Csődvalószínűségek becslése a biztosításban

Diplomamunka

Írta: Deák Barbara
Matematikus szak

Témavezető:

Arató Miklós, egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2010

Tartalomjegyzék

Előszó **2**

1. Bevezetés **4**
1.1. Egyéni kockázati modell 4
1.2. Összetett kockázati modell 5
1.2.1. Klasszikus rizikófolyamat 6
1.2.2. A csőd valószínűsége véges intervallumon 7

2. A modell és annak becslései **9**
2.1. A csődvalószínűség kiszámolása 10
2.2. A csődvalószínűség becslései 12
2.2.1. Maximum-likelihood módszer felhasználásával 12
2.2.2. Visszatevéses mintavétellel adott becslés 17
2.2.3. A becslések összehasonlítása 21

3. Rossz modell becslése **24**
3.1. A csődvalószínűség kiszámolása 24
3.2. A csődvalószínűség becslései 25
3.2.1. Maximum-likelihood módszer felhasználásával 26
3.2.3. Visszatevéses mintavétellel adott becslés 29
3.2.3. A becslések összehasonlítása 32

4. Klasszikus rizikófolyamat **35**
4.1. A csődvalószínűség 36
4.2. A csődvalószínűség becslései 38
4.2.1. Maximum-likelihood módszer felhasználásával 38
4.2.2. Visszatevéses mintavétellel adott becslés 42
4.2.3. A becslések összehasonlítása 46

5. Összefoglalás **48**

6. Summary **49**

Köszönetnyilvánítás **50**

Irodalomjegyzék **51**

Előszó

Diplomamunkám témája a biztosítóintézetek csődvalószínűségének kiszámítása, és annak becslése. A tönkremenés valószínűsége központi kérdés egy biztosítóintézet életében, hiszen a cél az, hogy a biztosító szinte bármikor képes legyen teljesíteni szerződéses kötelezettségeit. Az erre a célra képzett biztosítástechnikai tartalékokon felül képzett szavatolótőke számításának egyik alapeleme a csődvalószínűség. A számítások során elsősorban az egyéni kockázati modellel foglalkoztam, de dolgozatom végén a klasszikus rizikófolyamat becslését is megvizsgáltam.

Dolgozatom célja, hogy a korábban ismert csődvalószínűség-számítási módszerek mellett két olyan becslési módszert is bemutassak, melyet akkor tudunk használni, ha a kár- és kárnagyság-eloszlások paraméterei ismeretlenek. Az egyik becslési módszer esetében az eloszlások paramétereit maximum-likelihood módszerrel becsüljük, és ezeket a paramétereket használjuk fel a csődvalószínűség kiszámításához. A másik becslési módszer esetén a szerződésekhez tartozó kárkifizetésekből visszatevéses mintavétellel húzunk, és az így kapott összkár alapján próbáljuk meg megmondani, hogy mekkora valószínűséggel megy tönkre a biztosítóintézet.

Az első fejezetben az egyéni és összetett kockázati modell néhány alapvető tulajdonságát gyűjtöttem össze, melyeket dolgozatom későbbi fejezeteiben felhasználok.

A második fejezetben felállítottam egy olyan modellt a csődvalószínűség meghatározására, amely a biztosítóintézet előző évi káradatait használja fel. A becslésekhez szükségem volt konkrét káradatokra, ezért az R statisztikai programban generáltam őket, és ezek segítségével készítettem el a két becslést.

A harmadik fejezetben azt feltételeztem, hogy az előző évi károk eloszlását rosszul tudjuk, és a rossz eloszlás alapján számoljuk ki a becsült csődvalószínűségeket. Azt vártuk, hogy ebben az esetben nem ugyanaz a becslés lesz jobb a tönkremenés valószínűségére, mint a második fejezetben, és a kapott eredmény ezt igazolta.

A negyedik fejezetben a klasszikus rizikófolyamatra készítettem el ugyan-

ezt a két becslést, és megvizsgáltam, hogy mennyire tér el a valós és a becsült csődvalószínűség egymástól.

A bevezetésben szereplő eredményeket és a negyedik fejezet elején található számításokat Michaletzky György *Kockázati folyamatok* című jegyzetéből használtam fel. A jól ismert eredmények bemutatásán túlmenően több elméleti és valamennyi numerikus számítás saját munka eredménye.

1. fejezet

Bevezetés

A klasszikus kockázati modellekben a biztosítóintézetek pénzforgalmának három fontos elemét különböztetjük meg: a biztosítottak által befizetett díj (P_t), a biztosító által az egyes károkra történő kifizetések (S_t), és a biztosítóintézet kezdeti alaptőkéje ($U_0 = u$). E három elem függvényében kaphatjuk meg a biztosítótársaság pillanatnyi tőkéjét (U_t).

$$U_t = U_0 + P_t - S_t$$

A jövőben bekövetkező károk időpontja és nagysága nem határozható meg pontosan, ezért sztochasztikus elemeket tartalmazó modelleket alkalmazunk. Gyakorlatban a kár tényleges nagysága, és a bejelentett kár értéke is fontos. Ez utóbbit nevezzük kárigénynek.

Jelölje $X_1, X_2, ...$ a biztosítóintézethez egymás után érkező kárigények nagyságát, melyekről a legtöbb esetben feltesszük, hogy egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ez azonban ténylegesen csak ritkán valósul meg. X_i eloszlásfüggvénye legyen $F_i(x)$, eloszlása pedig Q_i.

Két fő típust különböztetünk meg: az egyéni és az összetett kockázat modelljét.

1.1. Egyéni kockázati modell

Az egyéni kockázati modellben minden egyed (kötvény vagy biztosítás) esetén csak egyetlen kárnagyságot vizsgálunk. Így ha n egyed van a portfóliónkban, akkor az összkár:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

Ha X_i-k függetlenek, akkor az összegük eloszlását az eloszlások konvolúciója adja meg. Az összeg valószínűségi változó eloszlását azonban sokszor nagyon nehéz kiszámolni, de bizonyos speciális esetekben mégis lehetséges.

Azt tudjuk, hogy véges várható érték esetén a várható értékek összeadódnak. Ha a szórásnégyzet is véges, akkor korrelálatlanság esetén a szórásnégyzet is additív. Ha sztochasztikusan függetlenek, akkor a karakterisztikus függvényeik és Laplace-transzformáltjaik szorzódnak.

Sok esetben pozitív a valószínűsége annak, hogy egy egyedhez nem tartozik káresemény, vagy a káresemény bekövetkezik, de a hozzá tartozó kárkifizetés nulla, azaz $q_i = P(X_i > 0) < 1$. Ebben az esetben X_i eloszlását fel lehet írni két eloszlás keverékeként. Az egyik a nullára koncentrált eloszlás, a másik X_i feltételes eloszlása $X_i > 0$ mellett. Ha δ_0 a nullára koncentrált eloszlás, R_i pedig a feltételes eloszlás, akkor

$$Q_i = (1 - q_i)\delta_0 + q_i R_i \ .$$

1.2. Összetett kockázati modell

Az összetett kockázati modellben minden egyedhez több káresemény is tartozhat, mely szintén valószínűségi változó, jele N. Feltesszük, hogy az egyes károkra történő kifizetések azonos eloszlásúak, és N eloszlása független X_i-ktől. Ha X_i-k azonos eloszlásúak, véges várható értékkel és N-nek is véges várható értéke van, akkor $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ várható értéke:

$$E(S) = E(N)E(X) \ .$$

Ha az X_i sorozat elemeiről feltesszük, hogy egymástól függetlenek és véges szórásúak, akkor S szórásnégyzete a következőképpen számolható ki

$$D^2(S) = E(N)D^2(Z) + E^2(Z)D^2(N) \ .$$

S karakterisztikus függvényét és Laplace-transzformáltját úgy kapjuk meg, hogy N generátorfüggvényébe beírjuk a kareloszlások közös karakterisztikus függvényét és Laplace-transzformáltját.

Gyakran az idő függvényében vizsgáljuk az összkár értékét. Ekkor N az idő függvénye, tehát egy sztochasztikus folyamat, amit N_t-vel jelölünk, ahol $t \geq 0$. Ekkor S_t kárszámfolyamat:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \ .$$

A kockázati tartalék tehát ebben az esetben a következőképpen néz ki:

$$U_t = u + P_t - S_t \ ,$$

ahol u a kezdeti tőke, P_t a díjbevétel értéke, S_t a kárszámfolyamat és U_t az ún. rizikófolyamat.

1.2.1. Klasszikus rizikófolyamat

Az egyik legalapvetőbb kérdés, hogy mekkora annak valószínűsége, hogy a rizikófolyamat valamely t időpillanatban negatívvá válik. Ezt az időpontot nevezzük a tönkremenés valószínűségének.

Klasszikus rizikófolyamatról beszélünk, ha $P_t = ct$ állandó, ahol c jelöli az egy időegységre eső díjbevételt.

Legyen

$$\Psi(u) = P(\exists t \geq 0 : U_t < 0) \ ,$$
$$\Phi(u) = P(U_t \geq 0 : \forall t \geq 0) \ ,$$

ahol $\Psi(u)$ jelöli a csődvalószínűséget, $\Phi(u)$ pedig annak valószínűségét, hogy a biztosítótársaság nem megy csődbe. Ekkor a $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ természetes összefüggés fennáll.

A klasszikus esetben N λ paraméterű Poisson folyamat. Ha $F(x)$ jelöli az X_i valószínűségi változók közös eloszlásfüggvényét, akkor klasszikus rizikófolyamat esetén $\Phi(u)$ kielégíti a következő integrálegyenletet:

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \tfrac{\lambda}{c} \int_0^u \Phi(u-x)(1-F(x))dx \ .$$

Ha $c < \lambda\mu$, akkor $\Phi(u) \equiv 1$ és ha $c = \lambda\mu$, akkor $\Phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$.

Ha $c > \lambda\mu$, ahol λ a Poisson folyamat paramétere, μ pedig az X_i változók közös, véges várhatóértéke, akkor $\Phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$, azaz $\Psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$.

Mivel $\Psi(u) = 1 - \Phi(u)$, klasszikus rizikófolyamat esetén $\Psi(u)$ kielégíti a következő integrálegyenletet:

$$\Psi(u) = 1 - \Phi(u) = \tfrac{\lambda\mu}{c} - \tfrac{\lambda}{c}\int_0^u (1 - \Psi(u-x))(1 - F(x))dx =$$
$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1 - F(x))dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-x)(1 - F(x))dx \ .$$

Legyen $h(r) = \int_0^\infty e^{rx} dF(x) - 1$, azaz az X_i valószínűségi változók közös momentumgeneráló függvényének 1-gyel csökkentett értéke. $F(x)$ nemnegatív valószínűségi változók közös eloszlásfüggvénye, ezért $r \leq 0$ esetén $h(r)$ biztosan véges és $h(0) = 0$. Ugyanakkor $h(r)$ szigorúan konvex függvénye r-nek, ezért a $h(r) = \frac{cr}{\lambda}$ egyenletnek legfeljebb egy pozitív gyöke lehet.

1.2.1. Tétel: *(Cramer-Lundberg-approximáció)* Tegyük fel, hogy a

$$\tfrac{c}{\lambda} = \tfrac{h(r)}{r}$$

egyenletnek létezik pozitív megoldása, jelölje ezt R. Tegyük fel, hogy h(r) véges R valamely pozitív sugarú környezetében. Ekkor

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda h'(R) - c} \ .$$

1.2.2. A csőd valószínűsége véges intervallumon

Az eljárás véges intervallum esetén teljesen hasonló, mint végtelen intervallum esetén, így egyből feltehetjük, hogy az N_t kárigényfolyamat felújítási folyamatot alkot. Jelölje $K(t)$ az egyes káresemények közötti időtartam eloszlásfüggvényét, ahol $K(0) = 0$ és $\int_0^\infty t dK(t) = \frac{1}{\lambda} < \infty$. A kárigények nagyságát az X_i valószínűségi változók jelölik, melyek függetlenek, és azonos eloszlásúak. A közös eloszlásfüggvényük $F(x)$ és $E(X_i) = \mu$. Ebben az esetben nem tesszük fel, hogy X_i nem negatív. Bár ez látszólag ellentmond az elnevezéseknek, de a valóságban könnyen előfordulhatnak olyan biztosítási ügyletek, melyek valójában nem kifizetések.

Továbbra is $U_t = u + ct - S_t$, ahol $S_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$. A csőd valószínűsége véges időintervallumon:

$$\Psi(u,t) = P(\exists 0 \leq s \leq t : U_t < 0) \ ,$$
$$\Phi(u,t) = P(\forall 0 \leq s \leq t : U_t \geq 0) \ .$$

Ha $c > 0$, akkor a csőd csak káresemény időpontjában következhet be. Az első felújítási időpont és X_1 szerint alkalmazva a teljes várható érték tételét:

$$\Phi(u,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{u+cs} \Phi(u+cs-x, t-s) dF(x) dK(s) + 1 - K(t) \ .$$

2. fejezet

A modell és annak becslései

Ebben a fejezetben először készítünk egy modellt, mely illeszkedik a biztosítótársaság előző évi szerződéseire és káradataira, majd ezek alapján az adatok alapján kiszámoljuk annak valószínűségét, hogy a biztosítótársaság az idei évben csődbe megy-e.

Ezután két különböző módszerrel a tavalyi, szerződésenkénti káradatokra támaszkodva megpróbáljuk megbecsülni, hogy milyen valószínűséggel megy tönkre a cég. A célunk egy olyan becslést találni, amely elég pontosan megmondja ezt a valószínűséget anélkül, hogy a kárszám és kárigény eloszlásának paramétereit pontosan ismernénk.

A modellben u kezdőtőke mellett n darab szerződésünk van, melyekre d díj folyik be egy év alatt, amiből már a költségeket levontuk. Ekkor $u + nd$ a pillanatnyi tőkénk. A kárszám legyen $\lambda-$Poisson eloszlású, a kár pedig $\mu-$exponenciális. Jelölje X_i az i. kárt, N pedig a károk számát. Ha k_j jelöli a j. szerződéshez tartozó kárszámot, akkor

$$N = \sum_{j=1}^{n} k_j \ ,$$

ami n darab λ-Poisson eloszlású valószínűségi változó összege, ezért $n\lambda$-Poisson eloszlású.

Ebben az esetben a csőd valószínűsége megegyezik annak a valószínűségével, hogy az összkár nagyobb, mint a pillanatnyi tőkénk, azaz

$$p = P(\sum_{i=1}^{N} X_i > u + nd) \ .$$

Tegyük fel, hogy a tavalyi évben m darab szerződésünk volt, melyekre a kárszám eloszlása szintén λ-Poisson, a kár eloszlása pedig μ-exponenciális. Ha $\hat{\lambda}$-pal jelöljük λ maximum likelihood becslését, $\hat{\mu}$-pal pedig μ-ét, akkor λ helyére $\hat{\lambda}$-t, μ helyére pedig $\hat{\mu}$-t írva, p egy becslését kapjuk, amit a későbbiekben jelöljünk $\hat{p}$-pal.

