást.Az előző fejezetben ezt példával is illusztráltuk.Most azt vizsgáljuk meg,mégis mit lehet mondani bizonyos feltételek mellett az átmetsző kongruens körökből álló $\mathcal{F}$ családról.Ezen kívül a tágassági feltétel szerint az át nem metsző körök esetét is megvizsgáljuk.

4.1. Alapfogalmak,definíciók

DEFINÍCIÓ: $\alpha\mathcal{F}$ az $\mathcal{F}$ kiinduló ovalisának (amelynek eltoltjai $\mathcal{F}$ elemei) α-szoros nagyítással kapott képének eltoltjaiból álló család.

DEFINÍCIÓ: $\mathcal{F}$ α-diszjunkt,ha elemei úgy helyezkednek el,hogy az eredeti ovális α-szoros nagyítással kapott képét ugyanazon vektorokkal eltolva,amikkel való eltolásból $\mathcal{F}$ elemei az eredeti ovalisból származtak,a kapott oválisccsalád még mindig diszjunkt.

Az alábbiakban mindig feltesszük,hogy a körök egységátmérőjűek.Korábban meggondoltuk,hogy ez megtehető.

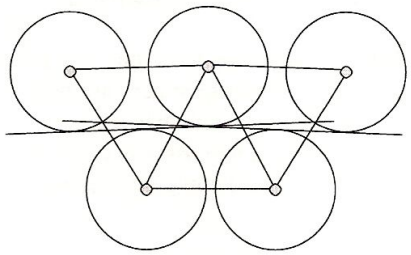
4.2. Át nem metsző kongruens körök esete

Korábban láttuk,hogy át nem metsző kongruens körök eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$-re T(5) $\Rightarrow$ T.És általában T(4) $\not\Rightarrow$ T.Azonban bizonyos tágassági feltételekkel T(4),sőt T(3) is elég lesz T-hez.

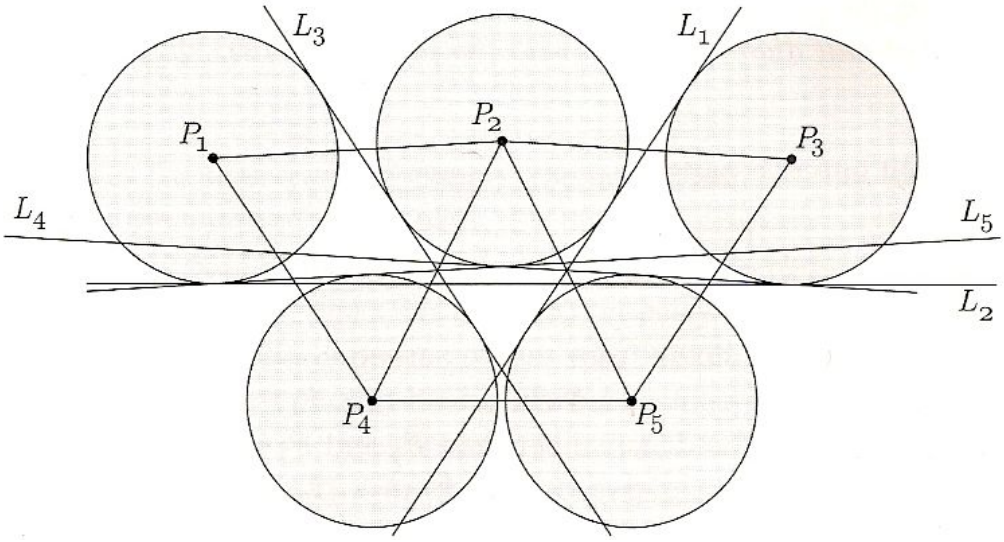
TÉTEL : Ha a kongruens körök eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$ családra a körök középpontjának távolsága nagyobb ,mint $\frac{2}{\sqrt{3}}$,akkor T(4) $\Rightarrow$ T.

TÉTEL : Ha a kongruens körök eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$ családra a körök középpontjának távolsága nagyobb ,mint $\sqrt{2}$,akkor T(3) $\Rightarrow$ T.

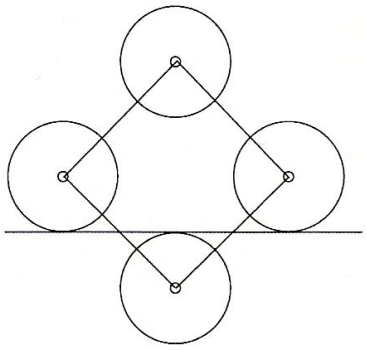
Az alábbiakban megmutatjuk,hogy ezek a korlátok ismét élesek,ahogy a T(5) tulajdonságnál is láttuk,hogy éles.



4.1. ábra. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ éles



4.2. ábra. $\frac{2}{\sqrt{3}}$-ε



4.3. ábra. $\sqrt{2}$ éles

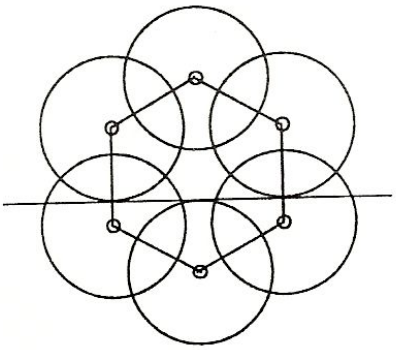
Az ábrákon látható elrendezés mutatja,hogy a körközéppontok távolságát $\frac{2}{\sqrt{3}}$-nál kisebbre véve (4.1. ábra),illetve $\sqrt{2}$-nél kisebbre véve (4.3. ábra) T(4),illetve T(3) már nem elég T-hez.Ugyanis a 4.1. ábrán a középső kört kicsit felfelé húzva és a rendszert összenyomva (4.2. ábra),a középpontok távolsága kisebb lesz $\frac{2}{\sqrt{3}}$-nál és T(4) teljesül,de a középső kör kicsit feljebb kerülése miatt T már nem.A 4.3. ábrán elrendezése pedig mutatja,hogy a $\sqrt{2}$ középpont-távolságra T(3) teljesül,de T nem.

4.3. Átmetsző kongruens körök esete

Most megvizsgáljuk,bizonyos tágassági feltételekkel mit lehet mondani a korábban általánosságban problémás átmetsző kongruens körök eltoltjaiból álló családról.

TÉTEL : Ha átmetsző kongruens körök eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$ családra a körök középpontjának távolsága legalább $\frac{1}{\sqrt{3}}$,akkor $\exists$ N,hogy T(5) $\Rightarrow$ T,ha *$\mathcal{F}$ legalább N elemű.*

Alább megmutatjuk,hogy ez a határ éles,csakúgy,mint az előző részben látott tételek estén:



4.4. ábra. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ éles

A 4.4. ábra elrendezése mutatja,hogy a körközéppontok távolságát $\frac{1}{\sqrt{3}}$-nál kisebbre véve már tetszőlegesen sok kört el lehet helyezni úgy,hogy a rendszer T(5) legyen,de nem T.

Most megnézzük,hogy átmetsző kongruens körök eltoltjaiból álló család esetén miként függ össze a tágassági feltétel és azon k paraméter,amelyre az adott tágassági feltételek mellett $T(k) \Rightarrow T$. Az alábbiakban ezen függvényt becsüljük meg,meghatározva az n=3 és n=4 pontos értékét,ami ugyan nem átmetsző esetben fog adódni,végül a függvény aszimptotikáját is megadjuk.

Jelölések,definíciók:

DEFINÍCIÓ:Két kört *t-diszjunktnak* mondunk,ha középpontjaik távolsága nagyobb, mint t.

DEFINÍCIÓ:A $\mathcal{F}$ családot *t-diszjunkt családnak* mondjuk,ha elemei páronként t-diszjunktak.

JELÖLÉS:t_k jelöli tetszőleges $k \geq 3$ természetes számra azon t-k infímumát,amelyre egy t-diszjunkt egységátmérőjű kongruens körökből álló családra igaz,hogy $T(k) \Rightarrow T$.

Mi ezen függvény inverzét fogjuk megadni,k_t-t,amely megadja,hogy t változtatásával miként változik a T tulajdonság szükséges T(k) feltétele.

Most tehát azon tételeket ismertetjük,amelyek alapján a függvényre tudunk következtetni:
Elsőként egy általános alsó becslést fogalmazunk meg t_k-ra:

$TÉTEL: Ha\ k \geq 3\ páratlan, akkor$

$$t_k \geq s_{k+1} = \frac{2\sin\frac{\pi}{k+1}}{1+\cos\frac{2\pi}{k+1}}$$

, $és\ ha\ k \geq 4\ páros, akkor$

$$t_k \geq s_{k+1} = \frac{2\sin\frac{\pi}{k+1}}{\cos\frac{2\pi}{k+1}+\cos\frac{\pi}{k+1}}.$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen R(k+1) a szabályos k+1-szög s_{k+1} oldalhosszúsággal.s_{k+1} éppen a legnagyobb oldalhossz,amelyre az R(k+1) csúcsaiból k darabot fed le az 1 szélességű sáv.Emiatt a T tulajdonság sávos átfogalmazásából látható,hogy az R(k+1) csúcsai középpontú egységátmérőjű körökből álló család T(k) tulajdonságú,de nem T.Mivel ezen család minden $t \leq s_{k+1}$-re t-diszjunkt,ebből adódik,hogy $t_k \geq s_{k+1}$,amit bizonyítani kellett.

