Algoritmusok szupermoduláris függvények fedésére

Szakdolgozat

Írta: Király Csaba
matematikus hallgató

Témavezető: Frank András
egyetemi tanár
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2010. június 3.

Köszönetnyilvánítás:

Szeretném ezúton megköszönni témavezetőmnek Frank Andrásnak, azt a rengeteg időt, mellyel hozzájárult e dolgozat létrejöttéhez, valamint a sok érdekes problémát, melyet számomra felvetett.

Köszönöm az EGRES csoport tagjainak a támogatást, külön köszönöm Frank Andrásnak, Király Tamásnak és Pap Júliának a 4.2.2. Tétel bizonyításához nyújtott segítséget.

Köszönöm még Maczkó Renátának a nyelvtani hibák javításában nyújtott segítséget.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke **5**

Előszó **6**

1. Bevezetés **7**

1.1. Definíciók 7

1.1.1. Halmazok, halmazrendszerek 7

1.1.2. Halmazfüggvények 8

1.1.3. Poliéderek 10

1.1.4. Gráfok és hipergráfok 10

1.1.5. Matroidok 13

1.2. Tételek 14

2. Halmazrendszerekről szóló tételek **17**

2.1. Halmazrendszerek gráfja 17

2.2. Lamináris és keresztezés-mentes halmazrendszerek fa-reprezentációi . 19

2.3. Kikeresztezés 21

2.4. S-T-elválasztó halmazrendszerek 25

3. Általános tételek és algoritmusok **31**

3.1. Metsző szubmoduláris függvények reszelése 31

3.2. Fujishige tétele algoritmikusan 33

4. Irányítások **41**

4.1. Irányítási lemma gráfokra és hipergráfokra 41

4.2. Keresztező G-szupermuduláris függvényt fedő irányítások 44

4.3. Hipergráfok keresztező szupermoduláris
függvényt fedő irányítása 48
4.4. Metsző szupermoduláris függvényt fedő irányítások 48
4.5. Gyökeresen k-élösszefüggővé irányítás 50
4.6. Gyökeresen (k, ℓ)-élösszefüggővé irányítás 53
4.7. Hipergráfok erősen összefüggő irányítása 58
4.8. Alkalmazás: Matroidok minimális vágásai 63
4.9. Lokális halmaz-élösszefüggőség megőrzése 64

5. Összefoglalás, további kérdések **66**

Irodalomjegyzék **69**

Ábrák jegyzéke

2.1. Lamináris rendszer reprezentálása fenyővel 20

4.1. Segédgráf a fokszám minimalizáló orákulumhoz 52
4.2. Az (k,1)-élösszefüggővé irányító algoritmus futása 56

Előszó

A dolgozat fő célja gráfok és hipergráfok különböző irányításait megtaláló algoritmusok megadása. Ezeket sokkal általánosabb algoritmusból fogjuk levezetni, illetve néhány esetben ennél egyszerűbb megoldást is adunk. Látni fogjuk, hogy a gyakorlatban azok az irányítási problémák az érdekesek, ahol olyan irányítást keresünk, melyben minden halmaz befoka nagyobb egy keresztező vagy metsző szupermoduláris függvénynél. Ezért a dolgozatban keresztező és metsző szupermoduláris függvényekkel kapcsolatos algoritmusokkal foglalkozunk. Szupermoduláris függvények ellentettje szubmoduláris, így (történeti okokból) néha át fogunk térni szubmoduláris függvényekre.

Bevezetésként az 1. fejezetben áttekintjük a szükséges definíciókat, valamint a felhasznált tételeket. Ezt követően a 2. fejezetben keresztező szupermoduláris függvényekhez kötődő halmazrendszerekről szóló tételeket és algoritmusokattekintünk át. Ezek segítségével a 3. fejezetben algoritmust adunk a keresztező szubmoduláris függvény bázis-poliéderének nemürességének eldöntésére, majd megismerkedünk a teljes reszelő algoritmussal. Ezt felhasználva a 4. fejezetben gráfok és hipergráfok keresztező szupermoduláris függvényeket fedő irányításait megadó algoritmusokat kapunk, melyeknél speciális esetekben egyszerűbb algoritmusokat adunk. A kapott eredményeket az 5. fejezetben foglaljuk részletesen össze.

A dolgozatban a saját eredményeket tételek, algoritmusok és bizonyítások esetén, (amennyiben a bizonyított állítás nem saját eredmény), csillaggal fogom jelölni.

1. fejezet

Bevezetés

Ebben a fejezetben áttekintjük a dolgozatban felhasznált definíciókat, és tételeket[1].

1.1. Definíciók

1.1.1. Halmazok, halmazrendszerek

A dolgozatban előforduló **minden halmaz véges**, így minden halmazrendszer alaphalmaza is véges.

Az alábbiakban halmazok különbségét $\setminus$ helyett $-$-szal jelöljük. Az egyszerűség kedvéért bizonyos esetekben $X - \{v\}$-t $X - v$-vel, $X \cup \{v\}$-t $X + v$-vel jelöljük.

Egy F halmazt $\overline{s}t$**-halmaznak** hívunk, ha $t \in F, s \notin F$.

$A, B \subseteq S$ halmazokat **átmetszőnek** mondjuk, ha $A \cap B, A - B$ és $B - A$ egyike sem üres. Ha ezeken kívül $A \cup B \neq S$ is teljesül, akkor az A és B halmazt **keresztezőnek** hívjuk.

Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszert **halmazgyűrűnek** nevezünk, ha bármely két $\mathcal{F}$-beli elem metszete és uniója is $\mathcal{F}$-ben van. $\mathcal{F}$-et **metszőnek** illetve **keresztezőnek** nevezzük, ha a fenti tulajdonság csak átmetsző illetve keresztező halmazpárokra van megkövetelve. Metsző de nem átmetsző halmazokra az egyik tartalmazza a másikat, így az uniójuk a kisebb, a metszetük a nagyobb halmaz, ami miatt metsző halmaz-

[1] Azon tételeket és definíciókat, melyek a matematikus szak alapképzésében előfordulnak nem említem külön.

rendszer tetszőleges két *metsző* (azaz nem diszjunkt) elemének metszete és uniója is a halmazrendszerben van. $\mathcal{F}$-et **laminárisnak** nevezzük, ha semelyik két eleme sem metszi át egymást. $\mathcal{F}$-et **keresztezés-mentesnek** nevezzük, ha semelyik két eleme sem keresztezi egymást.

Egy $\mathcal{K} \subseteq 2^S$ halmazrendszert **kompozíciónak** hívunk, ha S minden elemét ugyanannyi tagja tartalmazza $\mathcal{K}$-nak.

Az $\mathcal{F} \subseteq 2^{S \cup^* T}$ halmazrendszert S-T **elválasztónak** hívjuk, ha minden $s \in S, t \in$ $\in T$ párra van $\overline{s}t$-halmaz $\mathcal{F}$-ben. $\mathcal{F}$-et S-T**-fa-kompozíciónak** hívjuk, ha reprezentálható egy olyan irányított fával, amelynak csúcsai S-nek vagy T-nek részhalmazai, e mellett $S \cup^* T$-nek partícióját alkotják, éleinek pedig töve S-ben, hegye T-ben van. A reprezentálás úgy értendő, hogy $\mathcal{F}$ elemei pontosan az élek által meghatározott alapvágások, ahol egy irányított él által meghatározott **alapvágáson** a fából az él elhagyása után keletkezett gráf azon komponensét értjük, ahova az él belép.

1.1.2. Halmazfüggvények

Halmazfüggvényen itt olyan valós értékű függvényt értünk, mely egy S alaphalmaz részhalmazaihoz rendel (nem feltétlenül véges) értéket, azzal a kikötéssel, hogy az üres halmazon nullát vesz fel, és az S-en felvett értéke véges.

Halmazfüggvényt nyerhetünk egy $a \in \mathbb{R}^S$ vektorból, ha $X \subseteq S$-re $a(X)$-et $\sum\limits_{s \in X} a(s)$-nek definiáljuk. (Általában nem érthető félre, hogy megtartjuk az a jelölést.) Hasonlóan ehhez egy tetszőleges h halmazfüggvényre h-t értelmezhetjük az értelmezési tartományában lévő halmazok $\mathcal{F}$ rendszerén a $h(\mathcal{F}) := \sum\limits_{F \in \mathcal{F}} h(F)$ összeggel.

Egy $b : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvényt **szubmodulárisnak** nevezünk, ha minden $A, B \subseteq S$-re teljesül a

$$b(A) + b(B) \geq b(A \cap B) + b(A \cup B) \tag{1.1}$$

szubmodularitási egyenlőtlenség. Ha (1.1) csak átmetsző vagy csak keresztező halmazokra teljesük, akkor b-t **metsző(n)** illetve **keresztező(n) szubmodulárisnak** mondjuk. Ha b metsző szubmoduláris, akkor (1.1) bármely metsző halmazpárra teljesül.

Egy $p : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ függvényt **szupermodulárisnak** nevezünk, ha minden

$A, B \subseteq S$-re teljesül a

$$p(A) + p(B) \leq p(A \cap B) + p(A \cup B) \tag{1.2}$$

szupermodularitási egyenlőtlenség. Ha (1.2) csak átmetsző vagy csak keresztező halmazokra teljesük, akkor p-t **metsző(n)** illetve **keresztező(n) szupermodulárisnak** mondjuk. Ismét igaz, hogy ha p metsző szupermoduláris, akkor (1.2) bármely metsző halmazpárra teljesül.

Egy $b : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvényre jelölje $\mathcal{F}(b)$ a **véges b-értékű halmazok rendszerét**. Amennyiben b szubmoduláris, úgy $\mathcal{F}(b)$ halmazgyűrű, mivel $A, B \in \in \mathcal{F}(b)$ halmazokra $\infty > b(A) + b(B) \geq b(A \cap B) + b(A \cup B)$. Amennyiben b keresztezőn (vagy metszőn) szubmoduláris, úgy ez csak keresztező (illetve átmetsző) halmazokra áll fenn, így $\mathcal{F}(b)$ keresztező (illetve metsző) rendszer lesz.

Egy $b : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (metsző) szubmoduláris és egy $p : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (metsző) szupermoduláris függvényt **(metsző(n)) paramoduláris párnak** nevezünk, ha minden (átmetsző) $A, B \subseteq S$-re teljesül a

$$b(A) - p(B) \geq b(A - B) - p(B - A) \tag{1.3}$$

kereszt egyenlőtlenség.

Legyen $b : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tetszőleges halmazfüggvény. Ekkor b **alsó reszeltjén** azt a $b^\vee : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvényt értjük, melyre $X \subseteq S$-re

$$b^\vee(X) := \min\{b(\mathcal{P}) : \mathcal{P}\ X \text{ partíciója}\}. \tag{1.4}$$

Legyen $p : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tetszőleges halmazfüggvény. Ekkor p **felső reszeltjén** azt a $p^\wedge : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ függvényt értjük, melyre $X \subseteq S$-re

$$p^\wedge(X) := \max\{p(\mathcal{P}) : \mathcal{P}\ X \text{ partíciója}\}. \tag{1.5}$$

Egy $h : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ függvény **komplementerén** azt a $\overline{h} : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ függvényt értjük, melyre $X \subseteq S$-re

$$\overline{h}(X) := h(S) - h(S - X). \tag{1.6}$$

(Itt fontos, hogy minden halmazfüggvényre megköveteltük, hogy S-en véges értéket vegyen fel.)

Legyen $b : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tetszőleges halmazfüggvény. Ekkor b **teljes (alsó) reszeltjén** azt a $b^{\downarrow} : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvényt értjük, melyre $X \subseteq S$-re

$$b^{\downarrow}(X) := \left(\overline{(\overline{b})^{\wedge}}\right)^{\vee}. \tag{1.7}$$

Legyen $p : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tetszőleges halmazfüggvény. Ekkor p **teljes felső reszeltjén** azt a $p^{\uparrow} : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ függvényt értjük, melyre $X \subseteq S$-re

$$p^{\uparrow}(X) := \left(\overline{(\overline{p})^{\vee}}\right)^{\wedge}. \tag{1.8}$$

1.1.3. Poliéderek

Egy $b : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ és egy $p : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ függvényre legyenek

$$S(b) := \{z \in \mathbb{R}^S : z(X) \leq b(X) \ (\forall X \subseteq S)\},$$

$$S'(p) := \{z \in \mathbb{R}^S : z(X) \geq p(X) \ (\forall X \subseteq S)\},$$

$$B(b) := \{z \in \mathbb{R}^S : z(S) = b(S), z(X) \leq b(X) \ (\forall X \subseteq S)\},$$

$$B'(p) := \{z \in \mathbb{R}^S : z(S) = p(S), z(X) \geq p(X) \ (\forall X \subseteq S)\},$$

$$Q(p, b) := \{z \in \mathbb{R}^S : p(X) \leq z(X) \leq b(X) \ (\forall X \subseteq S)\}.$$

b szubmoduláris illetve p szupermoduláris függvényekre $B(b)$-t illetve $B'(p)$-t **bázis-poliédernek**, $S(b)$-t **szubmoduláris-** $S'(p)$-t **szupermoduláris poliédernek** nevezzük. Ha (p, b) paramoduláris pár, akkor $Q(p, b)$-t **g-polimatroidnak** nevezzük, melynek **alsó határfüggvénye** p, **felső határfüggvénye** b.

Egy Q poliéder $T \subset S$-menti **vetületén** azt a Q' poliédert értjük, melyet a Q-beli vektorok T elemeihez tartozó koordinátáinak eltörlésével kapunk.

1.1.4. Gráfok és hipergráfok

A dolgozatban, amennyiben nincs más kikötve minden gráfon és hipergráfon megengedjük, hogy legyenek többszörös élek, (igazából a hurokélek sem okoznak túl nagy gondot, de az egyszerűség kedvéért inkább tiltjuk őket), és hipergráfok esetén tiltjuk az egy csúcsból álló éleket.

Adott $G = (V, E)$ gráfra illetve $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfra tetszőleges $v \in V$-re $d(v)$ jelöli a v csúcs fokát, továbbá $X, Y \subseteq V$-re $d(X)$ jelöli az X halmaz fokát,

azaz azon (hiper)élek számát, melyek X-beli és X-en kívüli csúcsot is tartalmaznak, $d(X,Y)$ jelöli azon (hiper)élek számát, melyeknek van elemük X-ben és Y-ban is, $i(X)$ jelöli az X által feszített (hiper)élek számát, és $e(X)$ jelöli azon (hiper)élek számát, melyeknek van csúcsa X-ben. Az egyértelműség kedvéért alsó indexbe néha beírjuk a (hiper)gráf nevét.

Egy G gráfot **Euler-gráfnak** nevezünk, ha G-ben minden csúcs foka páros.

Egy $G = (V,E)$ gráfon egy $X \subseteq V$ halmazra jelölje $\Gamma(X)$ azon $V - X$-beli csúcsok halmazát, melyekből fut él X-be.

Adott $G = (V,E)$ gráfon illetve $\mathcal{H} = (V,\mathcal{E})$ hipergráfon V egy adott $\mathcal{P}$ (szub)partíciójára $e(\mathcal{P})$ jelöli azon (hiper)élek számát, melyeket nem feszít a partíció egyetlen tagja sem. G-t illetve $\mathcal{H}$-t **k-partíció-összefüggőnek** hívjuk, ha V minden $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, ..., V_q\}$ partíciójára

$$e(\mathcal{P}) \geq k(q-1). \tag{1.9}$$

G-t illetve $\mathcal{H}$-t **(k,ℓ)-partíció-összefüggőnek** hívjuk, ha minden $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, ..., V_q\}$ partíciójára a csúcshalmaznak

$$e(\mathcal{P}) \geq k(q-1) + \ell. \tag{1.10}$$

Az irányított gráf közismert fogalmához hasonlóan definiálhatjuk az irányított hipergráfokat. Ezt többféleképpen megtehetnénk, jelen esetben $\mathcal{D} = (V,\mathcal{A})$-t akkor nevezzük **irányított hipergráfnak**, ha minden $A \in \mathcal{A}$ él egy hegy és néhány tő pontból áll. $D = (V,A)$ irányított gráfon, illetve $\mathcal{D} = (V,\mathcal{A})$ irányított hipergráfon egy $v \in V$ csúcsra $\rho(v)$ jelöli a v csúcs befokát, azaz azon (hiper)élek számát, melyeknek v a hegye, illetve $\delta(v)$ jelöli a v csúcs kifokát, azaz azon (hiper)élek számát, melyeknek v a(z egyik) töve. Hasonlóan a fokszámhoz ρ és δ is kiterjeszthető V részhalmazaira.

Egy $G = (V,E)$ gráfra vagy egy $\mathcal{H} = (V,\mathcal{E})$ hipergráfra legyen adott egy $h : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ függvény. G illetve $\mathcal{H}$ h-t fedő irányításán a (hiper)élek egy olyan irányítását értjük, melyre minden $X \subseteq V$-re $h(X) \leq \rho(X)$.

Egy $G = (V,E)$ gráfon adott $h : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ függvényt **G-szupermodulárisnak** nevezünk, ha minden $X, Y \subseteq V$-re

$$h(X) + h(Y) \leq h(X) + h(Y) + d(X,Y). \tag{1.11}$$

Amennyiben (1.11) csak metsző, illetve keresztező halmazpárokra áll fenn, akkor h-t **metsző(n), illetve keresztező(n) G-szupermodulárisnak nevezzük.**

Egy $D = (V, A)$ irányított gráfot illetve egy $\mathcal{D} = (V, \mathcal{A})$ irányított hipergráfot, melyen adva van egy $r \in V$ gyökérpont, **r-gyökerű k-élösszefüggőnek** nevezünk, ha minden $r \notin X \subset V, X \neq \emptyset$ halmazra $\rho(X) \geq k$. Egy $D = (V, A)$ irányított gráfot illetve egy $\mathcal{D} = (V, \mathcal{A})$ irányított hipergráfot, melyen adva van egy $r \in V$ gyökérpont, **r-gyökerű (k, ℓ)-élösszefüggőnek** nevezünk, ha minden $r \notin X \subset V, X \neq \emptyset$ halmazra $\rho(X) \geq k$, és minden $r \in X \subset V$ halmazra $\rho(X) \geq \ell$. Egy irányított (1,1)-élösszefüggő (hiper)gráfot röviden **erősen összefüggőnek** nevezünk.

Egy $G = (V, E)$ gráfra és $R \subseteq V$-re G/R-en azt a gráfot értjük, mely az R halmaz összehúzásával keletkezik. Ennek csúcshalmaza $V - R + v_R$. és a $V - R$ által feszített élei megegyeznek G éleivel, továbbá v_R és egy $v \in V - R$ csúcs között annyi él fut, ahány $u \in R$-re $uv \in E$. Hasonlóan értelmezhető irányított gráfok összehúzása is, ebben az élek irányítását is megtartjuk. Amennyiben G-ben volt egy kijelölt r gyökérpont, akkor G/R gyökérpontja továbbra is r, ha $r \notin R$, illetve v_R, amennyiben $r \in R$. Ez utóbbi esetben v_R-et r_R-nek nevezzük.

Egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfra és $R \subseteq V$-re G/R-en azt a gráfot értjük, mely az R halmaz összehúzásával keletkezik. Ennek csúcshalmaza $V - R + v_R$. $\mathcal{H}/R$ éleit úgy kapjuk $\mathcal{H}$ éleiből, hogy $E \in \mathcal{E}$-re $\mathcal{H}/R$-be $E - R + v_R$-et vesszük be hiperélnek, amennyiben ez nem egy pontból áll. Hasonlóan értelmezhető irányított hipergráfok összehúzása is, ebben az élek irányítását is megtartjuk, azaz az összehúzott hiperél feje megmarad az, ami volt, ha az eredeti feje nem volt R-ben, illetve v_R lesz, amennyiben az eredeti feje R-beli volt. Amennyiben $\mathcal{H}$-ban volt egy kijelölt r gyökérpont, akkor $\mathcal{H}/R$ gyökérpontja továbbra is r, ha $r \notin R$, illetve v_R, amennyiben $r \in R$, ebben az esetben v_R-et r_R-nek nevezzük.

Egy $G = (V, E)$ gráfban illetve egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfban az $R \subseteq V$ halmaz által feszített rész(hiper)gráfot $G[R]$-rel illetve $\mathcal{H}[R]$-rel jelöljük.

Egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf **illeszkedési gráfján**, azt a $G = (V, \mathcal{E}, E)$ páros gráfot értjük, melynek élei $\mathcal{H}$ azon v csúcsa és A hiperéle közt futnak, melyekre igaz, hogy $v \in A$.

Adott $G = (V, E)$ gráfon illetve $D = (V, E)$ irányított gráfon legyen $\emptyset \neq X, Y \subset$ $\subset V$ diszjunkt halmazokra

$$\lambda_G(X, Y) := \min\{d_G(Z) : Y \subseteq Z,\ Z \cap X = \emptyset\}, \tag{1.12}$$

illetve

$$\lambda_D(X,Y) := \min\{\rho_D(Z) : Y \subseteq Z,\ Z \cap X = \emptyset\}. \tag{1.13}$$

Ez Menger tétele szerint megegyezik az X-ből Y-ba futó éldiszjunkt (irányított) utak maximális számával.

1.1.5. Matroidok

Az $M = (S, \mathcal{F})$ párt **matroidnak** nevezzük, ha S véges halmaz, és $\mathcal{F} \subseteq 2^S$-re teljesül:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. ha $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$, akkor $X \in \mathcal{F}$,
3. minden $X \subseteq S$-re az X-ben tovább nem bővíthető $\mathcal{F}$ beli halmazok azonos elemszámúak.

A 3. feltételben szereplő elemszámot az X halmaz **rangjának** nevezzük, és (általában) $r(X)$-szel jelöljük. $\mathcal{F}$ elemeit **független** halmazoknak nevezzük. $\mathcal{F}$ maximális elemeinek rendszerét M **bázisának** nevezzük, és $\mathcal{B}$-vel jelöljük. Nyilván teljesül, hogy $\mathcal{F} = \{F \subseteq S : \exists B \in \mathcal{B} : F \subseteq B\}$.

Egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid **köre** egy olyan $C \subseteq S$ halmaz, melynek tetszőleges c elemét elhagyva $C - c$ már független.

Egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid **vágása** egy olyan $H \subseteq S$ halmaz, melyre minden $F \in \mathcal{F}$-re van H-nak eleme F-ben, azaz H elemeit törölve M rangja csökken.

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $l \in \mathbb{Z}$, és $m : V \to \mathbb{Z}_+$, hogy minden $uv \in E$ élre teljesül az

$$m(u) + m(v) \geq \ell \tag{1.14}$$

egyenlőtlenség. Ekkor a G, ℓ, m által meghatározott **számolgatós (count) matroid** függetlenjeit az

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq E : \forall X \subseteq V\ i_F(X) \leq m(X) - \ell,\ \text{ha } i_F(X) \geq 1\} \tag{1.15}$$

elemei adják. (Ezek tényleg egy matroid függetlenjei.) Az így kapott $M = (E, \mathcal{F})$ matroidot jelöljük $M(G, \ell, m)$-mel.

Amennyiben $m \equiv k$, és $l = k$, akkor $M(G, \ell, m)$ pont G **grafikus matroidjának** k-szorosa, amelyben az élek egy részhalmaza pontosan akkor független, ha felbomlik k erdő uniójára.

