Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Pintér Gergő

matematikus szak

Általános Gauss-Bonnet tétel görbület és kohomológia

Diplomamunka

témavezető:
Némethi András, egyetemi tanár
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Geometria Tanszék

Budapest, 2010.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatom a Gauss-Bonnet tétellel kapcsolatos fogalmakat és összefüggéseket tárja föl. Ebben a témában több tudományterület találkozik egymással: a Riemann-geometria, a de Rham elmélet, a topológia és a nyalábok elmélete. Ezek kapcsolatait igyekeztem több oldalról bemutatni.

A Gauss-Bonnet tétel globális változata kimondja, hogy a Gauss-görbület integrálja egy kompakt, irányított sima felületen a felület Euler-karakterisztikájának a 2π-szerese. Ez volt az első tétel, ami a felületek geometriája és a topológiája között teremtett kapcsolatot. Bernhard Riemann, Élie Cartan és mások munkássága során a görbület fogalmát sikerült természetes módon általánosítani tetszőleges dimenziós sokaságokra. Az Euler-karakterisztika fogalma pedig alapvetővé vált a topológiában, és jóval áltolánosabb keretek között, a homológiák elméletében jelent meg természetes módon. A Gauss-Bonnet tétel általánosítása viszont sokat váratott magára. Carl Barnett Allendoerfer és André Weil egymástól függetlenül bizonyították be a tétel általánosítását arra az esetre, ha a sokaság be van ágyazva egy – tetszőlegesen nagy dimenziós – euklidészi térbe. Belső geometriai bizonyítást Shiing-Shen Chern adott az általánosított Gauss-Bonnet tételre. Ez a bizonyítás nagyobb és átfogóbb matematikai apparátust használ, mint ami a tétel megfogalmazásában szerepel: a nyalábok elméletét. A hozzá kapcsolódó elméletnek messzemenő következményei vannak, amik elég fontosnak bizonyultak a topológia számára a 20. század második felében és ma is. Kiderült, hogy szoros és mély kapcsolat van a nyalábok karakterisztikus osztályai és a görbület segítségével előállított bizonyos mennyiségek között, és ennek természetes okai vannak.

A dolgozat az általánosított Gauss-Bonnet tétel bizonyításáig tartó utat próbálja bejárni, időnként kitekintve kapcsolódó témákra. Sok olyan dolog is előkerül eközben, ami az ELTE matematikus szakának törzsanyagába vagy a sávok anyagába beletartozik, ezeket próbáltam rendszerezni és a jelentőségükre, a tananyagban nem szereplő összefüggéseikre fordítani a figyelmet, ilyen szempontból ezt egy összefoglaló jellegű munkának szántam.

A dolgozat első fejezetében a de Rham kohomológia fogalmait és alapvető tételeit foglaltam össze, sok mindent emlékeztető jelleggel, bizonyítás nélkül. Az alaptételnek is tekinthető Stokes-tétel bizonyítással szerepel, és levezettem abból a klasszikus integráltételeket, a Gauss–Osztrogradszkij tételt és a klasszikus Stokes-tételt. Ezek jól mutatják, mennyire általános a de Rham kohomológia, hiszen a d operátor az

$\mathbb{R}^3$-beli vektormezők differenciáloperátorainak közös általánosítása. A rotáció- és divergeciaegyenletek megoldhatóságára vonatkozó klasszikus feltételek példák arra, ahogy a Stokes-tétel összeköti az analitikus problémák megfogalmazásához kézenfekvő de Rham kohomológiát a tisztán topológiai jellegű szinguláris homológiával. [1], [2], [5]

A Poincaré-dualitásról szóló fejezetben erről a kapcsolatról van szó. A de Rham kohomológia és a kompakt tartójú de Rham közötti dualitást tárgyalom, illetve a szinguláris kohomológiával fennálló izomorfizmusát. Valójában ez az izomorfizmus a Stokes-tételből származó kapcsulatuk lényege. A Poincaré-dulitással kapcsolatban semmit nem bizonyítottam be ebben a dolgozatban, de mindenhol világos, mik a külön bizonyítást igénylő állítások. Ezek nagy része a Mayer-Vietoris egzakt sorozat létezésén múlik, amiről csak itt a bevezetőben esik szó. A Mayer-Vietoris egy tisztán algebrai konstrukció, amellyel komplexusok rövid egzakt sorozatából legyártható egy, a homológiáikból álló hosszú egzakt sorozat. A bizonyítása digram-vadászattal történik. A Poincaré-dualitás segítségével sok dolog trivialitássá válik, aminek e nélkül összetett bizonyítása volna. Példa erre az, hogy páratlan dimenziós kompakt sokaság Euler-karakterisztikája 0. [1], [5]

A fejezet végén a leképezések fokának meghatározására adunk differenciálgeometriai eszközt. Kiderül, hogy egy $M \to N$ azonos m dimenziós sima kompakt sokaságok közötti leképezés fokát megkapjuk, ha egy N-en lévő m dimenziós, kompakt tartójú és egységnyi integrálú differenciálforma visszahúzottját integráljuk M-en. Erre többször is szükségünk lesz, első ízben a hiperfelületek normál leképezésének a vizsgálatakor. [1], [2], [3]

A második rész a Riemann-sokaságok görbületeivel foglalkozik. Az elején bemutatom a Riemann-tenzorból származó görbületi mennyiségeket. Utána a Riemann-részsokaságok és a befoglaló sokaság görbületei közötti összefüggésekről van szó, a Gauss-egyenlet különböző alakjairól. Ezek speciális eseteként kijön Theorema Egregium, amit Carl Friedrich Gauss bizonyított először. Eszerint a beágyazás segítségével definiált görbületet már a belső geometria meghatározza.