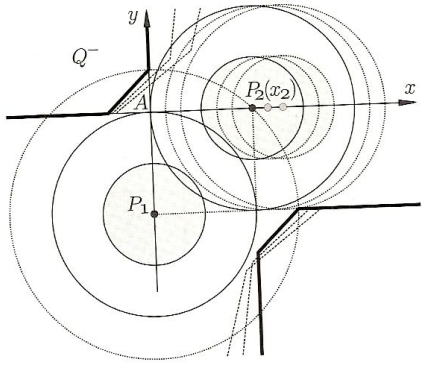
□

MEGJEGYZÉS:A tételben kapott alsó becslés,s_{k+1} aszimptotikusan $\frac{\pi}{k}$-val egyenlő.k=3-ra pedig a $t_3 \geq \sqrt{2}$ becslés adódik.
Most belátjuk,hogy ez a becslés éles:

$Lemma(1): Legyen\ P_1(0,-1), P_2(x_2,0), x_2 \geq 1$ *és jelölje* $A(x_2)$ *a* $Q^- = \{(x,y)|x \leq 0 \leq y\}$ *negyedsík és* $\Sigma(P_1,P_2)$ $(P_1,P_2$ *pontokhoz tartozó középponti kéve) metszetét.Ekkor* $int(A(1))-et$ $lefedi\ a\ P_1$ *körüli* $\sqrt{2}$ *sugarú kör,és* $x_2 > 1-re\ A(x_2) \subset A(1)$.

BIZONYÍTÁS:
A lemma egyszerűen látható abból,hogy $\Sigma(P_1,P_2)$ határegyenesei közül csak a középpontok körüli egységsugarú körök közös külső érintőegyenesei közül a felsőnek van közös pontja Q^--szal.(4.5.ábra)Emiatt ugyanis az ábrán látható módon x_2 növelésével a metszetterület egyre kisebb lesz,mert a középponti kéve jobbra csúszik.És már $x_2 = 1$ esetén is lefedhető a metszet a P_1 középpontú $\sqrt{2}$ sugarú körrel.

□

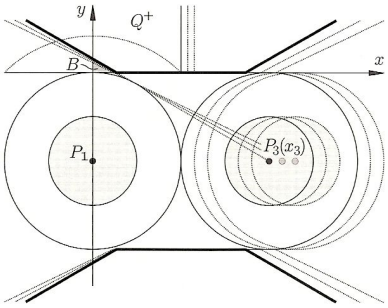


4.5. ábra.

Lemma(2) : *Legyen* $P_1(0,-1), P_3(x_3,-1), x_3 \geq 2$ *és jelölje* $B(x_3)$ *a* $Q^+ = \{(x,y)|0 \leq x \leq \frac{x_3}{2}, y \leq 0\}$ *félsáv és* $\Sigma(P_1,P_3)$ (P_1, P_3 *pontokhoz tartozó középponti kéve*) *metszetét.Ekkor* $int(B(2)) - t$ *lefedi a* P_1 *körüli* $\sqrt{2}$ *sugarú kör,és* $x_3 > 2-re$ $B(x_3) \subset B(2)$.

BIZONYÍTÁS:
Tekintsük a $P_3(2,-1)$ határesetet.$\Sigma(P_1,P_3)$ határolóegyenesei közül csak a P_1 középpont körüli egységsugarú kört felülről érintő,P_3-mon átmenő egyenes metsz bele Q^+-ba.(4.6.ábra)Ahogy x_3 nő,ezen metszet egyre kisebb lesz,mivel a középponti kéve jobbra csúszik,amint az az ábrán is látható.És már az $x_3 = 2$ esetben is lefedhető a metszet a P_1 középpontú $\sqrt{2}$ sugarú körrel.

□



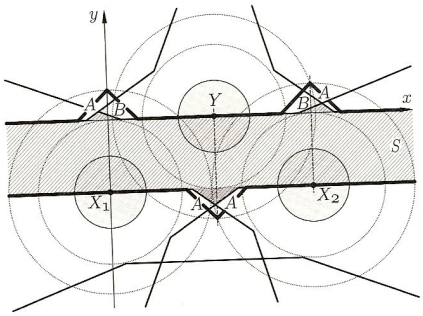
4.6. ábra.

A fenti két lemma alapján most már igazolhatjuk a becslés élességét t_3-ra:

TÉTEL : *Egy* $\sqrt{2}-$*diszjunkt egységátmérőjű körcsaládra* $T(3) \Rightarrow T$.

BIZONYÍTÁS:
Vegyük minden körközéppont-hármasra a legszűkebb fedő sávot.Legyen ezen sávok szélességének maximuma w.A T(3) tulajdonság miatt a sávos átfogalmazás alapján $w \leq 1$.Ha $w < 1$,akkor helyettesítsük a köröket $\frac{w}{2}$ sugarúakkal és válasszuk úgy az egységet,hogy ezen körök egységátmérőjűek legyenek.Ezen új körcsaládra nyilván teljesül a T(3) tulajdonság,hiszen a fedő sávok szélességét nem növeltük,másrészt ha ezen család T tulajdonságú,akkor az eredeti is az,hiszen az

összes középpontot fedő sáv szélessége sem nőtt.
Tehát az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük,hogy w=1.
Legyen X_1,X_2 és Y 3 olyan körközéppont,melyek S legvékonyabb lefedő sávjának szélessége a maximális 1.Tegyük fel,hogy X_1 és X_2 S egyik határoló egyenesén vannak,Y a másikon.Mivel S a legvékonyabb fedősáv,amely az $X_1X_2Y_\triangle$-et fedi,Y merőleges vetülete az X_1X_2 szakaszra X_1 és X_2 között van,megengedve azt is,hogy ezek egyikével egybeessen.A T(3) tulajdonság miatt az összes többi körnek van közös transzverzálisa az X_1,X_2,Y pontok közül bármely kettő,mint középpont, körüli egységátmérőjű körökkel.Emiatt középpontjaik $\Sigma(X_1, X_2)$,$\Sigma(X_1, Y)$ és $\Sigma(X_2, Y)$ metszetében helyezkednek el.Másrészt pedig,mivel a család $\sqrt{2}$-diszjunkt,minden más középpont az X_1,X_2 és Y középpontú $\sqrt{2}$ sugarú körökön kívül van.$\Sigma(X_1, X_2) \cap \Sigma(X_1, Y) \cap \Sigma(X_2, Y)$ tipikus alakját a 4.7.ábra mutatja.



4.7. ábra.

Lemma(1) miatt az ábrán A-val jelölt területek,Lemma(2) miatt pedig a B-vel jelölt metszetek pontjait,melyek S-en kívül esnek,lefedi az X_1,X_2,illetve Y körüli $\sqrt{2}$ sugarú körök valamelyike.Emiatt ide nem kerülhetnek a család maradék köreinek középpontjai.Ezért pedig a sávos átfogalmazás miatt S tengelye közös transzverzálisa a családnak,hiszen minden körközéppont benne van ebben az 1 szélességű sávban.

□

*Most bizonyítás nélkül megadjuk t_4 pontos értékét.*Ennek oka,hogy a bizonyítás hasonlóan megy,mint a t_3 esetben,nem igényel lényegesen új eszközöket,így az alkalmazott eszközök,technikák már a t_3-mas bizonyításból megismerhetők.

TÉTEL : Egy $\frac{2}{\sqrt{3}}$−diszjunkt egységátmérőjű körcsaládra $T(4) \Rightarrow T$.Másrészről $t < \frac{2}{\sqrt{3}}$−ra létezik olyan $t-$ diszjunkt egységátmérőjű körcsalád, amely $T(4)$, de nem T.

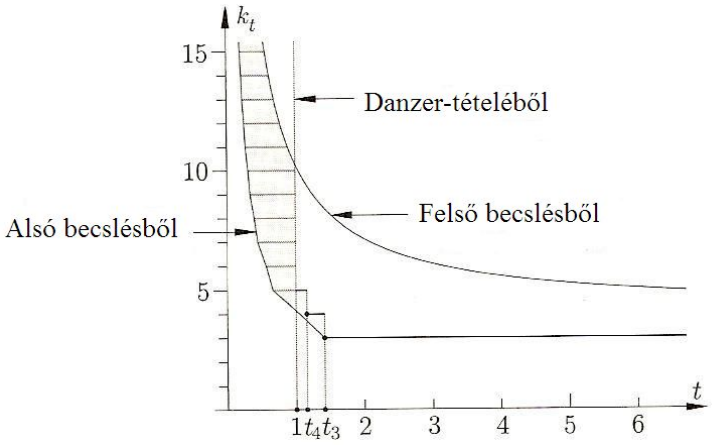
Végül megadjuk az általános felső becslést t_k-ra és a függvény aszimptotikáját:

TÉTEL : Legyen $t > 0, c = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{\sqrt{3}-1} \approx 6.2508$ és $n > \frac{c}{t} + 3$ természetes szám.Ekkor tetszőleges $t-$ diszjunkt egységátmérőjű körcsaládra $T(n) \Rightarrow T(n+1)$.

TÉTEL : Egy $T(6)$ egységátmérőjű körcsalád középpontjainak halmaza legalább $\sqrt{2}$ széles.