Az $m \equiv 2$, és $l = 1$ esetben $M(G, \ell, m)$-et G **merevségi matroidjának** nevezik.

Legyen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ irányítatlan hipergráf, $l \in \mathbb{Z}$, és $m : V \to \mathbb{Z}_+$, hogy minden $E \in$ élre teljesül az

$$m(E) \geq \ell \tag{1.16}$$

egyenlőtlenség. Ekkor a $\mathcal{H}, \ell, m$ által meghatározott **számolgatós (count) matroid** függetlenjeit az

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} : \forall X \subseteq V \ i_{\mathcal{A}}(X) \leq m(X) - \ell, \text{ ha } i_{\mathcal{A}}(X) \geq 1\} \tag{1.17}$$

elemei adják. (Ezek tényleg egy matroid függetlenjei.) Az így kapott $M = (E, \mathcal{F})$ matroidot jelöljük $M(\mathcal{H}, \ell, m)$-mel.

Amennyiben $m \equiv k$, és $l = k$, akkor $M(\mathcal{H}, \ell, m)$ pont $\mathcal{H}$ **hipergrafikus matroidjának** k-szorosa, amelynek egy részhalmaza pontosan akkor bázis, ha felbomlik k feszítő hiperfa uniójára, ahol feszítő hiperfának a hiperélek olyan részhalmazát nevezzük, melyekre helyettesíthető minden hiperél valamely két csúcsa közti éllel, hogy a kapott gráf feszítő fa legyen.

Amennyiben $m \equiv 1$, és $l = 0$, akkor $M(\mathcal{H}, \ell, m)$ pont $\mathcal{H}$ illeszkedési gráfjához tartozó **transzverzális matroid**. (Egy $G = (S, T, E)$ páros gráfra a transzverzális matroid függetlenjeit azon $F \subseteq T$ halmazok alkotják, melyekre F bepárosítható S-be.)

1.2. Tételek

Ebben a szakaszban a témához tartozó néhány alapvető tételt tekintünk át, melyek szerepelnek a Poliéderes kombinatorika tárgy anyagában [6]. Ezeket itt nem bizonyítjuk.

1.2.1. Tétel. *A szub- és szupermoduláris poliéderek, valamint a bázis-poliéderek mind g-polimatroidok.*

(p, b) paramoduláris párra, ha p-t és b-t megszorítjuk valamely $\emptyset \neq S' \subseteq S$-re, akkor a kapott (p', b') pár is paramoduláris, így $Q(p', b')$ g-polimatroid, sőt igaz az alábbi tétel.

1.2.2. Tétel (Vetítési tétel). *A (p, b) paramoduláris párhoz tartozó $Q(p, b)$ g-polimatroid vetülete $T \subset S$ mentén az a $Q(p', b')$ g-polimatroid, amelyre p' és b' a p és b függvények $S' = S - T$-re való megszorításai. Egészértékű (p, b) esetén a vetület bármely egész eleme előáll $Q(p, b)$ egy egész elemének vetületeként.*

A vetítési tételből rögtön következik az alábbi állítás.

1.2.3. Állítás. *A (p, b) paramoduláris párral adott $Q(p, b)$ g-polimatroid nemüres. Ha p és b egészértékű, akkor $Q(p, b)$ tartalmaz rácspontot.*

A következő tételből következik, hogy a dolgozatban bázis-poliéderekre kapott tételek és algoritmusok mind átvihetőek g-polimatroidokra.

1.2.4. Tétel. *Legyen s^* egy új elem az S-en kívül, és legyen $S^* := S + s^*$. (p, b) paramoduláris párra az S^* részhalmazain definiáljuk a b^* függvényt a következőképpen:*

$$b^*(X) := \begin{cases} b(X), & \text{ha } X \subseteq S, \\ -p(S - X), & \text{ha } s^* \in X. \end{cases} \tag{1.18}$$

Ekkor $b^*(S) = 0$, b^* szubmoduláris, és $Q(p, b)$ a $B(b^*)$ bázis-poliéder vetülete s^* mentén.

1.2.5. Tétel. *Egy Q g-polimatroid alsó határfüggvénye az a p S részhalmazain értelmezett függvény, mely $A \subseteq S$-en a $p(A) := \min\{z(A) : z \in Q\}$ értéket veszi fel. Q felső határfüggvénye az a b S részhalmazain értelmezett függvény, mely $A \subseteq S$-en a $b(A) = \max\{z(A) : z \in Q\}$ értéket veszi fel.*

1.2.6. Tétel (Reszelési tétel). *b metsző szubmoduláris függvény alsó reszeltje teljesen szubmoduláris, továbbá $S(b) = S(b^\vee)$, sőt ha $B(b)$ nemüres, akkor $B(b) = B(b^\vee)$.*

1.2.7. Tétel (Teljes reszelési tétel). *b keresztező szubmoduláris függvény teljes alsó reszeltje teljesen szubmoduláris, továbbá $S(b) = S(b^{\downarrow})$, sőt ha $B(b)$ nemüres, akkor $B(b) = B(b^{\downarrow})$.*

1.2.8. Tétel. *Legyen b olyan keresztező szubmoduláris függvény, amelyre $b(S) = 0$ és $B(b)$ nemüres. Ekkor $b^{\downarrow}(Z) = \min\{b(F) : F\ Z\text{-}(S - Z)$ fa-kompozíció$\}$.*

1.2.9. Tétel (Bázispoliéder metszettétel). *Legyen $B_1 = B(b_1)$ és $B_2 = B(b_2)$ két bázis-poliéder, melyekre $b_1(S) = b_2(S) =: k$. Az $M := B_1 \cap B_2$ metszet akkor és csak akkor nemüres, ha minden $X \subseteq S$-re*

$$b_1(X) + b_2(S - X) \leq k. \tag{1.19}$$

Ha b_1 és b_2 egészértékű, és M nemüres, akkor M tartalmaz rácspontot.

Legyen $B_1' = B'(p_1)$ és $B_2' = B'(p_2)$ két bázis-poliéder, melyekre $p_1(S) = p_2(S) = =: k$. Az $M := B_1 \cap B_2$ metszet akkor és csak akkor nemüres, ha minden $X \subseteq S$-re

$$p_1(X) + p_2(S - X) \geq k. \tag{1.20}$$

Ha p_1 és p_2 egészértékű, és M nemüres, akkor M tartalmaz rácspontot.

2. fejezet

Halmazrendszerekről szóló tételek

Ebben a fejezetben olyan halmazrendszerekről szóló tételeket vizsgálunk, melyek jól használhatóak keresztező (és metsző) szub- és szupermoduláris függvények vizsgálatakor. Éppen ezért itt főleg keresztező és keresztezés mentes halmazrendszerekről lesz szó, aminek többek közt az az alapja, hogy, mint később látni fogjuk, adott z vektorra amelyre $z(X) \leq b(X)$ teljesül minden $X \subseteq S$-en valamilyen b keresztező (vagy metsző) szubmoduláris függvénnyel a *pontos*, azaz $z(X) \leq b(X)$-et egyenlőséggel teljesítő halmazok keresztező (illetve metsző) rendszert alkotnak, amiből általában szeretnénk egy keresztezés mentes (illetve lamináris) részt kiválasztani, mellyel még tovább dolgozunk.

2.1. Halmazrendszerek gráfja

A V alaphalmazon fekvő $\mathcal{F}$ halmazrendszerhez rendeljük azt a $G(\mathcal{F}) = (V, E)$ irányított gráfot, ahol $E = \{uv : \text{nincs } u\overline{v}\text{-halmaz } \mathcal{F}\text{-ben}\}$. Ebben a szakaszban [9] állításait bizonyítjuk halmazrendszerek gráfjáról. Ezen állítások bizonyítása egyszerű, de egy kicsit számolgatós, így a cikkben csak részben vannak bizonyítva.

2.1.1. Állítás. *Ha $\emptyset, V \in \mathcal{F}$, és $\mathcal{F}$ halmazgyűrű, akkor $\mathcal{F} = \{X \subseteq V :$ nem lép ki él $G(\mathcal{F})$-ben X-ből$\}$.*

Bizonyítás: $X \in \mathcal{F}$-re X-ből nem léphet ki él $G(\mathcal{F})$-ben, mivel X minden $u \in X, v \in V - X$-re $u\overline{v}$ halmaz, így $\mathcal{F} \subseteq \{X \subseteq V :$ nem lép ki él $G(\mathcal{F})$-ben X-ből$\}$. Jelölje $X_{u\overline{v}}$ az $\mathcal{F}$-beli $u\overline{v}$-halmazt, amennyiben van. Ekkor ha X-ből nem lép ki él

$G(\mathcal{F})$-ben, akkor minden $u \in X, v \in V - X$-re van $u\overline{v}$-halmaz $\mathcal{F}$-ben, és így $X = \bigcup_{u \in X} \bigcap_{v \in V-X} X_{u\overline{v}} \in \mathcal{F}$, mivel $\mathcal{F}$ halmazgyűrű, V véges alaphalmaz. Így $\{X \subseteq V :$ nem lép ki él $G(\mathcal{F})$-ben X-ből$\} \subseteq \mathcal{F}$. □

2.1.2. Állítás. *Ha $\mathcal{F}'$ metsző rendszer a V alaphalmazon, és $\emptyset \in \mathcal{F}'$, akkor az az $\mathcal{F}$ halmazrendszer, melyre $\mathcal{F} := \{\bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}'$ diszjunkt halmazokból álló halmazrendszer$\}$ az $\mathcal{F}'$-t tartalmazó legszűkebb halmazgyűrű, továbbá $G(\mathcal{F}') = G(\mathcal{F})$.*

Bizonyítás: Jelölje $\mathcal{F}^*$ az $\mathcal{F}'$-t tartalmazó egyik legszűkebb halmazgyűrűt. Ekkor $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$, mivel $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}^*$, és $\mathcal{F}^*$ zárt az unióképzésre. Másrészt $\mathcal{F}$ zárt a metszet és az unióképzésre, mivel ha $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, ahol ($i = 1{,}2$-re) $A_i = \bigcup \mathcal{A}_i$, akkor $A_1 \cap A_2 = \bigcup(\mathcal{A}_1(\cap)\mathcal{A}_2)$, $A_1 \cup A_2 = \bigcup \mathcal{A}'$. Itt $\mathcal{A}_1(\cap)\mathcal{A}_2 := \{A'_i \cap A''_j : A'_i \in \mathcal{A}_1, A''_j \in \mathcal{A}_2\} \subseteq \mathcal{F}'$, mivel amennyiben valamely A'_i és A''_j nem metsző, akkor metszetük $\emptyset \in \mathcal{F}'$, ha pedig metszők, akkor használhatjuk $\mathcal{F}$ metsző voltát. $\mathcal{A}_1(\cap)\mathcal{A}_2$ elemei diszjunktak, mivel $\mathcal{A}_i$ rendszerek diszjunkt halmazokból állnak, így $\bigcup(\mathcal{A}_1(\cap)\mathcal{A}_2) \in \mathcal{F}$. Továbbá $\mathcal{A}' :=$ a $(V, \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ hipergráf összefüggő komponenseinek rendszere, ami diszjunkt részrendszere $\mathcal{F}$-nek, mivel a komponensek metsző $\mathcal{F}$-beli halmazok uniójából állnak, továbbá nyilván diszjunkt halmazokból áll.

Így $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$, amiből $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$. A bizonyításból azt is látjuk, hogy a legszűkebb $\mathcal{F}'$-t tartalmazó halmazgyűrű egyértelmű.

Az állítás második felét abból kapjuk, hogy akkor és csak akkor van $u\overline{v}$-halmaz $\mathcal{F}$-ben, ha $\mathcal{F}'$-ben van ilyen, mivel $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, továbbá az $\mathcal{F}$-beli halmazok előállnak $\mathcal{F}'$-beliek uniójaként, így azon u, v párokra, melyekre egy $F \in \mathcal{F}$ $u\overline{v}$-halmaz, az F-et alkotó unió u-t tartalmazó tagja $\mathcal{F}'$-beli $u\overline{v}$-halmaz. □

2.1.3. Állítás. *Ha $\mathcal{F}''$ keresztező rendszer a V alaphalmazon, és $\emptyset, V \in \mathcal{F}'$, akkor az az $\mathcal{F}'$ halmazrendszer, melyre $\mathcal{F}' := \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}''\}$ az $\mathcal{F}''$-t tartalmazó legszűkebb metsző rendszer, továbbá $G(\mathcal{F}'') = G(\mathcal{F}')$.*

Bizonyítás: Jelölje $\mathcal{F}^*$ az $\mathcal{F}''$-t tartalmazó egyik legszűkebb metsző rendszert. Ekkor $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}^*$, mivel $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}^*$, és $\mathcal{F}^*$ metsző, így metsző halmazok metszetét tartalmazza, és tartalmazza diszjunktakét is, mivel $\emptyset \in \mathcal{F}''$. Másrészt $\mathcal{F}'$ metsző rendszer, mivel ha $A_1, A_2 \in \mathcal{F}'$ átmetsző halmazok, továbbá ($i = 1{,}2$-re) $A_i = \bigcap \mathcal{A}_i$,

akkor $A_1 \cap A_2 = \bigcap(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$, ami nyilvánvaló, és $A_1 \cup A_2 = \bigcap(\mathcal{A}_1(\cup)\mathcal{A}_2)$. Itt $\mathcal{A}_1(\cup)\mathcal{A}_2 := \{A'_i \cup A''_j : A'_i \in \mathcal{A}_1,\ A''_j \in \mathcal{A}_2\} \subseteq \mathcal{F}''$, mivel amennyiben valamely A'_i és A''_j diszjunkt lenne, akkor A_1 és A_2 is az lenne, különben pedig $A'_i \cup A''_j \in$ $\in \mathcal{F}''$, mivel ha az egyik tartalmazza a másikat, akkor ez nyilvánvaló, ha az unió V, akkor következik $V \in \mathcal{F}''$-ből, ha pedig kereszteznek, akkor következik $\mathcal{F}''$ keresztező rendszer voltából.

Így $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}'$, amiből $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}'$. A bizonyításból azt is látjuk, hogy a legszűkebb $\mathcal{F}''$-t tartalmazó metsző halmazrendszer egyértelmű.

Az állítás második felét abból kapjuk, hogy akkor és csak akkor van $u\overline{v}$-halmaz $\mathcal{F}'$-ben, ha $\mathcal{F}''$-ben van ilyen, mivel $\mathcal{F}'' \subseteq \mathcal{F}'$, továbbá az $\mathcal{F}'$-beli halmazok előállnak $\mathcal{F}'$-beliek metszeteként, így azon u, v párokra, melyekre egy $F \in \mathcal{F}$ $u\overline{v}$-halmaz, az F-et alkotó metszet v-t nem tartalmazó tagja $\mathcal{F}'$-beli $u\overline{v}$-halmaz. □

Nem ko-diszjunkt halmazok metszete $\mathcal{F}''$-ben van, amennyiben $\mathcal{F}''$ keresztező, így a fenti állításnak igaz az alábbi erősítése.

2.1.4. Állítás. *Ha $\mathcal{F}''$ keresztező rendszer a V alaphalmazon, és $\emptyset, V \in \mathcal{F}'$, akkor az az $\mathcal{F}'$ halmazrendszer, melyre $\mathcal{F}' := \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}''$ ko-diszjunkt halmazokból áll$\}$ az $\mathcal{F}''$-t tartalmazó legszűkebb metsző rendszer, továbbá $G(\mathcal{F}'') = G(\mathcal{F}')$.*

2.2. Lamináris és keresztezés-mentes halmazrendszerek fa-reprezentációi

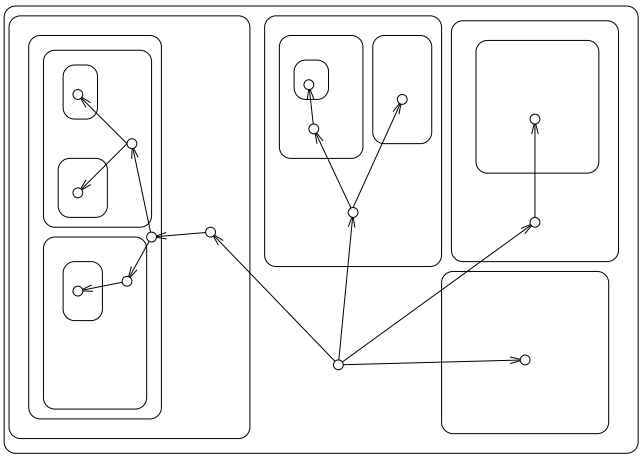
Ebben a szakaszban áttekintjük a lamináris és keresztezés-mentes halmazrendszerek reprezentálásáról szóló tételeket. Belátjuk, hogy lamináris halmazrendszer reprezentálható fenyővel, keresztezés-mentes halmazrendszer pedig reprezentálható irányított fával.

2.2.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ lamináris halmazrendszer, melyben egy halmaz többször is szerepelhet. Ekkor $\mathcal{F}$ reprezentálható egy olyan $F = (U, A)$ fenyővel, hogy csúcsaiba V leképezhető, oly módon, hogy az éleihez tartozó alapvágások által adott halmazok ősképei, a multiplicitásokat figyelembe véve, pont $\mathcal{F}$-et adják.*

Bizonyítás: A tételt elég arra az esetre bizonyítanunk amikor $\mathcal{F}$-nek nincsenek többszörös elemei, mivel a fenyő $F \in \mathcal{F}$-et reprezentáló élét további k csúccsal

felosztva $\mathcal{F} + k \cdot F$ reprezentációját kapjuk.

A fenyőnek $|\mathcal{F}|+1$ csúcsa lesz, ezeket egy kivételével megfeleltethetjük $\mathcal{F}$ elemeinek: $F \in \mathcal{F}$-hez tartozzon az u_F csúcs, a plusz csúcs pedig legyen u_0. Egy $v \in V$-t ahhoz az u_F csúcshoz rendelünk, melyre F a minimális v-t tartalmazó $\mathcal{F}$-beli halmaz, illetve ha v-t nem tartalmazza $\mathcal{F}$ egy halmaza sem, akkor v-t u_0-hoz rendeljük. A fenyő éleit úgy kapjuk, hogy u_0-ba nem fut él, u_F-be pedig egy él fut: abból az u_G-ből, ahol G a minimális olyan halmaz $\mathcal{F}$-ben, melyre $F \subset G$, illetve ha nincs ilyen akkor az élet u_0-ból vezetjük u_F-be (lásd 2.1. Ábra). Látható, hogy a kapott gráf-



2.1. ábra. Lamináris rendszer reprezentálása fenyővel

ban minden csúcs befoka 1, és mivel mindenkibe egy tőle bővebb halmazból fut él, ezért az éleken visszafele haladva valamikor u_0-ba jutunk tetszőleges u_F-ből indulva, azaz u_0-ból minden más csúcs elérhető, azaz tényleg fenyőt kaptunk. A definícióból látszik, hogy az u_F-be belépő élhez tartozó alapvágás ősképe F. □

Azt is láthatjuk, hogy minden csúcs annyiadik szintjére képződik a fenyőnek, ahány $\mathcal{F}$-beli halmaz őt tartalmazza, ha az u_0-at tekintjük a nulladik szintnek.

Ha egy keresztezés-mentes $\mathcal{F}$ halmazrendszert úgy megváltoztatunk, hogy egy tetszőleges $v \in V$ elemet tartalmazó halmazokat komplementerükre cserélünk, akkor lamináris rendszert kapunk, mivel ennek az $\mathcal{F}'$ halmazrendszernek ha lenne két metsző tagja, akkor ezek kereszteznének is. Mivel keresztező halmazok közül ha az egyiknek (vagy akár mindkettőnek) a komplementerét vesszük akkor a kapott halmazok továbbra is kereszteznek, ezért a fentiek ellent mondanának annak, hogy $\mathcal{F}$ keresztezés-mentes. $\mathcal{F}'$ fenyő-reprezentációjában ha a komplementált halmazokba

futó éleket megfordítjuk, akkor $\mathcal{F}$-nek kapjuk az alábbi, fa-reprezentációját:

2.2.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ keresztezés-mentes halmazrendszer, melyben egy halmaz többször is szerepelhet. Ekkor $\mathcal{F}$ reprezentálható egy olyan $F = (U, A)$ irányított fával, hogy csúcsaiba V leképezhető, oly módon, hogy az éleihez tartozó alapvágások által adott halmazok ősképei, a multiplicitásokat figyelembe véve, pont $\mathcal{F}$-et adják.*□

A fát úgy is lerajzolhatjuk, hogy egy szintre rakjuk azokat a csúcsokat, melyek ugyanannyi alapvágásban vannak benne. Ebben a lerajzolásban minden él pont egy szintet lép fel, mivel azt a csúcsot, ahova az él mutat, eggyel több alapvágás tartalmazza, mégpedig az él alapvágása.

A fenti tételt sok helyen alkalmazhatjuk. Segítségével például bizonyítható a Lucchesi-Younger-tétel [16], a 2.4.1. Tétel, és az alábbi lemma is, mely a 3.2.1. Tétel bizonyításánál lesz hasznos.

2.2.3. Lemma. *$\mathcal{K}$ keresztezés-mentes kompozíciója V-nek. Ekkor $\mathcal{K}$ felbontható V partícióira és ko-partícióira.*

Bizonyítás: Azt elég belátnunk, hogy $\mathcal{K}$ elemei közül kiválasztható egy partíció vagy egy ko-partíció, mivel ennek törlése után ismét kompozíciót kapunk.

Vegyük $\mathcal{K}$ fa-reprezentációjának szintezett lerajzolását. Mivel $\mathcal{K}$ kompozíció, így, mivel adott szinten lévő fa csúcsok ősképeit ugyanannyi $\mathcal{F}$-beli halmaz tartalmazza, vagy a legalsó vagy a legfelső szint csúcsainak ősképe mind $\emptyset$. Ha a legalsó szinten lévő csúcs ősképe üres, akkor a belőle induló élekhez tartozó $\mathcal{F}$-beli halmazok V partícióját adják, ha pedig a legfelső szinten lévő csúcs ősképe üres, akkor a belé futó élekhez tartozó $\mathcal{F}$-beli halmazok V ko-partícióját adják. □

2.3. Kikeresztezés

Adott V alaphalmazon értelmezett $\mathcal{F}$ halmazrendszerből keresztezés-mentes (illetve lamináris) rendszert kaphatunk úgy, hogy a rendszer néhány fontos tulajdonsága megmaradjon, ha a keresztező (illetve átmetsző) párokat rendre lecseréljük a metszetükre és az uniójukra. Az eljárás véges, mivel a rendszerben szereplő halmazok száma nem változik, és a halmazok méretének négyzetösszege szigorúan monoton

nő. Az alábbi állítás mutatja, hogy $O(|\mathcal{F}|^2)$ kikeresztezési lépés után az eljárás véget ér. Egy kikeresztezési lépés átlagosan $O(|\mathcal{F}||V|)$ időben hajtható végre úgy, hogy mindig egy $F \in \mathcal{F}$ halamazhoz keresünk ezt keresztező halmazt, és ha nem találunk ilyet, akkor az alábbi állítás miatt ezt később nem kell vizsgálnunk. Mivel két halmaz keresztező voltának ellenőrzése $O(|V|)$ idejű, így $O(|\mathcal{F}|)$ ellenőrzés $O(|\mathcal{F}||V|)$ időben végrehajtható, így az algoritmus összideje $O(|\mathcal{F}|^3|V|)$.