A másik becslésünkben tegyük fel, hogy az előző évben szintén m darab szerződésünk volt, amikre a kifizetések Y_1,Y_2, ..., Y_m, melyek között lehetnek nullák is. Y_1,Y_2,..., Y_m-ből visszatevéssel veszünk k-szor n elemű mintát, ezek rendre $Y^*_{1,1}, ..., Y^*_{1,n}$,$Y^*_{2,1}, ..., Y^*_{k,n}$. Ekkor a csőd valószínűségét az alapján becsülhetjük, hogy a k darab mintából hány olyan van, aminél a pillanatnyi tőkénk kevés a kárkifizetésekre. Ha $\bar{p}$ jelöli ezt a becslést, akkor

$$\bar{p} = \frac{\#\{i : Y^*_{i,1} + ... + Y^*_{i,n} > u + nd\}}{k} .$$

2.1. A csődvalószínűség kiszámolása

A számolás egyszerűsítése kedvéért először tegyük fel, hogy N nem véletlen és minden szerződés esetén egyetlen nem nulla kárnagyságot vizsgálunk, azaz $N = n$. Ekkor X_i jelöli az i. szerződéshez tartozó kárt, ami továbbra is μ-exponenciális eloszlású. Az összkár $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, ami ebben az esetben $\Gamma(n, \mu)$ eloszlású.

Azt szeretnénk kiszámolni, hogy mekkora valószínűséggel lesz a kárkifizetések összege nagyobb, mint a pillanatnyi tőke.

$$p = P(\sum_{i=1}^{n} X_i > u + nd) = P(S > u + nd) = 1 - P(S < u + nd)$$

A pontos érték meghatározásához szükségünk van S eloszlásfüggvényére, ugyanis az eloszlásfüggvény $u + nd$ helyen felvett értéke éppen a fenti valószínűséggel egyezik meg. A Gamma-eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} = P(S < t) .$$

t helyére $u+nd$-t helyettesítünk, és ezt beírjuk p egyenletébe, így a kívánt valószínűséget kapjuk:

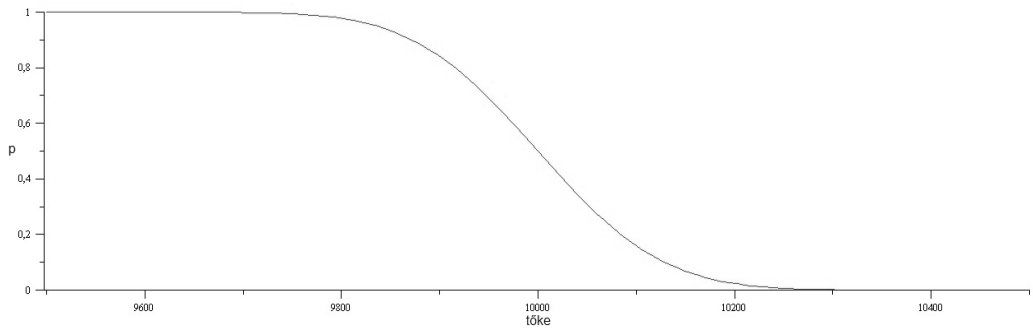
$$P(S < u + nd) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\mu(u + nd))^i}{i!} e^{-\mu(u+nd)} ,$$

$$p = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu(u+nd))^i}{i!} e^{-\mu(u+nd)} \ . \tag{2.1.}$$

Nézzük azt az esetet, amikor E(X_i)=1 millió, azaz a szerződésenkénti várható kárkifizetés 1 millió forint. Válasszuk meg ezt az egységnek, így μ=1. Ezt behelyettesítve a (2.1.) egyenletbe:

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(u+nd)^i}{i!} e^{-(u+nd)} \ .$$

10000 szerződés esetén, ha a károk várható nagysága 1, a csőd valószínűsége a következőképpen alakul a pillanatnyi tőke függvényében.



2.1. ábra: Csődvalószínűség, ha $\mu = 1$ (egység=1 millió)

A grafikonon az látszik, hogy 9.7 milliárd forint esetén szinte biztosan csődbe fog menni a biztosítótársaság, de 10.3 milliárd forint már majdnem biztosan elég arra, hogy minden kárt ki tudjon fizetni a biztosító.

Ha a biztosító p valószínűséggel megy csődbe, és a korábbi feltételezéseink igazak, akkor meg tudjuk mondani, hogy mennyi a pillanatnyi tőkéje a társaságnak.

p	0.9	0.95	0.99	0.995	0.996	0.999
$u+nd$	9872	9836	9768	9744	9736	9693

p	0.1	0.05	0.01	0.005	0.004	0.001
$u+nd$	10125	10165	10232	10259	10267	10310

2.2. ábra: $u + nd$ értékei (egység=1 millió)

A kapott tőkenagyságok egészre kerekített értékek.

Az adatokból látszik, hogy nagyon kicsi és nagyon nagy csődvalószínűségek esetén a pillanatnyi tőke körülbelül azonos mértékben változik. Ez azt jelenti, hogy a csődvalószínűségeket ábrázoló grafikonunk középpontosan szimmetrikus a 10 milliárd forint pillanatnyi tőkénél felvett csődvalószínűségre.

2.2. A csődvalószínűség becslései

Tegyük fel, hogy az előző évben is ugyanannyi szerződésünk volt, mint most, azaz $n = m = 10000$.

2.2.1. Maximum-likelihood módszer felhasználásával

A becslésünk lényege, hogy az előző részben kiszámolt, csődvalószínűséget meghatározó képletben μ helyére μ maximum-likelihood becslését írjuk be, amit $\hat{\mu}$-pal fogunk jelölni, az így kapott valószínűséget pedig $\hat{p}$-pal.

μ ML-becsléséhez X_i-k együttes sűrűségfüggvényére van szükségünk. A μ-exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(X) = \mu e^{-\mu x} \ .$$

Ebből $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét úgy kapjuk, hogy a megfelelő sűrűségfüggvényeket összeszorozzuk, azaz

$$f(X_1, ...X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu e^{-\mu x_i} = \mu^n e^{-\mu \sum_{i=1}^{n} x_i} \ .$$

A log-likelihood függvényt szeretnénk maximalizálni ahhoz, hogy megkapjuk μ ML-becslését. Ehhez az együttes sűrűségfüggvény logaritmusát kell venni, amit aztán μ szerint maximalizálunk, azaz megnézzük, hogy μ szerinti deriváltja hol 0. Az így kapott $\hat{\mu}$ lesz μ maximum-likelihood becslése.

$$log f(X_1, ...X_n) = n log\mu - \mu \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial log f(X_1, ...X_n)}{\partial \mu} = \frac{n}{\mu} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{n}{\mu} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

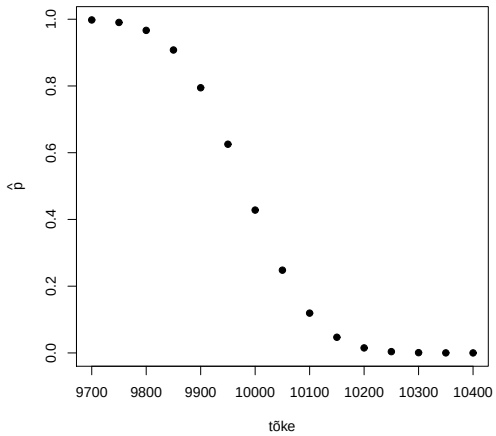
$$\hat{\mu} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{n}{S}$$

$\hat{\mu}$-ot (2.1.)-be behelyettesítjük

$$\hat{p} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(u+nd)^i}{\bar{X}^i i!} e^{-\frac{u+nd}{\bar{X}}} \ . \tag{2.2.}$$

Ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, mennyire jó ez a becslés a csődvalószínűségre, össze kell hasonlítani a most kapott valószínűséget az eredetivel. Ehhez az szükséges, hogy $\bar{X}$ értékét pontosan ismerjük.

$\bar{X}$ értékének meghatározásához szükségünk volt 10000 darab, 1 várhatóértékű, exponenciális eloszlású kárra. Ezeket a károkat R-ben generáltuk, majd meghatároztuk az átlagos kárnagyságot. A mi generálásunk során $\bar{X} = 0.9982218$. Ezt helyettesítettük be a (2.2.) képletbe, amire a pillanatnyi tőke függvényében az alábbi csődvalószínűségeket kaptuk.



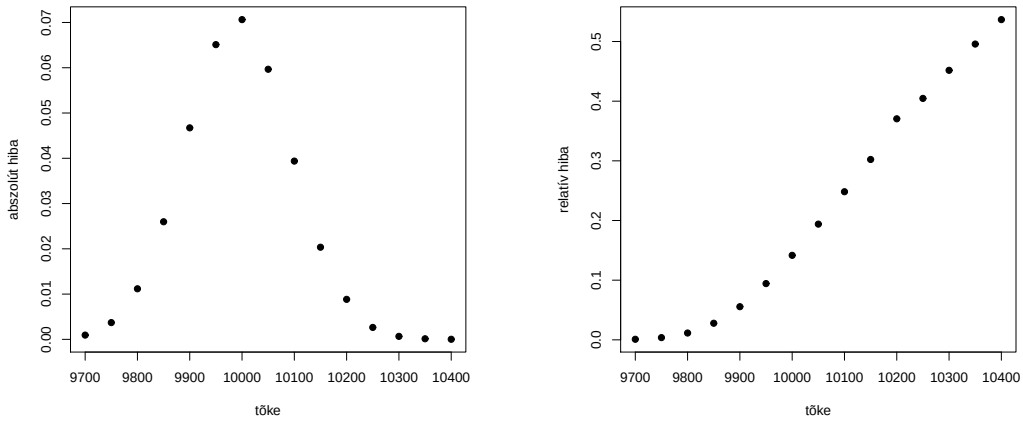
2.3. ábra: $\hat{p}$ (egység=1 millió)

p és $\hat{p}$ összehasonlítását kétféleképpen végeztük el. Először megnéztük a két valószínűség abszolút hibáját, azaz p és $\hat{p}$ eltérésének abszolút értékét,

majd megnéztük a relatív hibájukat is, azaz a két valószínűség abszolút eltérésének és p-nek a hányadosát.

$$d_{abs} = |\hat{p} - p| \qquad\qquad d_{rel} = \frac{|\hat{p}-p|}{p}$$

E két érték vizsgálata után kapunk képet arról, hogy mennyire jó a használt becslési módszer.

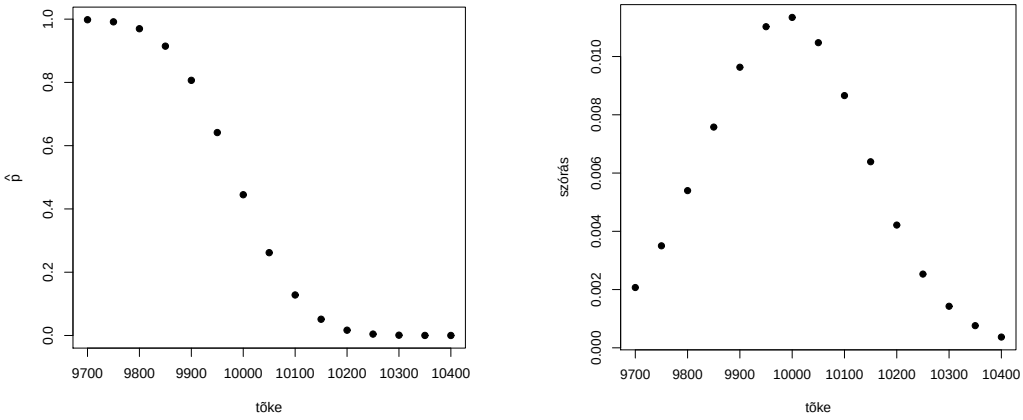


2.4. ábra: p és $\hat{p}$ abszolút és relatív hibája (egység=1 millió)

Az első grafikonon az látszik, hogy az abszolút hiba 9.9 és 10.1 milliárd között valamivel nagyobb, mint máshol és 10 milliárd forint pillanatnyi tőkénél a legnagyobb. A relatív hiba 9.9 milliárd forint pillanatnyi tőkénél kezd el jobban nőni, így 10.4 milliárd forintnál lesz a legnagyobb az értéke. Azért itt lesz a legnagyobb, mert mind p, mind $\hat{p}$ értéke itt kicsi, így a kettő közötti kis abszolút eltérés hozzájuk képest elég nagy.

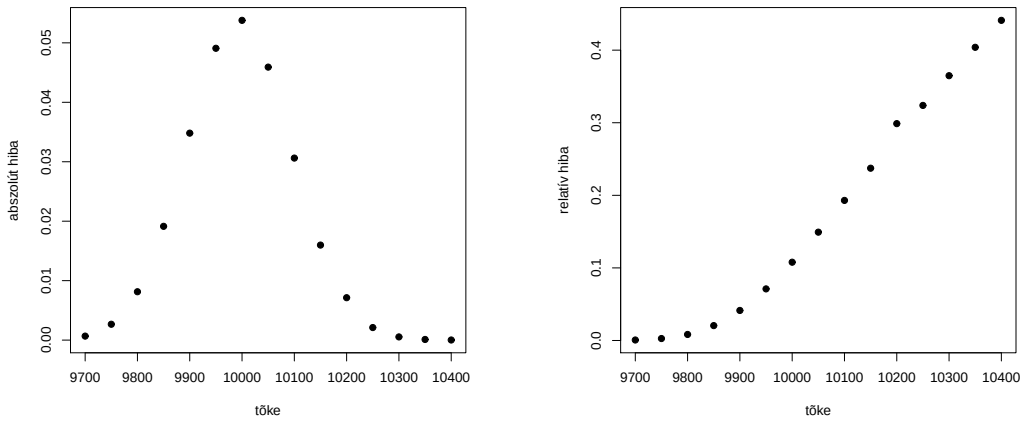
Megnéztük, hogy milyen becslést kapunk a csődvalószínűségekre, ha a generált 10000 elemű, 1 várható értékű, exponenciális eloszlású mintából visszatevéssel veszünk 1000 különböző 10000 elemű mintát és ezek alapján adjuk meg $\bar{X}$ értékét, majd számoljuk ki a becslést. Az egyes pillanatnyi tőkékhez tartozó csődvalószínűségi becslések átlagát hasonlítjuk össze az „igazi” csődvalószínűségekkel.

A grafikonon látszik, hogy ez a becslés is az eredeti csődvalószínűséghez hasonló eredményt adott. A valószínűségek szórása a pillanatnyi tőke függvényében nem túl nagy. Csak a 9.9 és 10.1 milliárd forint közötti tartományban nagyobb egy kicsit az értéke, de itt is 0.011 a legnagyobb érték.



2.5. ábra: $\hat{p}$ átlaga és szórása (egység=1 millió)

p és $\hat{p}$ átlagának összehasonlítását most is a korábban leírt módon végeztük, azaz kiszámoltuk az eredeti és a becsült csődvalószínűségek átlagának abszolút és relatív hibáját.



2.6. ábra: p és $\hat{p}$ átlagának abszolút és relatív hibája (egysé=1 millió)

Az első grafikonon látszik, hogy a pillanatnyi tőke függvényében az abszolút hiba 9.9 és 10.1 milliárd forint között nagyobb és 10 milliárd forint pillanatnyi tőkénél veszi fel a legnagyobb értékét (0.053). A relatív hiba 9.9 milliárd forint pillanatnyi tőke után kezd el jobban, szinte lineárisan emelkedni és 10.4 milliárd forintnál éri el a 0.44 értékű maximumát. Nem meglepő módon mind a két hiba esetében a grafikonokon is látszik, hogy az 1000 valószínűség átlagolásával kapott csődvalószínűség pontosabb becslést adott p-re, mint ha csak az eredetileg generált 10000 elemű minta segítségével számolnánk ki a tönkremenés becsült valószínűségét.