TÉTEL : Legyen $k \geq 5$ és $(k-3)t > c \approx 6.2508$.Ekkor $t-$ diszjunkt egységátmérőjű körcsaládra $T(k) \Rightarrow T$,és $t_k \leq \frac{c}{k-3}$.

Eredményeink összefoglalva a 4.8.ábrán láthatók a k_t függvényként ábrázolva,felhasználva a korábban már látott Danzer-féle eredményt,amikor a tágasság éppen t=1.



4.8. ábra. A k értékének alakulása a tágasság függvényében

4.4. $\alpha\mathcal{F}$-re vonatkozó tételek:

Az előző fejezetben láttuk,hogy T(4),illetve T(3) nem legendő T-hez.Fent azonban láthattuk,hogy bizonyos tágassági feltételek mellett mégis elegendőek lesznek.Most fordítva azt vizsgáljuk meg,hogy $\mathcal{F}$ elemeit kicsit nagyítva,a kapott családra mikor teljesül a T tulajdonság,ha azt tudjuk,hogy az eredeti $\mathcal{F}$-re T(3),illetve T(4) teljesül.

$TÉTEL(Heppes\ Aladár, 2005)$: *Ha diszjunkt kongruens körök eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$ családra $\mathcal{F}$ $T(3)$ tulajdonságú ,akkor* $1.65\mathcal{F}$ *T tulajdonságú.*

$TÉTEL(Jeronimo, 2005)$: *Ha diszjunkt kongruens körök eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$ családra $\mathcal{F}$ $T(4)$ tulajdonságú ,akkor* $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathcal{F}$ *T tulajdonságú.*
MEGJEGYZÉS: Ez az α éles.Ez a 3.1. ábrán látható elrendezésből azonnal látszik.

$TÉTEL(Eckhoff, 1969)$: *Ha diszjunkt ovális eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$ családra $\mathcal{F}$ $T(3)$ tulajdonságú ,akkor* $2\mathcal{F}$ *T tulajdonságú.*

Több is elmondható,ha feltesszük,hogy az oválisc saládnak elég sok eleme van:

$TÉTEL(Heppes\ Aladár, 2005)$: *Ha* $1 < \alpha < 2$, *akkor létezik* $N(\alpha)$, *hogy az $\mathcal{F}$ diszjunkt kongruens körök eltoltjaiból álló családra ha $\mathcal{F}$ $T(3)$ tulajdonságú és több, mint $N(\alpha)$ elemű, akkor T tulajdonságú.*

DEFINÍCIÓ: Egy adott ovális kritikus faktora a legkisebb α,amelyre az ezen ovális eltoltjaiból álló α-diszjunkt $\mathcal{F}$ családra T(3) $\Rightarrow$ T.
Könnyen meggondolható a következő tétel:

$TÈTEL: A\ legnagyobb\ kritikus\ faktor\ 2, a\ legkisebb\ \sqrt{2}$
$(\alpha = 2, ha\ az\ ovális\ paralelogramma, \sqrt{2}, ha\ kör).$
$És\ tetszőleges\ \alpha \in [\sqrt{2}, 2] - re\ létezik\ olyan\ ovális, melynek\ kritikus\ faktora\ \alpha.$

Eredményeinket az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze.A táblázat mutatja,hogy $\mathcal{F}$ elemeitől függően (kör,paralelogramma,tetszőleges ovális),illetve n-től függően milyen α-ra lesz $\alpha\mathcal{F}$ T tulajdonságú.

	n=3	n=4	n=5	n=6
kör	$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \leq \alpha$	$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \leq \alpha \leq \sqrt{2}$	
paralelogramma	α=2			α=1
tetszőleges ovális	α=2			

α ismert értékei az $\mathcal{F}$ elemeitől és n-től függően

4.5. A körközéppontok távolságát és a T tulajdonság összefüggését leíró függvény

4.5.1. A tételek és a függvény

Korábban láttuk,hogy kongruens körök eltoltjaiból álló véges elemű családra a körközéppontok távolságát változtatva a T tulajdonság szükséges feltétele is változik.Most megvizsgáljuk a változást leíró függvényt,vagyis,hogy a körközéppontok távolságát változtatva ,hogyan változik k,ahol k azon minimális pozitív egész szám,melyre T(k) $\Rightarrow$ T. Ehhez szükségünk lesz néhány tételre,illetve az ezekben szereplő fogalmakra:
DEFINÍCIÓ:Egy $\mathcal{F}$ család *átmérője* (diam($\mathcal{F}$)) az általa tartalmazott körök uniójának,mint ponthalmaznak az átmérője.
DEFINÍCIÓ:Egy véges sok pontból álló halmaz *szélessége* a pontokat lefedő legvékonyabb sáv szélessége.

$TÉTEL: d = \sqrt{2}\ esetén\ minden\ d-diszjunkt\ T(3)\ tulajdonságú\ kongruens\ körök\ eltoltjaiból$ $álló\ \mathcal{F}\ családra\ teljesül\ a\ T\ tulajdonság.$

$TÉTEL: d = \frac{2}{\sqrt{3}}\ esetén\ minden\ d-diszjunkt\ T(4)\ tulajdonságú\ kongruens\ körök\ eltoltjaiból$ $álló\ \mathcal{F}\ családra\ teljesül\ a\ T\ tulajdonság.$

Ezek tulajdonképpen a fentebb már említett tételek átfogalmazásai.A további tételekben azonban ezen átfogalmazások szerepelnek,ezért érdemes ilyen alakban is megismételni a tételeket.

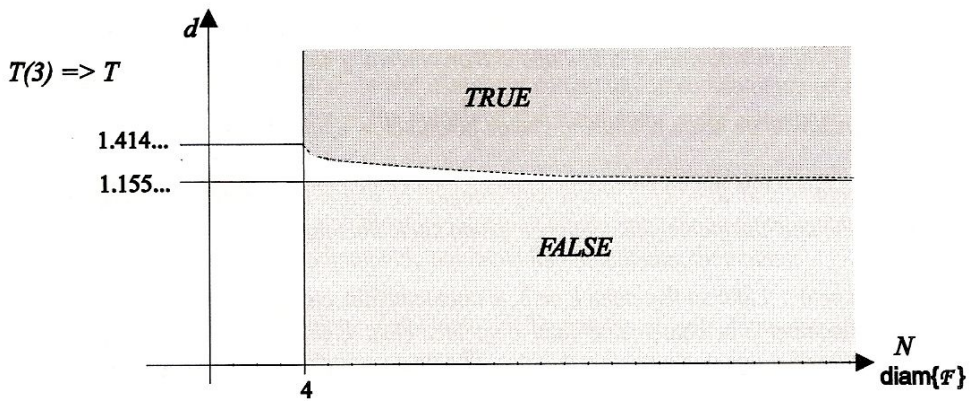
$TÉTEL(1): Tetszőleges\ d > \frac{2}{\sqrt{3}}\ esetén\ létezik\ D_3(d)\ , hogy\ bármely\ d - diszjunkt\ T(3)$ $tulajdonságú\ kongruens\ körök\ eltoltjaiból\ álló\ \mathcal{F}\ családra\ teljesül\ a\ T\ tulajdonság\ , ha\ diam(\mathcal{F}) >$ $D_3(d).$

$TÉTEL(2): d < \frac{2}{\sqrt{3}}\ esetén\ tetszőleges\ N > 4\ egészre\ konstruálható\ d - diszjunkt\ T(3)$ $tulajdonságú\ kongruens\ körök\ eltoltjaiból\ álló\ \mathcal{F}\ család\ , ami\ N\ elemű\ és\ nem\ T.$

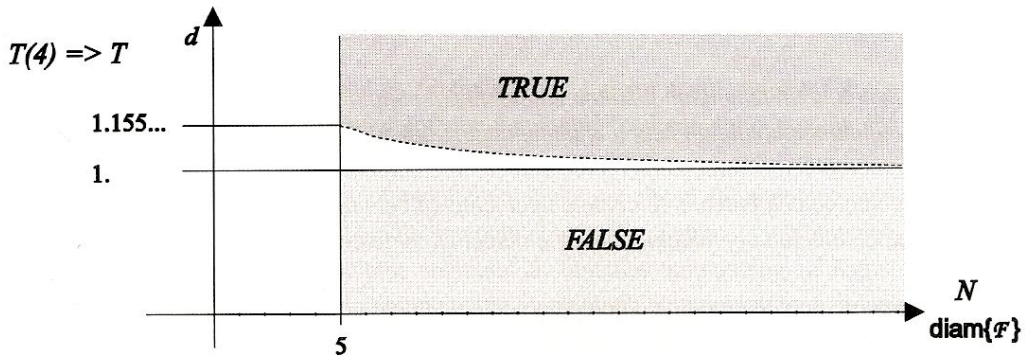
TÉTEL(3) : *Tetszőleges* $d > 1$ *esetén létezik* $D_4(d)$ *, hogy bármely* $d-$ *diszjunkt* $T(4)$ *tulajdonságú kongruens körök eltoltjaiból álló* $\mathcal{F}$ *családra teljesül a* T *tulajdonság , ha* $diam(\mathcal{F}) > D_4(d)$.

TÉTEL(4) : $d = 1$ *esetén tetszőleges* $N > 5$ *egészre konstruálható* $d-$ *diszjunkt* $T(4)$ *tulajdonságú kongruens körök eltoltjaiból álló* $\mathcal{F}$ *család , ami legalább* N *elemű és nem* T.