2.3.1. Állítás. *Ha A és B két nem keresztező (illetve nem átmetsző) halmaz a V alaphalmazon, akkor teljesülnek az alábbiak.*

1. *Tetszőleges C-re $A \cup C$ és $A \cap C$ közül legfeljebb egy keresztezheti (illetve metszheti át) B-t.*

2. *Ha A és C kereszteznek (illetve átmetszők), és C nem keresztezi B-t, akkor $A \cup C$ és $A \cap C$ egyike sem keresztezheti (illetve metszheti át) B-t.*

Bizonyítás:

1. Ha A és B diszjunkt, akkor $A \cap C$ mindenképpen diszjunkt B-től, így nem keresztezi (illetve nem metszi át).

   Ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap C \subseteq B$, így nem keresztezi (illetve nem metszi át).

   Ha $B \subseteq A$, akkor $B \subseteq A \cup C$, így nem keresztezi (illetve nem metszi át).

   Ezzel a nem átmetsző eset bizonyítása véget ért, a nem keresztező esetben még az alábbi eset van:

   Ha $A \cup B = V$, akkor $(A \cup C) \cup B = V$, így nem keresztezi B-t.

2. Az előző pontban leírtakat A és C felcserélésével is elmondhatjuk, és ebből kapjuk, hogy $A \cup C$ és $A \cap C$ sem keresztezi (illetve metszi át) B-t, ha

   (a) A és B diszjunkt és $B \subseteq C$,

   (b) A és B diszjunkt és $C \cup B = V$ a nem keresztező esetben,

   (c) $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, (bár ekkor $A \subseteq C$, így nem kereszteznek (illetve nem metszenek át)),

   (d) $A \subseteq B$ és $C \cup B = V$ a nem keresztező esetben,

(e) C és B diszjunkt és $B \subseteq A$,

(f) C és B diszjunkt és $A \cup B = V$ a keresztező esetben,

(g) $C \subseteq B$ és $B \subseteq A$, (bár ekkor $C \subseteq A$, így nem kereszteznek (illetve nem metszenek át)),

(h) $C \subseteq B$ és $A \cup B = V$ a nem keresztező esetben.

A maradék nyolc eset közül négy nem állhat fenn, mégpedig ha A és B diszjunkt és $C \subseteq B$, illetve ha C és B diszjunkt és $A \subseteq B$, mivel ekkor A és C is diszjunkt, illetve a nem keresztező esetben, ha $B \subseteq A$ és $C \cup B = V$, illetve ha $B \subseteq C$ és $A \cup B = V$, mivel ekkor $A \cup C = V$.

A maradék négy eset már könnyen elintézhető:

Ha A és C is diszjunkt B-től, akkor ez teljesül $A \cup B$-re és $A \cap B$-re is.

Ha $A, C \subseteq B$, $A \cap C$ és $A \cup C$ is részhalmaza B-nek.

Ha $B \subseteq A, C$, akkor $B \subseteq A \cup C$ és $B \subseteq A \cap C$ is teljesül.

Ezzel a nem átmetsző eset bizonyítása véget ért, a nem keresztező esetben még az alábbi eset van:

Ha $A \cup B = C \cup B = V$, akkor $(A \cup C) \cup B = V$, és $(A \cap C) \cup B = V$ is teljesül.

Ezzel az állítás bizonyítását befejeztük. □

A kapott $\mathcal{F}'$ rendszer minden pontot annyiszor fed, ahányszor az eredeti, így például kompozícióból kompozíciót kapunk. Hasznos még megfigyelni, hogy ha $\mathcal{F}$ egy keresztező (illetve metsző) rendszer egy részrendszere, $\mathcal{F}'$ is az, továbbá, hogy ha a szub- illetve a szupermodularitási egyenlőtlenségeket minden kikeresztezési lépésnél felírjuk az alábbi állítást kapjuk.

2.3.2. Állítás. *Ha b keresztezőn (illetve metszőn) szubmoduláris függvény, akkor a kikeresztezési eljárással kapott $\mathcal{F}'$ keresztezés-mentes (illetve lamináris) halmazrendszerre $b(\mathcal{F}) \geq b(\mathcal{F}')$. Ha p keresztezőn (illetve metszőn) szupermoduláris függvény, akkor a kikeresztezési eljárással kapott $\mathcal{F}'$ keresztezés-mentes (illetve lamináris) halmazrendszerre $p(\mathcal{F}) \leq p(\mathcal{F}')$.*

Mint fent láttuk a kikeresztezési eljárás $O(|\mathcal{F}|^3|V|)$ időben fut le, így akkor használható jól, ha $|\mathcal{F}|$ kicsi. Bernáth alábbi tétele alapján könnyen kiválasztható egy

V alaphalmazon értelmezett $\mathcal{F}_0$ keresztező rendszernek egy olyan $O(|V|)$ méretű $\mathcal{F}$ részrendszere, mely minden olyan $< v_1, v_2 >$ rendezett párra, ahol $v_1, v_2 \in V$, tartalmaz v_1-et tartalmazó, de v_2-t elkerülő halmazt, mely párra $\mathcal{F}_0$ tartalmaz ilyet.

2.3.3. Tétel (Bernáth, [1]). *Legyen $\mathcal{F}$ keresztező (vagy speciálisan metsző) halmazrendszer a V alaphalmazon. Legyen minden $v \in V$-re az őt elkerülő maximális $\mathcal{F}$-beli nemüres halmazok rendszere $\mathcal{P}_v$. Ekkor* $\left|\bigcup_{v \in V} \mathcal{P}_v\right| \leq 2|V| - 2$.

Bizonyítás(*): A tételt $|V|$ szerinti indukcióval bizonyítjuk. $|V| = 1$-re nyilván nincs ilyen nemüres halmaz. Jelölje az $\mathcal{F}$ nyomát $A \subseteq V$-n $\mathcal{F} \cap A := \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$.

Tegyük fel, hogy a tétel teljesül minden olyan V' alaphalmazon értelmezett keresztezés-mentes halmazrendszerre, ahol $|V'| < n$, és legyen $\mathcal{F}$ tetszőleges keresztezés-mentes halmazrendszer egy n elemű V alaphalmazon, melyről feltehetjük, hogy eleme az összes egy elemű halmaz, mivel ezeket hozzávéve a keresztezésmentesség nem romolhat el, és $\left|\bigcup_{v \in V} \mathcal{P}_v\right|$ nem csökken.

Legyen $v_0 \in V$-re $\mathcal{P}_{v_0} = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$, mely rendszer tagjai diszjunktak, mivel mind elkerülik v_0-at, így ha lenne köztük kettő metsző, akkor helyettük vehetnénk az uniójukat, amely az egyiküknél bővebb lenne, ami ellentmond a maximalitásnak. Mivel feltettük, hogy az egy elemű halmazok $\mathcal{F}$-ben vannak, azaz minden $v \in V$-re $v \neq v_0$ esetén van v-t tartalmazó, v_0-at elkerülő halmaz, így van maximális is, azaz $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V - v_0$.

Alkalmazzunk indukciót V_i-n $\mathcal{F}_i := \mathcal{F} \cap V_i$-re. Legyen tehát minden $v \in V_i$-re az őt elkerülő maximális $\mathcal{F}_i$-beli nemüres halmazok rendszere $\mathcal{P}_v^i$. Ekkor indukció szerint $\left|\bigcup_{v \in V_i} \mathcal{P}_v^i\right| \leq 2|V_i| - 2$.

V_i maximalitása miatt $A \in \mathcal{F}_i$-re a maximális olyan $F \in \mathcal{F}$ halmaz, melyre $V_i \cap F = A$ vagy része V_i-nek, vagy tartalmazza v_0-t. Így tetszőleges $v \in V_i$-re $\mathcal{P}_v^i$-nek legfeljebb egy olyan A eleme lehet melyre a maximális olyan $F \in \mathcal{F}$ halmaz, amelyre $V_i \cap F = A$, tartalmazza v_0-t, mivel különben, ha A_1 és A_2 is ilyen halmaz lenne, akkor $v \notin A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}_i$, ami ellentmond A_1 és A_2 maximalitásának. Ha van ilyen $A \in \mathcal{P}_v^i$, akkor a hozzá tartozó maximális F a maximalitás miatt a többi $A_j \in \mathcal{P}_{v_0}$-at vagy tartalmazza, vagy elkerüli. Így $\mathcal{P}_v = \mathcal{P}_v^i - \{A\} \cup \{F\} \cup (\bigcup\{A_j \in \mathcal{P}_{v_0} : A_j \notin F\})$, mivel az F által elkerült A_j-ket nem tartalmazhatja bővebb v-t elkerülő

halmaz, mivel a v_0-at A_j maximális v_0-at nem tartalmazó volta miatt tartalmazná, és így keresztezné F-et, ami ellentmondás. Hasonlóan bizonyítható, hogy ha minden $A \in \mathcal{F}_i$-re a maximális olyan $F \in \mathcal{F}$ halmaz, melyre $V_i \cap F = A$ vagy része V_i-nek, akkor $\mathcal{P}_v = \mathcal{P}_v^i \cup \{F_i\} \cup (\bigcup\{A_j \in \mathcal{P}_{v_0} : A_j \notin F_i\})$, ahol F_i a maximális v_0-at tartalmazó, de A_i-t elkerülő halmaz. A fentiekből kapjuk, hogy

$$\left|\bigcup_{v\in A_i} \mathcal{P}_v - \mathcal{P}_{v_0}\right| \leq \left|\bigcup_{v\in A_i} \mathcal{P}_v^i \cup \{F_i\}\right| \leq 2|A_i| - 1,$$

amiből

$$\left|\bigcup_{v\in V} \mathcal{P}_v\right| \leq |\mathcal{P}_{v_0}| + \sum_{i=1}^{k} \left|\bigcup_{v\in A_i} \mathcal{P}_v - \mathcal{P}_{v_0}\right| \leq k + (2|V - v_0| - k) = 2|V| - 2,$$

mint állítottuk. □

2.3.4. Megjegyzés. *1. A bizonyításban igazából csak azt használtuk ki, hogy $\mathcal{F}$ keresztező elemeinek uniója is $\mathcal{F}$-ben van, így a tétel ezzel a gyengített feltétellel is áll, mint azt Bernáth eredeti tétele is állította.*
2. A tétel fenti bizonyítása lényegesen különböző Bernáth eredeti bizonyításától, melyben ő azt látta be, hogy egy minimális nemtriviális (azaz legalább két elemű) halmazt keresztező halmazok száma nem nagyobb, mint a halmaz elemszámának a kétszerese mínusz kettő, így egy ilyen halmazt összehúzva indukcióval adódik a tétel.

2.4. S-T-elválasztó halmazrendszerek

Ebben a szakaszban az alábbi tételre adunk bizonyítást.

2.4.1. Tétel. *Keresztező S-T-elválasztó $\mathcal{F}$ halmazrendszerből kiválasztható egy S-T-fa-kompozíció.*

Bizonyítás(*): Azt fogjuk bizonyítani, hogy a keresztezés-mentes „minimális” S-T-elválasztó halmazrendszerek pontosan az S-T-fa-kompozíciók.

Először megmutatjuk, hogy egy S-T-elválasztó keresztező rendszerből hogy választható ki egy S-T-elválasztó keresztezés-mentes.

2.4.2. Lemma (*). *Legyen $\mathcal{F}$ S-T-elválasztó keresztező halmazrendszer. Jelölje $s \in S$-re $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}$ az egyértelmű minimális $M_{\overline{s}t} \in \mathcal{F}$ $\overline{s}t$-halmazok (t végigfut T-n) hipergráfjának összefüggő komponenseinek rendszerét. Ekkor a*

$$\mathcal{G} := \bigcup_{s \in S} \mathcal{F}_s$$

halmazrendszer keresztezésmentes S-T-elválasztó.

Bizonyítás: $\mathcal{G}$ definíciójából rögtön látszik, hogy $\mathcal{G}$ S-T-elválasztó, mert az $\mathcal{F}_s$-beli t-t tartalmazó halmaz, mely $\mathcal{F}_s$ definíciója szerint létezik minden $t \in T$-re, $\overline{s}t$-halmaz.

Mivel minden $s \in S$-re $\mathcal{F}_s$ elemei diszjunktak, a keresztezés-mentességet elég $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ mellett $F_1 \in \mathcal{F}_{s_1}$ és $F_2 \in \mathcal{F}_{s_2}$ halmazokra bizonyítani. Tegyük fel indirekten, hogy F_1 és F_2 kereszteznek.

1. eset: Ha $s_2 \notin F_1$. Ekkor $t \in F_1 \cap T$-re $M_{\overline{s}_2 t}$ egyben minimális $\overline{s}_2 t$-halmaz is a következő állítás miatt:

2.4.3. Állítás. *Ha $F \in \mathcal{F}_s$, és $s' \in S - F$, akkor $t \in F \cap T$-re $M_{\overline{s}t}$ egyben minimális $\overline{s}'t$-halmaz is.*

Bizonyítás: Mivel $M_{\overline{s}t} \subseteq F \not\ni s'$ így ez egyben $\overline{s}'t$-halmaz is, így $M_{\overline{s}'t}$ része ennek, viszont ha kisebb lenne, akkor az egy kisebb $\overline{s}t$-halmaz lenne, ami ellentmondana a minimalitásnak. □

E miatt ha F_1-nek és F_2-nek van közös eleme, akkor $F_1 \subseteq F_2$, mert a fentiek alapján F_1 elemei ugyanabban a komponensben vannak az í$M_{\overline{s}_2 t}$ halmazok hipergráfjában, mint $F_1 \cap F_2$ elemei.

2. eset: Ha $s_2 \in F_1$, akkor van olyan $t \in F_1 \cap T$, melyre $s_2 \in M_{\overline{s}_1 t}$. Ekkor $M_{\overline{s}_1 t}$ és $M_{\overline{s}_2 t}$ metszete egy kisebb $\overline{s}_1 t$-halmaz lenne ellentmondásban a minimalitással. Ugyanis ha $s_1 \notin M_{\overline{s}_2 t}$, akkor $s_1 \notin M_{\overline{s}_1 t} \cup M_{\overline{s}_2 t}$, továbbá t a metszetben van, és s_2 $M_{\overline{s}_1 t}$-ben benne van, míg $M_{\overline{s}_2 t}$-ben nincs, így $M_{\overline{s}_1 t}$ és $M_{\overline{s}_2 t}$ vagy kereszteznek, és akkor a metszet tényleg $\mathcal{F}$-ben van, vagy $M_{\overline{s}_2 t} \subset M_{\overline{s}_1 t}$, így a metszet $M_{\overline{s}_2 t}$, ami definíció szerint $\mathcal{F}$-ben van. Ha pedig $s_1 \in M_{\overline{s}_2 t}$, akkor $M_{\overline{s}_2 t} \subseteq F_2$, így $M_{\overline{s}_2 t} \subseteq F_1$ miatt és mivel F_1 és F_2 keresztezők, így van olyan elem, amelyik nem eleme $M_{\overline{s}_1 t} \cup M_{\overline{s}_2 t}$-nek, így az előző gondolatmenet itt is elmondható. □

Az alábbi állítás rögtön következik az S-T-fa-kompozíció definíciójából:

2.4.4. Állítás. *Ha $\mathcal{F}$ S-T-fa-kompozíció, akkor keresztezésmentes minimális S-T-elválasztó halmazrendszer.*

Most belátjuk, hogy az állítás megfordítottja is igaz. Először nézzük azt a speciális esetet, amikor $\mathcal{F}$ lamináris:

2.4.5. Állítás (*). *Ha $\mathcal{F}$ keresztezésmentes minimális S-T-elválasztó halmazrendszer, akkor S-T-fa-kompozíció, sőt az őt reprezentáló fa csillag, melynek közepe S.*

Bizonyítás: Ha $F \in \mathcal{F}$-re $F \cap S \neq \emptyset$, akkor $s \in F \cap S$-re és minden $t \in F \cap T$-re, $\mathcal{F}$ S-T-elválasztó volta miatt, van $\mathcal{F}$-ben egy $\overline{s}t$-halmaz, mely a laminaritás miatt része F-nek, így viszont $s' \in S - F$-re is ez $\overline{s}'t$-halmaz, így viszont F kidobható $\mathcal{F}$-ből, ami ellentmond a minimalitásnak. Így $\mathcal{F}$ T-nek egy partíciója, mivel T minden elemére van őt tartalmazó $\mathcal{F}$-beli, $\mathcal{F}$ S-T-elválasztó volta miatt, továbbá ha $F' \subseteq F \subseteq S$, akkor F' kidobható lenne $\mathcal{F}$-ből. Így $\mathcal{F}$ tényleg reprezentálható a fent leírt csillaggal, mint kívántuk. □

2.4.6. Lemma (*). *Ha $\mathcal{F}$ keresztezésmentes minimális S-T-elválasztó halmazrendszer, akkor S-T-fa-kompozíció.*

Bizonyítás: Megadjuk a halmazrendszerhez tartozó fát. A fa csúcsai az **atomok**, azaz azon maximális diszjunkt halmazok, melyekből $\mathcal{F}$ minden eleme felépíthető. Ha van maradék, amit semelyik $\mathcal{F}$-beli nem tartalmaz, akkor $\mathcal{F}$ lamináris, így a 2.4.5. Állítás miatt készen vagyunk. Mivel $\mathcal{F}$ S-T-elválasztó, így egy atom sem metszheti egyszerre S-et és T-t is, mivel ha lenne a metszetben egy s illetve egy t elem is, akkor az $\overline{s}t$-halmazt nem lehetne atomokból felépíteni. Az élek definiálásához szükségünk lesz az alábbi állításra:

2.4.7. Állítás. *$F \in \mathcal{F}$-re egyértelműen létezik olyan $A \subseteq T$ atom, hogy minden $\mathcal{F}$-beli $F' \subseteq F$-re $A \not\subseteq F'$.*

Bizonyítás: Van ilyen atom a minimalitás miatt, ugyanis különben F-et elhagyhatnánk $\mathcal{F}$-ből, így csak az egyértelműséget kell bizonyítani.
1. eset: Ha $F \cap S = \emptyset$, akkor F atom, mivel $F' \subset F$-re $F' \notin \mathcal{F}$, mert ekkor F' elhagyható lenne $\mathcal{F}$-ből, és $F' \in \mathcal{F}$, $F' \cap F \neq \emptyset$, $F' \cap V - F \neq \emptyset$, $F \not\subseteq F'$ esetén

$S \subset F'$, mivel $\mathcal{F}$ keresztezésmentes, viszont így F' felesleges lenne, mivel semely $s \in S$, $t \in T$-re sem $\overline{s}t$-halmaz.

2. eset: Ha $F \cap S \neq \emptyset$, akkor indirekten bizonyítunk, azaz tegyük fel, hogy van egy A_1 és egy A_2 atom is az állításbeli tulajdonsággal. Ekkor $\mathcal{F}$ S-T-elválasztó volta miatt, minden $s \in F \cap S$-re van s-et A_1-től illetve A_2-től elválasztó $\mathcal{F}$-beli halmaz, azaz olyan, amely s-et nem tartalmazza és amelynek A_1 részhalmaza, illetve olyan amely s-et nem tartalmazza és amelynek A_2 részhalmaza. Van továbbá egy A_1-et A_2-től elválasztó $\mathcal{F} \in F_1$ halmaz, melyről feltehetjük, hogy A_2 részhalmaza, és A_1-et nem metszi, mivel ha nem lenne ilyen, akkor A_1-et és A_2-t lecserélhetnénk $A_1 \cup A_2$-re az atomok rendszerében. Mivel ezek egyike sem részhalmaza F-nek, így mivel $\mathcal{F}$ keresztezésmentes, mind tartalmazzák $(S \cup T) - F$-et. Minden $s \in (S \cap F) - F_1 = S - F_1$-re az A_1-et tartalmazó s-et elkerülő F_s halmaz tartalmazza F_1-et a keresztezés-mentesség miatt, mivel $(S \cup T) - F \subseteq F_1 \cap F_s$ és $s \notin F_1$ illetve $s \notin F_s$. Így viszont F_1 elhagyható lenne, ami ellentmond $\mathcal{F}$ minimalitásának. $\square$

Az állítást $\mathcal{F}$ halmazonként vett komplementerére alkalmazva kapjuk:

2.4.8. Állítás. *$F \in \mathcal{F}$-re egyértelműen létezik olyan $B \subseteq S$ atom, hogy minden $F' \in \mathcal{F}$-re, melyre $F \subseteq F'$ $B \subset F'$.*

Az F-hez tartozó irányított e_F él a fent definiált két halmaz közt fut: a B halmazból az A halmazba.

2.4.9. Állítás. *Ha így definiáljuk az éleket, akkor a kapott irányított gráfban az F halmazba csak az $e_F = \overrightarrow{BA}$ él lép be, és nem lép ki belőle él.*

Bizonyítás: F-be azért nem lép másik él, mert ha feltesszük, hogy egy $e_{F'}$ is belép F-be, akkor mivel $e_{F'}$ töve $S - F$-ben van, és F és F' metszik egymást, viszont nem keresztezők, így vagy $F \subset F'$ vagy $F' \subset F$. Ha $F \subset F'$, akkor $e_{F'}$ hegye nem lehet F által tartalmazott atom így $e_{F'}$ nem lép be F-be, ha pedig $F' \subset F$, akkor $e_{F'}$ töve nem lehet F-től diszjunkt atom, így $e_{F'}$ ekkor sem léphet F-be, ami ellentmondás.

Annak bizonyításához, hogy F-ből nem léphet ki él, tegyük fel indirekten, hogy az $e_{F'} = \overrightarrow{B'A'}$ él kilép F-ből. Először azt látjuk be, $B \subset F'$. Ehhez megmutatjuk, hogy $B \not\subseteq F'$ esetén $B' \not\subseteq F$, azaz $e_{F'}$ nem lép ki F-ből, ami ellentmodás. B' definíciója szerint minden F'-t tartalmazó $\mathcal{F}$-beli F'' halmaz tartalmazza B'-t, így

metszi F-et. Ha B nem lenne részhalmaza F'-nek, akkor választhatjuk úgy F''-t, hogy ne tartalmazza B-t, mivel $B \neq B'$, így ekkor $F \cup F'' \neq S \cup T$. $A' \subseteq F'' - F$, mivel $e_{F'}$ kilép F-ből, így $F'' \nsubseteq F$. $\mathcal{F}$ keresztezés-mentessége miatt így már csak az az eset maradt, hogy $F \subset F''$, ami viszont azt jelentené, hogy F'' egy olyan F-et tartalmazó $\mathcal{F}$-beli halmaz, mely nem tartalmazza B-t, ami ellentmond B definíciójának. Láttuk tehát, hogy $B \subseteq F'$. Ekkor viszont $\mathcal{F}$ S-T-elválasztó volta miatt van A'-t tetszőleges $s \in B$-től elválasztó $G \in \mathcal{F}$ halmaz, mely A' definíciója miatt nem része F'-nek, viszont mivel $\mathcal{F}$ keresztezésmentes, így nem is keresztezheti F'-t, tehát $(S \cup T) - F' \subset G$. G F-et sem keresztezi, így, mivel $B' \subseteq G \cap F$, és s-et egyik sem tartalmazza, $F \subset G$. Ekkor viszont G egy olyan F-et tartalmazó $\mathcal{F}$-beli halmaz, mely nem tartalmazza B-t, ami ellentmond B definíciójának. □

A fenti állítás miatt a kapott irányított gráf irányítatlan értelemben körmentes, tehát irányított erdő. Azt hogy összefüggő úgy mutatjuk meg, hogy éleinek száma a csúcsszámánál eggyel kevesebb, azaz maximális körmentes, tehát fa. Mivel az élek és $\mathcal{F}$ elemei között bijekció van, így az élek száma pont $|\mathcal{F}|$.