A Gauss-Bonnet tétel általánosítására jó kísérletnek tűnik a normálleképezés fokának a vizsgálata. Erről kiderül, hogy – páros dimenziós hiperfelület esetén – megegyezik a görbületi operátor determinánsának az $(m-1)$-dik gyökének az integráljával, ha m a dimenzió. Az ezt követő alfejezetben vázlatosan összefoglaltam néhány tisztán topológiai eredményt. A Poincaré-Hopf tételre máskor is szükségünk lesz: eszerint véges sok nullhellyel rendelkező vektormező (nullhelyeken vett) indexeinek az összege megegyezik a sokaság Euler-karakterisztikájával. Ennek egy

következményeként adódik, hogy páros dimenziós hiperfelületre a Gauss-leképezés foka épp az Euler-karakterisztika fele. [4], [5] Ezt kombinálva a másik megközelítéssel, a Gauss-Bonnet tételre hasonlító összefüggést kapunk az Euler-karakterisztika és az említett görbületi mennyiség között. Annak ellenére, hogy mindkét jellemző belső geometriai, vagyis független a beágyazástól, a kapott tétel általában nem igaz olyan sokaságokra, amik nem hiperfelületek. Tehát az általánosított Gauss-Bonnet tétel felé vezető úton ez egy érdekes zsákutca. [3]

Ezek után a helyes úton továbbhaladva bevezetem a konnexió-formákat és a görbületi formákat. Itt még a Levi-Civita konnexióból és a Riemann-tenzorból származtatom ezeket az 1- illetve 2-formákat, és vezetem le az azonosságaikat. [6] 2 dimenziós esetben ezek az azonosságok nagyon speciális alakot öltenek. Segítségükkel a klasszikus Gauss-Bonnet bizonyítása lényegében a Stokes-tétel alkalmazásává válik. Az erről szóló szakaszban leírtam a Gauss-Bonnet-tétel különböző változatait: egy egyszeresen összefüggő peremes Riemann-részsokaság határán párhuzamosan körbevitt vektor szögelfordulása, a sima határ geodetikus görbülete, szakaszosan sima határ geodetikus görbülete és a töréseknél lévő szögek összege kifejezhetőek a Gauss-görbület felületi integráljával. Ezekből össze lehet rakni a globális Gauss-Bonnet tételt, amire adtam egy bizonyítást a Poincaré-Hopf tételen keresztül is. [7] Szükség lesz egy lineáris algebrai fogalomra, ez a mátrixok Pfaff-polinomja. Ez valójában csak páros dimenziós antiszimmetrikus mátrixok esetén érdekes, ekkor épp a determináns négyzetgyökét adja meg (polinomként is). A görbületi formák mátrixának a Pfaff-polinomjára lesz szükség: ez lesz a megfelelő integrandus a Gauss-Bonnet tétel általánosításához. Ebben a fejezetben kiderül, hogy hiperfelületek esetén a Pfaff-formára is föl tudjuk írni a Gauss-Bonnet formulát a normálleképezés vizsgálatán keresztül, és az így kapott összefüggés már működik általánosságban is. [8], [9]

A bizonyításhoz viszont a vektornyalábok kohomológiáját kell megvizsgálni, ez történik az utolsó részben. A Thom-osztályt és az Euler-osztályt de Rham kohomológiában definiálom. A Thom-osztály a totális tér kohomológiájának az az eleme, ami minden fibrumon kiintegrálva 1-et ad, az Euler-osztály pedig ennek a visszahúzottja a sokaságra tetszőleges sima szelés által, mindekettő a fibrumnak megfelelő dimenziós kohomológiában. Kiderül, hogy az érintőnyaláb Euler-osztálya épp a sokaság Euler-karakterisztikájaszor a fundamentális osztály, ennek a bizonyítása a Poincaré-Hopf tételen keresztül történik. A Mayer-Vietoris konstrukcióval legyártott Gysin egzakt sor speciális eseteként kijön egy karakterizáció az Euler-osztály számszorosaira Riemann-metrikával ellátott nyalábok esetén: a vektornyalábból származó gömbnyalábra visszahúzva egy – a fibrumnak megfelelő dimenziós kohomológiában

létező – osztályt, az pontosan akkor tűnik el, ha az Euler-osztály számszorosa. [5], [1], [10] Ennek a haszna a görbületi osztály vizsgálatánál mutatkozik meg igazán. Ez az osztály a Riemann-metrikával ellátott vektornyaláb Pfaff-formájának az osztálya. Az előállításához persze szükség van a konnexió-formákra és görbületi formákra, amiket másképp kell bevezetni, mint Riemann-sokaságok esetén, viszont a fontosabb azonosságok teljesülnek rájuk az ott közölt bizonyítással. Az azonosságok segítségével bizonyítom, hogy a görbületi osztályra teljesül a karakterizáció, tehát az Euler-osztály számszorosa. Speciálisan, a görbületi osztály független a Riemann-metrika és a vele kompatibilis konnexió választásától. [9], [10], [11]