Szeretnénk tudni, hogy a maximum-likelihood módszer felhasználásával kapott becslés torzítatlan-e. Egy becslést akkor nevezünk torzítatlannak, ha a várható értéke megegyezik a becsülni kívánt értékkel. Tehát a torzítatlanság eldöntéséhez szükségünk van $E(\hat{p})$ értékére.

$$E(\hat{p}) = E(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(u+nd)^i}{\bar{X}^i i!} e^{-\frac{u+nd}{\bar{X}}}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(u+nd)^i}{i!} E(\frac{1}{\bar{X}^i} e^{-\frac{u+nd}{\bar{X}}})$$

Helyettesítsünk $\bar{X} = \frac{S}{n}$, mert S eloszlását ismerjük. $S \sim \Gamma(n, \mu)$.

$$E(\tfrac{1}{\bar{X}^i} e^{-\frac{u+nd}{\bar{X}}}) = E(\tfrac{n^i}{S^i} e^{-\frac{(u+nd)n}{S}}) = \int_0^{+\infty} \frac{n^i}{t^i} e^{-\frac{(u+nd)n}{t}} t^{n-1} \frac{\mu^n}{\Gamma(n)} e^{-\mu t} dt \ ,$$

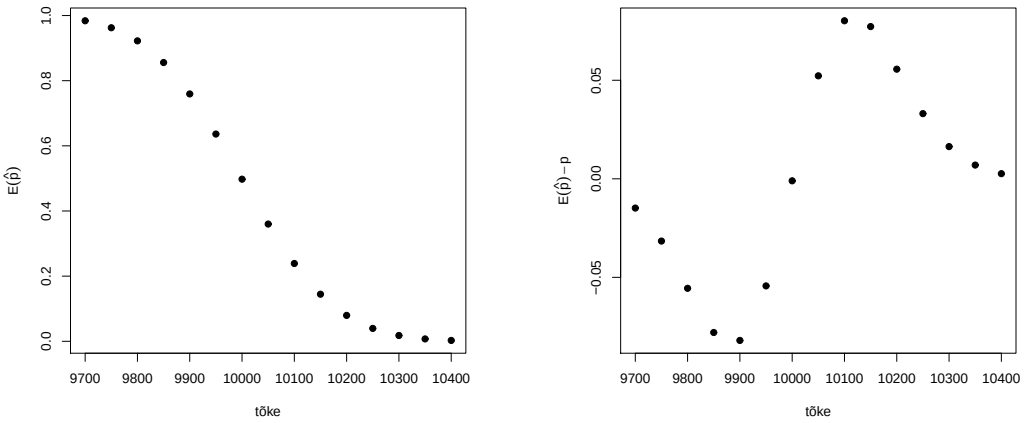
mivel $\dfrac{\mu^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\mu t}$ a $\Gamma(n, \mu)$ eloszlás sűrűségfüggvénye.

Visszahelyettesítve az előző képletünkbe, a következőt kapjuk:

$$E(\hat{p}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(u+nd)^i n^i \mu^n}{i! \Gamma(n)} \int_0^{+\infty} t^{n-i-1} e^{-\frac{(u+nd)n}{t} - \mu t} dt \ .$$

A várható értékhez tartozó integrált a kipróbált módszerek egyikével sem sikerült kiszámolnunk, így az ismeretlen paraméterek helyére beírtuk a most használt értékeket, és numerikusan, a Maple program segítségével számoltuk ki az egyes pillanatnyi tőkékhez tartozó csődvalószínűségek várható értékét.

$E(\hat{p})$ eltérése p-hez képest 9.9 és 10.1 milliárd forint esetén a legnagyobb. Az abszolút eltérésük 0 és 0.05 között van, ami nem túl nagy, de azt jelzi, hogy a becslés nem torzítatlan.



2.7. ábra: $E(\hat{p})$ és $E(\hat{p}) - p$ (egység=1 millió)

2.2.2. Visszatevéses mintavétellel adott becslés

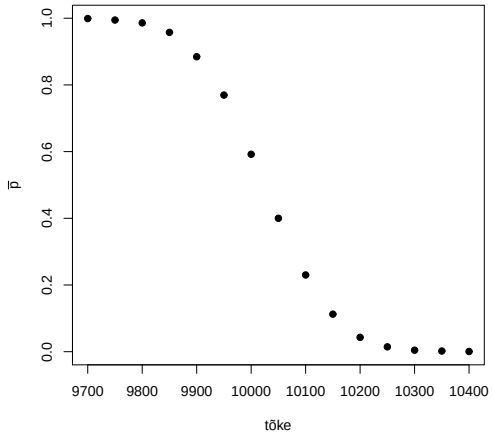
A becslésünk során az előző évi m szerződésre történt $Y_1, ..., Y_m$ kárkifizetésekből, visszatevéssel k-szor n elemű mintát húzunk. Ha a kihúzott károkat $Y^*_{1,1}, ..., Y^*_{1,n}$, $Y^*_{2,1}, ..., Y^*_{k,n}$-nel jelöljük, akkor nagy k-ra és m-re a következőt várjuk:

$$\bar{p} = \frac{\#\{i : Y^*_{i,1} + ... + Y^*_{i,n} > u + nd\}}{k} \to P(Y^*_{i,1} + ... + Y^*_{i,n} > u + nd) \ .$$

Az eddigi eredményeinkkel való összehasonlíthatóság érdekében továbbra is feltesszük, hogy minden szerződésre egyetlen nem nulla kárnagyságot vizsgálunk, amik μ-exponenciális eloszlásúak.

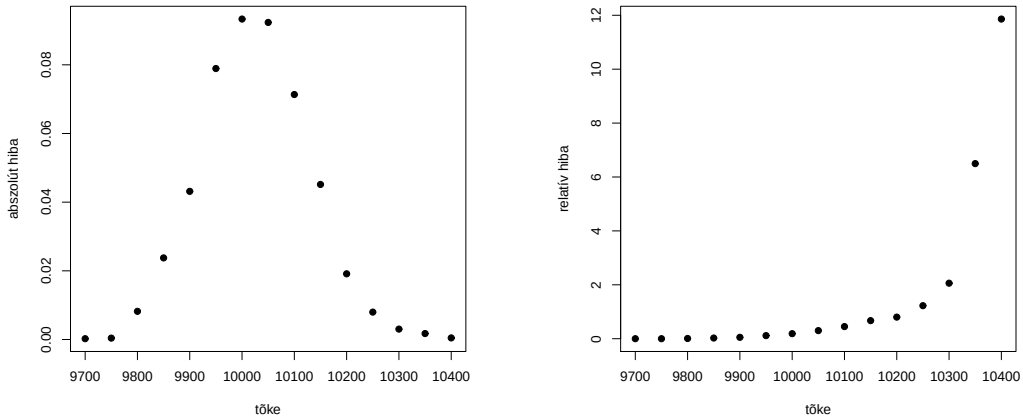
A becslés modellezésére R-ben generáltunk egy $m = 10000$ elemű, $\mu = 1$ paraméterű exponenciális kármintát, melyből $k = 2000$-szer visszatevéssel húztunk $n = 10000$ elemet. Erre a k darab mintára megnéztük, hogy hány olyan van, amely esetén az összkár nagyobb, mint a pillanatnyi tőke, azaz tönkremegy a biztosítótársaság.

A számítás rövidítése miatt csak 15 különböző pillanatnyi tőkére néztük meg a csőd valószínűségét, de ez az egyszerűsítés nem befolyásolja annak eldöntését, hogy mennyire jó becslést kapunk ezzel a módszerrel. A csőd valószínűségére az alábbi értékek jöttek ki a pillanatnyi tőke függvényében.



2.8. ábra: $\bar{p}$ (egység=1 millió)

A grafikon első ránézésre nagyon hasonlít p grafikonjára, de mint azt korábban láttuk a maximum-likelihood módszer felhasználása során, ez nem jelenti azt, hogy a két valószínűség eltérése minimális, így most is megnéztük az abszolút és relatív hiba értékeit. A két hibát a pillanatnyi tőke függvényében ábrázoltuk.

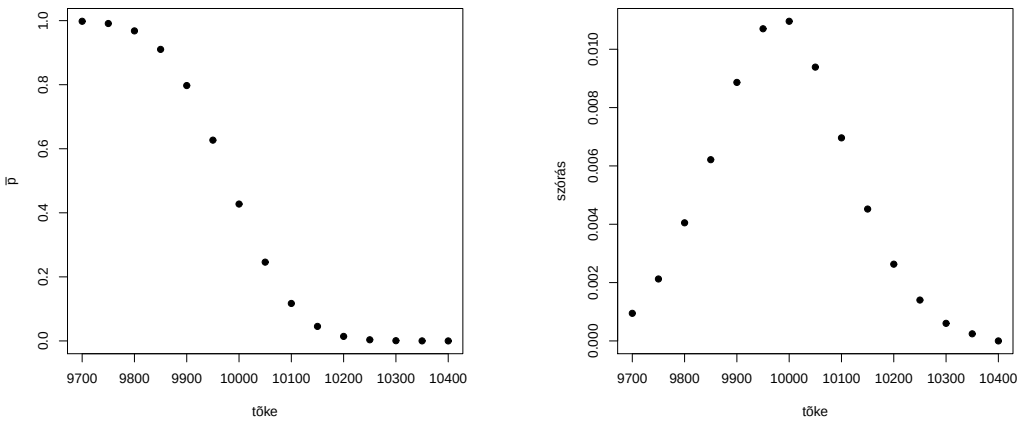


2.9. ábra:p és $\bar{p}$ abszolút és relatív hibája (egység=1 millió)

Az abszolút hiba ennél a becslésnél minden pillanatnyi tőkére nagyobb, mint a maximum-likelihood módszernél, és itt is 10 milliárd forint pillanatnyi

tőkénél veszi fel a legnagyobb értéket, de ez a maximum már 0.093 értékű. A relatív hiba 10.1 milliárd forintig nem túl nagy, és közel azonos az előző becslésnél kapott értékekkel, de 10.1 milliárd forint pillanatnyi tőke után a relatív hiba gyorsan elkezd nőni és 10.4 milliárd forintnál már eléri a 12-t. A nagy relatív hiba ebben az esetben is abból adódik, hogy nagy tőke mellett kis valószínűséggel megyünk csődbe, és kis valószínűség esetén a kis abszolút hiba is nagynak látszik.

Egy visszatevéses mintavétel alapján nem vonhatunk le messzemenő következtetéseket arra vonatkozóan, hogy mennyire pontos ez a becslés, ezért megnéztük a csődvalószínűség becslését és annak hibáját 1000 kísérlet esetén is. Mind az 1000 kísérlet után kiszámoltuk $\bar{p}$-t a (2.3.) képlet alapján, majd az így kapott csődvalószínűségek átlagát hasonlítottuk össze p-vel.

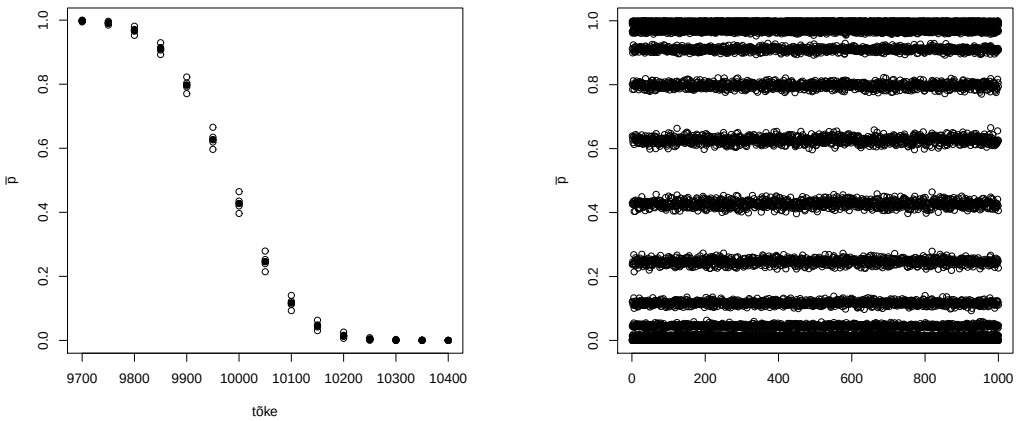


2.10. ábra: $\bar{p}$ átlaga és szórása (egység=1 millió)

Az 1000 kísérlet során kiszámolt csődvalószínűségek szórása minden pillanatnyi tőke esetén elég kicsi, de a középső tartományban (9.9 és 10.2 milliárd forint között) kicsit nagyobb a szórás. A nevezetes (0, 0.25, 0.5, 0.75, 1) kvantiliseket $\bar{p}$ átlagához képest megvizsgálva látjuk, hogy 9.8 és 10.2 milliárd forint között már szemmel láthatóan is jelentős a különbség az egyes pillanatnyi tőkékre kapott csődvalószínűségek között. Míg a legkisebb szórású valószínűségek 0.005 hosszú intervallumon belül vannak, addig a legnagyobb

eltérés az egy pillanatnyi tőkéhez tartozó valószínűségek minimuma és maximuma között 0.068.

Ha a kísérlet 1000-szeres ismétlése után kapott becsült valószínűségeket egy grafikonon ábrázoljuk, akkor egy sávos eloszlás figyelhető meg. Ennek a sávos csoportosulásnak az az oka, hogy nem minden pillanatnyi tőkére vizsgáltuk meg a csődvalószínűségeket. Ha ennél sűrűbben számoltuk volna ki a becslést, akkor egy sokkal homogénebb grafikont kaptunk volna. Így viszont az egyes pillanatnyi tőkékhez tartozó csődvalószínűségek élesen elhatárolódnak egymástól.

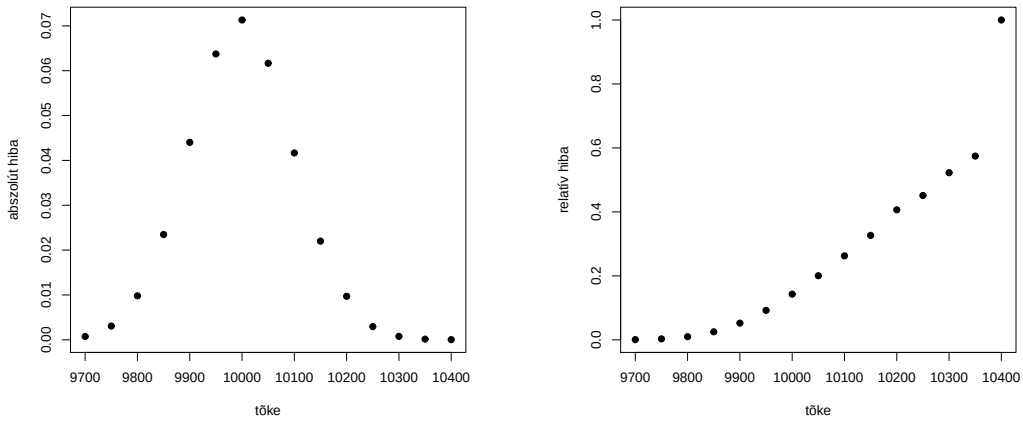


2.11. ábra: A kvantilisek és a csődvalószínűségek

A becsült csődvalószínűségek átlaga a pillanatnyi tőke függvényében körülbelül követi p grafikonját, de most is van eltérés a valós és a becsült valószínűségek között.

Az abszolút és relatív hibát az 1000 kísérlet csődvalószínűségének átlaga és p között néztük. Az abszolút eltérés grafikonja nagyon hasonlít a maximum-likelihood módszer felhasználásánál kapott abszolút eltérés grafikonjára. 9.9 és 10.1 milliárd forint pillanatnyi tőke között a legnagyobb az abszolút eltérés. Az 1000 kísérlet eredménye alapján számolt $\bar{p}$ relatív hibája p-hez képest 10.35 milliárd forintig folyamatosan nő, ahol egy nagy ugrás látható, így 10.4 milliárd forintnál a relatív hiba már 1. A relatív hiba

1000 kísérlet esetén sokkal kisebb, mint egy kísérletnél, ami feltehetően a sok kísérlet átlagértékével való számítás miatt van.