2.4.10. Állítás. *$\mathcal{F}$ keresztezésmentes halmazrendszer atomjainak száma legfeljebb eggyel több $\mathcal{F}$ elemszámánál.*

Bizonyítás: Indukcióval $|\mathcal{F}|$-re: az állítás $|\mathcal{F}| = 1$-re nyilvánvaló. Legyen $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{F\}$. Azt látjuk be, hogy $\mathcal{F}'$ atomjainak a száma legfeljebb eggyel több $\mathcal{F}$ atomjainak a számánál, amiből indukció miatt következik az állítás. $\mathcal{F}'$-nek úgy lehet legalább 2-vel több atomja $\mathcal{F}$-nél ha F metszi, de nem tartalmazza két atomját $\mathcal{F}$-nek, mégpedig A_1-et és A_2-t. Ekkor viszont $\mathcal{F}$-nek kell, hogy legyen olyan F' eleme, mely ezek közül pont az egyiket, például A_1-et tartalmazza, viszont így F keresztezi F'-t, mivel F'-nek van F-ben sőt A_1-ben eleme, van F-en kívüli mégpedig A_2-beli tagja, az uniójukon kívül van elem például A_2-ben, és F'-nek is van olyan eleme A_1-ben, melyet nem tartalmaz F. □

Ezzel a Lemma bizonyítását befejeztük. □

A 2.4.2. Lemmából és a 2.4.6. Lemmából egy algoritmikus bizonyítást kapunk az alábbi tételre.

A 2.4.1. Tétel bizonyítása: A 2.4.2. Lemmában kapott $\mathcal{G}$ halmazrendszert minimalizálva a 2.4.6. Lemma szerint S-T-fa-kompozíciót kapunk. □

Amennyiben rendelkezésre áll egy adott $s \in S$, $t \in T$-re a minimális $\overline{s}t$-halmazt meghatározó orákulum, akkor a 2.4.2. Lemma algoritmust is ad $\mathcal{G}$ előállítására. Ez $O(|S||T|)$-szer hívja meg a minimális $\overline{s}t$-halmazt meghatározó orákulumot, illetve kereső algoritmust futtat a kívánt hipergráfokon, melyek futási ideje adott $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfon $O(\sum_{E \in \mathcal{E}} |E| + |V|)$, ami becsülhető $O(|S|^2|T|^2)$-tel. $\mathcal{G}$ minimalizálását mohón elvégezhetjük, ha van egy táblázatunk, melyben tároljuk, hogy adott $s \in S$, $t \in T$-re hány $\overline{s}t$-halmaz van $\mathcal{G}$-ben. Egy halmazt akkor dobhatunk ki $\mathcal{G}$-ből, ha minden általa elválasztott $s \in S$, $t \in T$-re ez a szám nagyobb, mint egy. Ekkor az ilyen $s \in S$, $t \in T$-kre csökkentsük a számot eggyel és dobjuk ki a halmazt. Ez szintén $O(|S|^2|T|^2)$ idejű.

2.4.11. Megjegyzés. *A 2.4.1. Tétel bizonyítható a 2.2.2. Tétel segítségével is úgy, hogy egy keresztezés-mentes S-T-elválasztó halmazrendszernek elkészíjük a fa-reprezentációját, és ennek segítségével csökkentjük a rendszer elemszámát, amíg a rendszer S-T-fa-kompozíció nem lesz.*

2.4.12. Megjegyzés. *Az 1.2.8. tétel mutatja, hogy a teljes reszelt kiszámításához hasznos lehet, az itt leírt fa-kompozíció-algoritmus. Ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk, helyette más algoritmust adunk a teljes reszelt kiszámítására.*

3. fejezet

Általános tételek és algoritmusok

Ebben a fejezetben a poliéderes kombinatorika témaköréhez tartozó messzemenően általános tételeket és algoritmusokat tekintünk át. Az itteni eredményeket a 4. fejezetben irányítási tételekhez és algoritmusokhoz fogjuk felhasználni.

3.1. Metsző szubmoduláris függvények reszelése

Ebben a szakaszban bemutatjuk a [9] cikkben leírt reszelő algoritmust, mely kiszámítja egy S-en értelmezett metsző szubmoduláris függvény reszeltjét egy $S' \subseteq \subseteq S$ halmazon, és megad egy (1.4) jobb oldalát minimalizáló partíciót.

A reszelt definíciójából látható, hogy $\mathcal{F}(b^\vee) = \{\bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(b)$ diszjunkt halmazokból álló halmazrendszer$\}$, ami a 2.1.2. Állítás szerint a $\mathcal{F}(b)$-t tartalmazó legszűkebb halmazgyűrű. Láttuk, hogy erre $G(\mathcal{F}(b)) = G(\mathcal{F}(b^\vee))$.

A Reszelési tételből látható, hogy $p \equiv -\infty$-re p és $b^\vee$ paramoduláris párt alkot, így $Q(p, b^\vee) = S(b^\vee) = S(b)$ g-polimatroid, és így az 1.2.5. Tétel szerint $b^\vee(A) = = \max\{z(A) : z \in S(b)\}$. Tehát olyan algoritmusra van szükségünk, mely $z \in S(b)$-re maximalizálja a $z(A)$-t.

Ezt az alábbi mohó algoritmus megoldja, amennyiben rendelkezésre áll egy olyan „minimalizáló” orákulum, mely tetszőleges $a \in \mathbb{R}^S$ vektorra, és $X \subseteq S$ halmazra kiszámolja $\min\{b(Z) - a(Z) : Z \subseteq X\}$ értékét, továbbá megad egy Z halmazt, ahol a minimum felvétetik. Tegyük fel továbbá, hogy rendelkezésünkre áll a $G(\mathcal{F}(b)) = = G(\mathcal{F}(b^\vee))$ gráf, melyet a „minimalizáló” orákulummal könnyen előállíthatunk, mivel azt kell eldönteni minden $s, t \in S$-re, hogy van-e $\overline{s}t$-halmaz, ami megtehető a

$\min\{b'(Z) : Z \subseteq S - t\}$ érték kiszámításával olyan a vektoron, mely értéke s-en nagyobb, mint b maximális értéke, mindenütt máshol pedig 0.

3.1.1. Algoritmus (Reszelő algoritmus). Bemenet: $b : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *metsző szubmoduláris függvény,* $A \subseteq S$ *halmaz.*
Kimenet: $b^\vee(A)$ *értéke, és egy* $\mathcal{P}$ *partíciója* A*-nak, mely* (1.4) *jobb oldalát minimalizálja.*
Előkészület:
A 2.1.1. Állítás alapján, mivel $\mathcal{F}(b^\vee)$ *halmazgyűrű, ellenőrizhetjük, hogy* $b^\vee(A)$ *véges-e, és amennyiben az, azaz lép ki él* $G(\mathcal{F}(b)) = G(\mathcal{F}(b^\vee))$*-ben* A*-ból, akkor könnyen elkészíthetjük* A *elemeinek egy olyan* $A = \{u_1, u_2, ..., u_{|A|}\}$ *sorbarendezését, hogy* $b(\{u_1, u_2, ..., u_i\}) < \infty$ *minden* $i = 1,2, ..., |A|$*-ra, mégpedig úgy, hogy ha az* uv *él lépett ki* A*-ból, akkor legyen* $u_1 := u$*, és* A *többi elemét rendezzük sorba tetszőlegesen.*
Mohó algoritmus:
Fusson i 1-*től* $|A|$-*ig*
$z(u_i) := \min\{b(B) - z(B - u_i) : B \subseteq \{u_1, u_2, ..., u_i\}, u_i \in B\}$, *értéket a „minimalizáló" orákulummal kiszámoljuk, és tároljuk azt a* B_i *halmazt, ahol a minimum felvétetik.*
Adjuk ki $z(A)$*-t, és azt a* $\mathcal{P}$ *partícióját* A*-nak, melyet az* $(A, \{B_i : i = 1,2, ..., |A|\})$ *hipergráf összefüggő komponensei adnak.*

3.1.2. Állítás. *A Reszelő algoritmus jó.*

Bizonyítás: z értékét A-n kívül definiáljuk $-\infty$-nek, (vagy ha véges értéket akarunk akkor nagyon kicsinek), és így $z \in S(b)$, mivel $B \subseteq A$-ra $z(B) \leq b(B)$, mivel $i^* := \max\{i : u_i \in B\}$-re $z(u_{i^*}) \leq b(B) - z(B - u_{i^*})$, és $B \not\subseteq A$-ra $z(B) = -\infty$ (illetve elég kicsi).

Belátjuk, hogy z $\mathcal{P}$ minden elemén pontos, azaz $B \in \mathcal{P}$-re $z(B) = b(B)$. Ebből következik az, hogy $z(A)$ maximális, mivel $\mathcal{P}$ partíciója A-nak, és így ha $z'(A) > z(A)$, akkor van olyan $B \in \mathcal{P}$, melyre $z'(B) > z(B) = b(B)$, amiből $z' \notin S(b)$. Következik továbbá az is, hogy $z(A) = b(\mathcal{P})$.

Legyen tehát $B \in \mathcal{P}$. B, mivel hipergráf komponens előáll mint néhány B_i halmaz uniója, ahol az unió vehető halmazonként úgy, hogy mindig egy az addigiak unióját

metsző B_i-t uniózzuk a többihez. $b(B_i) = z(B_i)\ z(u_i)$ definíciója miatt. Mivel b metsző szubmoduláris, így B' és B'' pontos halmazokra $z(B') + z(B'') = b(B') + + b(B'') \geq b(B' \cup B'') + b(B' \cap B'') \geq z(B' \cup B'') + z(B' \cap B'') = z(B') + z(B'')$, amiből $B' \cap B''$ és $B' \cup B''$ is pontosak. Így tehát B is pontos lesz, mivel mint fent beláttuk előáll úgy, hogy mindig két metsző pontos halmazt uniózunk össze, aminek az eredménye pontos halmaz. □

A reszelő algoritmus futásideje így polinomiális. Amennyiben $G(\mathcal{F}(b))$ már rendelkezésre áll az előkészület $O(|A|)$ időben végrehajtható, a mohó részben pedig a „minimalizáló" orákulum $|A|$-szor fut, majd kereső algoritmus fut egy $|A|$-n adott hipergráfon, melynek ideje $O\left(\sum_{i=1}^{|A|} |B_i|\right) = O(|A|^2)$.

A Reszelő algoritmus alkalmas metsző szubmoduláris (és hasonlóan metsző szupermoduláris) függvény által adott bázis-poliéder egy (amennyiben a függvény egészértékű rács)pontjának kiszámítására, ha azt $A = S$-re futtatjuk, és a kapott z vektorra $z(S) = b(S)$. Amennyiben $z(S) \neq b(S)$, akkor, mivel $z(S) \leq b(S)$, $z(S) < b(S)$, és az algoritmus kiad egy olyan $\{S_1, S_2, ..., S_q\}$ partíciót, melyre $\sum_{i=1}^{q} b(S_i) = z(S) < < b(S)$, ami miatt $B(b)$ üres. Ezzel bizonyítást kaptunk az alábbi tételre.

3.1.3. Tétel. *Legyen $b : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ metsző szubmoduláris függvény. Ekkor $B(b)$ akkor és csak akkor nemüres, ha S minden $\mathcal{P}$ partíciójára teljesül a*

$$b(\mathcal{P}) \geq b(S) \tag{3.1}$$

egyenlőtlenség.

3.2. Fujishige tétele algoritmikusan

Ebben a szakaszban két algoritmust adunk Fujishige alábbi tételére.

3.2.1. Tétel (Fujishige [10]). *Legyen b keresztezőn szubmoduláris függvény S-en, melyre $b(S) = 0$. Ekkor a b által meghatározott $B(b)$ bázis-poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha S minden $\{S_1, S_2, ..., S_q\}$ partíciójára*

$$\sum_{i=1}^{q} b(S_i) \geq 0 \tag{3.2}$$

és

$$\sum_{i=1}^{q} b(S - S_i) \geq 0, \tag{3.3}$$

azaz rövidebben S minden $\mathcal{P}$ partíciójára vagy ko-partíciójára $b(\mathcal{P}) \geq 0$ Ha b egész-értékű, akkor $B(b)$ tartalmaz rácspontot.

Bizonyítás: A feltételek szükségessége következik abból, hogy $z \in B(b)$ tetszőleges pontra $0 = z(S) = \sum_{i=1}^{q} z(S_i) \leq \sum_{i=1}^{q} b(S_i)$, illetve $0 = (q-1)z(S) = \sum_{i=1}^{q} z(S - S_i) \leq$ $\leq \sum_{i=1}^{q} b(S - S_i)$.

Az elégségesség bizonyításához megadunk egy $z \in B(b)$ pontot, mely egész b esetén rácspont. b-t az egyelemű halmazokon csökkentve a kapott b'-re a keresztező szubmodularitás továbbra is érvényben marad, továbbá $B(b') \subseteq B(b)$. Egy $\mathcal{P}$ partíciót vagy ko-partíciót nevezzünk akkor pontosnak, ha $b(\mathcal{P}) = 0$. Minden $s \in$ $\in S$-re $b(s)$ esetleges csökkentésével, mely egészértékű b-re nyilván egész csökkentés, feltehető, hogy $\{s\}$ benne van egy pontos partícióban vagy ko-partícióban. Mivel az $\{s\}$-et tartalmazó ko-partíció csak az $\{\{s\}, S - s\}$ lehet, mely egyben partíció is, így $\{s\}$ benne lesz pontos partícióban, nevezzük ezt $\mathcal{P}_s$-nek. Legyen $z(s) := b(\{s\})$. Azt kell belátnunk, hogy minden $X \subseteq S$-re $z(X) \leq b(X)$ teljesül, valamint azt, hogy $z(S) = 0$. Ennek belátásához érdemes kimondani az alábbi állítást.

3.2.2. Állítás. *S tetszőleges $\mathcal{K}$ kompozíciójára $b(\mathcal{K}) \geq 0$.*

Bizonyítás: $\mathcal{K}$-ra a kikeresztezési eljárást alkalmazva kapunk egy $\mathcal{K}'$ keresztezésmentes kompozíciót, melyre a 2.3.2. Állítás szerint $b(\mathcal{K}) \geq b(\mathcal{K}')$. $\mathcal{K}'$ a 2.2.3. Lemma szerint felbomlik partíciókra és ko-partíciókra, ezeken b nemnegatív a tétel feltételei szerint, így $\mathcal{K}$-n is. □

Legyen tehát $X \subseteq S$ tetszőleges halmaz. Alkalmazva $\mathcal{K}_X := \bigcup_{s \in X} (\mathcal{P}_s - \{s\}) \cup$ $\cup \{X\}$-re a fenti állítást kapjuk, hogy

$$0 \leq b(\mathcal{K}_X) = \sum_{s \in X} (b(\mathcal{P}_s) - b(\{s\})) + b(X) = 0 - z(X) + b(X),$$

amiből $z(X) \leq b(X)$.

A fentiekből azt is tudjuk, hogy $z(S) \leq b(S) = 0$, és (3.2)-t az egyelemű halmazokból álló partícióra alkalmazva kapjuk, hogy $z(S) = \sum_{s \in S} b(\{s\}) \geq 0$. □

A fenti bizonyításból algoritmust kaphatunk, a 3.1.1. Reszelő algoritmus segítségével, amennyiben b véges értékű. A reszeltet olyan b' függvényre szeretnénk kiszámolni, melyet úgy kapunk, hogy b-t csökkentjük néhány egyelemű halmazon, és megszorítjuk $S - s$-re valamilyen $s \in S$-sel. Az így kapott b' függvény metsző szubmoduláris, és b „minimalizáló" orákulumából könnyen nyerhető ennek is egy „minimalizáló" orákuluma, mivel a b-re vonatkozó minimum kiszámítása után még ezt össze kell hasonlítani az egy elemű halmazokon vett értékeivel $b' - a$-nak. Így a Reszelő algoritmus tényleg ki tudja számolni b' reszeltjét $S - s$-en, és mivel b véges értékű, így az algoritmus első felére nincs szükség.

3.2.3. Algoritmus (*). Bemenet: *$b : 2^S \to \mathbb{R}$ keresztező szubmoduláris függvény, melyre $b(S) = 0$.*
Kimenet: *$z \in B(b)$, mely ha b egészértékű, akkor rácspont, illetve ha $B(b) = \emptyset$, akkor egy olyan $\mathcal{P}$ partíció, vagy ko-partíció, melyre $b(\mathcal{P}) < 0$.*
Legyen $S = \{s_1, s_2, ..., s_{|S|}\}$.
Legyen $b'(X) := b(X)$ $X \subseteq S$-re.
Fusson *i 1-től $|S|$-ig*
  Legyen $z(s_i) := -\min\{b'(\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ partíciója $S - s_i$-nek$\}$,
  és legyen $\mathcal{P}_{s_i}$ $S - s_i$ azon partíciója, melyre a minimum felvétetik.
  $b'(\{s_i\}) := z(s_i)$.
%Most ellenőrizzük, hogy z $B(b)$-ben van-e:
Ha *$\min\{b(Z) - z(Z) : Z \subseteq S\} < 0$, és a minimum egy X halmazon vétetik fel,* Akkor *a $\mathcal{K}_X := \bigcup_{s \in X} (\mathcal{P}_s - \{s\}) \cup \{X\}$ kompozícióra alkalmazzuk a kikeresztezési eljárást, és a keletkezett keresztezés-mentes $\mathcal{K}'_X$ kompozíciót a 2.2.3. Lemma bizonyításában leírtak alapján partíciókra bontjuk. Ezen partíciók egyikén b negatív.*

Az algoritmus $O(|S|)$-szer futtatja a reszelő algoritmust, majd egyszer futtatja a b-t minimalizáló orákulumot, és amennyiben $B(b)$ nemüres itt megáll. Ellenkező esetben egy $O(|S|^2)$ méretű kompozícióra futtatja a kikeresztező algoritmust, melyről a 2.3. szakaszban láttuk, hogy így $O(|S|^7)$ idejű. Ez majorálja a hátralevő két lépés idejét is. A futásidő így $O(|S|^2\theta + |S|^7)$, ahol θ a „minimalizáló" orákulum futásideje.

Láthatjuk, hogy a sértő partíció megtalálása bonyolult és lassú is, pláne annak tükrében, hogy a „minimalizáló” orákulum futási ideje a gyakorlatban $|S|^5$-nél kevesebb. Egy egyszerű trükkel, melyet a [9] cikkben találunk, ez egyszerűsíthető, sőt ez az algoritmus végtelen értékeket felvevő keresztező szubmoduláris függvényeken is használható. A cikkben leírt teljes reszelő algoritmusban van egy kis, könnyen javítható hiba, amit az alábbi leírásban áthúzással jelöltem. A hiba valószínűleg a 3.2.1. Tételnek a cikkben leírt bizonyítása miatt került be az algoritmusba, egyben egy kis gyorsítást is adna. A hibát Naitoh és Fujishige vette észre és javította ki [17] (lásd a 3.2.6. Megjegyzésben leírtakat).

3.2.4. Algoritmus (Teljes reszelő algoritmus). Bemenet: *$b : 2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ keresztező szubmoduláris függvény, melyre $b(S) = 0$.*

Kimenet: *$z \in B(b)$, mely ha b egészértékű, akkor rácspont, illetve ha $B(b) = \emptyset$, akkor egy olyan $\mathcal{P}$ partíció, vagy ko-partíció, melyre $b(\mathcal{P}) < 0$.*

1. rész

Legyen $S = \{s_1, s_2, ..., s_{|S|}\}$.

Legyen $b_1(X) := b(X), b_2(X) := b(S - X)$ $X \subseteq S$-re.

Fusson *i 1-től $|S|$-ig*

~~Ha $b(s_i) + b(S - s_i) = 0$, akkor $z(s_i) := b(\{s_i\})$,~~

~~ha $b(s_i) + b(S - s_i) < 0$, akkor $\{s_i, S - s_i\}$ sértő partíció,~~

~~különben pedig~~

Legyen $f(s_i) := \min\{b_1(\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ partíciója $S - s_i$-nek$\}$, és legyen $\mathcal{F}$ $S - s_i$ azon partíciója, melyre a minimum felvétetik.

Legyen $g(s_i) := \min\{b_2(\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ partíciója $S - s_i$-nek$\}$, és legyen $\mathcal{G}$ $S - s_i$ azon partíciója, melyre a minimum felvétetik.

Ha $f(s_i) + g(s_i) < 0$, Akkor Ugorj *a 2. részhez,*

Különben *legyen $z(s_i) \in [-f(s_i), g(s_i)]$, tetszőleges (ha lehet egész) szám, és legyen $b_1(\{s_i\}) := z(s_i), b_2(\{s_i\}) := -z(s_i)$.*

Ha *$i = n$,* Akkor *$z \in B(b)$-t adjuk ki.*

2. rész

Amíg *van átmetsző $F \in \mathcal{F}$ és $G \in \mathcal{G}$*

$\mathcal{F} := \mathcal{F} - \{F\} \cup \{F - G\}, \mathcal{G} := \mathcal{G} - \{G\} \cup \{G - F.\}$

3.2.5. Megjegyzés. *A kapott $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ rendszerre továbbra is igaz, hogy $\bigcup\mathcal{F} = \bigcup\mathcal{G}$-nek $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ is partíciója, valamint, hogy $b_1(\mathcal{F}) + b_2(\mathcal{G}) < 0$, mivel amennyiben $F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}$ átmetsző halmazok, akkor egyik sem egy elemű, és így $b_1(F)+b_2(G) = = b(F) + b(S-G) \geq b(F \cup (S-G)) + b(F \cap (S-G)) = b_1(F-G) + b_2(G-F)$, mivel b keresztező szubmoduláris, és F és G keresztező, mivel mindkettő $S-u_i$-nek része, és átmetszőek, így F és $S-G$ is keresztezők.*

Az átmetsző párok megszűntetése miatt $F \in \mathcal{F}$-re és $G \in \mathcal{G}$-re ha $F \cap G \neq \emptyset$, akkor $F \subseteq G$ vagy $G \subseteq F$. Ha $F \subseteq G$, akkor $\mathcal{F}$ elemeiből kiválasztható G-nek egy partíciója, mivel tetszőleges $a \in G-F$-et fedő F' halmaz nem tartalmazhatja G-t, mivel $\mathcal{F}$ elemei diszjunktak. Hasonlóan látható, hogy ha $G \subseteq F$, akkor $\mathcal{G}$ elemeiből kiválasztható F-nek egy partíciója. E miatt $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ elemei feloszthatóak $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ és $\mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ diszjunkt részrendszerekre $(i, j = 1,2, ...)$ úgy, hogy minden $\mathcal{F}_i$ egy $F \in \mathcal{F}$ halmazból, és az ezt particionáló $\mathcal{G}$-beli halmazokból áll, és minden $\mathcal{G}_i$ egy $G \in \mathcal{G}$ halmazból, és az ezt particionáló $\mathcal{F}$-beli halmazokból áll.