Közben egy szakaszban vázlatosan összefoglaltam a nyalábok visszahúzásáról, ekvivalenciájáról és a Grassmann-sokaságok fölötti természetes vektornyalábról szóló szükséges tudnivalókat. Ezek segítségével könnyen be lehet látni, hogy az említett szorzó – ahányszorosa az Euler-osztály a görbületi osztálynak – valójában konstans, nem függ a nyalábtól, mindössze a fibrum dimenziójától. Ezért elég speciális esetre kiszámolni, érintőnyalábra, sőt, hiperfelület érintőnyalábjára, ami pedig már az előző fejezetekben kijött. Ezzel megkapjuk az általános Gauss-Bonnet tételt. [9], [10], [11]

Hálásan köszönöm a rengeteg segítséget és a rám szánt időt a támavezetőmnek, Némethi Andrásnak. Köszönettel tartozom a biztatásért a kollégiumi matematikaszeminárium vezetőjének, Tóth Árpádnak.

Általános Gauss-Bonnet tétel

Pintér Gergő

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, Hungary

1. Differenciálformák

1.1. A formák algebrája

M egy sima n dimenziós sima sokaság, TM az érintőnyalábja, ennek a (pontonkénti) duálisa a T^*M ko-érintőnyaláb. T_p^*M q-szoros ékszorzata a $\underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{q} \to \mathbb{R}$ alternáló multilineáris formákkal izomorf struktúra. Az ebből készített $\bigwedge^q T^*M$ nyaláb sima szelései a *q-ad fokú differenciálformák*. Ezek halmazát $\Omega^q(M)$-mal fogom jelölni, $\Omega^0(M) = \mathcal{C}(M)$ az $M \to \mathbb{R}$ sima függvények halmaza.

$\Omega(M) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(M)$ modulus $\mathcal{C}(M)$ fölött és algebra a $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M)$ szorzással.

$\omega \in \Omega^1(M)$ és $\eta \in \Omega^1(M)$ ékszorzatának hatása az X, Y sima vektormzőkre:

$$\omega \wedge \eta(X, Y) = \omega(X)\eta(Y) - \omega(Y)\eta(X) \ .$$

Ebből pedig indukcióval

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_q(X_1, X_2, \ldots, X_q) = \det(\omega_i(X_j))$$

az ω_i 1-formákra és az X_j vektormezőkre.

Egy $(U, x^1, \ldots x^n)$ ($U \subset M$ nyílt) térképen a bázismezőket $\partial/\partial x^j$, a duális 1-formákat dx^j-vel jelölve minden q-forma $\omega = \sum_I f_I dx^I$ alakot ölt, ahol I az $(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ indexet jelöli, dx^I pedig a $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$ kifejezés rövidítése. Ezek a kifejezések $\Omega^q(U)$ bázisát alkotják $\mathcal{C}(U)$ fölött.

A szumma jelet Einstein jelölésmódjának megfelelően általában el fogom hagyni, ilyenkor a szorzatban fölül és alul is előforduló index szerint automatikusan összegezni kell.

1.2. A de Rham kohomológia

A $d : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M)$ operátor definíciója a következő:

- $f \in \mathcal{C}(M)$ esetén df a függvény *differenciálja*: X sima vektormezőre

$$df(X) = X(f)$$

- $\omega \in \Omega^q(M)$ esetén az $X_1, \ldots, X_{q+1}$ sima vektormezőkre

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{q+1})) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{q+1}) \ ,$$

  ahol $[X, Y]$ a két vektormező Lie-zárójelét jelöli: $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ az $f \in \mathcal{C}(M)$ sima függvényre.

Térkép értelmezési tartományán a d operátor a

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \quad \text{illetve} \quad d(f_I dx^I) = df_I \wedge dx^I$$

alakban kapható meg. Ebből adódóan, ha $\omega \in \Omega^q(M)$ és $\eta \in \Omega^p(M)$, akkor

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^q \omega \wedge d\eta \ . \tag{1}$$

1. Állítás. $d \circ d = 0$

Azaz a $(\Omega^q(M), d)_q$ sorozat félig egzakt, más néven *komplexus*. Ennek homológiája az M sokaság *de Rham kohomológiája*:

1. Definíció.

$$H^q(M) = \frac{\ker(d : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M))}{\mathrm{im}(d : \Omega^{q-1}(M) \to \Omega^q(M))} \ .$$

Az $\omega \in \Omega^q(M)$ forma *zárt*, ha $d\omega = 0$, és *egzakt*, ha van olyan $\eta \in \Omega^{q-1}(M)$, hogy $d\eta = \omega$. Így a kohomológia: zárt formák moduló az egzaktak.

2. Állítás. *$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$ minden $\omega \in \Omega^p(M)$ és $\eta \in \Omega^q(M)$ formára.*

Ez alapján *zárt* $\wedge$ *zárt* = *zárt* és *zárt* $\wedge$ *egzakt* = *egzakt*, így $H(M) = \bigoplus_{q=0}^n H^q(M)$ örökli $\Omega(M)$ algebra strukturáját.

3. Állítás. *$H^0(M)$ dimenziója egyenlő M összefüggőségi komponenseinek számával.*

Valóban, egy f sima függvényre $df = 0$ pontosan akkor, ha f lokálisan konstans, és így konstans egy összefüggőségi komponensre megszorítva.