2.12. ábra: p és $\bar{p}$ átlagának abszolút és relatív hibája (egység=1 millió)

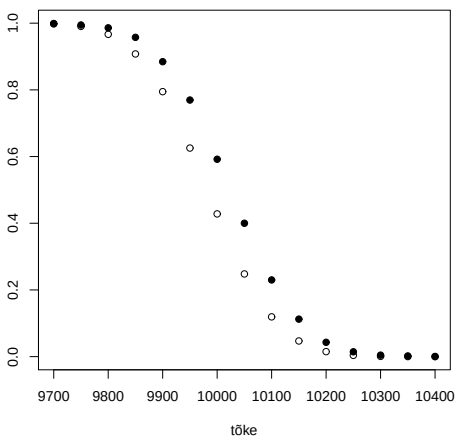
2.2.3. A becslések összehasonlítása

A két becslés során kapott eredményeket érdemes összehasonlítani, hiszen így tudjuk meg, hogy melyik módszert jobb alkalmazni a csődvalószínűség becslésére abban az esetben, ha az előző évi káradatoknak csak az eloszlás típusát ismerjük, de az eloszlás paraméterét nem.

A generált káradatok átlaga alapján számolt maximum-likelihood módszer és a visszatevéses mintavétel alapján kapott becsült valószínűségeket egy grafikonon ábrázolva látjuk, hogy a ML-becslés során kapott csődvalószínűségek a 9.8 és 10.2 milliárd forintos tartományban jóval kisebbek. Igaz, az eredeti p csődvalószínűségek minden pillanatnyi tőke esetén éppen a becsült értékek között helyezkednek el, de a maximum-likelihood becslés eredménye van közelebb hozzá. Ezt a közelséget láthatjuk az abszolút hibák grafikonjait is nézve. A visszatevéses mintavétellel kapott becslésünk minden vizsgált helyen nagyobb abszolút eltérést mutat p-hez képest, mint $\hat{p}$.

A két becslés relatív hibáját ábrázoló grafikon magáért beszél. $\hat{p}$ és $\bar{p}$ relatív hibájának különbsége 10.05 milliárd forinttól kezdve egyre nő, míg $\hat{p}$

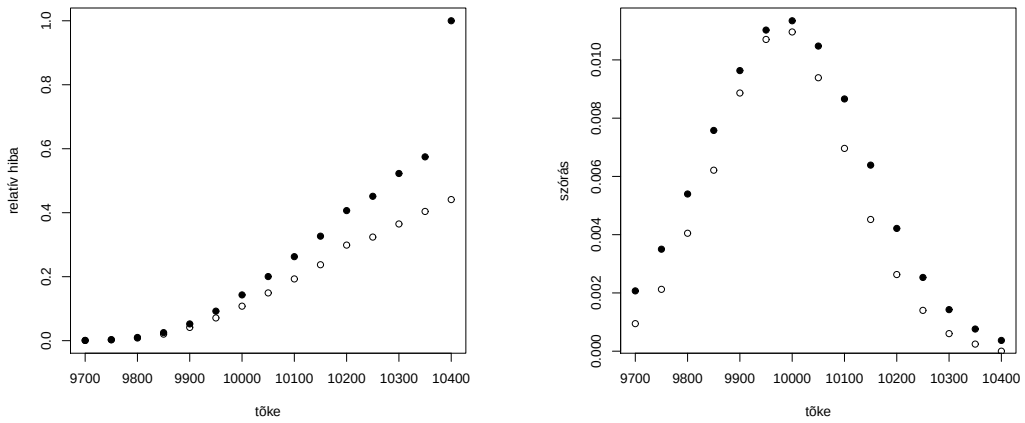
relatív hibája 11.4-del nem lesz nagyobb. A hibák összehasonlítása alapján egyértelműen azt mondhatjuk, hogy ha egyszer végezzük el mind a két becslést, akkor a maximum-likelihood módszerrel járunk jobban.



2.13. ábra: $\hat{p}$ és $\bar{p}$ összehasonlítása (egység=1 millió)

Ezután mind a két módszert több mintavétel után kapott adatokra is alkalmaztuk, majd az eredményeket átlagoltuk. A két különböző módszerrel kapott becslésünk abszolút hibája között már jelentős eltérés van. A legnagyobb eltérés közöttük 9.85 és 10.2 milliárd forint pillanatnyi tőke között van. A legnagyobb különbség az abszolút hibák között 0.0157, ami 10 milliárd forint esetén van. A két becslés relatív hibájában ennél is nagyobb eltérés látszik. A maximum-likelihood módszer felhasználásával kapott csődvalószínűség-becslésünk relatív hibája 10 milliárd forintnál nagyobb pillanatnyi tőke esetén jóval kisebb, mint a visszatevéses mintavétellel kapott csődvalószínűségé. Az eltérés 10.4 milliárd forintnál a legnagyobb, ott 0.55-tel kisebb a ML-becsléssel kapott csődvalószínűség relatív hibája. Ha ettől a kiugró értéktől eltekintünk, akkor 10.35 milliárd forintnál a legnagyobb, 0.17 az eltérés, de már 10.1 milliárdnál sem elhanyagolható a különbség.

Ha a két becslés 1000 ismétlés utáni szórását megnézzük, akkor az látszik, hogy a maximum-likelihood módszer szórása minden vizsgált helyen nagyobb, ennek ellenére ez a becslés ad kisebb hibákat.



2.14. ábra: $\hat{p}$ és $\bar{p}$ relatív hibája és szórása 1000 ismétléssel (egység=1 millió)

A hibák eltérésének ismeretében mind a két esetben azt mondhatjuk, hogy ha pontosan tudjuk a kárnagyságok eloszlását, és az előző évi adatok alapján szeretnénk megbecsülni, hogy az adott évben mekkora valószínűséggel megyünk csődbe, akkor a maximum-likelihood módszer alkalmazása esetén kapunk pontosabb becslést.

3. fejezet

Rossz modell becslése

Az előző fejezetben pontosan kiszámoltuk a csődvalószínűséget, ha a kárszám nem véletlen, és minden szerződésre pontosan egy kárunk van. Ezt a csődvalószínűséget becsültük meg két különböző módszerrel, ha tudtuk, hogy az előző évben milyen eloszlású volt a kárnagyság.

Ebben a fejezetben azt fogjuk megnézni, hogy melyik a jobb becslés abban az esetben, ha rosszul mondtuk meg az előző évi kárnagyságok eloszlását.

3.1. A csődvalószínűség kiszámolása

A csődvalószínűség pontos kiszámításához szükségünk van a tavalyi kárnagyságok eloszlására, és az eloszlás paramétereire is. Továbbra is tegyük fel, hogy N nem véletlen, és minden szerződésre pontosan egy kárunk van, azaz $N = n$, ha n darab szerződésünk van. X_i jelölje az i. szerződéshez tartozó kárt. Ha u kezdőtőke mellett minden szerződésre d díj folyik be, akkor $u+nd$ a pillanatnyi tőke.

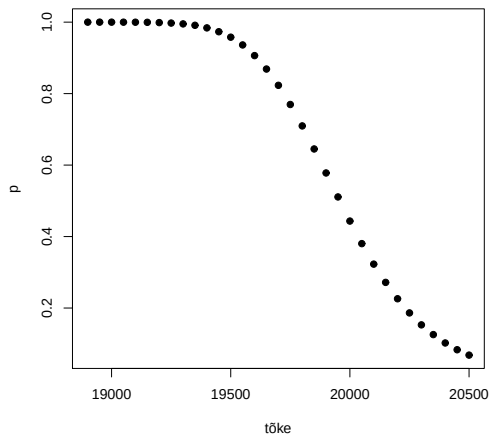
X_i-k eloszlása legyen (α, β)-Pareto eloszlás. Az összkár $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, így annak valószínűsége, hogy csődbe megyünk:

$$p = P(\sum_{i=1}^{n} > u + nd) = P(S > u + nd) \ .$$

Ha tudnánk S eloszlásfüggvényét, akkor könnyedén ki tudnánk számolni a valószínűség pontos értékét. Azonban n darab (α, β)-Pareto eloszlású valószínűségi változó összegének az eloszlását pontosan nem tudjuk meghatározni, csupán közelíteni tudjuk. Az eloszlás közelítése többféleképpen történhet. Azt a módszert választottuk, hogy több (α, β)-Pareto eloszlású valószínűségi változót generáltunk R-ben, és ezek alapján rajzoltuk fel az összeg eloszlásfüggvényét.

Tegyük fel, hogy $E(X_i) = 2$ millió, azaz a szerződésenkénti kárnagyság várhatóan 2 millió forint. Ha továbbra is az 1 milliót választjuk meg egységnek, akkor a (2,1)-Pareto eloszlás esetén éppen azt kapjuk, hogy $E(X_i) = 2$.

A csődvalószínűség pontos meghatározásához R-ben 100000 darab 10000 tagú (2,1)-Pareto eloszlású valószínűségi változót generáltunk. A 10000 tagú sorozat elemeit összeadtuk, és megnéztük, hogy ennél a 100000 összegnél mekkora valószínűséggel vagyunk egy bizonyos pillanatnyi tőke fölött. Ezeket a valószínűségeket a pillanatnyi tőke függvényében ábrázoltuk, és a későbbiekben ezeket az értékeket fogjuk a becsléseink során kapott csődvalószínűségekkel összehasonlítani, azaz ezeket a valószínűségeket tekintjük a pontos csődvalószínűségnek adott pillanatnyi tőke esetén.



3.1. ábra: (2,1)-Pareto eloszlás esetén a csődvalószínűség (egység=1 millió)

3.2. A csődvalószínűség becslései

A két becslési módszer lényege ugyanaz, mint az előző fejezetben, azaz az előző évi m darab szerződés káradatai alapján szeretnénk megbecsülni az adott évi csődvalószínűséget.

Egy biztosítótársaság életében bármikor előfordulhat, hogy rossz modellt állítanak fel az előző évi károkra, azaz például azt feltételezik, hogy μ-exponenciális eloszlású volt a kárnagyság, de valójában (α, β)-Pareto. Mivel

a becslés kiindulási alapja az előző évi adatok eloszlása, így rossz modell felállítása esetén a csődvalószínűségre a valóságtól jóval eltérő értékeket fogunk kapni. A kérdés az, hogy mennyire tér el egymástól a pontos és a becsült valószínűség.

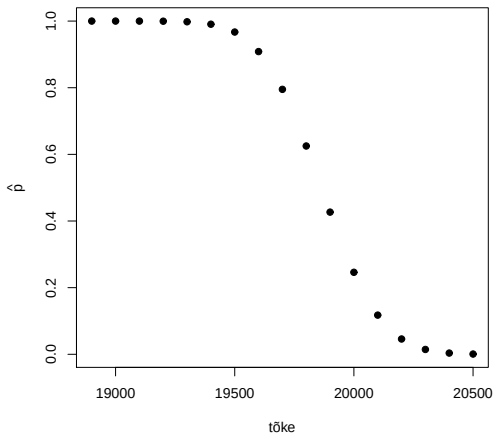
Tegyük fel, hogy az előző évben is ugyanannyi szerződésünk volt, mint most, azaz $n = m = 10000$.

3.2.1. Maximum-likelihood módszer felhasználásával

Az előző fejezetben már kiszámoltuk, hogy ha az előző évi kárnagyságok μ-exponenciális eloszlásúak és minden szerződésre pontosan egy kárunk van, akkor hogyan számolható a csődvalószínűség pontos értéke. Ebbe a képletbe helyettesítettük be μ maximum-likelihood becslését, így megkaptuk p egy becslését, amit $\hat{p}$-pal jelöltünk.

$$\hat{p} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(u+nd)^i}{\bar{X}^i i!} e^{-\frac{u+nd}{\bar{X}}} \tag{2.2.}$$

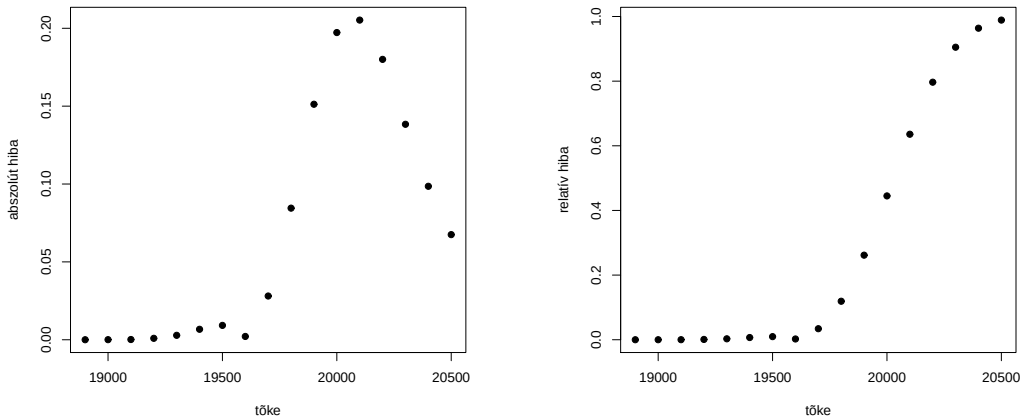
A mostani becslésnél 10000 darab (2,1)-Pareto eloszlású kárnagyságunk van, de azt hisszük, hogy 10000 darab 2 várható értékű exponenciális eloszlású kárnagyságunk van, ezért a fenti képletet használjuk. Ehhez szükségünk van $\bar{X}$ pontos értékére.



3.2. ábra: $\hat{p}$ (egység=1 millió)

Ennek meghatározására R-ben generáltunk 10000 darab (2,1)-Pareto eloszlású kárnagyságot. A mi generálásunknál $\bar{X} = 1.986394$. Ezt behelyettesítve a (2.2.) becslésbe, a pillanatnyi tőke függvényében a fenti csődvalószínűségeket kapjuk.

A kapott valószínűségek abszolút és relatív hibájának ismeretében tudjuk eldönteni, hogy a becslésünk mennyire jó akkor, ha az előző évi károk nagyságára exponenciális eloszlást feltételeztünk, pedig valójában Pareto volt.



3.3. ábra: p és $\hat{p}$ abszolút és relatív hibája (egység=1 millió)

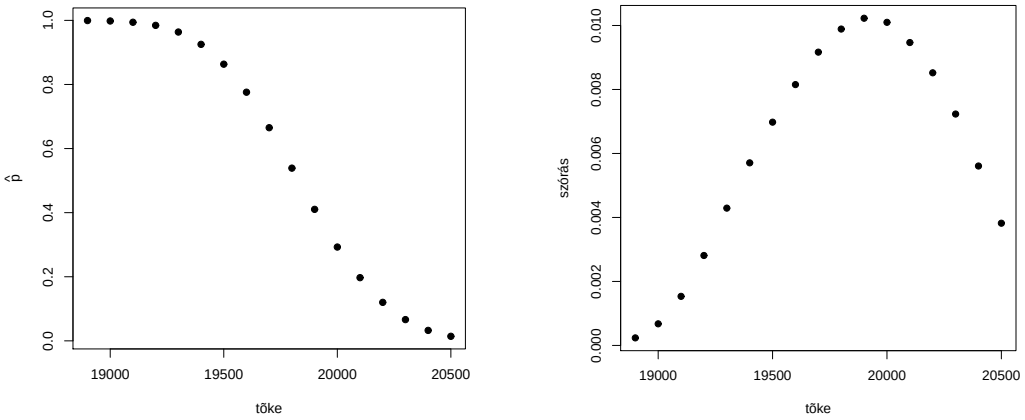
Mindkét grafikonon az látszik, hogy 19.6 milliárd forintig a becsléseink és az eredeti valószínűségek nagyon kevéssé térnek el, de utána hirtelen emelkedni kezd mind az abszolút-, mind a relatív hiba. Az abszolút hiba 20.1 milliárd forint pillanatnyi tőkéig nő, majd visszaesik. A relatív hiba 19.6 milliárd forint pillanatnyi tőke után folyamatosan nő, így 20.5 milliárd forintnál veszi fel a legnagyobb értéket.