Az algoritmus befejezése:

Készítsük el a $\mathcal{F}_i$ és $\mathcal{G}_j$ részrendszereket. Ha *van, válasszunk ki egy olyan $\mathcal{F}_i$-t mely elemei az $F \in \mathcal{F}$ és $G_1, G_2, ..., G_k \in \mathcal{G}$ halmazok, és ezekre $b_1(F) + \sum_{\ell=1}^{k} b_2(G_\ell) < 0$, és adjuk ki az $F, S-G_1, S-G_2, ..., S-G_k$ ko-partíciót.*

Különben *válasszunk ki egy olyan $\mathcal{G}_i$-t mely elemei az $G \in \mathcal{G}$ és $F_1, F_2, ..., F_k \in \mathcal{F}$ halmazok, és ezekre $b_2(G) + \sum_{\ell=1}^{k} b_1(F_\ell) < 0$, és adjuk ki a $S-G, F_1, F_2, ..., F_k$ ko-partíciót.*

3.2.6. Megjegyzés. *Az eredeti [9]-beli algoritmussal az a probléma, hogy amennyiben $B(b)$ üres, akkor is ki tud adni egy z vektort, mint $B(b)$ egy elemét. Ezt mutatja például az alábbi példa, mely Fujishige és Naitoh [17] ellenpéldájának véges értékű változata.*

Legyen $S = \{1,2,3,4\}$, és legyen $b(X) = 0$, ha $|X| = 0,1,3$ vagy 4, legyen $b(X) = = -1$, ha $X \in \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, és különben legyen $b(X) = 1$. Ekkor b keresztezőn szubmoduláris, $B(b) = \emptyset$, mert az $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ sértő partíció, viszont az algoritmus a $z \equiv 0$ vektort adja ki, mint $B(b)$ egy elemét.

3.2.7. Állítás. *A Teljes reszelő algoritmus javított változata már jó.*

Bizonyítás: Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor $B(b) \neq \emptyset$. Ekkor a 3.2.1. Tétel szerint S minden $\mathcal{P}$ partíciójára vagy ko-partíciójára teljesül, hogy $b(\mathcal{P}) \geq 0$. Az algoritmus, hasonlóan a Fujishige-tétel bizonyításához b értékét csökkenti az egy elemű halmazokon és ezek komplementerén úgy, hogy ez a tulajdonság a kapott b'-re megmarad, és minden $s \in S$-re $b'(s) + b'(S - s) = 0$. Be kell látnunk, hogy $z(X) \leq b(X)$ minden $X \subseteq S$-re. $X = \{s_i\}$-re ez tejesül, mert $z(s_i) \leq g(s_i) \leq b_2(S - s_i) = b(\{s_i\})$, és hasonlóan teljesül $X = S - s_i$-re $z(S - s_i) \leq f(s_i) \leq b_1(S - s_i) = b(S - s_i)$, ha pedig $|X| \neq 1, |S| - 1$, akkor mivel S minden s elemére az $\{\{s\}, S - s\}$ b'-pontos partíció, és b'-re teljesül a Fujishige-tétel feltétele, ezért a tétel bizonyításában leírtak alapján a $z(s) := b'(\{s\})$ $(s \in S)$ vektor benne van $B(b')$-ben, és így $z(X) \leq b'(X) = b(X)$, sőt az is igaz, hogy $z(S) = 0$.

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor $B(b) = \emptyset$. Ekkor a 3.2.1. Tétel szerint S-nek van olyan $\{S_1, S_2, ..., S_q\}$ partíciója, melyre (3.2) vagy (3.3) megsérül. Legyen $i^* := \min\{\max\{i : s_i \in S_j\} : j = 1,2, ..., q\}$. Azt látjuk be, hogy az algoritmus legkésőbb az i^*-adik lépésben kiad egy partíciót. Feltehetjük, hogy $s_{i^*} \in S_1$. Amennyiben az algoritmus nem ugrik át korábban a 2. részhez, akkor

$$f(s_{i^*}) \leq \sum_{j=2}^{q} b_1(S_j) + \sum_{s_i \in S_1, i \neq i^*} b_1(\{s_i\}) = \sum_{j=2}^{q} b(S_j) + \sum_{s_i \in S_1, i \neq i^*} z(s_i), \tag{3.4}$$

$$f(s_{i^*}) \leq b_1\left(\bigcup_{j=2}^{q} S_j\right) + \sum_{s_i \in S_1, i \neq i^*} b_1(\{s_i\}) = b(S - S_1) + \sum_{s_i \in S_1, i \neq i^*} z(s_i), \tag{3.5}$$

és

$$g(s_{i^*}) \leq \sum_{j=2}^{q} b_2(S_j) + \sum_{s_i \in S_1, i \neq i^*} b_2(\{s_i\}) = \sum_{j=2}^{q} b(S - S_j) - \sum_{s_i \in S_1, i \neq i^*} z(s_i), \tag{3.6}$$

$$g(s_{i^*}) \leq b_2\left(\bigcup_{j=2}^{q} S_j\right) + \sum_{s_i \in S_1, i \neq i^*} b_2(\{s_i\}) = b(S_1) - \sum_{s_i \in S_1, i \neq i^*} z(s_i), \tag{3.7}$$

mivel i^* definíciója szerint S_1 minden más elemére már definiáltuk z-t, és nincs olyan S_j (S_1-en kívül), melynek minden elemére definiálva lenne z_i, így speciálisan ha S_j egy elemű, akkor $b_1(S_j) = b(S_j)$, és $b_2(S_j) = b(S - S_j)$. Amennyiben (3.2) sérül meg, akkor (3.4) és (3.7) összegéből kapjuk, hogy $f(s_{i^*}) + g(s_{i^*}) < 0$, ha pedig (3.3) sérül meg, akkor (3.5) és (3.6) összegéből kapjuk, hogy $f(u_{i^*}) + g(u_{i^*}) < 0$.

Még azt kell belátnunk, hogy az algoritmus által kiadott partíció valóban sértő. A 3.2.5. Megjegyzésben láttuk, hogy a módosított $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ rendszerekre továbbra is fennáll a $b_1(\mathcal{F}) + b_2(\mathcal{G}) < 0$ egyenlőtlenség. Az $\mathcal{F}_i$ $(i = 1,2,...)$ és $\mathcal{G}_j$ $(j = 1,2,...)$ rendszerek particionálják $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$-t, így $b_1(\mathcal{F}) + b_2(\mathcal{G}) < 0$ miatt $b_1(\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_i) + b_2(\mathcal{G} \cap \cap \mathcal{F}_i) < 0$ vagy $b_1(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}_j) + b_2(\mathcal{G} \cap \mathcal{G}_j) < 0$ egyike biztosan fennáll valamely i-re vagy j-re, azaz az algoritmus tényleg ki tud adni egy sértő partíciót. □

Az algoritmus $O(|S|)$-szer futtatja a reszelő algoritmust, és amennyiben $B(b)$ nemüres megáll, viszont most ha b nem véges értékű, akkor a reszelő algoritmus minden futása előtt el kell készíteni a $G(\mathcal{F}(b_1|_{S-s_i}))$ és $G(\mathcal{F}(b_2|_{S-s_i}))$ gráfokat, mely a minimalizáló orákulum $O(|S|^2)$-szer való futtatását teszi szükségessé. (A teljesség kedvéért vegyük észre, hogy ha $j = 1$ vagy 2-re $b_j|^{\vee}_{S-s_i}(S - s_i) = \infty$, akkor ezt a reszelő algoritmus nélkül is meg tudjuk határozni, és ebben az esetben biztos nem lépünk a 2. részre.) Ha $B(b) = \emptyset$, akkor futtatjuk a második részt, melynek kikeresztező része $O(|S|^2)$ $O(|S|)$ idejű lépésből áll, míg $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ particionálása szintén $O(|S|^3)$ időben végrehajtható, és ezek közül egy sértő kiválasztásához meg kell határozni b értékét minden szóba jövő partíción, amihez b értékét meghatározó orákulumot kell $O(|S|)$-szer futtatni.

A futásidő így véges értékű b-re $O(|S|^2\theta + |S|^3)$, illetve végtelen értékeket is felvevő b-re $O(|S|^3\theta)$, ahol θ a „minimalizáló” orákulum futásideje.

Az algoritmus, amennyiben alkalmas a teljes reszelt kiszámítására, egy $A \subseteq S$ halmazon, ugyanis az 1.2.7. Tétel szerint keresztező szubmoduláris b-re $S(b) = S(b^{\downarrow})$, továbbá $G(\mathcal{F}(b)) = G(\mathcal{F}(b^{\downarrow}))$, így a 3.1.2 Állítás bizonyításában leírtak alapján ha az $S = \{s_1, s_2, ..., s_{|S|}\}$ sorrendet úgy választjuk meg, hogy $A = \{s_1, s_2, ..., s_{|A|}\}$, és $b^{\downarrow}(\{s_1, s_2, ..., s_i\}) < \infty$ minden $i = 1,2, ..., |A|$-ra, (amit amennyiben $b^{\downarrow}(A) < \infty$ meg is tehetünk), akkor z-t minden s_i-n $(i = 1,2, ..., |A|)$ a lehető legtöbbnek, azaz $g(s_i)$-nek A-n kívül pedig $-\infty$-nek definiálva $z \in S(b)$, és z maximalizálja $z(A)$ értékét $S(b)$-n, így egyenlő $b^{\downarrow}(A)$-val az 1.2.5. Tétel alapján.

A Fujishige-tételre visszavezethető annak alábbi általánosabb formája.

3.2.8. Tétel (Fujishige, általános alak). *Legyen b keresztezőn szubmoduláris függvény S-en. Ekkor a b által meghatározott $B(b)$ bázis-poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha S minden $\{S_1, S_2, ..., S_q\}$ partíciójára*

$$\sum_{i=1}^{q} b(S_i) \geq b(S), \tag{3.8}$$

és

$$\sum_{i=1}^{q} b(S - S_i) \geq (q-1)b(S). \tag{3.9}$$

Ha b egészértékű, akkor $B(b)$ tartalmaz rácspontot.

Bizonyítás: Legyen $s \in S$ kijelölt pont, és csökkentsük b értékét $b(S)$-sel az s-et tartalmazó halmazokon. Ezzel a keresztező szubmodularitás érvényben marad, és a kapott b^*-ra már $b^*(S) = 0$ is teljesül, továbbá $B(b)$ akkor és csak akkor nemüres, ha $B(b^*)$ sem az, hiszen $z \in B(b)$ értékét s-en $b(S)$-sel csökkentve egy $B(b^*)$-beli pontot kapunk, és $z \in B(b^*)$ értékét s-en $b(S)$-sel növelve egy $B(b)$-beli pontot kapunk. □

A Teljes reszelő algoritmus a fenti bizonyítás mintájára kiterjeszthető minden keresztező szubmoduláris függvényre, mivel b „minimalizáló" orákulumából könnyen elkészíthetjük b^*-nak egy „minimalizáló" orákulumát, úgy, hogy $b - a - b(S)\chi_s$-en keressük a minimumot, ahol $\chi_s \in \mathbb{R}^S, \chi_s(v) = 1$ ha $v = s$, $\chi_s(v) = 0$, ha $v \in S - s$.

Ha p keresztező szubmoduláris, akkor $-p$ keresztező szupermoduláris és $B'(p) = -B(-p)$, így Fujishige tétele megfogalmazható keresztező szupermoduláris függvény bázis-poliéderére is, továbbá a Teljes reszelő algoritmust is könnyen átvihetjük erre az esetre.

3.2.9. Tétel (Fujishige, szupermoduláris függvényekre). *Legyen p keresztezőn szupermoduláris függvény S-en. Ekkor a p által meghatározott $B'(p)$ bázis-poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha S minden $\{S_1, S_2, ..., S_q\}$ partíciójára*

$$\sum_{i=1}^{q} p(S_i) \leq p(S), \tag{3.10}$$

és

$$\sum_{i=1}^{q} p(S - S_i) \leq (q-1)p(S). \tag{3.11}$$

Ha p egészértékű, akkor $B'(p)$ tartalmaz rácspontot.

4. fejezet

Irányítások

Ebben a fejezetben elsőként megismerkedünk az irányítási algoritmussal, melyet az irányítási lemma bizonyítása ad meg. Ezt követően, ennek segítségével általános tételeket bizonyítunk különböző majdnem szupermoduláris függvényt fedő irányítások létezéséről, és algoritmust adunk ezekre a Teljes reszelő algoritmus segítségével. Speciális esetekben a szükséges „minimalizáló" orákulumot is megadjuk, így algoritmust kapunk a gyökeresen k illetve (k, ℓ)-élösszefüggő irányítás megtalálására. Ezek után egyszerűbb algoritmusokat keresünk, majd beletekintünk ezen algoritmusok egy alkalmazásába.

4.1. Irányítási lemma gráfokra és hipergráfokra

4.1.1. Lemma (Irányítási lemma, Hakimi [13]). *Legyen $G = (V, E)$ gráf csúcsain adott egy $m : V \to \mathbb{Z}^+$ függvény. Ekkor G akkor és csak akkor irányítható úgy, hogy minden v csúcsra $\rho(v) = m(v)$, ha $e(X) \geq m(X)$ minden $X \subseteq V$-re és $m(V) = |E|$. (A fenti feltétel úgy is megfogalmazható, hogy $i(Y) \leq m(Y)$ minden $Y \subseteq V$-re és $m(V) = |E|$.)*

Bizonyítás: A lemmát az alábbi általánosabb lemmából bizonyítjuk.

4.1.2. Lemma. *Egy $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak akkor van olyan irányítása, amelyben*

(a) $\rho(v) \geq f(v)$ minden $v \in V$-re, ha minden $X \subseteq V$-re $e(X) \geq f(X)$, ahol $f : V \to \mathbb{Z}^+ \cup \{-\infty\}$ függvény.

(b) $\rho(v) \leq g(v)$ *minden* $v \in V$*-re, ha minden* $X \subseteq V$*-re* $i(X) \leq g(X)$*, ahol* $g : V \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ *függvény.*

Amennyiben (a) és (b) feltétele is fennáll, továbbá $f(v) \leq g(v)$ *minden* $v \in V$*-re, akkor* G*-nek van olyan irányítása is, melyre* $f(v) \leq \rho(v) \leq g(v)$*.*

Bizonyítás: A feltételek szükségessége nyilvánvaló, hiszen egy jó irányításra $e(X) \geq \sum_{v \in X} \rho(v) \geq f(X)$, illetve $g(x) \geq \sum_{v \in X} \rho(v) \geq i(X)$.

Az elégségességet először az (a) esetben bizonyítjuk. G egy irányítására nézve nevezzük a v csúcsot hibásnak, ha $\rho(v) < f(v)$. Válasszunk G-nek egy olyan irányítását, mely hiánya, azaz a $\sum_{v \text{ hibás}} f(v) - \rho(v)$ összeg minimális, és tegyük fel indirekten, hogy van egy $s \in V$ hibás csúcs. Jelölje X az s-ből elérhető pontok halmazát. Ekkor $\delta(X) = 0$, így $e(X) = \sum_{v \in X} \rho(v)$, így az $f(X) \leq e(X)$ feltételből $f(X) \leq \sum_{v \in X} \rho(v)$. Mivel $s \in X$ hibás, azaz $f(s) > \rho(s)$, így van X-ben többletes csúcs is, azaz olyan $t \in X$, melyre $f(t) < \rho(t)$. Mivel X az s-ből elérhető pontok halmazát jelölte, ezért van s-ből t-be irányított út. Ezt az utat megfordítva $\rho(t)$ eggyel csökken $\rho(s)$ eggyel nő, és semelyik másik v csúcsra nem változik $\rho(v)$, így, mivel t többletes, s pedig hibás csúcs volt, az új irányítás hibája kisebb lesz, ami ellent mond a bizonyítás elején tett feltételeknek.

A (b) esetet hasonlóan bizonyíthatjuk, annyi változtatással, hogy most azon v csúcsokat tekintjük hibásnak, melyre $g(v) < \rho(v)$, és egy hibás csúcsba futó utat fordítunk meg.

A harmadik eset bizonyításához induljunk ki egy olyan irányításból, melyre minden $v \in V$-re $\rho(v) \leq g(v)$, és figyeljük meg, hogy a hiba-csökkentési lépésben mindig olyan s csúcs befokát növeljük, melyre $\rho(s) < f(s) \leq g(s)$, ezért az út fordítás után is $\rho(s) \leq g(s)$ megmarad, tehát minimális hibájú minden $v \in V$-re $\rho(v) \leq g(v)$ feltételnek eleget tevő irányításra minden $v \in V$-re teljesül az $f(v) \leq \rho(v)$ egyenlőtlenség. □

Az irányítási lemma bizonyítása: Figyeljük meg, hogy az $m(V) = |E|$ feltétel mellett a minden $X \subseteq V$ $m(X) \leq e(X)$ feltételt X komplementerére felírva $|E| - m(X) = m(V - X) \leq e(V - X) = |E| - i(X)$, amiből $i(X) \leq m(X)$. (Hasonlóan kapható a minden $X \subseteq V$-re $i(X) \leq m(X)$-ből $m(X) \leq e(X)$.) E miatt az általános lemmából kapjuk, hogy G-nek van olyan irányítása, melyre minden v csúcsra teljesül, hogy $m(v) \leq \rho(v) \leq m(v)$, azaz $\rho(v) = m(v)$. □

A fenti bizonyítás egy olyan algoritmust is ad egy olyan irányítás megtalálására, melyre minden $v \in V$-re $\rho(v) \geq f(v)$. Az algoritmus egy tetszőleges irányításból indul és minden lépésben egy hiányos csúcsból egy többletes csúcsba vezető utat fordít meg. Ez, amennyiben előzetesen eltároltuk a hiányos és többletes csúcsok hiányát és többletét, (ami $O(|E|)$ idejű az algoritmus elején, ezt követően minden lépésnél konstans idejű), akkor $O(|E|)$-szer csökkenti a hiányt, amit $O(|E|)$ időben megtesz, azaz a futásidő $O(|E|^2)$. Hasonló algoritmus adható a 4.1.2. Lemma másik két részére is.

Az Irányítási lemma fenti bizonyítása az általánosabb lemmával és az algoritmussal együtt hipergráfokra is hasonlóképpen elmondható. A kulcs lépés az, hogy ha $A_1, A_2, ..., A_\ell$ hiperélekből áll egy irányított hiperút s-ből t-be, azaz hogy $s \in A_1$, A_i feje a_i, melyre $a_i \in A_{i+1}$ $(1 \leq i \leq \ell-1)$, és A_ℓ feje t, akkor ennek „megfordítottját" úgy kapjuk, hogy A_1 fejének s-et, A_i fejének pedig a_{i-1}-et választjuk $(2 \leq i \leq \ell)$. Ha így definiáljuk az út „megfordítottját", akkor ha az irányítást csak egy s-ből t-be futó hiperúton fordítjuk meg $\rho(v)$ $v = s$-re nő eggyel, $v = t$-re csökken eggyel, minden más $v \in V - \{s, t\}$-re változatlan marad. Ezt beírva a fenti bizonyításba kapjuk az alábbi lemmát.

4.1.3. Lemma (Hipergráf irányítási lemma). *Legyen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf csúcsain adott egy $m : V \to \mathbb{Z}^+$ függvény. Ekkor $\mathcal{H}$ akkor és csak akkor irányítható úgy, hogy minden v csúcsra $\rho(v) = m(v)$, ha $e(X) \geq m(X)$ minden $X \subseteq V$-re és $m(V) = |\mathcal{E}|$. (A fenti feltétel úgy is megfogalmazható, hogy $i(Y) \leq m(Y)$ minden $Y \subseteq V$-re és $m(V) = |\mathcal{E}|$.)*

Irányított hipergráfban az X meghatározására alkalmazott szélességi keresés $O\left(\sum_{E \in \mathcal{E}} |E|\right)$ időben fut, ami felülről becsülhető $O(|\mathcal{E}||V|)$-vel, így az irányítási algoritmus $O\left(|\mathcal{E}| \sum_{E \in \mathcal{E}} |E|\right) \leq O(|\mathcal{E}|^2|V|)$ időben fut. (Ha a hiperélek mérete k konstanssal felülről korlátozható, akkor a szélességi keresés futási ideje $O(|\mathcal{E}|)$.)

4.2. Keresztező G-szupermuduláris függvényt fedő irányítások

Az Irányítási lemma segítségével a 3.2.1. Tételből levezetjük a nem negatív keresztezőn G-szupermoduláris függvényt fedő irányításokról szóló tételt [4].

4.2.1. Tétel. *Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcsain adott a $h : 2^V \to \mathbb{Z}_+$ keresztezőn G-szupermoduláris függvény, melyre $h(\emptyset) = h(V) = 0$. G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, (azaz olyan irányítása, melyre minden $X \subseteq V$-re $\rho(X) \geq$ $\geq h(X)$), ha V minden $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, ..., V_q\}$ partíciójára*

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V_i), \tag{4.1}$$

és

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V - V_i). \tag{4.2}$$

Bizonyítás: (4.1) szükségessége következik abból, hogy G h-t fedő irányításra $e(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{q} \rho(V_i) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V_i)$. (4.2) szükségessége pedig következik abból, hogy G h-t fedő irányításra $e(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{q} \delta(V_i) \geq \sum_{i=1}^{q} \rho(V - V_i) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V - V_i)$.

Az elégségesség bizonyításához legyen $p(X) := h(X) + i(X)$. Ekkor p keresztező szubmoduláris függvény, mivel keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra h keresztező G-szupermoduláris volta, valamint az $i(X) + i(Y) = i(X \cup Y) + i(X \cap Y) - d(X, Y)$ összefüggés miatt $p(X) + p(Y) = i(X) + h(X) + i(Y) + h(Y) \geq i(X) + i(Y) + h(X \cup$ $\cup Y) + h(X \cap Y) + d(X, Y) = i(X \cup Y) + i(X \cap Y) - d(X, Y) + h(X \cup Y) + h(X \cap$ $\cap Y) + d(X, Y) = p(X \cup Y) + p(X \cap Y)$. Igaz továbbá, hogy $p(\emptyset) = 0, p(V) = |E|$, mivel $i(\emptyset) = 0, i(V) = |E|$, és $h(\emptyset) = h(V) = 0$.

$B'(p) \neq \emptyset$ bizonyításához a 3.2.9. Tétel szerint ellenőriznünk kell minden $\mathcal{P} =$ $= \{V_1, V_2, ..., V_q\}$ -ra (3.10) és (3.11) teljesülését. A tétel (4.1) feltétele szerint

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V_i),$$

melybe $e(\mathcal{P}) = |E| - \sum_{i=1}^{q} i(V_i)$-t helyettesítve kapjuk, hogy

$$|E| - \sum_{i=1}^{q} i(V_i) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V_i),$$

amit átrendezve

$$p(V) = |E| \geq \sum_{i=1}^{q} h(V_i) + i(V_i) = \sum_{i=1}^{q} p(V_i),$$

ami pont (3.10). Hasonlóan a tétel (4.2) feltétele szerint

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V - V_i),$$

melybe $e(\mathcal{P}) = (q-1)|E| - \sum_{i=1}^{q} i(V - V_i)$-t helyettesítve kapjuk, hogy

$$(q-1)|E| - \sum_{i=1}^{q} i(V - V_i) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V - V_i),$$

amit átrendezve

$$(q-1)p(V) = (q-1)|E| \geq \sum_{i=1}^{q} h(V - V_i) + i(V - V_i) = \sum_{i=1}^{q} p(V - V_i),$$

ami pont (3.11). Így, mivel p egészértékű is feltehető, hogy van egy $m \in B(p)$ egész vektorunk, melyet fokszámelőírásnak tekintünk. Az m függvényre $m(V) = p(V) = |E|$. Az $m(X) \geq p(X)$ egyenlőtlenségből kapjuk, hogy minden $X \subseteq V$-re $m(X) \geq i(X) + h(X) \geq i(X)$, mivel h nemnegatív. Így az Irányítási lemma feltétele teljesül, tehát van G-nek olyan irányítása, ahol minden csúcs befoka $m(v)$. Erre az irányításra $\rho(X) = \sum_{v \in V} \rho(v) - i(X) = m(X) - i(X) \geq i(X) + h(X) - i(X) = h(X)$, azaz ez egy h-t fedő irányítás. □

A fenti tétel bizonyítása mutatja, hogy a Teljes reszelő algoritmus után az irányítási algoritmust futtatva megkaphatjuk a kívánt irányítást, illetve ha az nem létezik, egy sértő partíciót vagy ko-partíciót. Ezek szerint az irányítás $O(|V|^2\theta + |V|^3 + |E|^2)$ időben megkapható, ahol θ a $b = -p$-t minimalizáló orákulum futási ideje.