Az $\omega \in \Omega^q(M)$ differenciálforma *tartója* a $\{p \in M : \omega|_p \neq 0\}$ halmaz lezártja. Kompakt tartójú formák ékszorzata és d-je is kompakt tartójú, ezért képezhetjük a kompakt tartójú formák $(\Omega_c^q(M), d)_q$ félig egzakt sorozatából a $H_c^q(M)$ kompakt tartójú de Rham kohomológiát.

1.3. Visszahúzás és integrálás

Legyen M és N sima, m illetve n dimenziós sokaságok és $F : M \to N$ egy sima leképezés. A $TF = F_* : TM \to TN$ érintőleképezés segítségével az érintővektorokat „előre tudjuk tolni”, és így a formákat visszahúzni: $\omega \in \Omega^q(N)$ visszahúzottjának hatása az $X_1, \ldots, X_q \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőkre $F^*(\omega)(X_1, \ldots, X_q) = \omega(F_*(X_1), \ldots, F_*(X_q))$.

Ha $(U, x^1, \ldots, x^m)$ és $(V, y^1, \ldots, y^n)$ ($U \subset M$ és $V \subset N$ nyíltak) olyan térképek, amelyek értelmezési tartományaira $F(U) \subset V$ teljesül, a függvény koordinátás alakja $F = (F^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, F^n(x^1, \ldots, x^m))$, akkor a formák visszahúzása így számolható:

$$F^*(f_{i_1,\ldots,i_q} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_q}) = (f_{i_1,\ldots,i_q} \circ F) dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_q} \ .$$

A formák visszahúzása lineáris és $\wedge$-tartó leképezés, tehát $F^* : \Omega^q(N) \to \Omega^q(M)$ algebrahomomorfizmus. Ráadásul kommutál a d operátorral, azaz $F^*(d\omega) = d(F^*(\omega))$, így zárt formát zártba, egzaktat egzaktba visz, tehát $H^q(F) : H^q(N) \to H^q(M)$ homomorfizmusokat indukál a kohomológiák közt. Ezen a módon a kohomológia kontravariáns funktor a (sima sokaságok, sima leképezések) és a (vektorterek, lineáris leképezések) kategóriái között.

A kompakt tartójú formák integrálása:

- Ha $\omega \in \Omega^m(M)$ olyan kompakt tartójú, maximális rangú forma, amelynek a tartója $\mathrm{supp}(\omega) \subset U$, ahol $U \subset M$ nyílt halmaz a (U, Φ) térkép értelmezési tartománya, $\Phi = (x^1, \ldots, x^m)$ és $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$, akkor

  $$\int_M \omega = \int_U \omega = \int_{\Phi(U)} \Phi^{*-1}(\omega) = \int_{\Phi(U)} f \circ \Phi^{-1} dx^1 dx^2 \ldots dx^m \ .$$

  Itt az utolsó integrál klasszikus $\mathbb{R}^m$-beli Riemann-integrál.

- Általában pedig legyen $(U_\alpha)_\alpha$ a sokaság egy fedése térképek értelmezési tartományaival, $(\rho_\alpha)_\alpha$ pedig egy egységosztás, azaz $\rho_\alpha \geq 0$, $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$ és $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$. Az $\omega \in \Omega^m(M)$ kompakt tartójú, maximális rangú forma integrálja:

  $$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega \ .$$

Ahhoz, hogy ez jó definíció legyen, az kell, hogy az integrál ne függjön a térképek és az egységosztás választásától. Az egységosztástól való függetlenség könnyen igazolható, a térképválasztástól való függetlenség viszont általában nem is igaz. Ha

$(U, \Phi = (x^1, \dots, x^m))$ és $(V, \Psi = (y^1, \dots, y^n))$ olyan térképek, hogy $\mathrm{supp}(\omega) \subset U \cap V$, $\omega = f^{(U)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = f^{(V)} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m$, akkor ω visszahúzottjai $\mathbb{R}^m$-re a

$$\Phi^{*-1}(\omega) = \Phi^{*-1} \circ \Psi^*(\Psi^{*-1}(\omega)) = (\Psi \circ \Phi^{-1})^*(\Psi^{*-1}(\omega))$$

egyenlőséget teljesítik a visszahúzás tranzitivitása miatt, ami pedig a vektormezők előretolására vonatkozó láncszabályból adódik. Ez az egyenlőség koordinátákban felírva:

$$f^{(U)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = f^{(V)} \circ (\Psi \circ \Phi^{-1}) dy^1(x^1, \dots, x^m) \wedge \dots \wedge dy^m(x^1, \dots, x^m)$$

$$f^{(U)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = f^{(V)} \circ (\Psi \circ \Phi^{-1}) \cdot \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \ .$$

Másrészt a Riemann-integrál tranformációs szabálya szerint

$$\int_V f^{(V)} dy^1 \dots dy^m = \int_U f^{(V)} \circ (\Psi \circ \Phi^{-1}) \cdot \left| \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \right| dx^1 \dots dx^m \ .$$

2. Definíció. *M sima sokaság irányítható, ha van irányított atlasza, azaz olyan atlasza, amelyben bármely két térkép közötti átmeneti leképezés irányítástartó: a Jacobi determinánsa minden pontban pozitív.*

Megjegyzés: Egy sima sokaság irányíthatósága ekvivalens azzal, hogy létezik maximális rangú differenciálforma, amely sehol nem 0. Egy sokaság irányítása egy irányított atlasz vagy maximális rangú differenciálforma kijelölése.