A grafikonok alapján tehát azt mondhatjuk, hogy nagyjából 19.6 milliárd forint pillanatnyi tőkéig jó ez a becslés, utána elég nagy eltérés van a becsült és a valódi csődvalószínűségek között.

A becslést rossz modell esetén is többször megismételtük. Az eredetileg generált 10000 elemű, 2 várható értékű, Pareto-eloszlású káradatokból visszatevéssel húztunk 1000 különböző 10000 elemű mintát. Minden egyes minta átlagával kiszámoltuk a (2.2.) képlet alapján a csődvalószínűséget, és az így

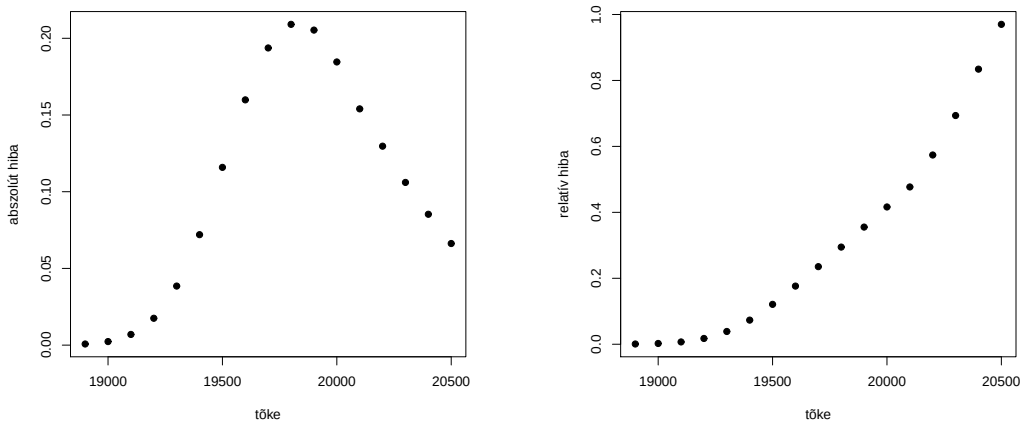
kapott valószínűségek átlagát véve egy újabb becslést kaptunk a tönkremenés valószínűségére, amit a pillanatnyi tőke függvényében ábrázoltunk.

Az 1000 különböző minta alapján kapott valószínűségek szórása 19 milliárd forint pillanatnyi tőkétől kezdve folyamatosan nő, majd 19.9 milliárd forintnál veszi fel a legnagyobb, 0.01 értéket, ahonnan csökkeni kezd.



3.4. ábra: $\hat{p}$ átlaga és szórása (egység=1 millió)

Bár 20 milliárd forintig az egymintás becslés abszolút hibája jóval kisebb, mint az 1000 kísérletnél, de ez nagyobb pillanatnyi tőkék esetén megfordul.



3.5. ábra: $\hat{p}$ átlagának abszolút és relatív hibája (egység=1 millió)

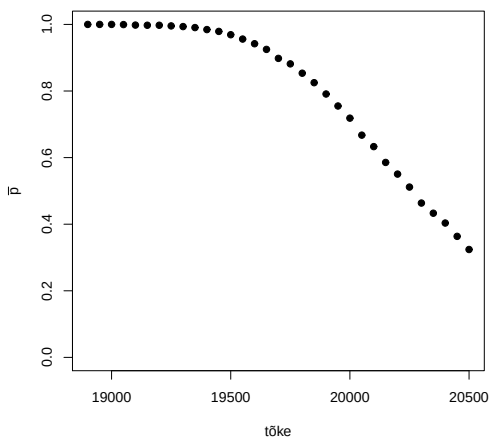
A mostani becslés relatív hibája 20 milliárd forint pillanatnyi tőkéig kisebb, mint az egymintás esetben, de aztán fordul a helyzet és végül 20.44 milliárd forint esetében mind a két becslés hibája eléri az 1-et.

3.2.2. Visszatevéses mintavétellel adott becslés

A második becslés esetén az előző évi m szerződéshez tartozó kárkifizetésekből k-szor n darabot húzunk visszatevéssel, majd megszámoljuk, hogy ebből a k darab mintából hánynak az összkára volt nagyobb a pillanatnyi tőkénél. Ekkor a csődvalószínűség:

$$\bar{p} = \frac{\#\{i : Y_{i,1}^* + ... + Y_{i,n}^* > u + nd\}}{k} .$$

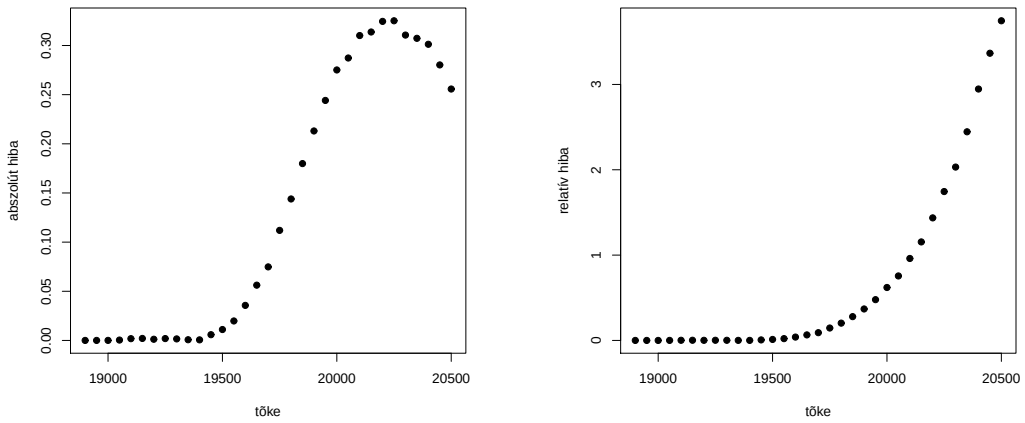
A becslés modellezésére R-ben generáltunk egy $m = 10000$ darab (2,1)-Pareto eloszlású valószínűségi változót, amelyekből először $k = 2000$-szer húztunk $n = 10000$ elemet visszatevéssel. Az így kapott $\bar{p}$ csődvalószínűséget a pillanatnyi tőke függvényében ábrázoltuk.



3.6. ábra: $\bar{p}$ (egység=1 millió)

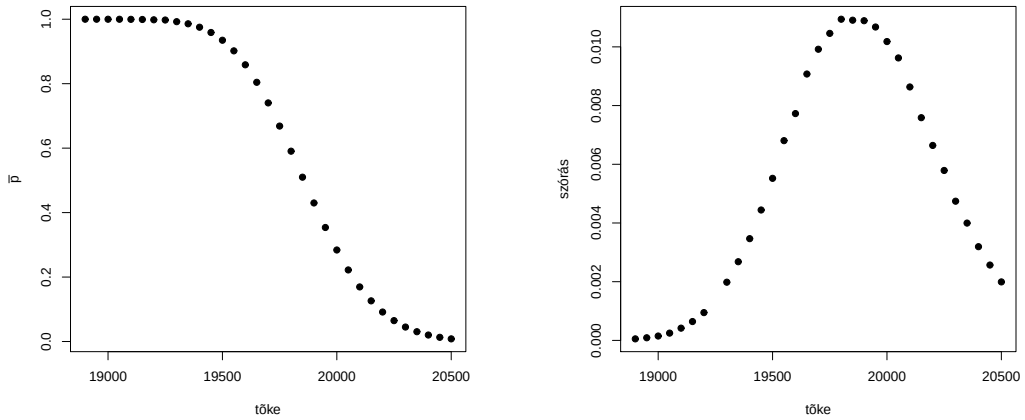
Már a grafikonról látszik, hogy nagyobbak lesznek a hibák, mint korábban, hiszen a grafikon nem azt az ívet követi, mint p grafikonja. 20.5 milliárd forint esetében már közel 0.3 az eltérés a két valószínűség között.

Hogy pontosabban össze tudjuk hasonlítani $\bar{p}$-t p értékeivel, megnézzük az abszolút és relatív hibát a pillanatnyi tőke függvényében.



3.7. ábra: p és $\bar{p}$ abszolút és relatív hibája (egység=1 millió)

Az abszolút hiba 19.5 milliárd forintig elég kicsi, majd hirtelen emelkedni kezd, és 20.3 milliárd forint után csökken. Ezzel függ össze a relatív hiba alakulása is, ami szintén 19.5 milliárd forint után kezd rohamosan nőni. 20.5 milliárd forintnál már majdnem 4-et vesz föl, ami igen nagy eltérést jelent, ami adódhat abból is, hogy csak egy kísérletet végeztünk.



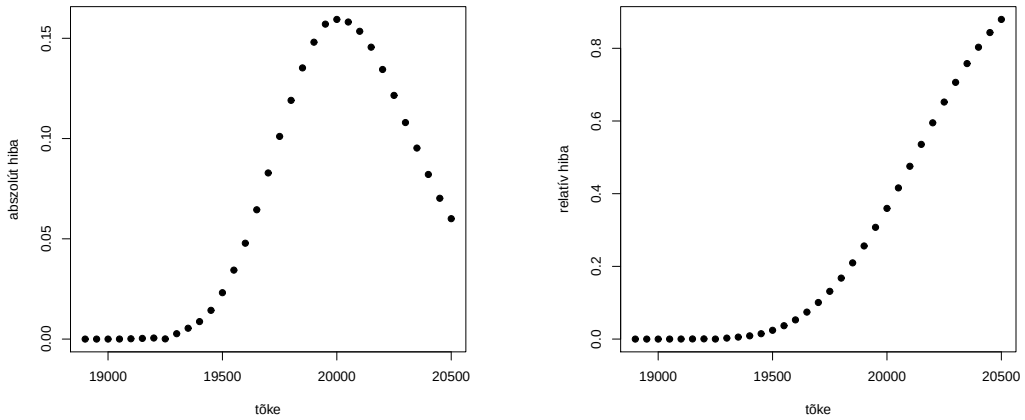
3.8. ábra: $\bar{p}$ átlaga és szórása (egység=1 millió)

Ezt a becslést is 1000-szer ismételtük meg, azaz 1000-szer húztunk $k \cdot n$ elemű mintát. A kapott csődvalószínűségeket átlagoltuk, és ezt vetettük össze

a korábban már Pareto-eloszlásra kiszámolt csődvalószínűségekkel.

A csődvalószínűségek szórása elég kicsi, annak ellenére, hogy 19.8 milliárd forintig folyamatosan nő és csak utána kezd el csökkenni.

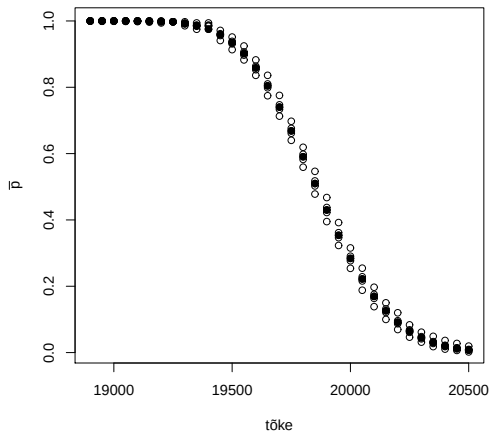
Ha 1000-szer ismételjük meg a k-szor n elemű mintavételt, akkor $\bar{p}$ átlagának abszolút hibája sokkal kisebb - körülbelül a fele -, mint az egyszeres mintavétel esetén. Most már 19.3 milliárd forint után kezd el folyamatosan nőni az abszolút hiba értéke, de 20 milliárd forintnál, 0.15 értéknél megáll, majd csökkenni kezd. A relatív hiba is kisebb 1000 kísérlet eredményének átlagolása esetén. 19.7 milliárd forint pillanatnyi tőkéig elég kicsi a hiba, utána kezd el emelkedni, és a 0.85 maximum értéket 20.5 milliárd forintnál veszi fel.



3.9. ábra: p és $\bar{p}$ átlagának abszolút és relatív hibája (egység=1 millió)

A nevezetes kvantiliseket ábrázolva $\bar{p}$ átlagához képest, azt látjuk, hogy 19.5 milliárd forinttól kezdve egyre jobban nő az adott pillanatnyi tőkéhez tartozó csődvalószínűségek minimumának és maximumának a különbsége. 19.6 és 20.1 milliárd forint között ez a különbség szinte állandó.

Az abszolút és relatív hibák értékei alapján az látszik, hogy nem szabad egy kísérlet után messzemenő következtetéseket levonni, hiszen a kapott értékek nagyban függnek a mintavételek véletlenségétől.



3.10. ábra: A kvantilisek (egység=1 millió)

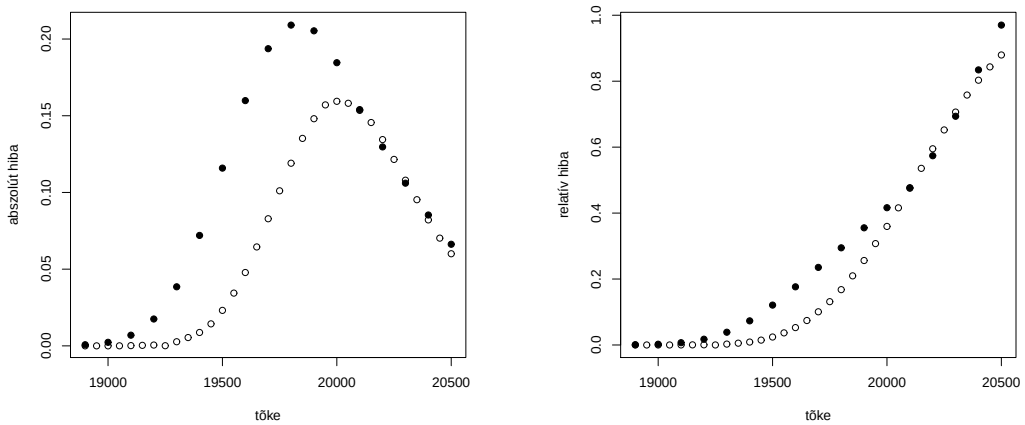
3.2.3. A becslések összehasonlítása

Ebben a fejezetben szereplő két becslés összehasonlítása elsősorban azért érdekes, mert az előző évi kárnagyságokra rossz modellt állítottunk fel, és ez alapján becsültük meg a csődvalószínűséget maximum-likelihood módszerrel. Az látszik, hogy a mostani két becslés abszolút és relatív hibája is nagyobb, ami nem meglepő, mivel nagyobb várható értékű és szórású károkat tételeztünk fel. A fő kérdés most is az, hogy egymáshoz képest milyen ez a két becslés.