Ezen tételek ismeretében most már képet kaphatunk a T(3) és a T(4) tulajdonság fennállása esetén a T teljesüléséről diam($\mathcal{F}$),illetve N és d függvényében. A fennálló összefüggést a 4.9. és 4.10. ábrák mutatják.



4.9. ábra. T(3)⇒T



4.10. ábra. T(4)⇒T

4.5.2. A fenti tételek bizonyításai

A bizonyítások során a családot egy derékszögű koordinátarendszerben képzeljük,ahol D(X) jelöli az X pont körüli egységátmérőjű kört.

BIZONYÍTÁS(TÉTEL(1)):

Indirekt tegyük fel,hogy a körcsaládnak nincs közös transzverzálisa,vagyis átfogalmazva nekünk most így kényelmesebb:a körközéppontok halmazának szélessége nagyobb,mint 1.Megmutatjuk,hogy ez a feltevés ellentmond a T(3) tulajdonságnak,ha elég sok körből áll a család.
Legyen d>$\frac{2}{\sqrt{3}}$,$\mathcal{F}$ egy T(3) család és S az egyik vagy egyetlen legvékonyabb sáv,amely $\mathcal{F}$ minden körközéppontját tartalmazza.Feltehető az egyszerűbb elképzelhetőség kedvéért,hogy S vízszintes: y=0 és y=y_a egyenesek határolják.A(x_a,y_a),B(0,0),C(x_c,0) az S határán lévő 3 körközéppont.Ilyenek létezése S minimalitása miatt feltehető.Különben még lehetne a sávot kicsit megdöntve,illetve egy körközéppontig vékonyítva tovább csökkenteni. Mivel a család d-diszjunkt,ezért x_c>d.Az $ABC_\triangle$ csúcsainál fekvő szögek rendre α,β és γ.Mivel S a legszűkebb fedő sáv,ezért feltehető,hogy sem β sem γ nem tompaszögek és x_a>0. Ugyanis tompaszögű háromszög esetén a tompaszögű csúcshoz tartozó magasság kisebb,mint a másik két magasság ,így ekkor a sávot kicsit lehet még forgatni,hogy vékonyabb legyen,de feltettük,hogy ez a sáv minimális szélességű.Feltehető,hogy $\beta \geq \gamma$. A háromszög A,illetve B csúcsához tartozó magassága h_a és h_b.Az indirekt feltevésünk szerint h_a>1 (4.11.ábra).
Másrészt a T(3) tulajdonság miatt a háromszög legkisebb magassága nem lehet 1-nél nagyobb,különben minden magasság 1-nél nagyobb lenne és akkor a 3 csúcs körüli egységátmérőjű körökhöz nem lenne közös transzverzális ellentétben a T(3) feltétellel,így h_b ≤1. Ezért az AC oldal metszi a B körüli egység sugarú kört.Emiatt A belső pontja kell legyen annak a tartománynak,melyet balról az y-tengely,felülről a C'(d,0) és A'(0,h) pontokat összekötő L egyenes,ahol h=$\frac{d}{\sqrt{d^2-1}}$ és alulról a B körüli d sugarú kör határol(4.12. ábra).Ugyanis egyfelől β nem tompaszög,másfelől A és C határhelyzete olyan lehet csak,hogy AC egyenese még érintse a B körüli egységsugarú kört (4.12. ábra),különben a köröknek nem lenne közös transzverzálisuk,mert nem lehetne a középpontokat lefedni 1 szélességű sávval,másrészt a tágassági feltétel miatt C legalább d távolságra van B-től,C-t távolabb mozgatva A helyzete a határhelyzeti A'-től az y-tengelyen lefelé változik,végül B-hez nem lehet d-nél közelebb a tágassági feltétel miatt. Ennek a tartománynak a legalsó pontját M(f,g) jelöli.

Mivel a fentiekből kiszámolható,hogy g=λh,ahol

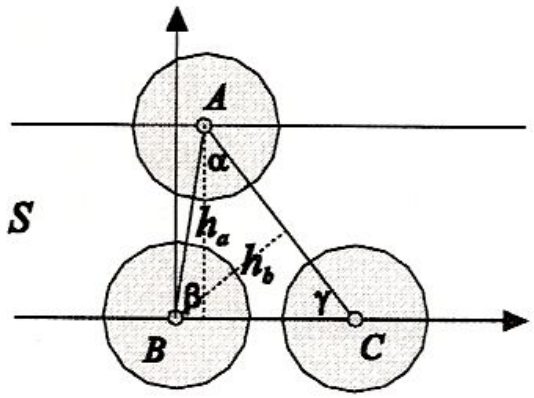
$$\lambda = \frac{|MC'|}{|A'C'|} = \frac{2\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{d^2+h^2}} = 2 - \frac{2}{d^2},$$

tetszőleges d>$\frac{2}{\sqrt{3}}$-ra

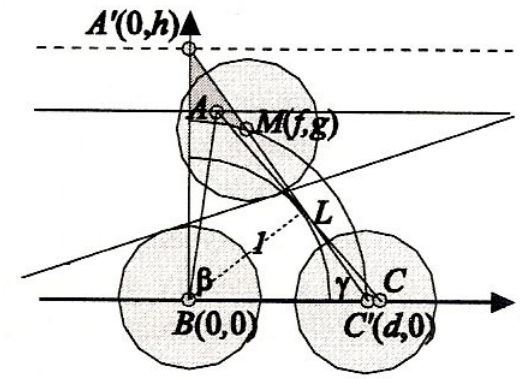
$$g=2\sqrt{1-\frac{1}{d^2}}>1. \ (*)$$

Nyilvánvaló,hogy ha egy egyenes mind D(A)-t,mind D(B)-t metszi,akkor legalább olyan meredeknek kell lennie,mint a D(B)-t felülről,D(M)-et alulról érintő egyenesnek,ami (*) miatt nem lehet vízszintes.Ezért nyilvánvalóan ha a körcsalád átmérője elég nagy,akkor a D(B)-től legtávolabbi kört véve,annak nem lehet D(A)-val és D(B)-vel közös transzverzálisa,ami ellentmond a T tulajdonságnak.

□



4.11. ábra.



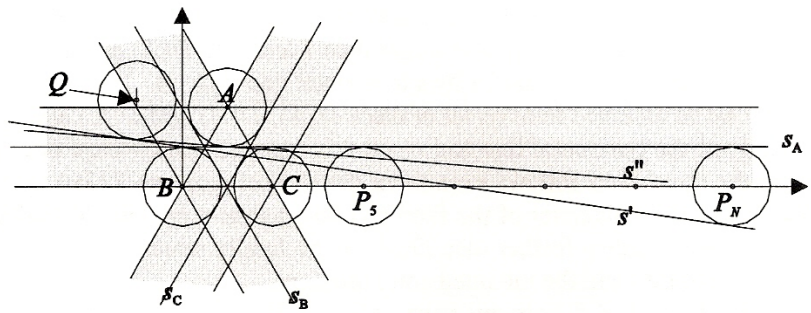
4.12. ábra.

BIZONYÍTÁS(TÉTEL(2)):

Legyen N>5 adott!Megmutatjuk,hogy létezik T(3) tulajdonságú,a feltételeknek eleget tevő diszjunkt kongruens körökből álló család,amely N elemű és elemeinek nincs közös transzverzálisa.

Tekintsük a derékszögű koordinátarendszerben az A(v,1),B(0,0),C(2v,0) pontokat,ahol v=$\frac{1}{\sqrt{3}}$és jelöljük s_A,s_B és s_C-vel a BC,CA és AB oldalakkal párhuzamos egyeneseket,amelyek az $ABC_\triangle$ csúcsaitól egyenlő távolságra vannak.Álljon az $\mathcal{F}$ család az A,B,illetve C középpontú egységátmérőjű,valamint további N-4 db egységátmérőjű körből,melyek középpontjai a $P_k((2k-6)v,0)$ (k=5,...,N) és a Q(-v,1+ε) középpontú egységátmérőjű körből,ahol ε>0-t a későbbiekben részletezett módon választjuk meg.

Legyen s' a D(B)-t felülről és a D(P_N)-t alulról érintő egyenes és ε értékét válasszuk meg úgy,hogy D(Q)-t s' alulról érintse.Végül legyen s" az az egyenes,ami D(Q)-t és D(A)-t is alulról érinti (4.13.ábra).

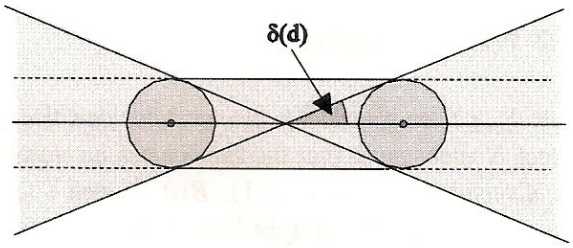


4.13. ábra.

Ezen $\mathcal{F}$ nyilvánvalóan d-diszjunkt tetszőleges d$<\frac{2}{\sqrt{3}}$-ra (egyszerűen kiszámolható).Az is könnyen ellenőrizhető,hogy $\mathcal{F}$ T(3) tulajdonságú: s_A minden kört metsz,kivéve D(Q)-t,s' mindet,kivéve D(A)-t és s" mindet,kivéve D(B)-t,végül s_B D(A),D(B) és D(Q) közös transzverzálisa. Csak az s_A,s_B és s_C egyeneseknek van közös pontja D(A),D(B) és D(C)-vel egyaránt,így ha $\mathcal{F}$ elemeihez létezik közös transzverzális,akkor az csak ezek egyike lehet.Azonban s_A-nak nincs közös pontja D(Q)-val,s_B-nek D(P_5)-tel,s_C-nek pedig ezek egyikével sem.Emiatt tehát $\mathcal{F}$ nem lehet T tulajdonságú. Mivel ezen $\mathcal{F}$ teljesíti a feltételeket,ezzel bebizonyítottuk a tételt.