Most a 4.2.1. Tételből levezetjük a 3.2.1. Tétel szupermoduláris függvényekre vonatkozó alakját.

4.2.2. Tétel. *Legyen p keresztezőn szupermoduláris véges értékű függvény S-en, melyre $p(S) = 0$. Ekkor a p által meghatározott $B'(p)$ bázis-poliéderben akkor és csak akkor nemüres, ha S minden $\{S_1, S_2, ..., S_q\}$ partíciójára*

$$\sum_{i=1}^{q} p(S_i) \leq 0, \tag{4.3}$$

és

$$\sum_{i=1}^{q} p(S - S_i) \leq 0. \tag{4.4}$$

Amennyiben p egészértékű és $B'(p)$ nemüres, úgy tartalmaz rácspontot is.

Bizonyítás: [1] Csak az elégségességet bizonyítjuk. Először legyen p véges, egészértékű keresztezőn szupermoduláris, melyre (4.3) és (4.4) fennáll az alaphalmaz minden partíciójára.

Legyen $G = (S, E)$ olyan Euler-gráf, melyre teljesül, hogy minden $X \subset S$-re $p(X) + \frac{d_G(X)}{2} \geq 0$. Ilyen gráf könnyen konstruálható, mivel tetszőleges számú élet hozzávehetünk.

Ekkor a $h(X) := p(X) + \frac{d_G(X)}{2}$ függvény keresztezőn G-szupermoduláris, $h(S) = 0$, és S minden $\mathcal{P} = \{S_1, S_2, ..., S_q\}$ partíciójára

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V_i),$$

(4.3) és $e(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{q} \frac{d_G(S_i)}{2}$ miatt

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V - V_i),$$

(4.4) és $e(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{q} \frac{d_G(S_i)}{2}$ miatt. A 4.2.1. Tételből következik, hogy van G-nek h-t fedő irányítása. Ez olyan irányítást jelent, hogy minden $X \subseteq S$-re

$$\left(\sum_{v \in X} \rho(v)\right) - i(X) = \rho(X) \geq h(X) = p(X) + \frac{d_G(X)}{2}.$$

[1] A bizonyítás, bár eddig nem jelent meg sehol, csak igen kis részben saját eredhmény.

Ekkor

$$\sum_{v\in X}\left(\rho(v)-\frac{d_G(v)}{2}\right)\left(\sum_{v\in X}\rho(v)\right)-i(X)-\frac{d_G(X)}{2}\geq p(X),$$

amiből, mivel $\sum_{v\in S}\left(\rho(v)=|E|=\sum_{v\in S}\frac{d_G(v)}{2}\right)$, a $z(v):=\rho(v)-\frac{d_G(v)}{2}$, $(v\in S)$ vektor $B'(p)$-ben van, és egészértékű, mivel G Euler.

Ezzel véges, egészértékű p-re beláttuk a tételt. Ebből következik, hogy racionális értékű p-re is igaz a tétel, mivel az értékek legkisebb közös többszörösével beszorozva $B'(p)$ nemüressége, és a feltételek sem változnak.

Valós értékű p-re való áttéréshez belátjuk, hogy tetszőleges $p:2^S\to\mathbb{R}$ keresztezőn szupermoduláris, a tétel feltételeit teljesítő (innentől **„jó”**) függvény közelíthető racionális értékű „jó” függvényekkel. A $2^S\to\mathbb{R}$ „jó” függvények egy poliédert alkotnak $\mathbb{R}^{2^S}$-ben, mivel mind a keresztező halmazpárokra felírt szubmodularitási egyenlőtlenség, mind a tétel feltételei egy-egy lineáris egyenlőtlenség, melyek együtt, mivel véges sokan vannak egy poliédert határoznak meg. A poliéder racionális pontjairól tudjuk, hogy sűrűn helyezkednek el, és azok a racionális értékű „jó” függvényeknek felelnek meg, így tényleg közelíthető minden valós értékű „jó” függvény racionális értékűekkel.

Még azt kell belátnunk, hogy, ha $p:2^S\to\mathbb{R}$ „jó” függvényhez tart a $p_i:2^S\to\mathbb{Q}$ „jó” függvények egy sorozata, akkor abból, hogy a $B'(p_i)$ bázispoliéderek mind nem üresek következik, hogy $B'(p)$ sem üres. Legyen $K:=\{z\in\mathbb{R}^S:$ minden $v\in S$-re $\max\{-p(X):X\subseteq S\}+1\geq z(v)\geq\max\{p(X):X\subseteq S\}-1\}$ kocka. K-ra igaz, hogy van olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy $i\geq N$-re $B'(p_i)\subseteq K$, mivel minden elég nagy i-re és $v\in S$, $z\in B'(p_i)$-re $z(v)\geq p_i(\{v\})\geq p(\{v\})-1$, és $z(v)=-z(S-v)\leq -p_i(S-v)\leq -p(S-v)+1$. K kompakt, így a $z_i\in B'(p_i)$ vektorokból kiválasztható egy konvergens részsorozat, feltehető, hogy z_i konvergens. A kapott határértékre $z(S)=p(S)=0$, és $z(X)\geq p(X)$ minden $X\subseteq S$-re a rendőr elv szerint, mivel $z_i(S)=0$, és $z_i(X)\geq p_i(X)$ minden $X\subseteq S$ fennállt minden i-re, és p_i határértéke p z_i-jé pedig z volt.

Tehát a kapott $z\in B'(p)$, azaz $B'(p)$ nemüres. $\square$

4.3. Hipergráfok keresztező szupermoduláris függvényt fedő irányítása

A Hipergráf irányítási lemmából a 4.2.1. Tétel bizonyításával analóg módon levezethető az alábbi tétel [8].

4.3.1. Tétel. *Legyen a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf csúcsain adott a $h : 2^V \to \mathbb{Z}_+$ keresztezőn szupermoduláris függvény, melyre $h(\emptyset) = h(V) = 0$. $\mathcal{H}$-nak akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, (azaz olyan irányítása, melyre minden $X \subseteq V$-re $\rho(X) \geq h(X)$), ha V minden $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, ..., V_q\}$ partíciójára*

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V_i), \tag{4.5}$$

és

$$\sum_{A \in \mathcal{E}} (e'_{\mathcal{P}}(A) - 1) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V - V_i), \tag{4.6}$$

ahol $e'_{\mathcal{P}}(Z)$ jelöli, hogy Z hány tagját metszi $\mathcal{P}$-nek.

A 4.2.1. Tétel bizonyításának megismétléséhez képest csak annyit kell látnunk, hogy az elégségesség bizonyításánál a $p := h + i$ itt is keresztező szubmoduláris függvény, mivel egy szupermoduláris és egy keresztező szupermoduláris függvény összege.

A 4.2. szakaszhoz hasonlóan itt is algoritmust kaphatunk a kívánt irányítás megtalálására, mivel a Teljes reszelő algoritmus után a hipergráf irányítási algoritmust futtatva megkaphatjuk a kívánt irányítást, illetve ha az nem létezik, egy sértő partíciót vagy ko-partíciót. Futási időre $O\left(|V|^2\theta + |V|^3 + |\mathcal{E}| \sum_{E \in \mathcal{E}} |E|\right)$-t kapunk a két korábbi futási időből, ahol θ ismét a $b = -p$-t minimalizáló orákulum futási ideje.

4.4. Metsző szupermoduláris függvényt fedő irányítások

A 4.2. és a 4.3. szakaszokban láttuk, hogy keresztező szupermoduláris (sőt gráfokra G-szupermuduláris) függvényt fedő irányítás algoritmussal megadható, ha létezik,

illetve ellenkező esetben adható egy sértő partíció. Ez persze metsző (G-) szupermoduláris függvényen is jó, de meglehetősen bonyolult.

Láttuk, hogy a Reszelő algoritmus alkalmas metsző szubmoduláris (és így metsző szupermoduláris) függvény által adott bázis-poliéder egy (amennyiben a függvény egészértékű rács)pontjának kiszámítására. Ezt felhasználva az irányítási algoritmussal, a fentiekkel analóg módon adható egy egyszerűbb algoritmus a fedő irányítás megtalálására, melynek futási ideje $O(|V|\theta+|V|^2+|E|^2)$, ahol θ a $b=-p$-t minimalizáló orákulum futási ideje. Hasonlóan a 3.1.3. Tételből és az Irányítási lemmából igazolható az alábbi tétel [3].

4.4.1. Tétel. *Legyen a $G=(V,E)$ gráf csúcsain adott a $h:2^V\to\mathbb{Z}_+$ metsző G-szupermoduláris függvény, melyre $h(\emptyset)=0$. G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, (azaz olyan irányítása, melyre minden $X\subseteq V$-re $\rho(X)\geq h(X)$), ha V minden $\mathcal{P}=\{V_1,V_2,...,V_q\}$ partíciójára*

$$e(\mathcal{P})\geq\sum_{i=1}^{q}h(V_i). \tag{4.7}$$

Hasonlóan igazolható a 3.1.3. Tételből és a Hipergráf irányítási lemmából a 4.3.1. Tétel metsző szupermoduláris függvényekre vonatkozó változata. Az erre a változatra kapott algoritmus $O\left(|V|\theta+|V|^2+|\mathcal{E}|\sum\limits_{E\in\mathcal{E}}|E|\right)$, ahol θ ismét a $b=-p$-t minimalizáló orákulum futási ideje.

4.4.2. Tétel. *Legyen a $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$ hipergráf csúcsain adott a $p:2^V\to\mathbb{Z}_+$ metsző szupermoduláris függvény. $\mathcal{H}$-nak akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, (azaz olyan irányítása, melyre minden $X\subseteq V$-re $\rho(X)\geq h(X)$), ha V minden $\mathcal{P}=\{V_1,V_2,...,V_q\}$ partíciójára*

$$e(\mathcal{P})\geq\sum_{i=1}^{q}h(V_i). \tag{4.8}$$

A 4.4.1 tételt kiterjeszthetjük negatív függvényekre is. Ehhez vegyük észre, hogy a fentiekkel analóg módon bizonyítható, hogy egy h metsző G-szupermoduláris irányítások befokvektorai pontosan a $B'(h+i)\cap B'(i)$ metszet egész pontjai. Mivel a Reszelési tétel szerint $B'(h+i)=B'((h+i)^\wedge)$, ahol $(h+i)^\wedge$ szupermoduláris, az 1.2.9. Tételből kiolvasható az alábbi tétel, melyre szubmoduláris áramokkal való bizonyítás van [5]-ben.

4.4.3. Tétel. *Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcsain adott a $h : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ metsző G-szupermoduláris függvény, melyre $h(\emptyset) = h(V) = 0$. G-nek akkor és csak akkor létezik h-t fedő irányítása, (azaz olyan irányítása, melyre minden $X \subseteq V$-re $\rho(X) \geq h(X)$), ha V minden $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, ..., V_q\}$ szubpartíciójára*

$$e(\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^{q} h(V_i). \tag{4.9}$$

4.5. Gyökeresen k-élösszefüggővé irányítás

Legyen a $G = (V, E)$ gráfon vagy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfon adott egy $r_0 \in V$ gyökérpont. A 4.4 szakaszban tárgyalt tételeket és algoritmusokat a

$$h(X) := \begin{cases} 0, \text{ ha } r_0 \in X, \text{ vagy } X = \emptyset \\ k, \text{ különben} \end{cases}$$

metsző (szuper)moduláris függvényre alkalmazva megkapjuk az r_0-ból gyökeresen k-élösszefüggő irányítás létezésének feltételét, illetve algoritmust is kapunk az irányítás vagy egy sértő partíció megtalálására, amennyiben a $b := -h - i$-t „minimalizáló” orákulumot meg tudjuk konstruálni.

A fentiekből tehát az alábbi tételeket kapjuk.

4.5.1. Tétel. *Legyen a $G = (V, E)$ gráfnak r_0 kijelölt gyökérpontja. G-nek akkor és csak akkor létezik r_0-gyökerű k-élösszefüggő irányítása, ha k-partíció-összefüggő.*

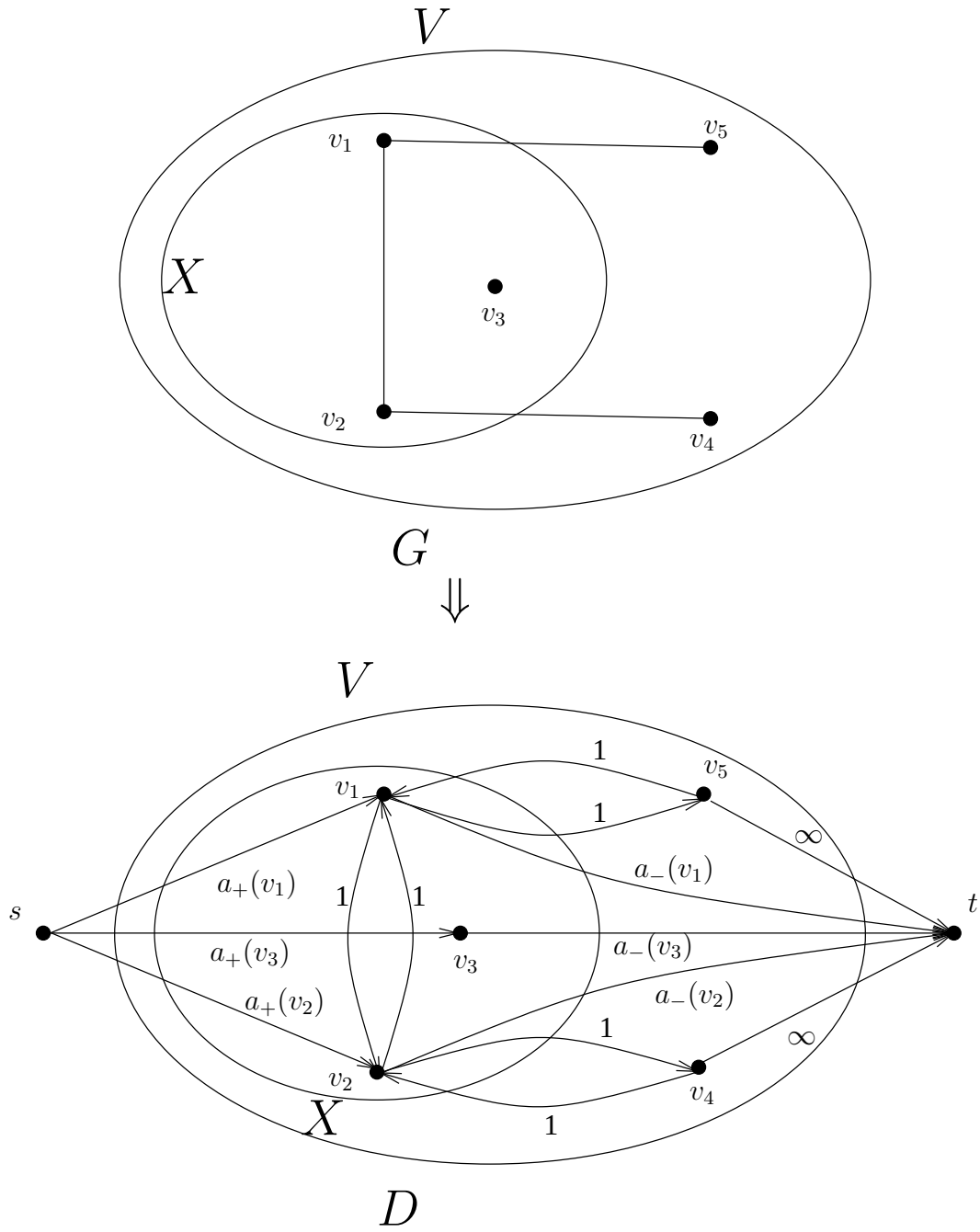
4.5.2. Tétel. *Legyen a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfnak r_0 kijelölt gyökérpontja. $\mathcal{H}$-nak akkor és csak akkor létezik r_0-gyökerű k-élösszefüggő irányítása, ha k-partíció-összefüggő.*

Mint láttuk ahhoz, hogy algoritmust kapjunk a fenti két tételre az eddigiekből szükségünk van a „minimalizáló” orákulumok megkonstruálására. Ehhez figyeljük meg, hogy $X \subset V$-re $h(X) = \sum v \in X k\chi_{r_0}(v) = (k\chi_{r_0})(X)$, ahol χ_{r_0} r_0 karakterisztikus vektora, így elég egy tetszőleges $a \in \mathbb{R}^V$-re $-i - a$-t valamely $X \subset V$-n minimalizáló orákulumot megadni, mivel $-i - h - a'$ helyett minimalizálhatunk $-$ $-i - a$-ra, ahol $a = a' + k\chi_{r_0}$, illetve $X = V$ esetén minden $v \in V$-re minimalizálunk $V - v$-n, és ezek illetve $-i(V) - a'(V)$ minimumát adjuk ki.

Gráfokra $-i(Z) - a(Z) = e(Z) - \sum_{v \in Z}(d(v) - a(v))$, így $-i(Z) - a(Z) = = \frac{e(Z)-i(Z)-\sum_{v\in Z}(d(v)-2a(v))}{2} = \frac{d(Z)-a'(Z)}{2}$, tehát elég $d-a$-t minimalizálni tetszőleges a-ra.

A $\min\{d(Z)-a(Z) : Z \subseteq X\}$ érték, és az ezt minimalizáló halmaz kiszámításához legyen $v \in V$-re $a_+(v) := \max\{a(v),0\}$, és $a_-(v) = \max\{-a(v),0\}$ a pozitív és negatív része. Vegyük azt a $D = (V \cup \{s,t\}, A)$ irányított gráfot, és azt a $c : : A \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ kapacitásfüggvényt, melyeket úgy kapunk G-ből, hogy G minden élét mindkét irányba irányítva 1 kapacitással vesszük, az új s csúcsból minden X-beli v csúcsba húzunk egy $a_+(v)$ kapacitású irányított élet, minden X-beli v csúcsból húzunk az új t csúcsba egy $a_-(v)$ kapacitású élet, és minden $V-X$-beli v csúcsból húzunk az új t csúcsba egy ∞ kapacitású élet (lásd a 4.5. ábrát). D-n szintező (elő)folyam-algoritmussal [12] meghatározható a minimális s-et t-től elvágó vágás kapacitása, sőt a vágás Z ponthalmaza is. $Z \subseteq X + s$, mivel ha Z tartalmazna $V-X$-beli csúcsot, akkor a kapacitása ∞ lenne, ami ellentmond a minimalitásnak, mivel az $X+s$ vágás kapacitása véges, mivel nem lép ki $X+s$-ből ∞ kapacitású él. Tetszőleges $Y \subseteq X$-re az $Y+s$ vágás kapacitása pont $d_G(Y)+a_-(Y)+a_+(X-Y) = = a_+(X)+d_G(Y)-a(Y)$, így $Z+s$ kapacitása minimalizálja $a_+(X)+d_G(Y)-a(Y)$ értékét $Y \subseteq X$-re, ami miatt $d_G(Z) - a(Z) = \min\{d_G(Y) - a(Y) : Y \subseteq X\}$. Az orákulum futási ideje így $\theta = O(|V|^3)$, illetve $X = V$-n $O(|V|^4)$, melyet beírva a 4.4. szakaszban kapott eredménybe gráfok gyökeresen k-összefüggővé irányítása $O(|V|^4)$ időben megkapható, mivel a Reszelő algoritmusban csak az utolsó lépésben kell V-n minimalizálni.

Hipergráfokra tekintsük az illeszkedési gráfot, és ott rendeljünk egy $E \in \mathcal{E}$ hiperélből induló e élhez $x(e) := \frac{1}{|E|}$ értéket. Ekkor $X \subseteq V$-re $i'(X)$:=az X-ből azon hiperélekhez vezető élekre írt x-értékek összege, mely hiperéleket X feszíti= $= i(X)$. Hasonlóan definiálható $e'(X)$:=az X-ből azon hiperélekhez vezető élekre írt x-értékek összege, mely hiperéleknek van pontjuk X-ben, és $d'(X)$:=az X-ből azon hiperélekhez vezető élekre írt x-értékek összege, mely hiperéleknek van pontjuk X-ben, és X-en kívül is. Ekkor $d'(X) = e'(X) - i'(X)$ és $i'(X) + e'(X) = \sum_{v \in X} d'(v)$, (ahol d'(v)=d'({v})). Így $-i(Z) - a(Z) = -i'(Z) - a(Z) = e'(Z) - \sum_{v \in Z}(d'(v) - - a(v))$, így $-i(Z)-a(Z) = \frac{e'(Z)-i'(Z)-\sum_{v\in Z}(d'(v)-2a(v))}{2} = \frac{d'(Z)-a'(Z)}{2}$, tehát elég $d'-a$-t



4.1. ábra. Segédgráf a fokszám minimalizáló orákulumhoz

minimalizálni tetszőleges a-ra.

A $\min\{d'(Z) - a(Z) : Z \subseteq X\}$ érték, és az ezt minimalizáló halmaz kiszámításához legyen ismét $v \in V$-re $a_+(v) := \max\{a(v),0\}$, és $a_-(v) = \max\{-a(v),0\}$ a pozitív és negatív része. Vegyük azt a $D = (V \cup \{s,t\} \cup \mathcal{E}, A)$ irányított gráfot, és azt

a $c : A \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ kapacitásfüggvényt, melyeket úgy kapunk az illeszkedési gráfból, hogy annak minden élét mindkét irányba irányítva bevesszük, és az $\mathcal{E}$-beli hegyűek kapacitását ∞-nek, az $A \in \mathcal{E}$ tövűek kapacitását $\frac{1}{|A|}$-nak választjuk, az új s csúcsból minden X-beli v csúcsba húzunk egy $a_+(v)$ kapacitású irányított élet, minden X-beli v csúcsból húzunk az új t csúcsba egy $a_-(v)$ kapacitású élet, és minden $V - X$-beli v csúcsból húzunk az új t csúcsba egy ∞ kapacitású élet. D-n szintező (elő)folyam-algoritmussal meghatározható a minimális s-et t-től elvágó vágás kapacitása, sőt a vágás Z ponthalmaza is. $Z \subseteq X + s \cup \mathcal{E}$, mivel ha Z tartalmazna $V - X$-beli csúcsot, akkor a kapacitása ∞, lenne, ami ellentmond a minimalitásnak, mivel az $X + s \cup \cup \mathcal{E}$ vágás kapacitása véges, mivel nem lép ki $X + s \cup \mathcal{E}$-ből ∞ kapacitású él. Az is igaz, hogy a minimális vágásra $Z \cap V$-t metsző hiperélek mind Z-ben vannak, mivel különben a kapacitás ∞ lenne, továbbá más hiperél nincs Z-ben, mivel különben kidobva a kapacitás eggyel csökkenne, így definiálható az $Y \subseteq X$ halmazhoz tartozó vágás, melynak ponthalmaza Y, s és az Y-t metsző hiperélek.