Ha egyszer végeztük el a k-szoros mintavételt, akkor a kiszámolt csődvalószínűségek alapján $\bar{p}$ abszolút és relatív hibája is nagyobb, mint $\hat{p}$-é, méghozzá az eltérés igen nagy. $\bar{p}$ relatív hibája közel a háromszorosa $\hat{p}$-ének, de az abszolút hibák között nincsen akkora különbség. A két becslés eredménye közötti eltérés feltehetően abból adódik, hogy a visszatevéses mintavétel során olyan kárnagyságokat „húztunk ki”, amiknek az átlaga jelentősen eltér a ML-becslésnél használt $\bar{X}$ értéktől. Pusztán ezen eredmények alapján a rossz modell esetében is a maximum-likelihood módszeres becslést választanánk.

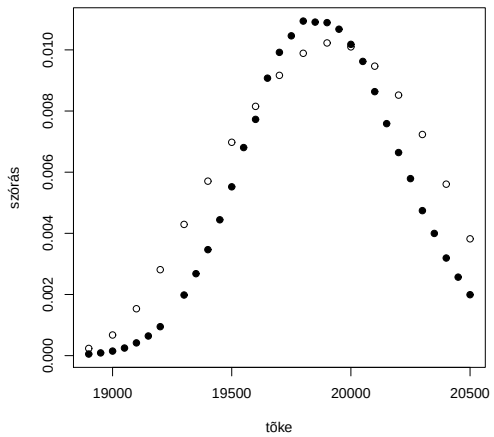
Ha mind a két becslést többször megismételtük, és az eredmények átlagolása után kapott csődvalószínűséget hasonlítottuk össze p-vel, akkor a két

becslés abszolút hibája 20 milliárd forint felett majdnem megegyezik. Addig a visszatevéses mintavétellel való becslés ad kisebb eltérést az eredeti csődvalószínűséghez képest. A két becslés relatív hibája közötti különbségről is majdnem ugyanezt lehet elmondani, bár itt már nem akkora az eltérés.



3.11. ábra: $\hat{p}$ és $\bar{p}$ abszolút és relatív hibája (egység=1 millió)

19.6 és 20 milliárd forint között nagyobb valamivel a szórása a visszatevéses mintavételnek, egyébként minden más pillanatnyi tőkére a maximumlikelihood becslés szórása a nagyobb.



3.12. ábra: $\hat{p}$ és $\bar{p}$ (egység=1 millió)

Az, hogy a két becslés egyszeri elvégzése esetén a ML-becslés a jobb, míg többszöri megismétlésük esetén a visszatevéses mintavétel, azt mutatja, hogy a mintavételezés véletlensége nem elhanyagolható, és egyszeri becslés esetén kaphatunk a várt csődvalószínűségektől nagyon eltérő eredményt is.

Az összehasonlítás alapján azt mondhatjuk, hogy ha rosszul becsüljük meg az előző évi kárnagyságok eloszlását, és exponenciális eloszlással számolunk Pareto-eloszlás helyett, akkor a becslések többszöri megismétlése után megbízhatóbb becslést kapunk a visszatevéses mintavétellel.

4. fejezet

Klasszikus rizikófolyamat

A második fejezetben a korábbi évi adataink alapján becsültük meg annak valószínűségét, hogy az adott évben csődbe megy-e a biztosítótársaság. Ebben a fejezetben azt fogjuk megnézni, hogy a klasszikus rizikófolyamat esetén mennyire jó a két becslésünk a csődvalószínűség meghatározására.

Jelölje X_i az i. kár nagyságát, melyek egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és közös várható értékük μ. Ha $F(x)$ jelöli az X_i valószínűségi változók közös eloszlásfüggvényét, és a kárszám λ-Poisson eloszlású, akkor klasszikus rizikófolyamat esetén $\Phi(u)$ kielégíti a következő integrálegyenletet:

$$\Phi(u) = 1 - \tfrac{\lambda\mu}{c} + \tfrac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-x)(1-F(x))dx \ .$$

Vizsgáljuk meg a klasszikus rizikófolyamatnak azt a speciális esetét, amikor X_i valószínűségi változók eloszlása exponenciális. Ekkor a csőd valószínűsége expliciten megkapható.

Ha a paraméterünk $\frac{1}{\mu}$, akkor $E(X_i) = \mu$. Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye $\frac{1}{\mu}$ paraméter esetén

$$F(x) = 1 - e^{\frac{-x}{\mu}} \ .$$

Behelyettesítve $1 - F(x)$ helyére $e^{\frac{-x}{\mu}}$-t, a következőt kapjuk:

$$\Phi(u) = 1 - \tfrac{\lambda\mu}{c} + \tfrac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-x)e^{\frac{-x}{\mu}}dx \ .$$

Deriválva

$$\Phi'(u) = \tfrac{\lambda}{c}\Phi(u) - \tfrac{\lambda}{\mu c}\int_0^u \Phi(x)e^{-\frac{u-x}{\mu}}dx \ .$$

Újra deriválva

$$\Phi''(u) = \tfrac{\lambda}{c}\Phi'(u) - \tfrac{\lambda}{\mu c}\Phi(u) + \tfrac{1}{\mu}(\tfrac{\lambda}{c}\Phi(u) - \Phi'(u)) = (\tfrac{\lambda}{c} - \tfrac{1}{\mu})\Phi'(u) \ .$$

Kihasználva, hogy $\Phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$ és $\Phi(\infty) = 1$ adódik, hogy a megoldás

$$\Phi(u) = 1 - \tfrac{\lambda\mu}{c} e^{-\frac{c-\lambda\mu}{\mu c}u} ,$$

$$\Psi(u) = \tfrac{\lambda\mu}{c} e^{-\frac{c-\lambda\mu}{\mu c}u} . \tag{4.1.}$$

Ha X_i-k eloszlása exponenciális, a Cramer-Lundberg-approximáció pontosan ugyanezt az eredményt adja.

$F(x)$ helyére behelyettesítve $1 - e^{\frac{x}{\mu}}$-t, $h(r)$-re a következő eredményt kapjuk:

$$h(r) = \tfrac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{rx} e^{\frac{x}{\mu}} dx - 1 = \frac{\mu r}{1 - \mu r} .$$

Mivel R jelöli az egyenlet pozitív megoldását, ezért

$$R = -\tfrac{\lambda}{c} + \tfrac{1}{\mu} .$$

Ezt behelyettesítve $\Psi(u)$ határértékébe azt kapjuk, hogy

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} .$$

Mind a $\Psi(u)$-ra vonatkozó integrálegyenlet, mind a Cramer-Lundberg-approximáció azt mondja meg, hogy adott kezdőtőke mellette mekkora valószínűséggel megyünk csődbe végtelen időintervallumon.

4.1. A csődvalószínűség

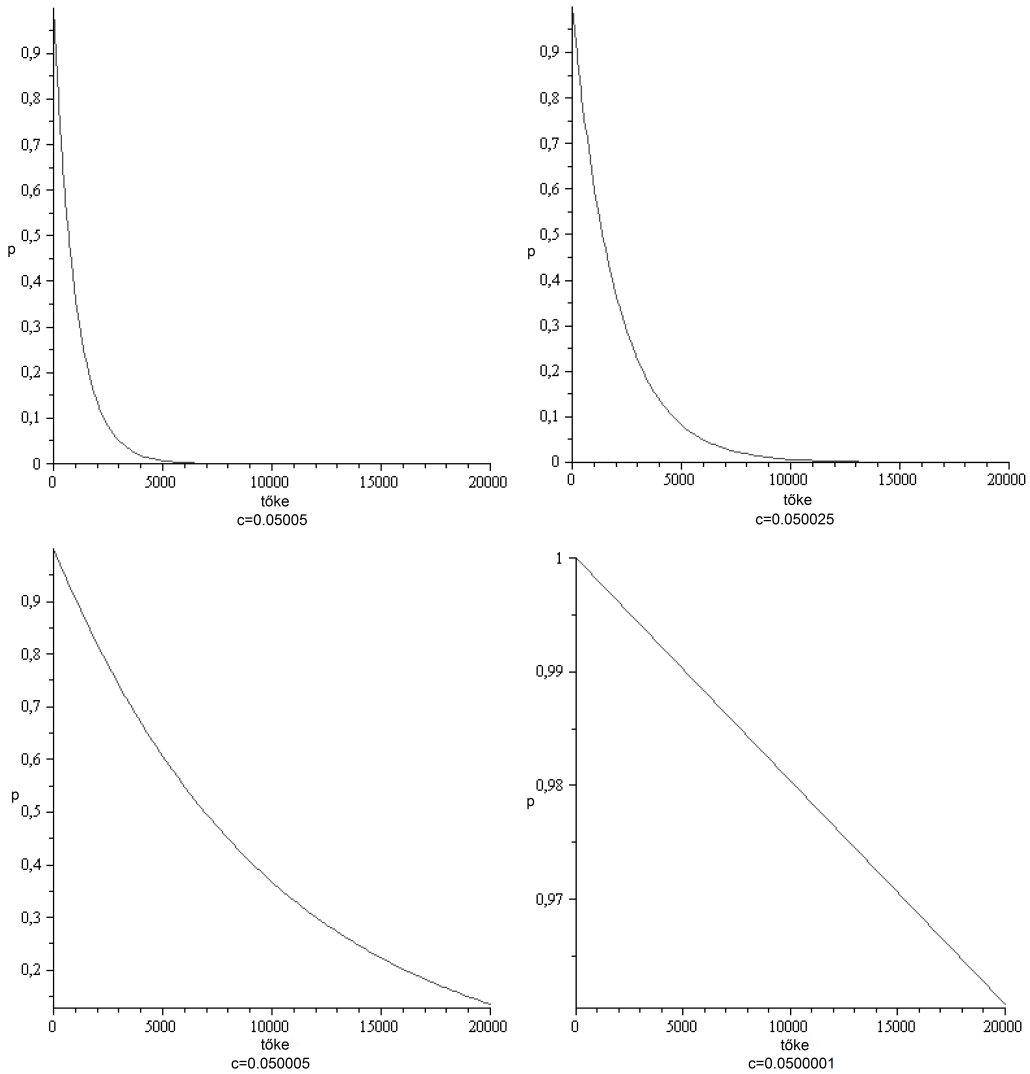
Klasszikus rizikófolyamat esetén a csődvalószínűség pontos kiszámításához szükségünk van μ, λ és c paraméterek értékére is. Azonban e három paraméterre igaznak kell lennie a $c > \lambda\mu$ összefüggésnek, ellenkező esetben a csődvalószínűséget nem tudjuk a (4.1.) képlet alapján kiszámolni.

Tegyük fel, hogy 5%-os gyakorisággal 1 milliós károk következnek be az egyes szerződéseknél és az egységet válasszuk 1 milliónak. Ez azt jelenti, hogy $\mu = 1$ és $\lambda = 0.05$. Megvizsgáltuk különböző c-k esetén, hogy miként alakul a csődvalószínűség.

A grafikonok alapján tökéletesen látszik az a természetes tapasztalat, hogy minél kevesebb bevétele van a biztosítótársaságnak adott időintervallum

alatt, annál nagyobb valószínűséggel fog a társaság rövid időn belül csődbe menni.

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha 10000 szerződéssel számolunk, hiszen akkor mind a kárgyakoriság, mind a díj 10000-rel szorzódik, ami a (4.1.) képlet eredményében nem okoz változást.



4.1. ábra: $\Psi(u)$ különböző c értékek esetén (egység=1 millió)

4.2. A csődvalószínűség becslései

4.2.1. Maximum-likelihood módszer felhasználásával

A módszer most is ugyanaz, mint az előző két fejezetben, azaz az előző évi adatok alapján becsüljük meg az exponenciális- és a Poisson-eloszlás paramétereit, és ezután vizsgáljuk meg, hogy milyen eltérés mutatkozik a valós csődvalószínűséghez képest.

Jelölje X_i az i. kárt, k_j a j. szerződéshez tartozó kárszámot. n szerződés esetén a károk száma:

$$N = \sum_{j=1}^{n} k_j \ ,$$

ami $n\lambda$-Poisson eloszlású. Az összkár pedig:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \ .$$

Ekkor S eloszlása úgynevezetett összetett-Poisson eloszlás.

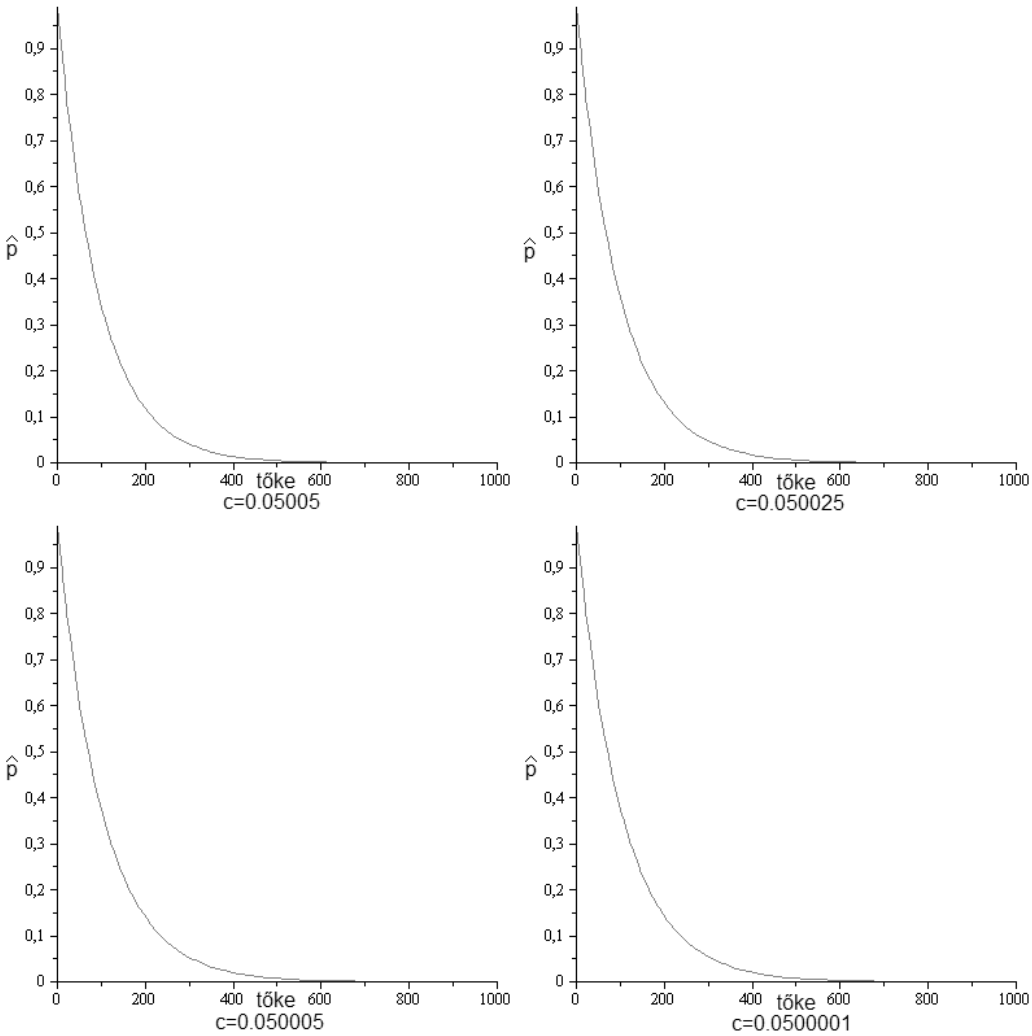
Ha μ maximum-likelihood becslése $\hat{\mu}$, akkor $\hat{\mu} = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{N}{S}$, amint azt már korábban kiszámoltuk. Szükségünk van λ maximum-likelihood becslésére is, amit jól ismerünk és a képletéből adódik, hogy ebben az esetben $\hat{\lambda} = \frac{N}{n}$. A két ML-becslést behelyettesítve a (4.1.) explicit képletbe a következőt kapjuk:

$$\hat{\Psi}(u) = \frac{N^2}{nSc} e^{-\frac{nSc-N^2}{Nnc}u} \ .$$

Ahhoz, hogy össze tudjuk hasonlítani ezt a becslést a valós csődvalószínűséggel, N és S értékét pontosan tudnunk kellene. Ezért R-ben generáltunk 10000 darab λ-Poisson eloszlású számot, ahol $\lambda = 0.05$ és minden nem nulla számhoz generáltunk egy μ-exponenciális eloszlású számot, ahol $\mu = 1$. A Poisson-eloszlású számok összege adja meg a károk számát, azaz N értékét, ami a generálásunk során 492 volt. Az exponenciális- és Poisson-eloszlású számok szorzata pedig megadja S értékét. A generálásunknál az összkár 488.8886 volt.