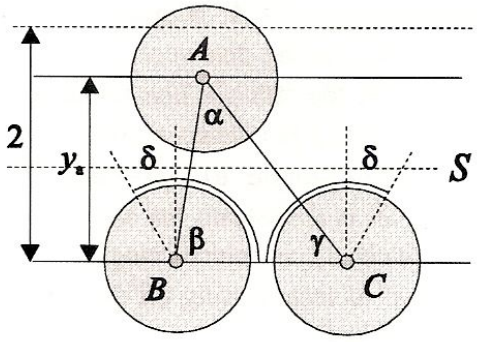
□

BIZONYÍTÁS(TÉTEL(3)):
Indirekt tegyük fel,hogy a család elemeinek nincs közös transzverzálisa,vagyis,hogy a középpontok halmazának szélessége nagyobb,mint 1.Azt fogjuk megmutatni,hogy ez a feltevés ellentmond a T(4) feltételnek.
Legyen d>1!Egy d-diszjunkt $\mathcal{F}$ körcsaládra δ(d)=arcsin($\frac{1}{d}$) jelölje a lehető legnagyobb értékét annak a szögnek,amelyet két kör közös transzverzálisa és a középpontjaikat összekötő egyenes bezárhat (4.14.ábra)!



4.14. ábra.

Legyen $\mathcal{F}$ T(4) tulajdonságú és S a legszűkebb sáv,amely az $\mathcal{F}$-beli körök középpontjait lefedi!Az általánosság megszorítása nélkül feltehető,hogy S vízszintes és A(x_a,y_a),B(x_b,0),C(x_c,0) a család azon köreinek középpontjai,amelyek S határán vannak (az első tétel bizonyításában részletezett okokból tehető fel ismét,hogy ilyen létezik).Az $ABC_\triangle$ A,B és C csúcsainál levő szögei rendre α,β és γ.Mivel S a legszűkebb fedő sáv,ezért feltehető,hogy sem β sem γ nem tompaszögek (ugyanazon okokból,mint amiket az első tétel bizonyításában részleteztünk).Az indirekt feltevésünk szerint $\mathcal{F}$ nem T tulajdonságú,így az S sáv y_a szélessége nagyobb,mint 1 és a D(A) kör elválasztható a D(B) és D(C)-től egy vízszintes egyenessel (4.15.ábra).



4.15. ábra.

Legyen t a D(A),D(B) és D(C) közös transzverzálisa és jelölje τ a vízszintes egyenes és t szögét ebben a sorrendben.Ilyen t nyilván létezik a T(4) tulajdonság miatt.Azt fogjuk megmutatni,hogy ha a család átmérője nagyobb,mint egy kizárólag d-től függő mennyiség,akkor létezik egy további D(Z) kör a családban,amit t nem metszhet.Ekkor a T(4) tulajdonsággal megkapjuk az ellentmondást.

Mivel $\mathcal{F}$ d-diszjunkt,$|AB|$>d,amiből $\tau \in (\beta - \delta(d), \beta + \delta(d))$,ahol δ(d)=arcsin($\frac{1}{d}$)< $\frac{\pi}{2}$.Ezen intervallum nem tartalmazhatja a vízszintes irányt,mivel a körök elválaszthatók az y=$\frac{y_a}{2}$ vízszintes egyenessel.Másrészt pedig $\beta \leq \frac{\pi}{2}$.

Ezért

$$\tau \in (0, \tfrac{\pi}{2} + \delta(d)) \ .(**)$$

Teljesen hasonlóan $|AC|$>d-ből következik,hogy $\tau \in (\pi - \gamma - \delta(d), \pi - \gamma + \delta(d))$.Ismételten mivel a vízszintes irány nem lehetséges és $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$,kapjuk,hogy

$$\tau \in (\tfrac{\pi}{2} - \delta(d), \pi).(***)$$

(**) és (***)-ból pedig adódik,hogy

$$\tau \in (\tfrac{\pi}{2} - \delta(d), \tfrac{\pi}{2} + \delta(d)).(****)$$

Ha $\mathcal{F}$ átmérője elég nagy —ami a körök számára vonatkozó nagyobb alsó korláttal szintén elérhető — létezik egy D(Z) a családban,amelynek D(A)-tól mért távolsága nagyobb tetszőleges előírt értéknél.Ez az érték lehet olyan,hogy bármely D(A)-t és D(Z)-t egyaránt metsző egyenesnek olyannyira kicsiny szöget kelljen bezárnia a vízszintes egyenessel,ami már nem tudja teljesíteni a (****) feltételt.Tehát az indirekt feltevésünk mellett nem lesz D(A),D(B),D(C) és D(Z)-hez közös transzverzális,ami ellentmond a T(4) feltételnek.

□

4.6. Legújabb eredmények $\alpha\mathcal{F}$-re

A korábbi fejezetben csak α>1-gyel foglalkoztunk kongruens körök eltoltjaiból álló $\mathcal{F}$ családokra.A közelmúltban azonban született néhány eredmény α<1-re is,sőt általános ovális eltoltjaiból álló családokra is.Az alábbiakban ezekről számolunk be.

$TÈTEL(Bezdek, Bisztriczky, Csikós, Heppes, 2006)$: *Legyen* $k > 5$ *és* $(k-3)\alpha > c = 6.25...$! *Ha* $\mathcal{F}$ $\alpha-$*diszjunkt kongruens körök eltoltjaiból álló család, akkor* $T(k) \Rightarrow T$.

$TÈTEL$:$\alpha_k = O(\frac{1}{k})$ (α_k *az* α *értéke* k *függvényében*).

MEGJEGYZÉS:Az α_k-ra vonatkozó alsó becslés a szabályos sokszög alakú elrendezésből adódik.

$TÉTEL(Heppes\ Aladár, nyomtatás\ alatt)$: *Legyen* $k > 5$ *és* $2(k-3)\alpha > c = 6.25...$! *Ha* $\mathcal{F}$ $\alpha-$*diszjunkt ovális eltoltjaiból álló család, akkor* $T(k) \Rightarrow T$.
Az aszimptotika $\alpha_k = O(\frac{1}{k})$ *ebben az esetben is.*

5. fejezet

A Katchalski-Lewis problémakör

Eddigi vizsgálataink során a T tulajdonság szükséges feltételét igyekeztünk belátni és a közös transzverzális feltételét kerestük.Most azt fogjuk megvizsgálni,hogy a feltétel enyhítésével néhány kör kivételével a többihez létezik-e közös transzverzális.Vagyis kicsit enyhítünk a T tulajdonságon,cserébe hátha a feltételt is tudjuk enyhíteni.A problémakör ilyen irányú vizsgálatát Katchalski és Lewis vezették be és azóta számos eredmény született a témában.Az alábbiakban ezeket időrendben ismertetjük,ahogyan egyre inkább sikerült élesíteni a tételek állítását. A problémakör lényege,hogy megengedjük,hogy néhány ovális kivételével kelljen csak közös transzverzálisnak lennie az oválisccsalád tagjaihoz.Vagyis,hogy nem tesszük fel a korábban látott elegendő T(5) tulajdonságot,csak T(4)-et vagy T(3)-mat és cserébe csak annyit várunk el,hogy az oválisccsalád fix számú néhány elemét elhagyva mindig legyen a maradéknak közös transzverzálisa.Mint azt hamarosan látni fogjuk,nem is kell olyan sok oválist elhagyni,ami talán annak a következménye,hogy fix számú ovális elhagyására viszonylag nagy szabadságunk van,hiszen mi határozhatjuk meg,melyikeket hagyjuk el,így a sok lehetséges megmaradó részcsalád közül egyik várhatóan T tulajdonságú lesz,ha az egész család T(4),illetve T(3) volt.Vagyis átfogalmazva mondhatjuk azt is,hogy ha a család T(4),illetve T(3),de nem T,akkor csak néhány eleme lehet "rossz helyen",azaz amelyek miatt a T tulajdonság nem teljesül a családra.Tehát a szigorúbb T(5) feltételhez képest az enyhébb T(4),illetve T(3) ha nem is elég,hogy közös transzverzálisra igazítsa a család oválisait,de legalábbis nem lehet sok,ami elrontja a T tulajdonságot.
Az alábbiakban ismertetjük a főbb eredményeket:

DEFINÍCIÓ: Egy $\mathcal{F}$ oválisccsalád T-r tulajdonságú,ha elhagyható belőle r darab ovális,hogy a maradék T tulajdonságú legyen.

TÉTEL$(Katchalski - Lewis, 1980)$: *Ha $\mathcal{F}$ egy ovális diszjunkt eltolt példányaiból álló család, akkor létezik r, hogy* $T(3) \Rightarrow T - r$,*és* $\mathbf{r < 603}$.

TÉTEL$(Tverberg, 1991)$: *Ha $\mathcal{F}$ egy ovális diszjunkt eltolt példányaiból álló család, akkor létezik r, hogy* $T(3) \Rightarrow T - r$,*és* $\mathbf{r < 108}$.