Tetszőleges $Y \subseteq X$- az Y-hoz tartozó vágás kapacitása $d'(Y) + a_-(Y) + a_+(X - -Y) = a_+(X) + d'(Y) - a(Y)$, így $Z + s$ kapacitása minimalizálja $a_+(X) + d'(Y) - a(Y)$ értékét $Y \subseteq X$-re, ami miatt $d'(Z \cap V) - a(Z \cap V) = \min\{d'(Y) - a(Y) : Y \subseteq X\}$. Az orákulum futási ideje így $\theta = O(|V|^3)$, illetve $X = V$-n ennek $|V|$-szerese, melyet beírva a 4.4. szakaszban kapott eredménybe hipergráfok gyökeresen k-összefüggővé irányítása $O\left(|V|^4 + |\mathcal{E}| \sum_{E \in \mathcal{E}} |E|\right)$ időben megkapható, mivel a Reszelő algoritmusban csak az utolsó lépésben kell V-n minimalizálni.

4.5.3. Megjegyzés (*). *A fenti két orákulum bár saját eredmény, meg kell jegyeznünk, hogy [9] megemlíti, hogy gráfokra a szükséges orákulum folyam-algoritmussal megkonstruálható, és [8] is említést tesz a hipergráfokra vonatkozó orákulum meglétéről.*

4.6. Gyökeresen (k, ℓ)-élösszefüggővé irányítás

Legyen a $G = (V, E)$ gráfon vagy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfon adott egy $r_0 \in V$ gyökérpont, és legyen $k \geq \ell$. A 4.2. és a 4.3. szakaszokban tárgyalt tételeket és

algoritmusokat a

$$h(X) := \begin{cases} 0, & \text{ha } X = \emptyset \text{ vagy } V \\ \ell, & \text{ha } r_0 \in X \neq V \\ k, & \text{különben} \end{cases}$$

keresztező szupermoduláris függvényre alkalmazva megkapjuk az r_0-ból gyökeresen (k,ℓ)-élösszefüggő irányítás létezésének feltételét, illetve algoritmust is kapunk az irányítás vagy egy sértő partíció megtalálására, mivel a $b := -h - i$-t „minimalizáló" orákulum megkonstruálható, hasonlóan az előző szakaszban leírthoz. A futási idő gráfokon így $O(|V|^5)$, hipergráfokon pedig $O\left(|V|^5 + |\mathcal{E}| \sum_{E \in \mathcal{E}} |E|\right)$. A fenti h-t behelyettesítve a 4.2.1. és a 4.3.1. tételekbe az alábbi tételeket kapjuk.

4.6.1. Tétel. *Legyen a $G = (V,E)$ gráfnak r_0 előre kijelölt gyökérpontja, és legyenek $k \geq \ell$ nemnegatív egészek. G-nek akkor és csak akkor létezik r_0-gyökerű (k,ℓ)-élösszefüggő irányítása, ha (k,ℓ)-partíció-összefüggő.*

4.6.2. Tétel. *Legyen a $\mathcal{H} = (V,\mathcal{E})$ hipergráfnak r_0 előre kijelölt gyökérpontja, és legyenek $k \geq \ell$ nemnegatív egészek. $\mathcal{H}$-nak akkor és csak akkor létezik r_0-gyökerű (k,ℓ)-élösszefüggő irányítása, ha (k,ℓ)-partíció-összefüggő.*

Mivel a Teljes reszelő algoritmus már igen bonyolult, érdemes ennél egyszerűbb algoritmust adni. Ilyen algoritmust adok az $\ell = 1$ esetre [14].

Először irányított gráfokról bizonyítunk két lemmát.

4.6.3. Lemma (*). *Legyen $D = (V,A)$ irányított gráf egy előre kijelölt $r_0 \in V$ gyökérponttal. Legyen $R \subset V$ egy r_0-at tartalmazó csúcshalmaz, melyre $D[R]$ r_0-gyökerű k-élösszefüggő és D/R r_R-gyökerű k-élösszefüggő. Ekkor D r_0-gyökerű k-élösszefüggő.*

Bizonyítás: Egy $r_0 \in X \subset V$ halmazra, melyre $R \not\subseteq X$, $\delta_D(X) \geq k$, mivel $\delta_{D[R]}(X \cup R) \geq k$, ami $D[R]$ r_0-gyökerű k-élösszefüggőségéből következik.

Egy $r_0 \in X \subset V$, melyre $R \subseteq X$, $\delta_D(X) \geq k$, mivel $\delta_{D/R}(X - R + r_R) \geq k$, ami D/R r_R-gyökerű k-élösszefüggőségéből következik. $\square$

4.6.4. Lemma (*). *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf egy előre kijelölt $r_0 \in V$ gyökérponttal. Legyen $R \subset V$ egy r_0-at tartalmazó csúcshalmaz, melyre $D[R]$ r_0-gyökerű (k, ℓ)-élösszefüggő és D/R r_R-gyökerű (k, ℓ)-élösszefüggő. Ekkor D r_0-gyökerű (k, ℓ)-élösszefüggő.*

Bizonyítás: 4.6.3. Lemmát alkalmazhatjuk D-re és D $\overleftarrow{D}$ megfordítottjára, amiből azt kapjuk, hogy D r_0-gyökerű k-élösszefüggő, és $\overleftarrow{D}$ r_0-gyökerű ℓ-élösszefüggő, amiből könnyen látható, hogy D r_0-gyökerű (k, ℓ)-élösszefüggő. □

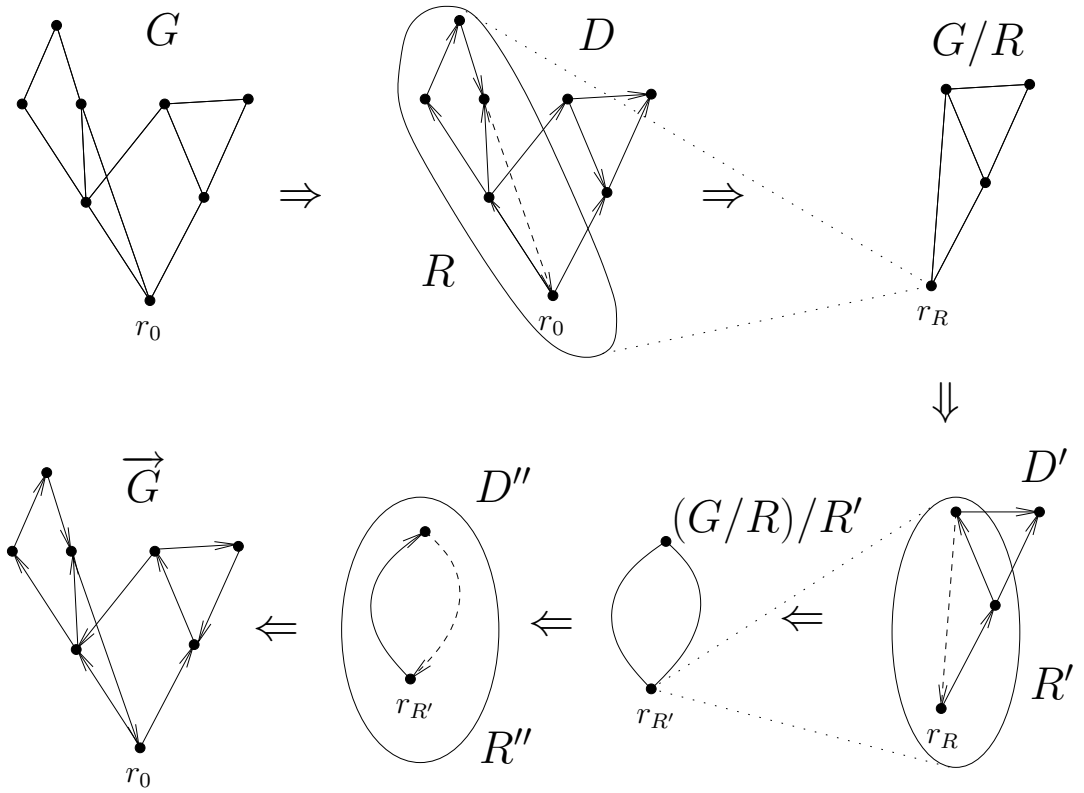
A fenti két lemmából most egy új bizonyítást adunk a 4.6.1. Tételre az $\ell = 1$ esetben. Ebből az új bizonyításból olvassuk majd ki az algoritmust.

4.6.5. Tétel. *Egy r_0 gyökerű $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor $(k, 1)$-partíció-összefüggő, ha van r_0-gyökerű $(k, 1)$-élösszefüggő irányítása.*

Bizonyítás(*): $|V|$-re vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Legyen $e_0 = r_0u \in E$ tetszőleges él. G $(k, 1)$-partíció-összefüggősége miatt, $G - e_0$ k-partíció-összefüggő, így a 4.5.1. Tétel szerint van r_0-gyökerű k-élösszefüggő irányítása ami egy D irányítását adja G-nek, ha e_0-at r_0 felé irányítjuk. Legyen R azon csúcsok halmaza, melyekből van út D-ben r_0-ba. A Menger-tétel szerint $\rho(R) = 0$ és minden X-re, melyre $r_0 \in X \subset R$, $\rho_{D[R]}(X) \geq 1$. Ebből következik, hogy a k diszjunkt út, mely r_0-ból tetszőleges $R - r_0$-beli csúcsba fut nem léphet ki R-ből, így a Menger-tétel szerint $\delta_{D[R]}(X) \geq k$ minden olyan X-re, melyre $r_0 \in X \subset R$. Így $D[R]$ r_0-gyökerű $(k,1)$-élösszefüggő. Láthatjuk, hogy $|R| \geq 2$, mivel $r_0, u \in R$, illetve, hogy ha $R = V$, akkor kész is vagyunk, hisz D G egy $(k,1)$-élösszefüggő irányítása.

Ha $R \neq V$, akkor a következőt csináljuk. Ha $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, ...X_t\}$ partíciója $V - R + r_R$-nek, ahol $r_R \in X_1$, akkor a $\mathcal{P}' = \{X_1 - r_R \cup R, X_2, X_3, ...X_t\}$ partíciójára V-nek $e_{\mathcal{P}}(G/R) = e_{\mathcal{P}'}(G) \geq k(|\mathcal{P}| - 1) + 1$. Ezek szerint G/R $(k,1)$-partíció-összefüggő. Indukció szerint G/R-nek van egy r_R-gyökerű $(k,1)$-élösszefüggő irányítása. Legyen $\overrightarrow{G}$ G-nek az az irányítása, melyet úgy kapunk, hogy $G[R]$-en megtartjuk a D által adott irányítást, és a többi élet úgy irányítjuk, mint G/R r_R-gyökerű $(k,1)$-élösszefüggő irányításában. A 4.6.4. Lemmát alkalmazva $\overrightarrow{G}$-re kapjuk, hogy $\overrightarrow{G}$ r_0-gyökerű $(k,1)$-élösszefüggő irányítása G-nek. □

A bizonyítás az alábbi algoritmust adja, melynek futása a $k = 1$ esetben a 4.6. ábrán látható, ám igazából nagyobb k-ra is hasonló.



4.2. ábra. Az $(k,1)$-élösszefüggővé irányító algoritmus futása

4.6.6. Algoritmus (*). Bemenet: *$(k,1)$-partíció-összefüggő $G = (V,E)$ gráf, melynek lehetnek többszörös élei, és van egy előre kijelölt $r_0 \in V$ gyökérpontja.*
Kimenet: *$\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$, egy r_0-gyökerű $(k,1)$-élösszefüggő irányítása G-nek.*

Legyen $e_0 = r_0u \in E$ tetszőleges él. Futtassuk a 4.5. szakaszban tárgyalt r_0-gyökerű k-élösszefüggővé irányító algoritmust $G - e_0$-on, irányítsuk e_0-at r_0 felé, és legyen az így kapott irányított gráf $D = (V, \overrightarrow{E}')$, melyben egy $e \in E$ él irányított párját $\overrightarrow{e}'$-vel jelöljük. Legyen R azon csúcsok halmaza, melyekből r_0 elérhető D-ben. (Ezt a halmazt tetszőleges kereső algoritmussal meghatározhatjuk.) Ha $R = V$, akkor D $(k,1)$-élösszefüggő, így $\overrightarrow{G} := D$-t adjuk ki. Különben $e \in E[R]$-re legyen annak $\overrightarrow{E}$-beli irányított párja $\overrightarrow{e} := \overrightarrow{e}'$. Futtassuk az algoritmust rekurzívan G/R-en r_R gyökérrel (ezt a fenti tétel bizonyítása alapján megtehetjük) és irányítsuk az $E[R]$-en kívüli éleket úgy, mint ahogy ez az algoritmus tette.

4.6.7. Megjegyzés (*). *Egy nem $(k,1)$-partíció-összefüggő gráfon ki tudunk adni egy olyan q elemű $\mathcal{P}$ partícióját V-nek, melyre $e(\mathcal{P}) \le k(q-1)$, mivel a 4.5. szakasz-*

ban leírt algoritmus ekkor valamelyik esetleg összehúzott G' gráfon futtatva nem irányítást, hanem egy $\mathcal{P}'$ partíciót ad ki, melyre $e_{G'-e_0}(\mathcal{P}') \leq k(|\mathcal{P}'|-1)$, melyből ha az összehúzással keletkezett új csúcsot az azt tartalmazó halmazban az ősképével helyettesítjük, akkor egy olyan $\mathcal{P}$ partícióját kapjuk V-nek, melyre $e_{G-e_0}(\mathcal{P}) \leq k(|\mathcal{P}|-1)$, azaz $e_G(\mathcal{P}) \leq k(|\mathcal{P}|-1)+1$.

Az algoritmust hipergráfokra is kiterjeszthetjük. Ehhez első lépésként a 4.6.3. Lemmát és a 4.6.4. Lemmát terjesztjük ki hipergráfokra:

4.6.8. Lemma (*). *Legyen $\mathcal{D} = (V, \mathcal{A})$ egy irányított hipergráf, és legyen ennek $r_0 \in V$ előre kijelölt gyökérpontja.*

1. *Legyen $R \subset V$ egy r_0-at tartalmazó olyan csúcshalmaz, melyre $\mathcal{D}[R]$ r_0-gyökerű k-élösszefüggő és $\mathcal{D}/R$ r_R-gyökerű k-élösszefüggő. Ekkor D r_0-gyökerű k-élösszefüggő.*

2. *Legyen $R \subset V$ egy r_0-at tartalmazó olyan csúcshalmaz, melyre $\mathcal{D}[R]$ r_0-gyökerű $(0,\ell)$-élösszefüggő és $\mathcal{D}/R$ r_R-gyökerű $(0,\ell)$-élösszefüggő. Ekkor D r_0-gyökerű $(0,\ell)$-élösszefüggő.*

3. *Legyen $R \subset V$ egy r_0-at tartalmazó olyan csúcshalmaz, melyre $\mathcal{D}[R]$ r_0-gyökerű (k,ℓ)-élösszefüggő és $\mathcal{D}/R$ r_R-gyökerű (k,ℓ)-élösszefüggő. Ekkor D r_0-gyökerű (k,ℓ)-élösszefüggő.*

Bizonyítás:

1. Először a lemma első részét bizonyítjuk. Ha az $r_0 \in X \subset V$ halmazra $R \not\subseteq X$, akkor $\delta_{\mathcal{D}[R]}(X \cup R) \geq k$-ból, ami $\mathcal{D}[R]$ r_0-gyökerű k-élösszefüggő volta miatt teljesül, azt kapjuk, hogy $\delta_{\mathcal{D}}(X) \geq k$. Ha az $r_0 \in X \subset V$ halmazra $R \subseteq X$, akkor $\delta_{\mathcal{D}/R}(X - R + r_R) \geq k$-ból, ami $\mathcal{D}/R$ r_R-gyökerű k-élösszefüggő volta miatt teljesül, azt kapjuk, hogy $\delta_{\mathcal{D}}(X) \geq k$.

2. A második rész bizonyítása az elsőhöz hasonlóan a következő. Ha az $r_0 \in X \subset$ $\subset V$ halmazra $R \not\subseteq X$, akkor $\rho_{\mathcal{D}[R]}(X \cup R) \geq \ell$-ből, ami $\mathcal{D}[R]$ r_0-gyökerű $(0,\ell)$-élösszefüggő volta miatt teljesül, azt kapjuk, hogy $\rho_{\mathcal{D}}(X) \geq \ell$.

   Ha az $r_0 \in X \subset V$ halmazra $R \subseteq X$, akkor $\rho_{\mathcal{D}/R}(X - R + r_R) \geq \ell$-ból, ami $\mathcal{D}/R$ r_R-gyökerű $(0,\ell)$-élösszefüggő volta miatt teljesül, azt kapjuk, hogy $\rho_{\mathcal{D}}(X) \geq \ell$.

3. A harmadik rész az első két részből rögtön következik. □

A 4.6.8. Lemma 3. részének segítségével bizonyítható a 4.6.2. Tétel az $\ell = 1$ esetben analóg módon a 4.6.5. Tétel bizonyításával. Ehhez szükség van még a 4.5.2. Tételre, és Menger-tételének irányított hipergráfokra való alábbi kiterjesztésére:

4.6.9. Tétel. *Legyen $\mathcal{D} = (V, \mathcal{A})$ irányított hipergráf s és t két tetszőleges csúcsa. Akkor és csak akkor fut k irányított hiperút s-ből t-be, ha minden X $\overline{s}t$-halmazra $\rho_{\mathcal{D}}(X) \geq k$.*

Bizonyítás: Az illeszkedési gráfot irányítsuk úgy, hogy $A \in \mathcal{A}$ irányított hiperél minden tövéből A felé legyen az él irányítva, míg a hegyhez futó él legyen a hegy felé irányítva. Az így kapott gráfban pontosan akkor van k st út, ha $\mathcal{D}$-ben is van, és erre alkalmazva az irányított él-Menger tételt kapjuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha a gráfban minden $\overline{s}t$-halmazbefoka legalább k, és könnyen látható, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{D}$-ben minden $\overline{s}t$-halmazbefoka legalább k. □

Így láthatjuk azt is, hogy a 4.6.6. Algoritmus is működik irányított hipergráfokra is.

Mindkét esetben az algoritmus futási ideje $|V|$-szerese a gyökeresen k-összefüggővé irányító algoritmus idejének, ez gráfokra megegyezik az általános elméletből nyerttel, ámde annál jóval egyszerűbb, hipergráfokra egy kicsit lassabb.

4.7. Hipergráfok erősen összefüggő irányítása

A 4.6.6. Algoritmus hipergráfokra vonatkozó változata a $k = 1$ esetben megadja a hipergráf erősen összefüggő irányítását. Ez azért jó, mert ha a gyökeresen összefüggő irányítást a 4.5. szakaszban leírtnál egyszerűbben tudnánk számolni, akkor egy egyszerű algoritmust kapnánk hipergráfok erősen összefüggő irányításának megtalálására.

4.7.1. Megjegyzés. *Gráfokra ilyen egyszerű algoritmus bármely keresési algoritmus, mivel egy tetszőleges fát a gráfban egy gyökértől kifele irányítva gyökeresen élösszefüggő irányítást kapunk, viszont gráfok erősen összefüggő irányítását fülfelbontásokkal gyorsan és egyszerűen meg tudjuk találni, így ebben az esetben nem annyira érdekes más erősen összefüggővé irányító algoritmus.*

Hasonlóan a gráfokhoz hipergráfokra is egy „feszítő fát” fogunk megkeresni, ami a hipergrafikus matroid egy bázisa.

Legyen tehát $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ egy hipergráf. Szeretnénk a $\mathcal{H}$-hoz tartozó hipergrafikus matroid egy bázisát meghatározni. Az erre vonatkozó algoritmust az alábbi tétel bizonyításából fogjuk kiolvasni:

4.7.2. Tétel (*). *Egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfban akkor és csak akkor létezik olyan γ elemű $R \subseteq V$, hogy $\mathcal{H}$ megirányítható oly módon, hogy R-ből minden más csúcs elérhető irányított úton, ha V minden $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, ...V_q\}$ partíciójára*

$$e_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) \geq q - \gamma. \tag{4.10}$$

Bizonyítás: Legyen $G = (V, \mathcal{E}, E_0)$ páros gráf a $\mathcal{H}$ illeszkedési gráfja. A tételbeli R halmaz és a hozzá tartozó irányítás megadása ekvivalens a $\mathcal{H}$ illeszkedési gráfján egy $n - \gamma$ elemű olyan „jó” párosítás éleinek lefele irányításával a többi él felfele irányítása mellett, (bár ekkor a nem fedett hiperéleket valójában nem irányítjuk meg).

4.7.3. Állítás. *G egy párosítása pontosan akkor „jó”, ha a párosítás által fedett hiperélek minden $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ részhalmazára teljesül, hogy $|\Gamma_G(\mathcal{A})| \geq |\mathcal{A}| + 1$.*

Bizonyítás: Ha az M párosítás „jó”, akkor ha lenne olyan $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$, melyre $|\mathcal{A}| \leq$ $\leq |\Gamma_G(\mathcal{A})| < |\mathcal{A}| + 1$, akkor $\mathcal{A}$-ba nem lépne $V - \Gamma_G(\mathcal{A})$-ból él, $\Gamma_G(\mathcal{A})$-ba pedig csak $\mathcal{A}$-ból mehet párosításél, így $\Gamma_G(\mathcal{A})$ nem érhető el a nem fedett pontokból alternáló úton, ami ellentmondás.

Ha pedig egy párosításra teljesül az állításban adott feltétel, akkor egy a párosítás által fedett $v \in V$ csúcsra nézzük az ő párját, ennek a szomszédai legalább ketten vannak. Ezeknek, ha mind fedettek, ismét nézzük a párjaikat, majd ezek szomszédjait, és így tovább, amíg csak fedett csúcs van a halmazban. Így egy szigorúan bővülő halmazsorozatot kapunk, mely így valamikor tartalmazni fog nem fedett csúcsot, amikor is megállhatunk, mivel ebből a csúcsból van irányított út v-be D-ben, melyet az az alternáló út ad, amelyen v-ből ide jutottunk. Mivel ez minden a párosítás által fedett $v \in V$ csúcsra igaz, így a párosítás „jó”. □

Legyen M' maximális elemszámú „jó” párosítás G-n, és legyen a nem fedett V-beli csúcsok halmaza R', ahol $|R'| = \gamma'$, valamint az M' által meghatározott irányítása G-nek D'.

Legyen $r \in R'$-re X_r az $R' - r$-ből alternáló úton el nem érhető V-beli csúcsok halmaza. Ekkor $r \neq r'$ R'-beli csúcsokra X_r és $X_{r'}$ diszjunktak. Az $(X_r - r)$-beli csúcsok M'-párjait feszíti X_r $\mathcal{H}$-ban, mivel különben egy ilyen hiperélbe lépne él kívülről, amivel az ő M'-párjához is el tudnánk jutni $R' - r$-ből D'-ben, sőt ha $\mathcal{A}_r$ jelöli az $(X_r - r)$-beli csúcsok M'-párjait, akkor $\mathcal{A}_r$ a maximális olyan $\mathcal{A}$ részhalmaza a párosított éleknek, melyre $r \in \Gamma_G(\mathcal{A})$, és $|\Gamma_G(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}| + 1$, mivel ha lenne másik ilyen, akkor annak a szomszédai sem lennének elérhetőek $R - r$-ből.