A generálás során arra kell figyelni, hogy $\hat{\lambda}$ és $\hat{\mu}$ szorzata kisebb legyen, mint c, mert ha nem, akkor a csődvalószínűség becslésére használt képlet nem működik, ugyanazon okokból kifolyólag, mint a (4.1.) képletnél.

A most kapott eredményekre is igaz, hogy ha 10000 szerződéssel számolnánk, akkor is ugyanezeket a grafikonokat kapnánk.

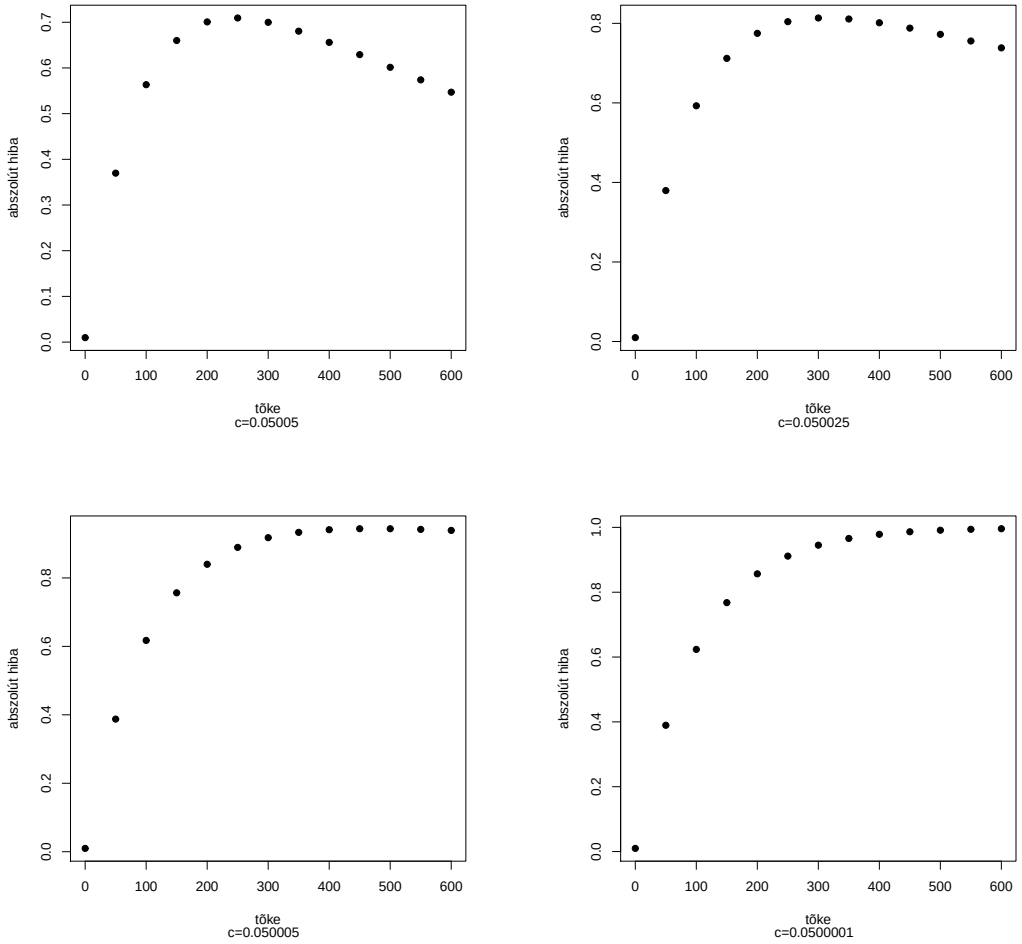


4.2. ábra: $\hat{\Psi}(u)$ (egység=1 millió)

$\hat{\Psi}(u)$ abszolút hibája mind a négy c érték esetén hasonlóan alakul. A hiba 0-ból indulva folyamatosan nő, majd $c = 0.05005$ és $c = 0.050025$ esetben 0.25 milliárd kezdeti tőke után csökkenni kezd. A másik két esetben egy bizonyos kezdeti tőke után az abszolút hiba szinte konstans 1.

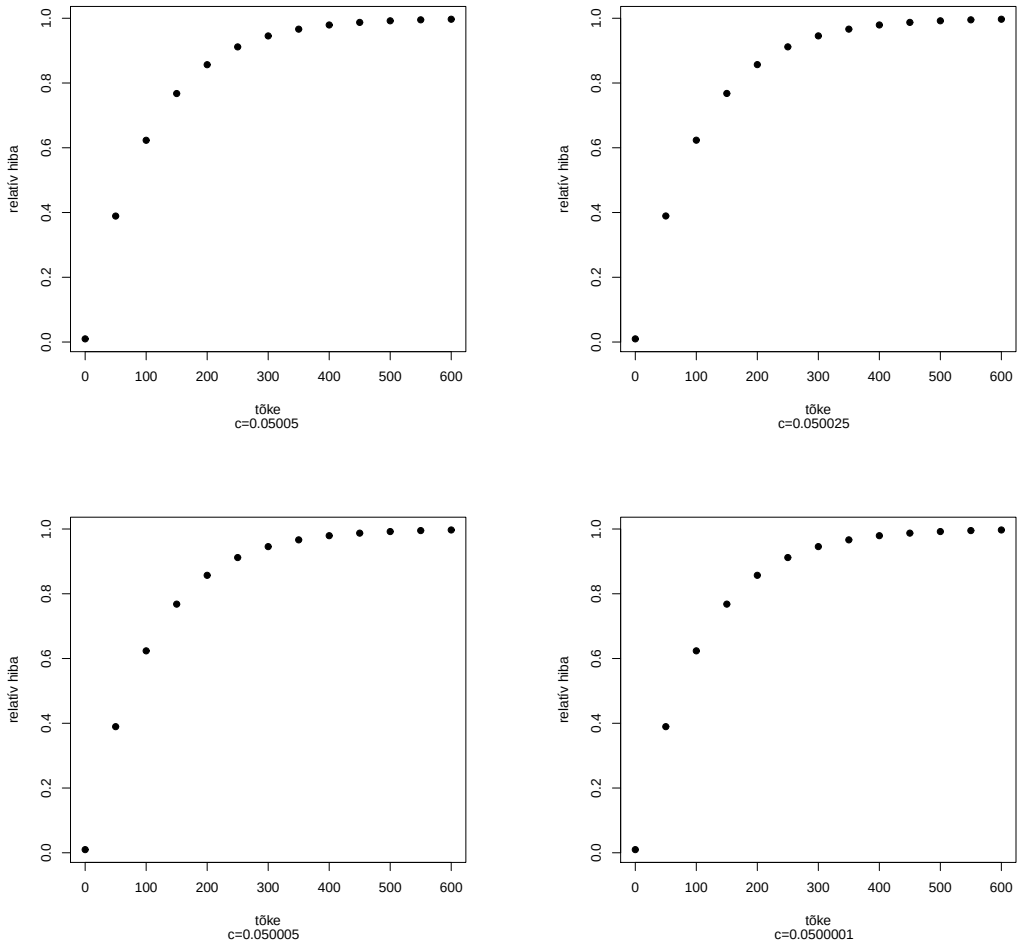
$\hat{\Psi}(u)$ relatív hibája $\Psi(u)$-hoz képest a vizsgált kezdeti tőkék függvényében folyamatosan nő, és 0.2 milliárd forintnál nagyobb pillanatnyi tőkéknél

a hiba már 0.9 fölött van, ami elég nagy eltérést mutat a valós és a becsült csődvalószínűségek között.



4.3. ábra: $\Psi(u)$ és $\hat{\Psi}(u)$ abszolút hibája (egység=1 millió)

A kapott abszolút és relatív hibák alapján kijelenthetjük, hogy a maximum-likelihood módszer ebben az esetben $\Psi(u)$-tól jelentősen különböző csődvalószínűségeket adott.



4.4. ábra: $\Psi(u)$ és $\hat{\Psi}(u)$ relatív hibája (egység=1 millió)

Annak a vizsgálatához, hogy a becslésünk torzítatlan-e, szükségünk van $\hat{\Psi}(u)$ várható értékére. Mivel N és S egymástól nem független, ezért N-re feltételes várható értéket veszünk, és így próbáljuk meg kiszámolni $E(\hat{\Psi}(u))$-t.

$$E(\hat{\Psi}(u)) = E(\tfrac{N^2}{nSc}e^{-(\frac{S}{N}-\frac{N}{nc})u}) = \sum_{k=0}^{\infty} E(\frac{N^2}{nSc}e^{-(\frac{S}{N}-\frac{N}{nc})u} \mid N=k)P(N=k) =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{nc}e^{\frac{ku}{cn}}E(\frac{1}{S_k}e^{-\frac{S_k u}{N}})P(N=k) \ ,$$

ahol $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ és $P(N=k) = \frac{(\lambda n)^k}{k!}e^{-\lambda n}$.

Most már csak az S_k-tól függő várható értéket kell meghatározni. A várható értéket integrál formában írhatjuk fel, mert S_k nem véletlen tagszámú összeg. S_k k darab μ-exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege, ezért $\Gamma(k, \mu)$ eloszlású, aminek a sűrűségfüggvénye

$$f(t) = \tfrac{\mu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\mu t} \ .$$

Ezt behelyettesítve a várható érték integrál formájába a következőt kapjuk:

$$E(\tfrac{1}{S_k} e^{-\frac{S_k u}{n}}) = \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-\frac{tu}{N}} \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{\mu t} dt =$$

$$\frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \cdot \frac{\Gamma(k-1)}{(\frac{u}{N}+\mu)^{k-1}} \int_0^\infty t^{(k-1)-1} \frac{(\frac{u}{N}+\mu)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} e^{-(\frac{u}{N}+\mu)t} dt = \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \cdot \frac{\Gamma(k-1)}{(\frac{u}{N}+\mu)^{k-1}} \ ,$$

mert az utolsó integrál mögött a $\Gamma(k-1, \frac{u}{N}+\mu)$ eloszlás sűrűségfüggvénye van, aminek a 0-tól végtelenig vett integrálja 1. Ezt az eredményt visszaírva a feltételes várható értékünkbe, a következőt kapjuk:

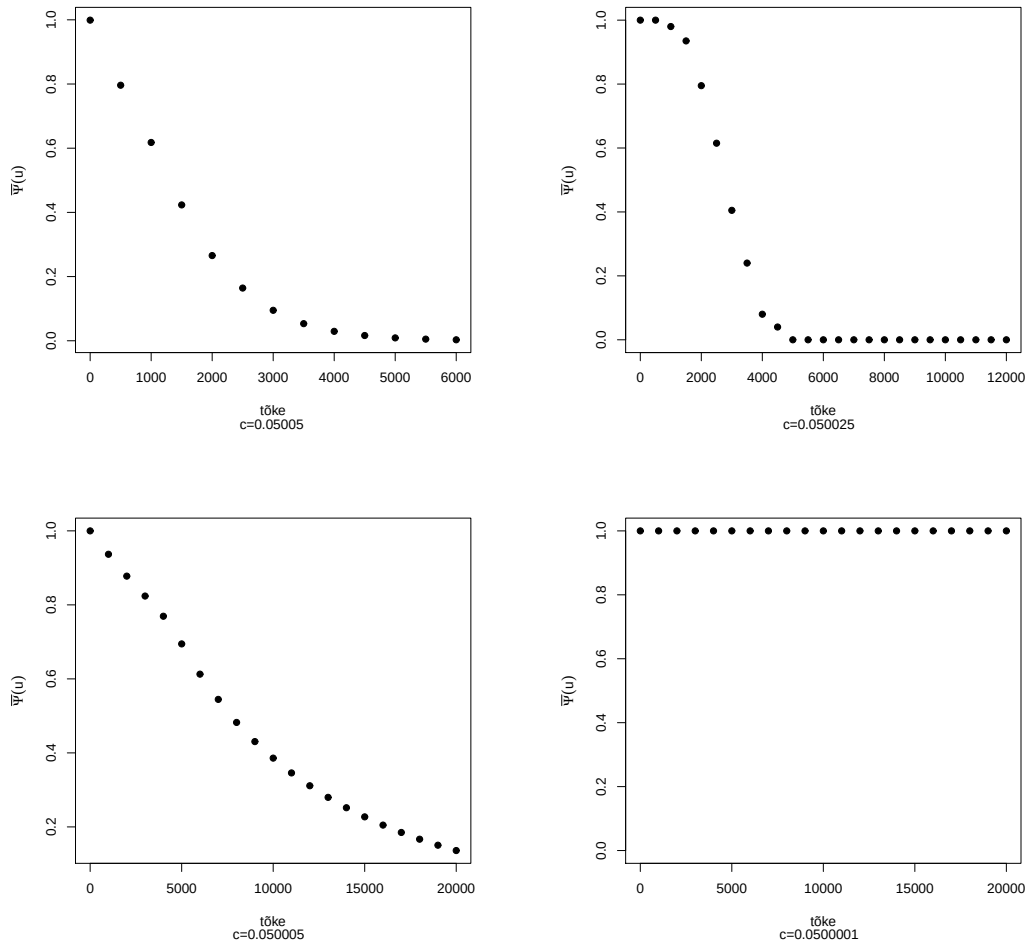
$$E(\hat{\Psi}(u)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{cn(k-1)} \cdot \frac{(\lambda\mu n)^k}{k!} \cdot \frac{1}{(\frac{u}{N}+\mu)^{k-1}} e^{-\lambda n + \frac{ku}{cn}} \ .$$

4.2.2. Visszatevéses mintavétellel adott becslés

Az előző becslés nem túl jó eredményei után abban bízunk, hogy a visszatevéses mintavétellel adott becslés kicsit jobb eredményeket fog adni, bár sejthető, hogy ez sem lesz tökéletes.