TÉTEL$(Holmsen, 2003)$: *Ha $\mathcal{F}$ egy ovális diszjunkt eltolt példányaiból álló család, akkor létezik r, hogy* $T(3) \Rightarrow T - r$,*és* $\mathbf{r < 22}$.

Többet lehet mondani,ha az oválisscsalád elemei kongruens körök,illetve paralelogrammák:

TÉTEL(BezdekA.,1991) : Ha $\mathcal{F}$ kongruens körök diszjunkt eltolt példányaiból álló család, akkor létezik r, hogy T(3)⇒T − r,és $\mathbf{r \geq 2}$.

TÉTEL(HeppesAladár,2007) : Ha $\mathcal{F}$ kongruens körök diszjunkt eltolt példányaiból álló család, akkor létezik r, hogy T(3)⇒T − r,és $\mathbf{r \leq 2}$.

Tehát ezeket összefoglalva:

TÉTEL : Ha $\mathcal{F}$ kongruens körök diszjunkt eltolt példányaiból álló család, akkor létezik r, hogy T(3)⇒T − r,és $\mathbf{r=2}$.

Végül paralelogrammákra:

TÉTEL(Holmsen,2003) : Ha $\mathcal{F}$ paralelogrammák diszjunkt eltolt példányaiból álló család, akkor létezik r, hogy T(3)⇒T − r,és $\mathbf{r=4}$.

Speciális oválisscsaládokra a T(4) tulajdonság teljesülése esetén is tudunk mondani valamit:

TÉTEL(Aronov és mások,2000) : Ha $\mathcal{F}$ kongruens körök diszjunkt eltolt példányaiból álló család, akkor létezik r, hogy T(4)⇒T − r,és $\mathbf{r \geq 1}$.

TÉTEL(Bisztriczky és mások,2006) : Ha $\mathcal{F}$ kongruens körök diszjunkt eltolt példányaiból álló család, akkor létezik r, hogy T(4)⇒T − r,és $\mathbf{r \leq 1}$.

Összefoglalva tehát:

TÉTEL : Ha $\mathcal{F}$ kongruens körök diszjunkt eltolt példányaiból álló család, akkor létezik r, hogy T(4)⇒T − r,és $\mathbf{r=1}$.

Az előző fejezetben megismert α-diszjunktság itt is alkalmazható és az r kimaradó oválisszámmal is kapcsolatba hozható,amint azt az alábbi tétel mutatja:

TÉTEL : Legyen $\alpha < 1$ és $r \leq (\frac{4}{\alpha}+2)^2$!Ha $\mathcal{F}$ $\alpha-$diszjunkt oválisscsalád, akkor létezik r, hogy T(3)⇒T − r.

Az r maradék tehát megadható α függvényében:r(α).Azaz,hogy α-diszjunkt oválisscsaládra T(3) mellett milyen legkisebb r-re lesz a család T-r tulajdonságú.
Az r(α) függvényt jellemzi a következő tétel:

TÉTEL : Aszimptotikusan $r(\alpha) = O(\frac{1}{\alpha^2})$.

Eredményeinket az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze,kiegészítve néhány a fentiekben nem ismertetett eredménnyel:

	n=3	n=4	n=5
kör	2	1	0
paralelogramma	4	$1 \leq r \leq 2$	0
tetszőleges ovális	$4 \leq r \leq 22$	$1 \leq r \leq 12$	0

r ismert értékei az $\mathcal{F}$ elemeitől és n-től függően

A táblázatból nyilvánvaló nyitott kérdések fogalmazhatók meg.Egyrészt paralelogrammákra nem ismert r értéke n=4-re,azaz,ha a T(4) tulajdonságot tesszük fel.Másrészt általános oválisokra sem n=3,sem n=4 esetén nem ismert r értéke.Harmadrészt látható,hogy n=3-ra a körökre r=2,a paralelogrammákra r=4,de nem ismert azon ovális,melynek eltolt példányaiból álló családra r=3 lenne.

Ezen problémakörbe tartozó tételek bizonyításai erősen technikai jellegűek.Sok esetet kell megvizsgálni,melyekben végül ellentmondásra jutunk vagy kihozzuk,hogy csak r darab körnek van hely,amit elkerül a többihez tartozó közös transzverzális.Éppen ezért a bizonyításokra ebben a fejezetben nem térünk ki.Csak annyit érdemes megemlíteni róluk,hogy itt felhasználásra kerülnek a korábban megismert eszközök,mint a kéve vagy a középponti kéve,a közös transzverzális létezésének sávos átfogalmazása,a körök egyenessel történő szeparálhatósága,illetve az általánosított középponti kéve,amely két szakaszhoz tartozik és az összes olyan középponti kéve uniója,amelyre az egyik kör középpontja az egyik,a másiké a másik szakaszon van.Emellett igen sok számolással általában ellentmondásokhoz jutunk egy mennyiségre (például valamely a>b számra és c mennyiségre c>a és b>c adódik) az indirekt bizonyítások során.

6. fejezet

Transzverzális szélesség

Korábban láttuk,hogy közös transzverzális létezésének feltétele kongruens körökre ekvivalens a középpontokat fedő,a körök átmérőjével megegyező szélességű sáv létezésével.Most ezen szemlélet mentén haladva ebben a fejezetben azt vizsgáljuk,hogy a T(3) tulajdonság mellett,noha nem garantálható közös transzverzális létezése,amely az összes kört metszi,mégis garantálható bizonyos szélességű sáv létezése,amely minden kört metsz.A továbbiakban ismét feltesszük,hogy a körök átmérője egységnyi.A fejezet elején csak körökkel fogunk foglalkozni,de a végén kitekintünk az általános oválisc saládokra vonatkozó eredményekre is.

6.1. Kongruens körök eltoltjaiból álló családokra vonatkozó eredmények

Először az alkalmazott fogalmakat ismertetjük:

DEFINÍCIÓ: Egy $\mathcal{F}$ oválisc család,amely egy ovális eltolt példányaiból áll,*transzverzális sávja* olyan sáv,amely a család minden elemét metszi.
DEFINÍCIÓ:Egy $\mathcal{F}$ oválisc család,amely egy ovális eltolt példányaiból áll,*transzverzális szélessége* a család legkeskenyebb transzverzális sávjának szélessége.

Most megmutatjuk a témában eddig elért eredményeket:

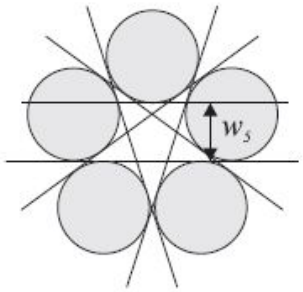
$TÉTEL(Eckhoff)$: *Minden véges elemű* $T(3)$ *tulajdonságú* 1 *átmérőjű körök diszjunkt eltoltjaiból álló* $\mathcal{F}$ *családnak létezik* 1 *szélességű transzverzális sávja.*

Természetesen közös transzverzális létezése eseten a transzverzális szélesség nulla,így ez az eredmény még finomítható,ahogy az az alábbi tételben meg is történik:

$TÉTEL(HeppesAladár)$: *Minden véges elemű* $T(3)$ *tulajdonságú* 1 *átmérőjű körök diszjunkt eltoltjaiból álló* $\mathcal{F}$ *családnak létezik* $0.65-$*nál vékonyabb szélességű transzverzális sávja.*

MEGJEGYZÉS: A sejtés a legkisebb lehetséges transzverzális szélességre a T(3) tulajdonság feltevése mellett $2\sin(\frac{\pi}{10})$=0.618...,ami a szabályos ötszöges elrendezésből (6.1. ábra) adódik (ebből látszik,hogy ennél kisebb nem lehet a transzverzális szélesség).

Ez a sejtés azért érdekes,mert az ábrán látható elrendezés nemcsak T(3),de T(4) tulajdonságú is,vagyis ha a sejtés igaz volna,az azt mutatná,hogy a T(4) tulajdonság nem ad jobb transzverzális szélességet,mint a T(3).



6.1. ábra.

A fenti 0.65-os becslést adó tétel bizonyítása indirekt történik igen sok eset diszkussziójával,míg aztán több lemma együttese megadja az ellentmondást.Mivel ez jórészt technikai jellegű,a bizonyítást nem részletezzük.
Látható,hogy 0.65 már jóval közelebb van a sejtett és,mint láttuk,lehetséges minimális transzverzális szélességhez.
Most megvizsgáljuk,mit lehet mondani általános esetben,amikor tetszőleges ovális eltoltjaiból áll a család.

6.2. Általános oválisok eltoltjaiból álló családokra vonatkozó eredmények

Kezdetben néhány fogalmat vezetünk be,amik előkerülnek a tételekben:

DEFINÍCIÓ:Egy X halmaz *d-szélessége*, $w_d(X)$,az X halmaz d irányú egyenesre vonatkozó merőleges vetületének hosszúsága,amely nem feltétlenül véges.
DEFINÍCIÓ:X *szélessége* X összes lehetséges irányra vett d-szélességének minimuma.
DEFINÍCIÓ:Legyen D egy konvex alakzat.Az X halmaz *D-szélessége,vagy relatív szélessége a d irányban* $w_d^D(X) = \frac{w_d(X)}{w_d(D)}$.
A fenti definíció analógiájára végül az X halmaz *D-szélessége* az összes lehetséges d irányra vett D-szélességek minimuma.