X_r csúcsaiba r-ből megy irányított út, ami nem léphet $V - X_r$-beli csúcsba, mivel ha ilyenbe lép, akkor nem tudnánk X_r-be visszajutni, mivel a $V - X_r$-beli csúcsok elérhetőek $R - r$-ből is. Ha E egy nem fedett hiperél, és erre van egy $r \in R'$, hogy X_r feszíti E-t, ugyanis ha E-nek van pontja X_r-ben, és azon kívül is, akkor fut r-ből olyan P út E-be, ami V-ből csak X_r-beli csúcsokon halad át. Azt látjuk be, hogy út megfordítása által kapott irányításban, ami P és M' szimmetrikus differenciája által adott párosításhoz tartozó irányítás, továbbra is elérhető minden V-beli csúcs $R - r$-ből, azaz a módosított párosítás is „jó”. Ehhez elég azt belátni, hogy P csúcsai mind elérhetőek, mivel csak P élein módosul az irányítás. Ehhez viszont elég látni, hogy E továbbra is elérhető, ami azért teljesül, mert E-nek van X_r-en kívüli, amibe X_r definíciója szerint fut olyan út $R - r$-ből, ami nem lép X_r-be, így nem tartalmaz módosított élet, azaz a módosított irányításban is benne van, amiből következik, hogy P minden pontja is elérhető, amiből jön az ellentmondás.

Ha E nem metsz bele semelyik X_r-be, akkor tekintsünk egy a 4.7.3. Állítás alapján létező olyan $\mathcal{A}$ részhalmazát a párosított hiperéleknek, melyre $|\Gamma_G(\mathcal{A} + E)| = |\mathcal{A}| + 1$. Ekkor minde $r \in R$-re $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_r = \emptyset$, mert különben $|\Gamma_G(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_r)| \leq |\Gamma_G(\mathcal{A})| + |\Gamma_G(\mathcal{A}_r)| - |\Gamma_G(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_r)| \leq |\mathcal{A}| + 1 + |\mathcal{A}_r| + 1 - |\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_r| - 1 = |\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_r| + 1$, ami ellentmond $\mathcal{A}_r$ maximalitásának, mivel $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}_r$, mert E nem tartalmaz X_r-beli csúcsot. Ez alapján az $\mathcal{A}_r$-ek által még fel nem particionált párosított hiperélekből válasszunk ki maximális olyan $\mathcal{A}$-kat, melyekre $|\Gamma_G(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}| + 1$. Ekkor a kapott $\mathcal{A}$ halmazok diszjunktak, mivel, ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}'$ metszenek, akkor $|\Gamma_G(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}')| \leq |\Gamma_G(\mathcal{A})| + |\Gamma_G(\mathcal{A}')| - |\Gamma_G(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}')| \leq |\mathcal{A}| + 1 + |\mathcal{A}'| + 1 - |\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'| - 1 = |\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'| + 1$- Sőt ekkor az ezekből nyert $\Gamma_G(\mathcal{A})$ halmazok is diszjunktak egymástól és az X_r halmazoktól is, ugyanis különben lenne olyan $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}'$ (ahol az egyik $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}_r$ is lehet), melyekre $|\Gamma_G(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}')| \leq |\Gamma_G(\mathcal{A})| + |\Gamma_G(\mathcal{A}')| - 1 \leq |\mathcal{A}| + 1 + |\mathcal{A}'| + 1 - 1 = |\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'| + 1$, ahol az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}'$ diszjunktak. Ezzel ha a nem

fedett csúcsokat még egy részes halmazokként bevesszük, olyan partícióját kapjuk V-nek, melyre igaz, hogy minden nem párosított hiperélet feszíti valamelyik tagja a partíciónak. Az is igaz, hogy $r \in R'$-re a $\mathcal{A}_r$-beli hiperéleket illetve a fent definiált $\mathcal{A}$-beli hiperéleket is feszítik a partíció tagjai, amiből, mivel $|\mathcal{A}_r| = |X_r - r|$, és $|\mathcal{A}| = |\Gamma_G(\mathcal{A})| - 1$, az következik hogy pont $|R'|$-vel több tagja van a partíciónak, mint kereszt-hiperéle, ami $|R'| > \gamma$ esetén sértené a tétel feltételét, tehát $|R'| \leq \gamma$, azaz az M'-höz tartozó irányítás jó. □

A tétel bizonyításából az alábbi algoritmust kapjuk.

4.7.4. Algoritmus (*). Bemenet: $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ *hipergráf.*
Kimenet: *$\mathcal{H}$-hoz tartozó hipergrafikus matroid egy bázisa, és amennyiben ez $n - \gamma$ elemű, akkor egy γ elemű $R \subseteq V$, és ehhez $\mathcal{H}$-nak egy olyan irányítása, hogy R-ből minden más csúcs irányított úton elérhető, továbbá, ha $\gamma \neq 1$, V egy olyan $\mathcal{P}$ partíciója, melyre (4.10) egyenlőséggel teljesül.*

Legyen $\mathcal{H}$ illeszkedési gráfja a $G = (V, \mathcal{E}, E)$ páros gráf. Ebben keresünk maximális olyan M párosítást, hogy legyen nem fedett V-beli csúcs, és ezek $\emptyset \neq R \subseteq V$ halmazából minden V-beli fedett csúcs irányított úton elérhető legyen az M-hez tartozó irányításában G-nek.
Tároljuk még a nem vizsgált hiperélek $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ halmazát.
Kiindulás:
$R := V$, $M := \emptyset$, $\mathcal{F} := \mathcal{E}$.
Általános lépés:
Ismételd *amíg $\mathcal{F} \neq \emptyset$.*
Legyen $F \in \mathcal{F}$ tetszőleges.
Ha $|\Gamma_G(F) \cap R| \geq 2$, Akkor *legyen $v \in \Gamma_G(F) \cap R$ tetszőleges, $R := R - v, M := M + Fv, \mathcal{F} := \mathcal{F} - F$.*
Ha $\Gamma_G(F) \cap R = \{v\}$, Akkor *futtassunk alternáló keresést $M + Fv$-n $R - v$-ből, és legyen $X \subseteq V$ az elért pontok halmaza* Ha $v \in X$, Akkor $R := R - v$, $M := M + Fv$, $\mathcal{F} := \mathcal{F} - F$, Különben $R := R$, $M := M$, $\mathcal{F} := \mathcal{F} - F$.
Ha $\Gamma_G(F) \cap R = \emptyset$, Akkor *tetszőleges R-ből $\Gamma_G(F)$ vezető P útra $M := M \triangle P$-re és F-re az előző eset feltétele teljesül.*
Befejezés:
Az M által párosított hiperéleket adjuk ki, mint bázis.

R-et adjuk ki gyökérhalmaznak és hozzá az M-hez tartozó irányítást.
Minden $r \in R$-re futtassunk alternáló keresést $R - r$-ből, és legyen $(r \in)X_r \subseteq V$ az így el nem ért csúcsok halmaza.
Amíg *van $v \in V - \left(\bigcup_{r \in R} X_r \cup \bigcup v \in V - R : \exists X_v X_v\right)$ csúcs:*
Futtassunk alternáló keresést v-ből nem párosítás élen indulva.
Legyen X_v az elért csúcsok halmaza.
% X_v egy $v' \in V$-re már létező $X_{v'}$ halmazt vagy tartalmazza vagy diszjunkt tőle.
Ha *X_v tartalmazza valamely $X_{v'}$-t,* akkor *töröljük $X_{v'}$-t.*
Legyen $\mathcal{P} = \{X_v : v \in R$ vagy olyan $v \in V - R$, melyre van $X_v\}$.

Az algoritmus $O(|\mathcal{E}|+|V|)$-szer futtat alternáló keresést, ami $O\left(\sum_{E \in \mathcal{E}} |E|\right)$ időben fut. Ezt az algoritmust meghívva a gyökeresen-(k,1)-élösszefüggővé irányító algoritmusban az erősen összefüggő irányítás megtalálására egy $O\left(|V|(|\mathcal{E}| + |V|) \sum_{E \in \mathcal{E}} |E|\right)$ idejű algoritmust kapunk.

4.7.5. Megjegyzés. *Ennél jobb algoritmust kapunk, ha a mai ismereteink szerint gyorsítjuk [7] fokszámkorlátosan erősen összefüggővé irányító algoritmusát, és azt az illeszkedési gráfra alkalmazzuk úgy, hogy minden $|E| \in \mathcal{E}$ hiperélen az alsó és felső befok korlátot is $|E| - 1$-nek választjuk. Maga az algoritmus hasonlít az irányítási algoritmusra; azon annyit kell változtatni, hogy eleve egy erősen összefüggő irányításból indulunk ki, és ezt mindig úgy változtatjuk, hogy ügyelünk arra, hogy ne fordítsunk meg olyan élet, mely belép egy befokú halmazba. Ehhez meg kell határozni, hogy mely csúcsokba megy legalább két diszjunkt út a hibás csúcsból, amire a ma ismert leggyorsabb algoritmus Suurballe és Tarjan sokkal általánosabb algoritmusa [19]. Ezekből a hipergráf erősen összefüggő irányítására $O\left(log_{\left(1+\frac{\sum_{E \in \mathcal{E}} |E|}{|V|+|\mathcal{E}|}\right)}(|\mathcal{E}| + |V|)\left(\sum_{E \in \mathcal{E}} |E|\right)^2\right)$ idejű algoritmust kapunk.*

Hipergráf gyökeres élösszefüggővé irányítására is alkalmas [7] egy másik algoritmusa, melyre szintén a fenti futási időt kapjuk, aminél az itt vázolt algoritmus gyorsabb.

4.8. Alkalmazás: Matroidok minimális vágásai

A (k, ℓ)-partíció-összefüggőség ($\ell > 0$-ra) azt jelenti, hogy ℓ tetszőleges (hiper)élet elhagyva egy k-partíció-összefüggő. Ez Tutte [20] tétele szerint azt jelenti, hogy a (hiper)gráfban még mindig van k feszítőfa. A fentiekben láttuk, hogy hogyan kell a (k, ℓ)-partíció-összefüggőséget ellenőrizni, amennyiben $0 \leq \ell \leq k$. Király [15] többek közt ezt felhasználva megmutatta, hogy (hiper)grafikus matroidok minimális vágása meghatározható.

4.8.1. Megjegyzés. *A (hiper)grafikus matroidok (k-szorosának) minimális vágásának meghatározásán kívül a transzverzális matroid minimális vágását is meg tudjuk határozni. Tekintsük a $G = (S, T, E)$ páros gráffal megadott transzverzális matroidot, melyben tehát $F \subseteq S$ pontosan akkor független, ha bepárosítható T-be. (Érdemes megjegyezni, hogy amennyiben a transzverzális matroidot, mint számolgatós matroidot nézzük, a fenti gráf a hipergráf illeszkedési gráfjának felel meg.) Alternáló utas algoritmussal határozzuk meg G egy maximális M párosítását. Ha ez a párosítás nem fedi T-t, akkor a nem fedett csúcsok nem érhetőek el alternáló úton a nem fedett S-beli csúcsok R halmazából, így , (mivel feltehető, hogy nincs izolált csúcs T-ben), a nem fedett T-beliek valamelyik $s \in S$ szomszédját elhagyva $M - st$ lesz a maximális párosítás, (ahol t s M-párja), mivel az alternáló utas algoritmus nem talál javító utat. Ezért feltehetjük, hogy M fedi T-t, sőt azt is, hogy van nem fedett S-beli csúcs, mivel különben bármely csúcs vágást alkotna. Ahhoz, hogy $Z \subseteq S$ vágás legyen így az kell, hogy T ne legyen párosítható $S - Z$-re, azaz valamely $X \subseteq T$-re sérüljön meg a Hall-feltétel. Ezek szerint a minimális vágás elemszáma* $\min\{|\Gamma_G(X)| - |X| : : X \subseteq T\} + 1$, *és a vágás $\Gamma_G(X)$ X-hez nem párosított csúcsaiból, és még egy X-hez párosított csúcsból áll.*

A fenti minimum meghatározásához tekintsük azt a $D = (S \cup T \cup \{s^*\}, A)$ irányított gráfot, ahol s^* új csúcsból az M által fedetlen S-beli csúcsok R halmazának minden elemébe fut egy irányított él, és a többi él M éleinek S, a többi G-beli él T felé irányításából keletkezik. Ebben az irányított gráfban könnyen látható, hogy két s^*-ból valamely $t \in T$ csúcsba futó út pontosan akkor éldiszjunkt, ha közös belső pont nélküliek, és így a Menger-tétel segítségével igazolható, hogy t-be pontosan $\min\{|\Gamma_G(X)| - |X| : t \in X \subseteq T\}$ *éldiszjunkt út megy, sőt a minimum és az azt adó X halmaz egy s^* forrású t nyelőjű folyam-algoritmus segítségével meg is határozható.*

Ezt az algoritmust minden $t \in T$-re futtatva a fent kívánt minimumot, és a matroid minimális vágását is megkaphatjuk.

4.8.2. Megjegyzés. *Az imént leírt algoritmus szintén a reprezentáló gráf egy megfelelő irányításán alapul, csakúgy, mint a korábban említett, illetve az itt nem leírt esetei a (k-szoros) (hiper)grafikus matroidok minimális vágásának. Ez veti fel azt a kérdést, hogy számolgatós matroidok minimális vágásait (speciálisan a merevségi matroid minimális vágását) meg lehet-e határozni valamilyen irányítási tétel segítségével. (Számolgatós matroidok minimális vágása a kombinatorikus optimalizálás egyik érdekes nyitott problémája [2].)*

4.9. Lokális halmaz-élösszefüggőség megőrzése

Ebben a szakaszban látni fogjuk, hogy az alábbi sejtés egy gyengítése következik az itt korábban leírtakból.

4.9.1. Sejtés. *Van olyan $C \geq 2$ egész, melyre teljesül az alábbi állítás. Ha a $G = (V, E)$ gráfon $\{X_i, Y_i\}$ V diszjunkt részhalmazaiból álló párok, és $f_i \in \mathbb{Z}$ igényekre teljesül $\lambda_G(X_i, Y_i) \geq Cf_i$ minden $i \in \{1,2,...,k\}$-ra, akkor G-nek van olyan $D = (V, A)$ irányítása, melyre $\min\{\lambda_D(X_i, Y_i), \lambda_D(Y_i, X_i)\} \geq f_i$ minden $i \in$ $\in \{1,2,...,k\}$-ra.*

A fenti sejtés halmazpárok helyett pontpárokra Nash-Williams tétele [18] szerint $C = 2$-vel igaz.

Fukunaga [11] a fenti sejtés vizsgálatakor a 4.4.3. Tételből az alábbi érdekes tételt bizonyította.

4.9.2. Tétel. *Legyen $r \in V$, $X_1, X_2, ..., X_k \subseteq V - r$, és $f_1, f_2, ..., f_k \in \mathbb{Z}$. Egy $G =$ $= (V, E)$ gráfnak létezik olyan $D = (V, A)$ irányítása, melyre $\lambda_D(r, X_i) \geq f_i$ teljesül minden $i \in \{1,2,...,k\}$-ra, ha $\lambda_g(r, X_i) \geq if_i$ minden $i \in \{1,2,...,k\}$-ra.*

Bizonyítás (vázlat): A tételt úgy bizonyítjuk, hogy rekurzívan megkonstruálunk $D_1 = (V, A_1), D_2 = (V, A_2), ..., D_k = (V, A_K)$ részirányításait G-nek, hogy $A_i \subseteq$ $\subseteq A_{i+1}$, és minden $i \in \{1,2,...,k\}$-ra teljesül

$$\lambda_{D_i}(r, X_j) \geq f_j \text{ minden } j \in \{1,2,...,i\}\text{-re,} \tag{4.11}$$

és

$$\delta_{D_i}(Y) \leq i\ \rho_{D_i}(Y) \text{ minden } X_j \subseteq Y \subseteq V - r\text{-re, ahol } j \in \{i+1, i+2, ..., n\}. \quad (4.12)$$

D_1 megkonstruálásához f_1 éldiszjunkt r-ből X_1-be futó utat irányítsunk meg X_1 felé, és ezeket az irányított éleket tegyük A_1-be. Ekkor könnyű ellenőrizni, hogy (4.11) és (4.12) fennáll.

Ha már D_i-t definiáltuk valamely $1 \leq i < n$-re, akkor D_{i+1} definiálásához legyen $D' = (V', A') = D_i/X_{i+1}$, és definiáljuk azt a h halmazfüggvényt V'-n, melyre

$$h(X) := \begin{cases} f_{i+1} - \rho_{D'}(X), & \text{ha } v_{X_{i+1}} \in X \text{ és } r \notin X, \\ -f_{i+1} - \rho_{D'}(X), & \text{ha } v_{X_{i+1}} \notin X \text{ és } r \in X, \\ -\rho_{D'}(X), & \text{különben.} \end{cases}$$

Erre a h-ra megmutatható, hogy metszőn szupermoduláris, és teljesíti a 4.4.3. Tétel feltételét azon a G' gráfon, melyet a még meg nem irányított élek gráfjából kapunk, ha összehúzzuk X_{i+1}-et. Így G'-nek van h-t fedő irányítása, amiből ezen élek G-beli ősét hozzávéve A_i-hez a G'-n definiált irányítással belátható, hogy a kapott $D_{i+1} = (V, A_{i+1})$ gráfra (4.11) és (4.12) fennáll. □

5. fejezet

Összefoglalás, további kérdések

A 2. fejezetben láttuk, hogy hogyan kapható meg keresztezés-mentes halmazrendszerek fa-reprezentációja, valamint, hogy hogyan alkalmazható algoritmusokban a kikeresztezési eljárás. Ezen kívül ezek alkalmazásaként algoritmust adtunk S-T fa-kompozíció kiválasztására S-T-elválasztó keresztező rendszerből.

Ezek felhasználásával a 3. fejezetben algoritmust adtunk a Fujishige-tétel bizonyítása alapján, ami főleg a kikeresztezés lassúsága miatt, elég lassú volt. Ennek javításaként megismerkedtünk a javított teljes reszelési algoritmussal.

Az irányítási algoritmusok segítségével a teljes reszelő algoritmusból általános gráf és hipergráf irányítási algoritmusokat nyertünk. Ezekből speciális esetként kiolvastuk a gyökeresen (k, ℓ)-élösszefüggő irányítás megadására vonatkozó algoritmust, mely segítségével (további itt nem tárgyalt algoritmusok bevonásával) meg lehet határozni a k-szoros (hiper)grafikus matroidok minimális vágását. Itt felvetődött az a kérdés, hogy esetleg más keresztező szupermoduláris függvényre alkalmazva az irányítási algoritmusokat más számolgatós matroidok minimális vágásai is meghatározhatóak-e? Ennek tükrében különösen érdemes speciális h-kra felírni a tételt, mint azt a 4.9. szakaszban meg is tettük.

Mivel a teljes reszelő algoritmus elég bonyolult, érdemes volt egyszerűbb algoritmust adni a (k, ℓ)-élösszefüggővé irányítás megkeresésére. Ezt az $\ell = 1$ esetben sikerült is megtennünk, ami hasznos, mivel ez egy olyan eset, amit más területekkel (szerkezetek merevségével) foglalkozó matematikusok is használnak. Itt felvetődik az a kérdés, hogy nagyobb ℓ-re nem adható-e hasonló egyszerű algoritmus? Mivel ez nem tűnik túl valószínűnek, érdemes ennek speciális esetét vizsgálni, például $\ell =$

$= k - 1$-re adható-e egyszerű algoritmus?

A $(k,1)$-élösszefüggővé irányító algoritmus segítségével hipergráfok erősen összefüggő irányításának megtalálására sikerült egy szintén egyszerű algoritmust adni. Ennek kapcsán beletekintettünk az erre ismert leggyorsabb algoritmusba, mely egy viszonylag bonyolult algoritmust használt. Ez felveti azt a kérdést, hogy nem adható-e hasonlóan gyors sőt lineáris idejű gyors algoritmus annak eldöntésére, hogy egy irányított gráfban mely csúcsokba fut két él-diszjunkt irányított út?

Irodalomjegyzék

[1] A. Bernáth. A representation for intersecting families. *Mat. Lapok (N.S.)*, 13(1):6–12, 2006/07. (Hungarian, with English summary).

[2] EGRES. Egres open problems. `lemon.cs.elte.hu/egres/open/Destroying_rigidity`.

[3] A. Frank. On disjoint trees and arborescences. In *Algebraic Methods in Graph Theory*, 25, pages 59–169. Colloquia Mathematica Soc. J. Bolyai, Norh-Holland, 1978.

[4] A. Frank. On the orientation of graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 28(3):251–261, 1980.

[5] A. Frank. Orientations of graphs and submodular flows. *Conguressus Numerantium*, 113:111–142, 1996.

[6] A. Frank. *Poliéderes kombinatorika.* ELTE TTK, 2007. (Hungarian.) `www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/polkomb/`.

[7] A. Frank and A. Gyárfás. How to orient the edges of a graph. In *Combinatorics*, 18, pages 353–364. Colloquia Mathematica Soc. J. Bolyai, Norh-Holland, Keszthely, 1976.

[8] A. Frank, T. Király, and Z. Király. On the orientation of graphs and hypergraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 131(2):385–400, 2003.

[9] A. Frank and É. Tardos. Generalized polymatroids and submodular flows. *Mathematical Programming*, 42:489–563, 1988.

[10] S. Fujishige. Structures of polyhedra determined by submodular functions on crossing families. *Mathematical Programming*, 29:125–141, 1984.

[11] T. Fukunaga. Graph orientations with set connectivity requirements. In Yingfei Dong, Ding-Zhu Du, and Oscar H. Ibarra, editors, *ISAAC*, volume 5878 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 265–274. Springer, 2009.

[12] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan. A new approach to the maximum flow problem. In *STOC*, pages 136–146. ACM, 1986.

[13] S. L. Hakimi. On the degrees of the vertices of a directed graph. *J. Franklin Inst.*, 279(4):290–308, 1969.

[14] Cs. Király. Simple algorithm for (k,1)-arc-connected orientation of a graph. Technical Report QP-2010-02, Egerváry Research Group, Budapest, 2010. `www.cs.elte.hu/egres`.

[15] T. Király. Computing the minimum cut in hypergraphic matroids. Technical Report QP-2009-05, Egerváry Research Group, Budapest, 2009. `www.cs.elte.hu/egres`.

[16] C. L. Lucchesi and D. H. Younger. A minimax relation for directed graphs. *J. London Math. Soc.*, s2-17(3):369–374, 1978.

[17] T. Naitoh and S. Fujishige. A note on the frank-tardos bi-truncation algorithm for crossing-submodular functions. *Mathematical Programming*, 53:361–363, 1992.

[18] C. S. J. A. Nash-Williams. On orientations, connectivity and odd vertex pairings is finite. *Canadian Journal of Mathematics*, 12:555–567, 1960.

[19] J. W. Suurballe and R. E. Tarjan. A quick method for finding shortest pairs of disjoint paths. *Networks*, 14(2):325–336, 1984.

[20] W. T. Tutte. On the problem of decomposing a graph into n connected factors. *J. London Math. Soc.*, 36:221–230, 1961.