Az eddig megszokott módon, R-ben generáltuk a mintavételhez szükséges káradatokat. A becslésnél már a kezdetekkor figyelembe kellett venni, hogy a biztosító portfóliója 10000 szerződésből áll, ezért λ értéke a 10000-szeresére változott, azaz λ'=500. λ' paraméterű Poisson-folyamatot, majd a káridőpontokhoz μ=1 várható értékű, exponenciális eloszlású károkat generáltunk. Ezeket a károkat tekintettük az előző évi károknak, így ezekből a károkból húztunk később visszatevéssel. Mivel a klasszikus rizikófolyamat végtelen időintervallumra vonatkozik, ezért 1000 évre számoltunk ki minden rizikófolyamatot. Az egyes károk között eltelt időtartamok is valószínűségi változók, amiknek az eloszlása homogén Poisson-folyamat esetén λ'-exponenciális. Minden évre annyi λ'-exponenciális eloszlású számot

generáltunk, hogy a számok összege éppen érje el az egyet, ugyanis a biztosító 1 évre szedi be a c díjat az ügyfelektől. Egy évben pontosan annyi kárral számoltunk, ahány λ'-exponenciális eloszlású számot kellett összeadni ahhoz, hogy egyet kapjunk. Ezzel a kárszámmal megegyező darabszámú kárt húztunk visszatevéssel a tavalyi károkból. Azt figyeltük, hogy ha u kezdőtőke mellett c díj folyik be minden évben, és az összkárt kifizetjük, akkor 1000 éven belül csődbe megyünk-e.

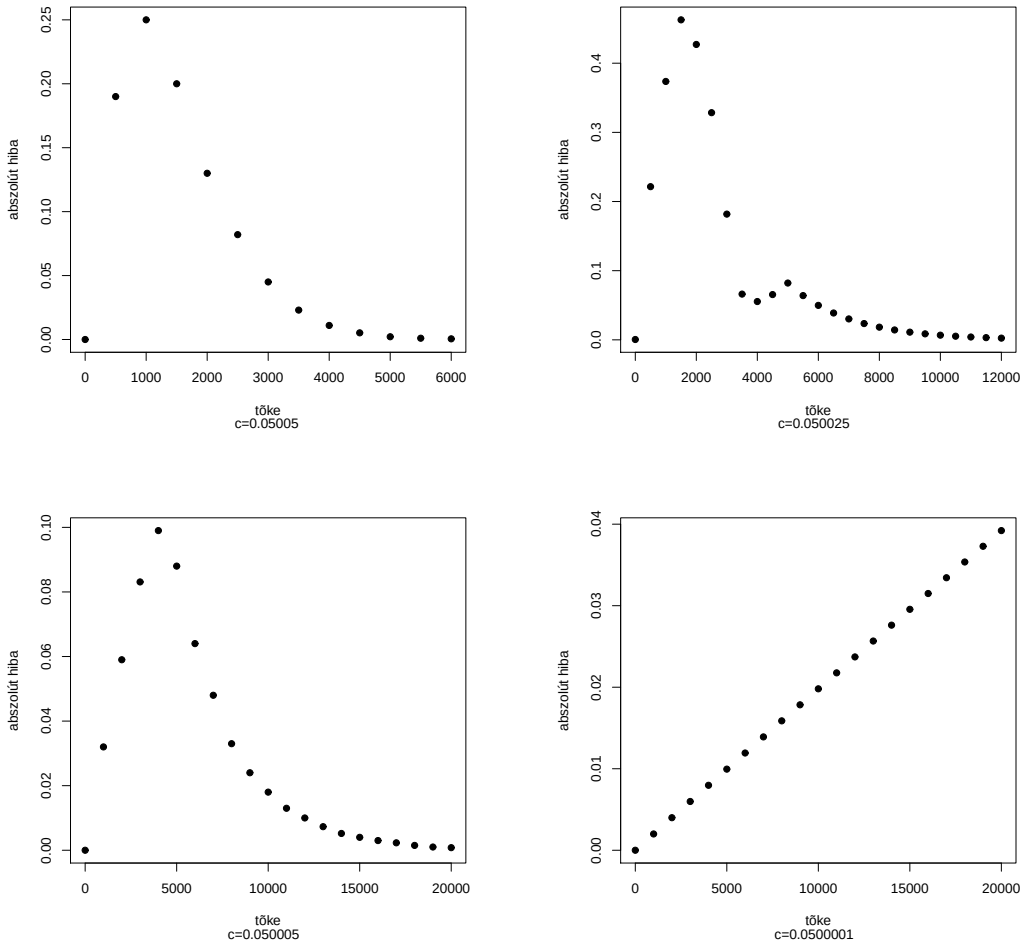


4.5. ábra: $\bar{\Psi}(u)$ (egység=1 millió)

Azonos kiinduló adatokkal 2000-szer generáltuk a kárszámfolyamatot, majd azt néztük meg, hogy ebből a 2000-ből hány esetben mentünk csődbe.

Az így kapott valószínűséget jelöltük $\bar{\Psi}(u)$-val. Ahogyan az előző fejezetben, most is négy különböző c értékre néztük meg a csődvalószínűséget.

$\bar{\Psi}(u)$ grafikonjai $c = 0.0500001$ eset kivételével nagyon hasonlítanak $\Psi(u)$ grafikonjaira azonos c értékek mellett, de hogy pontosabb képet kapjunk a becslésünkről, ismét kiszámoltuk az abszolút és relatív hibát $\bar{\Psi}(u)$ és $\Psi(u)$ között.

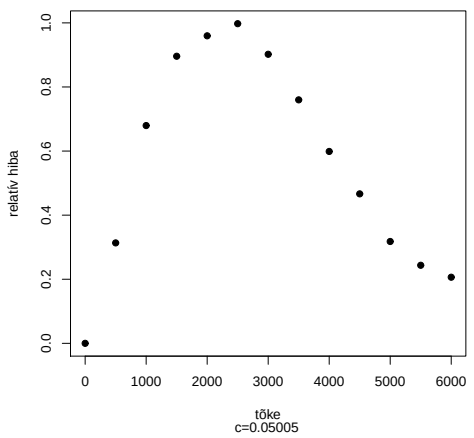


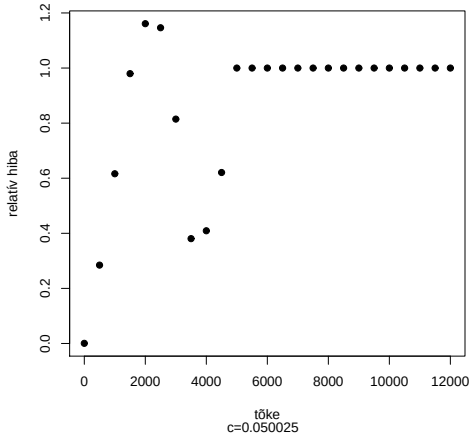
4.6. ábra: $\bar{\Psi}(u)$ abszolút hibája (egység=1 millió)

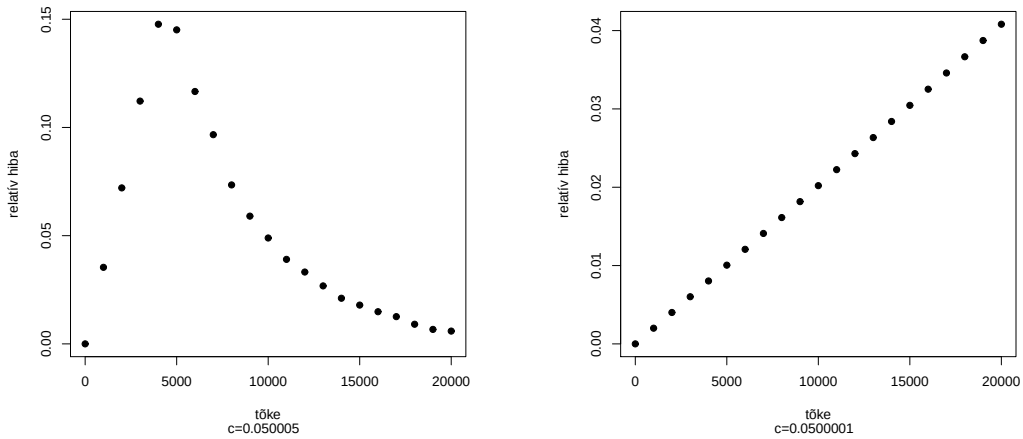
Az abszolút hibák igen eltérőek a különböző c-k esetében. $c = 0.05005$ esetén 1 milliárd forint kezdőtőkéhez tartozik a legnagyobb, 0.25 eltérés a becsült és a valós csődvalószínűség között. 2.5 milliárd forintnál az abszolút

hiba már 0.1 alatt van, ami már elég jónak mondható, innentől pedig folyamatosan csökken a hiba. $c = 0.050025$ esetén ugyan az abszolút hiba maximuma sokkal nagyobb, mint az előbb, de sokkal gyorsabban csökken le a különbség, és már 3.5 milliárdnál nagyobb kezdeti tőke esetén is 0.1 alatt van az abszolút hiba. $c = 0.050005$ díjjal $\bar{\Psi}(u)$ abszolút hibája az összes vizsgált kezdeti tőkére 0.1 alatt van, ami már bíztató a becslés jóságát illetően. 5 milliárd forint kezdeti tőke esetén éri el a 0.1-es maximumot, utána a hiba értéke folyamatosan csökken, amíg nagyobb kezdeti tőkéket vizsgálunk. $\bar{\Psi}(u)$ abszolút hibája $c = 0.0500001$ díjjal egy teljesen lineáris egyenest ad, ami 0-ból indulva 20 milliárd forint kezdeti tőkénél éri el a 0.04 értéket. Ez a linearitás abból adódik, hogy a klasszikus rizikófolyamat számításakor a vizsgált kezdeti tőkék esetére egy lineáris egyenest kaptunk, a becslésünk során pedig minden kezdeti tőkére az 1 csődvalószínűség jött ki.

A abszolút hibák különbözőségéből adódik, hogy a vizsgált négy c értékre a relatív hibák is különböző értékeket adnak. $c = 0.05005$ díj esetén 2.5 milliárd forint kezdeti tőkéig nő a relatív hiba értéke, ott eléri a maximumát, utána folyamatosan csökken az értéke. $c = 0.050025$ díjjal $\bar{\Psi}(u)$ relatív hibája elég érdekesen alakul. 2 milliárd forint kezdeti tőkéig folyamatosan nő a hiba, majd elkezd csökkenni, de csak 4 milliárd forintig, mert utána újra nőni kezd az értéke. 5 milliárd forintnál eléri az 1 értéket, és onnantól fogva konstans 1 a relatív hiba minden kezdeti tőke esetén.







4.7. ábra: $\bar{\Psi}(u)$ relatív hibája (egység=1 millió)

Nem meglepő módon $c = 0.050005$ díjra kaptuk megint a legjobb hibát. 5 milliárd forintig folyamatosan nő a relatív hiba, majd onnantól kezdve folyamatosan csökken az értéke. $c = 0.0500001$ díjra a relatív hiba is egy lineáris függvényt ad, aminek 0.04 a legnagyobb értéke.

A visszatevéses mintavétel 1000-szeres megismétlése után kapott valószínűségek átlaga vélhetően még jobb becslést adna $\Psi(u)$-ra, de ezt megfelelő számítási kapacitás hiányában nem tudtuk elvégezni.

4.2.3. A becslések összehasonlítása

Ebben a fejezetben a klasszikus rizikófolyamat egyik speciális esetére próbáltunk olyan becslést találni, amit használhatunk abban az esetben, ha az előző évi káradatokra vonatkozó eloszlások paramétereit nem ismerjük.

A maximum-likelihood módszer felhasználásával kapott csődvalószínűség abszolút és relatív hibája 0.15 milliárd forintnál nagyobb pillanatnyi tőke esetén már túl nagy, így ezzel a módszerrel nem kaptunk túl pontos becslést. A visszatevéses mintavétellel kapott becslés már pontosabb eredményt ad, de csak bizonyos c értékekre.

A becslésünk $c = 0.050005$ díjra lett a legjobb, de a többi c érték esetén sem kaptunk $\Psi(u)$-ra nagyon rossz becslést. Ugyan $c = 0.05005$ és $c = 0.050025$ esetén a relatív hiba néhány kezdeti tőkére nagyobb, mint 1, de

bizonyos tőkékre egészen jó becslést kaptunk.

Az abszolút és relatív hiba alapján, ha csak egyszer végezzük el mind a két becslést, akkor a visszatevéses mintavétellel kapunk pontosabb becslést $\Psi(u)$-ra, így rizikófolyamat becslésére ezt érdemesebb használni.

5. fejezet

Összefoglalás

Diplomamunkámban megpróbáltam a - bizonyos esetekben pontosan kiszámolható - csődvalószínűséget kétféleképpen megbecsülni és kiválasztani, hogy adott esetben melyik becslés esetén kapunk pontosabb értékeket.

Amikor azt feltételeztük, hogy az előző évben minden szerződésre egy kárunk volt, és ezek a károk μ-exponenciális eloszlásúak, akkor a maximum-likelihood módszer felhasználásával kapott becslés adott a valósághoz közelebbi értékeket.

Amikor továbbra is minden szerződésre volt kárunk a tavalyi évben, de a károk eloszlását rosszul tudtuk, és μ-exponenciálisnak hittük (α, β)-Pareto eloszlás helyett, akkor a becslések többszörös megismétlése után a visszatevéses mintavétellel kapott csődvalószínűségek álltak közelebb a valós értékekhez.

A klasszikus rizikófolyamat esetén is a visszatevéses mintavétel bizonyult jobbnak, mert mind a négy vizsgált c értékre sokkal jobb becslést adott, mint a maximum-likelihood módszer.

Summary

The topic of this thesis is the calculation and estimation of ruin probability. The probability of insolvency plays a central role in the life of an insurance company, because at any given time, the company must be able to fulfill its legal obligations.

In the calculations we focused primarily on the individual risk model, in which we examine only one non-zero loss magnitude for all the contracts of the insurance company. If the distribution of the loss magnitudes is exponential, then the ruin probability can be calculated exactly, provided we also know the parameter of the distribution. Alas, this is rarely the case, so we examined two possible methods for the estimation of ruin probability: the maximum-likelihood method, and sampling with replacement. In the former case, we estimated the distribution parameter based on last year's loss magnitudes, and estimated the ruin probability using that parameter. In the latter case, we took multiple samples with replacement from last year's loss magnitudes, each sample containing a number of elements equal to this year's quantity of contracts. The number of samples for which the total loss is higher than the momentary capital of the company, divided by the total number of samples, gives us the estimated ruin probability. Comparing the two results, we find that the maximum-likelihood method gives a more accurate estimation.

If we mistakenly presume an exponential distribution for losses that are actually Pareto-distributed, we come to different results. Using the two estimation methods described above, we find that the sampling with replacement method is more accurate, compared to the exact ruin probability.

In the case of a classical risk process, if we want to estimate this year's ruin probability based on last year's loss distribution, the sampling with replacement method gives satisfactory results.

According to these results, if we do not know the distribution and parameter of last year's loss magnitudes, then the best estimation is calculating the mean of multiple estimations' results based on the sampling with replacement method.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Dr. Arató Miklós témavezetőmnek, akinek szakmai útmutatása nélkülözhetetlen volt, az egész éves rendszeres konzultációk révén nagyon sok segítséget nyújtott diplomamunkám megírásához.

Köszönettel tartozom még Hári Gergelynek, aki mindig segítségemre volt, ha szoftveres problémákkal küzdöttem.

Irodalomjegyzék

[1] Michaletzky György: *Kockázati folyamatok*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.

[2] Arató Miklós: *Nem-élet biztosítási matematika*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.

[3] Michael J. Crawley: *The R book*, John Wiley & Sons Ltd., England, 2007.

[4] S.N. Lahiri: *Resapmling Methods for dependent data*, Springer Verlag, New York, 2003.

[5] Jana Kubanová: *The Basic Idea of Bootstrap Methods*, Problems and Perspectives in Management, 4/2004., 240-248.p.

[6] Zaliapin,I.V., Y.Y. Kagan, F. Schoenberg: *Approximating the distribution of pareto sums*, University of California, Los Angeles, 2003.