A föntiek szerint a formák integrálása pontosan akkor nem függ a térképek választásától, ha azok egy irányított atlasz elemei. A formák integrálását tehát csak irányított sokaságokra értelmezzük.

1.4. A Stokes-tétel

3. Definíció. *$(M, \partial M)$ sima peremes sokaság, ha van olyan $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)_\alpha \mid \Phi_\alpha = (x^1_\alpha, \dots, x^m_\alpha) : U_\alpha \to \mathbb{R}^m_+\}$ sima atlasza, hogy $\{(U_\alpha \cap \partial M, \Phi_\alpha|_{x^m_\alpha = 0})\}$ a perem sima atlaszát adja.*

Ha M irányított, akkor ∂M-en is értelmezhető egy kanonikus irányítás: a definíció jelöléseivel, tegyük föl, hogy Φ_α pozitív irányítású térkép, azaz eleme az irányítást kijelölő irányított atlasznak. Ekkor $(x^1_\alpha, \dots, x^{m-1}_\alpha)$ pozitív irányítású térkép ∂M-en, ha m páros, és negatív irányítású, ha m páratlan. A pozitív irányítású térképek összessége adja az *indukált irányítást* ∂M-en, az integrálás mindig e szerint értendő.

4. Tétel (Stokes). *Ha $(M, \partial M)$ m dimenziós irányított sima peremes sokaság, az $\omega \in \Omega_c^{m-1}$ kompakt tartójú differenciálforma integráljára*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M}$$

teljesül. Itt $\omega|_{\partial M}$ az ω megszorítása ∂M-re, azaz a beágyazás szerinti visszahúzása.

Bizonyítás: Legyen $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ a definíciónak megfelelő atlasz M-en és $(\rho_\alpha)_\alpha$ egységosztás. $\sum_\alpha d(\rho_\alpha\omega) = \sum_\alpha d\rho_\alpha\omega + \sum_\alpha \rho_\alpha d\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha d\omega$, ezért elég azt belátni, hogy $\int_{U_\alpha} d(\rho_\alpha\omega) = \int_{\partial U_\alpha} \rho_\alpha\omega$ minden α-ra. Föltehető, hogy $\Phi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^m$, ha $U_\alpha \cap \partial M = \emptyset$, különben $\Phi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^m_+$. Az első esetben

$$d(\rho_\alpha\omega) = d\left(\sum_{i=1}^m f_i^\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^{i-1} \wedge dx_\alpha^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x_\alpha^i} dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m \quad \text{egy tagjának integrálja}$$

$$\int_{U_\alpha} \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x_\alpha^i} dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^m =$$

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{x^i=-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x^i} dx^i dx^{1,\dots,i-1,i+1,\dots,m} = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} [f_i^\alpha]_{x^i=-\infty}^{\infty} dx^{1,\dots,i-1,i+1,\dots,m} = 0$$

a Fubini-tétel és a Newton-Leibniz szabály alapján, és a végén fölhasználva, hogy f_i^α kompakt tartójú függvény. Határt metsző U_α-ra $i \neq m$ esetén $\int_{U_\alpha} (\partial f_i^\alpha / \partial x_\alpha^i)\, dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m$ ugyanígy eltűnik, az utolsó tag pedig

$$(-1)^{m-1} \int_{\mathbb{R}^m_+} \frac{\partial f_m^\alpha}{\partial x^m} dx^1 \dots dx^m = (-1)^{m-1} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{x^m=0}^{\infty} \frac{\partial f_m^\alpha}{\partial x^m} dx^m dx^1 \dots dx^{m-1} =$$

$$= (-1)^{m-1} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} - f_m^\alpha|_{x^m=0}\, dx^1 \dots dx^{m-1} = \int_{U_\alpha \cap \partial M} \rho_\alpha\omega|_{U_\alpha \cap \partial M}\,.$$

A $(-1)^{m-1}$ előjel abból a permutációból származik, amivel dx_α^m az ékszorzat utolsó tényezője lett, és a végén a peremen indukált irányításból származó $(-1)^m$-nel való szorzás miatt esik ki.

1.5. Klasszikus integráltételek

A Stokes-tétel a 3 dimenziós integráltételek általánosítása. Ebben a fejezetben megnézzük, hogyan jönnek ki ezek a Stokes-tételből.

Most a sokaságunk $\mathbb{R}^3$. Az $X = f\ \partial/\partial x + g\ \partial/\partial y + h\ \partial/\partial z$ sima vektormezőhöz hozzárendelhetünk differenciálformákat $\mathbb{R}^3$ kanonikus strukturája segítségével, az

$\omega = fdx + gdy + hdz$ 1-formát és az $\eta = fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy$ 2-formát. Ezen formák differenciálja:

$$d\omega = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

épp a rot$X$ -hez tatozó 2-forma, a másikra pedig

$$d\eta = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = \mathrm{div} X dx \wedge dy \wedge dz$$

teljesül.

Nézzük az integráljukat! Legyen $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) : (0,1) \to \mathbb{R}^3$ sima görbe és a képe $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ korlátos sima részsokaság. A továbbiakban ha egy differenciálformát integrálok egy részsokaságon, nem írom ki a megszorítást.