A fent ismertetett Eckhofftól származó eredmény általánosan oválisok eltoltjaiból álló családokra is igaz a következő formában:

$TÈTEL(Eckhoff)$: *Ha egy véges elemű* $\mathcal{F}$ *család, amely egy D ovális diszjunkt eltoltjaiból áll,* $T(3)$ *tulajdonságú, akkor létezik S 1* $D-$ *szélességű transzverzális sávja.*

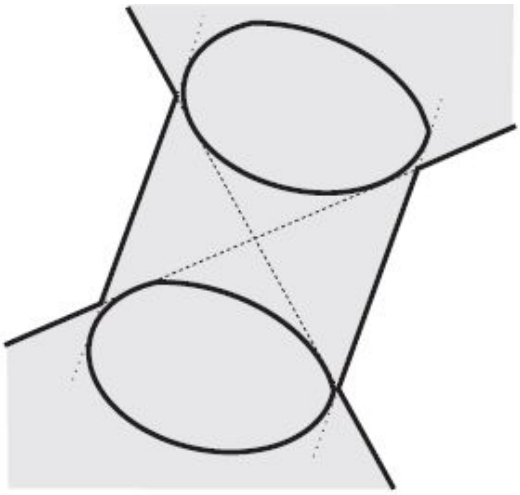
Ismeretes,hogy végtelen sok oválisból álló családra a T(3) tulajdonságból a T is következik.Ami itt azt jelenti,hogy a transzverzális szélesség 0.A fenti tétel általános esetben az 1 szélességet garantálja. Felmerülhet a gyanú,hogy a család elemszámának növelésével a transzverzális szélesség csökkenthető. Ez valóban így is van,ahogy az az alábbi tételben látható:

TÉTEL(HeppesAladár) : Tetszőleges $w \in (0,1]$ szélességhez létezik egy $N(w)$ szám, hogy minden legalább $N(w)$ elemű $T(3)$ tulajdonságú egy ovális diszjunkt eltolt példányaiból álló $\mathcal{F}$ családnak van w relatív szélességű transzverzális sávja.

Ennek a tételnek több érdekessége is van.Egyrészt ez a tétel egyfajta hidat képez a Hadwiger-féle végtelen számú oválisra kapott 0 és az Eckhoff által általánosan igazolt 1 szélesség között.Másrészt érdemes megfigyelni,hogy az N(w) küszöbszám nem függ a D oválistól,amelynek eltoltjaiból a család felépül.

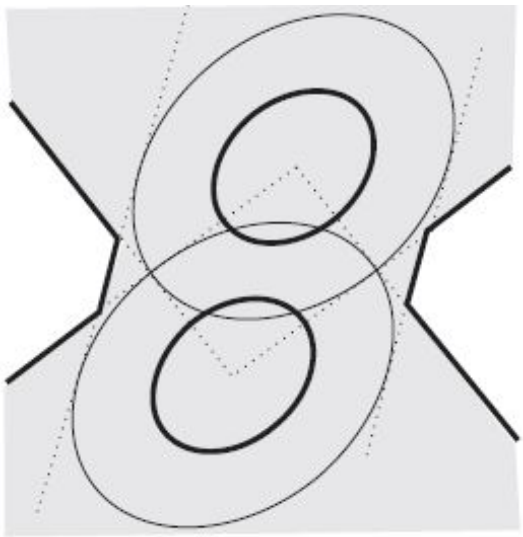
A fenti tétel bizonyításának most csak a vázát adjuk meg,ugyanis a technikai része hasonlóan megy,mint a korábban már megismert tételek bizonyításában láthattuk:
Először általánosítani kell tetszőleges oválisokra a kéve és a középponti kéve fogalmát.A középponti kéve itt azon korábban megismert feltevés miatt alkalmazható,miszerint elég centrálszimmetrikus alakzatokkal dolgozni.Azaz a D ovális helyett tekinthető az $\frac{1}{2}(D-D)$ szimmetrizált is.

Egy oválishoz és eltoltjához tartozó *kéve* azon egyenesek uniója,amelyeknek mindkét oválissal van közös pontjuk.A *kéve* határát a 4 közös érintőegyenes jelöli ki.(6.2. ábra).



6.2. ábra. Kéve oválishoz és eltoltjához

Egy centrálszimmetrikus oválishoz és eltoltjához tartozó *középponti kéve* az ovális azon eltoltjainak középpontjaiból álló halmaz,amely eltoltaknak van közös pontja az eredeti két oválishoz tartozó kévével.(6.3. ábra).



6.3. ábra. Középponti kéve oválishoz és eltoltjához

A bizonyítás során az oválisok n számára a $n \leq N(w) = \frac{16}{w} + 50$ egyenlőtlenség igazolása történik. Ehhez először fel kell tenni,hogy $n \geq 66$,az $n \leq 66$ esetet egyszerűen el lehet intézni a végén. Ezután a fenti centrálszimmetrizálttal dolgozva a minimális transzverzális sávot tekintve ezzel párhuzamos sávokat kell választani,melyek D-szélessége a legkisebb.További egyszerűsítésként alkalmazható,hogy a probléma affin invariáns.Ezzel az oválisainkat négyzetekbe foglalhatjuk.Végül a technikai részben ezen négyzetek elhelyezkedésére (több lehetséges eset megvizsgálása után) megszorítás kapható.Végül a w-től függő sávszélességekre adódik n függvényében becslés,ami átrendezve a bizonyítandó állítást adja.

Ezen vázlatos ismertetés lényege nem maga a bizonyítás részleteinek közlése,hanem a fent megismert definíciók alkalmazásának bemutatása illetve a lépten-nyomon alkalmazott technikák megvilágítása volt.

7. fejezet

Kitekintés: transzvezális tételek magasabb dimenziókban

Ahogy a bevezetőben már szó volt róla,jelen dolgozat elsősorban a síkbeli eredményekkel kíván foglalkozni.Azonban igen kézenfekvő a problémakör általánosítása magasabb dimenzióra,ezért ebben a fejezetben nagy vonalakban szót ejtünk a problémáról a kettőnél magasabb dimenziós esetekben.Mivel azonban a dolgozatnak ez csak melléktémája,a bizonyításokra nem fogunk kitérni és a problémát sem vizsgáljuk a síkbelihez hasonló részletességgel,pusztán az eddig elért lényeges eredményeket szándékozunk ismertetni.

7.1. A T tulajdonság magasabb dimenzióban

Kezdetben néhány alapfogalommal ismerkedünk meg,amelyek a probléma magasabb dimenziós általánosításához elengedhetetlenek:

DEFINÍCIÓ:Egy *k-transzverzális* egy k-dimenziós affin altere a d dimenziós euklideszi térnek,amelynek az $\mathcal{F}$ család minden elemével van közös pontja.
DEFINÍCIÓ:*r(k,d)* az a szám,amelyre egy d-dimenziós euklideszi tér $\mathcal{F}$ ováliscsaládjára ha $\mathcal{F}$ T(r(k,d)),akkor létezik $\mathcal{F}$ elemeihez k-transzverzális.

A Helley-tétel analógiájára Vincensini feltételezte,hogy tetszőleges d és k párhoz kiszámolható r(k,d),hiszen a Helley-tétel megadja k=0-ra az összes r(k,d)-t.Azonban hamarosan kiderült,hogy Vincensini bizonyítása r(1,2)=6 esetére hibás volt,sőt ellenpéldákat is lehetett adni,amint azt korábban mi is megmutattuk.Sőt ezekből az is látható,hogy további feltételek nélkül nem adható véges r(1,2) érték.Emiatt a Helly-tétel ezirányú általánosítása nem működik. Mégis néhány síkbeli transzverzális-tétel átvihető magasabb dimenzióba is:

Santaló tétele általánosítható magasabb dimenzióra a következő módokon:

TÉTEL : Egy $\mathcal{F}$ $d-$ dimenziós téglatestek eltoltjaiból álló családra ha a téglatestek élei párhuzamosak a koordináta $-$ tengelyekkel, akkor $T(2^{d-1}(2d-1)) \Rightarrow T, k = 1 - el.$

TÉTEL : Egy $\mathcal{F}$ $d-$ dimenziós téglatestek eltoltjaiból álló családra ha a téglatestek élei párhuzamosak a koordináta $-$ tengelyekkel, akkor $T(2^{d-1}(2d-1)) \Rightarrow T, k = d-1-$ gyel.

A Helly-tétel analógiájára egy általánosítás Hadwigertől:

TÉTEL : Egy $\mathcal{F}$ $d-$dimenziós oválisokból álló családra ha az oválisok uniója nem korlátos, de szélességük közös korlát alatt van, akkor $T(d+1) \Rightarrow T, k = 1-$ el.

Hipersíkokra (k=d-1 eset) szintén ismertek tételek,de a köztes dimenziókra ($2 \leq k \leq d-2$) csak igen bonyolult eredmények születtek,és nem is túl sok eredmény ismert.

A legegyszerűbbnek tűnő eset d dimenzióban is a gömbök esete.Az alábbiakban a gömbökről szóló tételeket ismertetjük 3,illetve magasabb dimenzióban (itt mindig k=1,azaz csak egyenes transzverzálissal foglalkozunk):

Az első eredmény gömbökre magasabb dimenzióban:

TÉTEL(Hadwiger) : Egy $\mathcal{F}$ diszjunkt kongruens $d-$ dimenziós gömbök eltoltjaiból álló családra ha a gömbközéppontok távolsága legalább két gömbátmérő, akkor $T(d^2) \Rightarrow T$.