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^1 \left(f(\gamma(t))d(\gamma^1) + g(\gamma(t))d(\gamma^2) + h(\gamma(t))d(\gamma^3)\right) =$$

$$= \int_0^1 f(\gamma(t))\frac{\partial \gamma^1}{\partial t} + g(\gamma(t))\frac{\partial \gamma^2}{\partial t} + h(\gamma(t))\frac{\partial \gamma^3}{\partial t} dt = \int_0^1 \langle X(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle \, dt \ ,$$

vagyis az X görbe menti integrálja jött ki, $\int_\Gamma X d\Gamma$. Most legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ sima függvény és a képe $F \subset \mathbb{R}^3$ korlátos sima részsokaság.

$$\int_F \eta = \int_U \left(f\left(\Phi(u,v)\right) d\Phi^2 \wedge d\Phi^3 + g\left(\Phi(u,v)\right) d\Phi^3 \wedge d\Phi^1 + h\left(\Phi(u,v)\right) d\Phi^1 \wedge d\Phi^2\right) \ ,$$

ami kifejtve

$$\int_U \left\langle X, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle dudv \ ,$$

tehát X felületi integráljával, $\int_F X dF$-fel egyenlő.

A Stokes-tétel alkalmazásával a következő két összefüggést kapjuk.

5. Tétel. *Ha $F \subset \mathbb{R}^3$ korlátos sima hiperfelület a Γ sima peremmel, akkor*

$$\int_\Gamma X d\Gamma = \int_F \mathrm{rot} X dF$$

áll fenn minden $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ sima vektormezőre.

6. Tétel. *Ha $M \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz az F sima peremmel, akkor*

$$\int_F X dF = \int_M \mathrm{div} X d\mu$$

minden $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ sima vektormezőre. (μ a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}^3$-on.)

A két integráltétel „kis” körlapra illetve gömre alkalmazva magyarázza a divergencia és a rotáció szokásos fizikai interpretációját: a divergencia azt méri, hogy egy adott pont mennyire viselkedik forrásként vagy nyelőként a vektormezőre nézve, a rotáció pedig azt, hogy mennyire „örvénylik” a vektormező a pont körül.

Láttuk, hogy az $(\Omega^q(M), d)_q$ komplexus a klasszikus $\mathbb{R}^3$-beli

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{grad}} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

általánosítása. Ez a sor szintén komplexus, hiszen $\text{rot} \circ \text{grad} = \text{div} \circ \text{rot} = 0$. A következő alfejezetben található Poincaré-lemmából következik, hogy $H^q(\mathbb{R}^m)$ izomorf egy pont q-kohomológiájával, ami pedig 0, ha $q \neq 0$. Ezért a (2) sor egzakt a két $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$-nél és szürjektív a végén. Ez azt jelenti, hogy $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ pontosan akkor írható fel $X = \text{grad} f$-ként, ha $\text{rot} X = 0$, és pontosan akkor írható fel $X = \text{rot} Y$-ként, ha $\text{div} X = 0$. Például, az $X = \text{grad} f$ megoldása a primitív függvény: $f(p) = \int_{x_0}^{p} X d\Gamma$, ahol az integrálás tetszőleges $\gamma : [0,1] \to \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ görbe mentén történik, amire $\gamma(0) = x_0$ és $\gamma(1) = p$. Az integrálás valóban független a görbe választásától: két különböző x_0-t p-vel összekötő görbe homotóp egymással $\mathbb{R}^3$-ban, együtt határolják a homotópia által súrolt felületet (feltéve, hogy nem metszik egymást, és injektív homotópiát választottunk). A Stokes-tétel miatt a két görbén vett integrál különbsége egyenlő $\text{rot} X$ integráljával a közrezárt felületen, ami pedig 0. A Stokes-tétel az analitikus problémát átdualizálja homológia nyelvre: a $\text{grad} f = X$ differenciálegyenlet minden olyan sokaságon megoldható, amin közös kezdő- és végpontú görbék homotópok egymással, azaz a sokaság egyszeresen összefüggő. Ennek a kapcsolatnak a precízebb leírása a Poincaré-dualitás.

1.6. Poincaré-dualitás

A de Rham kohomológia kiszámításáról szól a következő lemma.

7. Lemma (Poincaré). *Minden M, N m illetve n dimenziós sima sokaságra és $0 \leq q$ egész számra:*

- $H^q(M \times \mathbb{R}) \cong H^q(M)$.
- *Ha $F, G : M \to N$ homotóp leképezések, akkor $H^q(F) = H^q(G)$. Ha M és N homotóp ekvivalensek, akkor $H^q(M) \cong H^q(N)$.*
- $H_c^q(M \times \mathbb{R}) \cong H_c^{q-1}(M)$.

A hagyományos és a kompakt tartójú kohomológia között szoros összefüggés van. Legyen M sima irányított sokaság és $\mathcal{B} : \Omega_c^q(M) \times \Omega^{m-q}(M) \to \mathbb{R}$ a következő leképezés:

$$\mathcal{B}(\omega, \eta) = \int_M \omega \wedge \eta \ .$$

A kifejezés értelmes, mert $\omega \wedge \eta$ kompakt tartójú. $\mathcal{B}$ bilineáris leképezés, és ha $d\omega = d\eta = 0$ akkor $\int_M (\omega + d\omega') \wedge (\eta + d\eta') = \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d(\omega' \wedge \eta \pm \omega \wedge \eta' + \omega' \wedge d\eta') = \int_M \omega \wedge \eta$, hiszen a második tag a Stokes-tétel miatt eltűnik. Ezek szerint $\mathcal{B}$ csak a formák homológiaosztályától függ. A Poincaré-lemma és a *Mayer-Vietoris egzakt sorozat* segítségével belátható, hogy

$$\mathcal{B} : H_c^q(M) \times H^{m-q}(M) \to \mathbb{R} \ \ , \mathcal{B}([\omega], [\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta$$

nemdegenerált bilineáris forma, tehát $H^q(M) \to (H_c^{m-q}(M))^*$ izomorfizmust indukál.

A szinguláris kohomológia és a de Rham kohomológia között is hasonló kapcsolat áll fenn. Ebben a bekezdésben $H_{dR}^q(M)$ jelöli a de Rham kohomológiát. Legyen $C_q(M)$ az $f : \Delta_q \to M$ sima leképezések által generált $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, ahol Δ_q a kanonikus q-szimplex. Értelmezhetjük a $\partial : C_q(M) \to C_{q-1}(M)$ határleképezést, amellyel $(C_q(M), \partial)_q$ egy komplexus. A szinguláris kohomológia a $(C_q(M), \partial)_q$ félig egzakt sorozat duálisának, a $(C_q^*(M), \delta)_q$ sorozatnak a homológiája, ezt jelölöm most $H^q(M)$-nel. Itt $\delta : C_q^*(M) \to C_{q+1}^*(M)$ a „kohatár": $\delta(\sigma) = \sigma \circ \partial$ minden $\sigma : C_q(M) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálra. Az $\mathcal{D} : \Omega^q(M) \times C_q(M) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\omega, f) = \int_{\Delta_q} f^*(\omega)$ bilineáris leképezés, és a

$$\mathcal{D} : \Omega^q \to C_q^* \ , \mathcal{D}(\omega) = \left(f \mapsto \int_{\Delta_q} f^*(\omega) \right)$$

lineáris leképezést indukálja. A Stokes-tétel kis módosításával belátható, hogy $\mathcal{D}(d\omega) = \mathcal{D}(\omega) \circ \partial = \delta(\mathcal{D}(\omega))$. Például, ha $f \in C_q(M)$ injektív, akkor a képe egy q dimenziós irányított, kompakt és sima részsokaság lesz M-ben, im$f$ tagjainak a képei pedig épp kiadják im(f) határát a megfelelő irányítással. Ilyen esetben nincs szükség módosításra, az egyenlőség maga a Stokes-tétel: $\mathcal{D}(d\omega) = \int_{\mathrm{im}(f)} d\omega = \int_{\partial \mathrm{im}(f)} \omega = \mathcal{D}(\omega) \circ \partial = \delta(\mathcal{D}(\omega))$. Ezért zárt formák képe zárt, egzaktaké egzakt koszimplex, ezáltal egy $\mathcal{D} : H_{dR}^q(M) \to H^q(M)$ lineáris leképezést kapunk. Szintén a Mayer-Vietoris sorozat segítségével lehet belátni, hogy ez izomorfizmus.

8. Tétel (Poincaré-dualitás). *Egy m dimenziós sima irányított sokaságra $H_{dR}^q(M) \cong H^q(M) \cong (H_{dR,c}^{m-q}(M))^*$.*

9. Következmény. *Ha M összefüggő és irányított, akkor $H_{dR,c}^m(M) \cong \mathbb{R}$.*

Megjegyzés: Az, hogy a $\mathcal{B}$ és a $\mathcal{D}$ dualitások izomorfizmusok, a Mayer-Vietoris sorozat segítségével fedés szerinti indukcióval igazolható. Ahhoz, hogy ez működjön, szükséges, hogy létezzen a sokaságnak *véges jó fedése*, ami olyan véges fedést jelent, amelyben a fedőhalmazok tetszőleges nem üres metszetei homeomorfak $\mathbb{R}^m$-mel. Ezt tehát föltesszük. A kompakt sokaságok teljesítik ezt a feltételt. Véges jó fedés létezése esetén a kohomológia véges dimenziós.

1.7. Az Euler-karakterisztika

Ha az M sokaságon adott egy szimpliciális felbontás, $\Sigma_q(M)$ a q dimenziós szimplexek halmaza, akkor legyárthatjuk a $\chi(M) = \sum_{q=0}^{m}(-1)^q|\Sigma_q(M)|$ számot, ez a sokaság *Euler-karakterisztikája.*
Jelölje $C_q(M)$ a q dimenziós szimplexek által generált modulust/vektorteret, $\partial_q : C_q(M) \to C_{q-1}(M)$ a határleképezést, így $|\Sigma_q(M)| = \dim C_q(M) = \dim(\ker(\partial_q)) + \dim(\mathrm{im}(\partial_q)) = \dim(\mathrm{im}(\partial_{q+1})) + \dim H_q(M) + \dim(\mathrm{im}(\partial_q))$, ezért

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^{m}(-1)^q \dim H_q(M) \ ,$$

tehát az Euler-karakterisztika a szimplexfelbontástól független, topológiai állandó.[1]
De elvégezhetjük ezt a teleszkópikus összegzést a $(C_q(M), \partial)_q$ sorozat helyett $(C_q^*(M), \delta)_q$-val, és így a Poincaré-dualitás szerint

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^{m}(-1)^q \dim H^q(M) = \sum_{q=0}^{m}(-1)^q \dim H^q_{dR}(M) \ .$$

Kompakt sokaságon minden forma kompakt tartójú, ezért $H^q_{dR}(M) = H^q_{dR,c}(M) \cong H^{m-q}_{dR}(M)$.