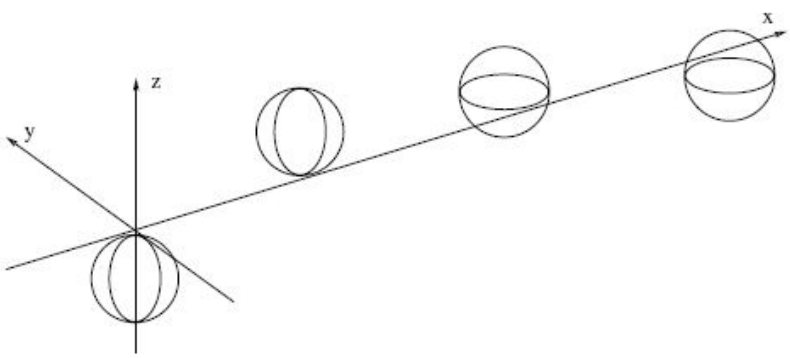
Ezt Grünbaum javította:

TÉTEL(Grünbaum) : Egy $\mathcal{F}$ diszjunkt kongruens $d-$ dimenziós gömbök eltoltjaiból álló családra ha a gömbközéppontok távolsága legalább két gömbátmérő, akkor $T(2d-1) \Rightarrow T$.

Hadwiger eredményét a tágassági feltétel szempontjából is sikerült javítani:

TÉTEL(Ambrus és mások) : Egy $\mathcal{F}$ diszjunkt kongruens $d-$dimenziós gömbök eltoltjaiból álló családra ha a gömbközéppontok távolsága legalább $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ gömbátmérő, akkor $T(d^2) \Rightarrow T$.

A tétel feltétele mellett $T(3) \not\Rightarrow T$ d=3-ra,amint az a 7.1.ábrán látható elrendezésből következik.



7.1. ábra. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ gömbátmérőnél nagyobb gömbközépponttávolságra $T(3) \not\Rightarrow T$

A gömbök középpontjainak koordinátái itt (0,0,-1.01),(4,0,1.01),(8,1.01,0),(12,-1.01,0).Ezen elrendezés általánosítható úgy,hogy $T(2d-2) \not\Rightarrow T$ a tételbeli tágassági feltételek mellett,d dimenziós térre.

Végül a tágassági feltételek nélkül is születtek eredmények diszjunkt gömbcsaládokra:

$TÉTEL(Holmsen$ *és mások*$)$: *Egy* $\mathcal{F}$ *diszjunkt kongruens gömbök eltoltjaiból álló családra* $T(46) \Rightarrow T$.

$TÉTEL(Cheong$ *és mások*$)$: *Egy* $\mathcal{F}$ *diszjunkt kongruens gömbök eltoltjaiból álló családra* $T(18) \Rightarrow T$.

$TÉTEL(Cheong-Goaoc-H.-Petitjean, 2005)$: *Egy* $\mathcal{F}$ *diszjunkt kongruens* $d-$*dimenziós gömbök eltoltjaiból álló családra* $T(4d-1) \Rightarrow T$.

Ismeretes az is,hogy Tverberg oválisokra vonatkozó tétele ellenpéldával igazolhatóan nem érvényes magasabb dimenzióban.

7.2. Katchalski-Lewis-típusú eredmények magasabb dimenzióban

Nemcsak a Helly-típusú tételeket lehet kiterjeszteni magasabb dimenzióra,hanem a Katchalski-Lewis problémakört is.Azonban,amint azt hamarosan látni fogjuk,a kiterjesztés ebben az esetben is különféle módokon történhet és itt sem vihető át minden,amit síkban igaznak találtunk.

Először be kell vezetni néhány új fogalmat:

DEFINÍCIÓ: Egy $\mathcal{F}$ család T_k *tulajdonságú*,ha minden eleméhez létezik k-transzverzális.
DEFINÍCIÓ:Egy $\mathcal{F}$ család $T_k(m)$ *tulajdonságú*,ha tetszőlegesen választott m eleméhez létezik k-transzverzális.
DEFINÍCIÓ:Egy $\mathcal{F}$ család T_k-c *tulajdonságú*,ha kiválasztható úgy c eleme,hogy a többihez létezik k-transzverzális.

A fogalmak megismerése után következhetnek az elért eredmények:

$TÉTEL$: *Tetszőleges* $n \geq 2-$*re létezik egy minimális nemnegatív* $c(n)$ *egész szám, hogy bármely* $n-$ *dimenziós ovális diszjunkt eltoltjaiból álló* $\mathcal{F}$ *családra* $T_1(3) \Rightarrow T_{n-1} - c(n)$.

Ezen tétel mindjárt mutatja a különbséget a síkbeli esettel szemben,ugyanis itt egy egyenes és egy hipersík transzverzális között láthatunk kapcsolatot. A tétel bizonyítása során itt is a síkbeli Katchalki-Lewis-tételekre történik a visszavezetés.

További meglepő eredmény a következő 3 dimenziós térre vonatkozó tétel:

TÉTEL : Létezik $6n$ *páronként diszjunkt kongruens gömbből álló család a* 3 *dimenziós euklideszi térben, amely* $T_1(3)$, *de tetszőleges egyenes legfeljebb* $4n$ *gömböt metsz.*

A tételből ugyanis azonnal látható,hogy megfelelően nagy n-et választva a kimaradó gömbök száma akármilyen nagy lehet,vagyis a 3 dimenziós esetben már gömbökre sem fogalmazható meg olyan tétel,ami a síkban még tetszőleges oválisokra elmondható volt.
Ezen probléma kiküszöbölésére meg lehet próbálkozni $T_1(3)$ helyett valamely k-tól függő T_1 tulajdonságot feltenni,esetleg T_1 helyett is lehet mindjárt T_k-t tekinteni.Ezen irányokban is folytak vizsgálódások,de egyelőre még kevés eredménnyel.Ma csak T_2-vel ismert eredmény,de az is egy ellenpélda konstrukció,vagyis valójában "negatív" eredmény.

***

Ebben a fejezetben képet kaphattunk a síkban megismert problémák általánosítási lehetőségeiről és a felmerülő újabb nehézségekről magasabb dimenziókban.Láthattuk azt is,hogy mi várható el és mi az,ami semmiképpen sem teljesülhet magasabb dimenziós terekben.Emellett említésre kerültek a nyitott problémák,amelyekről még igen kevés ismerettel rendelkezünk magasabb dimenzióban.Néhány ezek közül síkban nem is adódott elő,például az egyenes és a hipersík közötti dimenziós transzverzális esete.Ezen rövid ismertető tehát lényegében azt vázolta,hogy milyen különbségek állnak fent a sík és magasabb dimenziós euklideszi terek között a transzverzális problémakörben,illetve,hogy miként bonyolódik a probléma akkor,ha magasabb dimenzióban próbáljuk meg általánosítani a síkbeli eredményeket.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS:
Végezetül szeretnék köszönetet mondani Böröczky Károlynak és Heppes Aladárnak a dolgozat elkészítéséhez nyújtott nagylelkű segítségéért.

Irodalomjegyzék

Felhasznált irodalom:

[1] B.Grünbaum.On common transversals.*Arch. Math.* **9** (1958),465-469.

[2] K.Bezdek,T.Bisztriczky,B.Csikós,A.Heppes.On the transversal Helly numbers of disjoint and overlapping disks. *Arch.Math.* **87** (2006),86-96.

[3] Holmsen,A.F.:Recent progress on line transversals to families of translated ovals.In:Goodman,E.,Pach,J.,Pollack,R.(eds.) Discrete and Computational Geometry-20 years later.Contemporary Mathematics,vol.456.American Mathematical Society (2008,to appear).

[4] A.Heppes.Line Transversals in Large T(3)- and T(4)-families of Congruent Discs.*Discrete Comput. Geom.* **40** (2008),312-318.

[5] T.Bisztriczky,F.Fodor,D.Oliveros.The T(4) property of families of unit disks.Submitted to *Israel J. of Math.* (2005).

[6] A.Heppes. On the Katchalsky-Lewis transversal conjencture for T(3)-families of congruent disks. *Discrete Comput. Geom.* **38** (2007),289-304.

[7] A.Heppes. New upper bound on the transversal width of T(3)-families of disks.*Discrete Comput. Geom.* **34** (2005), 463-474.

[8] G.Ambrus,A.Bezdek,F.Fodor.A helly-type transversal theorem for n-dimensional unit balls.*Arch. Math.* **86** (2006),470-480.

[9] A.Holmsen.The Katchalski-Lewis transversal theorem in $\mathbb{R}^n$.*Discrete Comput. Geom.* **37** (2007),341-349.

[10] A.Heppes.The width of the transversal strips of T(3)-families in the plane.*Discrete Comput. Geom.* **34** (2005),455-461.

[11] A.Holmsen.New Bounds on the Katchalski-Lewis transversal problem.*Discrete Comput. Geom.* **29** (2003),395-408.

[12] Springer online reference: http://eom.springer.de/g/g130050.htm

[13] Aladár Heppes: Helly type transversal problems in the plane on the occasion of the 70th birthday of Károly Böröczky,27th february 2009.