10. Következmény. *Páratlan dimenziós kompakt sokaság Euler-karakterisztikája* 0.

1.8. Leképezések foka

Legyenek M és N mindketten m dimenziós irányított összefüggő sima sokaságok, $F : M \to N$ sima leképezés. Tegyük föl azt is, hogy F *proper* (valódi), azaz N-beli kompakt halmaz ősképe kompakt.

F *reguláris értéke* a $p \in N$ pont, ha p minden $q \in F^{-1}(p)$ ősképére a $T_qF : T_qM \to T_pN$ lineáris leképezés izomorfizmus. (Ha például p-nek nincs ősképe, akkor

[1] Itt $H_q(M)$ a szimpliciális homológiát jelöli, de erről tudjuk, hogy nem függ a szimplexfelbontástól és megegyezik a szinguláris homológiával.

p reguláris érték.) A *Sard-lemma* azt mondja ki, hogy a nem reguláris értékek (ezek a *kritikus értékek*) sehol sem sűrű, zárt részhalmazt alkotnak N-ben. Az F leképezés *foka* $\deg F = \sum_{q \in F^{-1}(p)} \operatorname{sgn}(F|_q)$, ahol $p \in N$ reguláris érték, $\operatorname{sgn}(F|_q)$ a $T_q F$ lineáris leképezés determinánsának az előjele, tehát 1 vagy -1 attól függően, hogy F a q pontban irányítástartó vagy -váltó. A fok definíciójában szereplő összeg véges sok tagú, mert F proper leképezés.

11. Állítás. *Legyen F mint fönn, és $\omega \in \Omega_c^m(N)$, amelyre $\int_N \omega = 1$ teljesül. Ekkor*

$$\int_M F^*(\omega) = \deg F \ .$$

Bizonyítás: Először is az integrál értelmes, mert F propersége miatt $\operatorname{supp}(F^*(\omega)) = F^{-1}(\operatorname{supp}(\omega))$ kompakt. Továbbá ez az integrál csak ω kohomológiaosztályától függ, mivel $[\omega] \to H_c^m(F)([\omega]) = [F^*(\omega)] \to \int_M F^*(\omega)$ minden lépése csak attól függ. De $H_c^m(N) \cong \mathbb{R}$, az izomorfizmust az $\omega \to \int_N \omega$ integrálás szolgáltatja. ω helyett tehát vehetünk egy másik $\eta \in \Omega_c^m(N)$ formát, amelyre $\int_N \eta = 1$, a következő módon. Legyen $p \in N$ reguláris értéke F-nek (ilyen van a Sard-lemma miatt). Ennek U megfelelően kis környezete úgy, hogy $F^{-1}(U)$ előálljon, mint az $F^{-1}(p)$ ősképhalmaz pontjai diszjunkt környezeteinek az uniója. Legyen η egy buckaforma, amelyre $\operatorname{supp}(\eta) \subset U$. Például vehetünk egy $(U', x^1, \ldots, x^m)$, $U' \subset U$ térképet, amelynek origója p, és a ρ buckafüggvényt, amelyre $\rho = e^{-1/(1-x^2)}$, ha $-1 < x < 1$, azon kívül 0. Legyen $\eta = \prod_{i=1}^m (\rho(x^i)/\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$. Az $F^{-1}(p) = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $F^{-1}(U) = \bigcup^{*k}_{j=1} U_j$ jelölésekkel $F|_{U_j}$ diffeomorfizmus, így

$$\int_M F^*(\eta) = \sum_{j=1}^k \int_{U_j} F^*(\eta) = \sum_{j=1}^k \int_U \eta \cdot \operatorname{sgn}\left(F|_{U_j}\right) = \sum_{j=1}^k \operatorname{sgn}\left(F|_{p_j}\right) \ ,$$

ahol $\operatorname{sgn}\left(F|_{p_j}\right) = \operatorname{sgn}\left(\det\left(T_{p_j} F\right)\right)$. Az utolsó összeg épp az F foka. $\square$

12. Állítás. *Legyen M egy peremes m dimenziós irányított, N egy $m-1$ dimenziós irányított sima sokaság, $F : M \to N$ valódi leképezés. Ekkor* $\deg F|_{\partial M} = 0$.

Bizonyítás: Tetszőleges $\omega \in \Omega_c^{m-1}(N)$ ($\int_N \omega = 1$) formát véve

$$\deg F|_{\partial M} = \int_{\partial M} F^*(\omega) = \int_M d(F^*(\omega)) = \int_M F^*(d\omega) = 0$$

a Stokes-tétel miatt. $\square$

2. A Gauss-Bonnet tétel

2.1. Görbületek

Legyen (M, g) egy Riemann-sokaság, azaz az M sima sokaság minden p pontjában megadva egy g_p pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma, más néven skaláris szorzat, ami simán függ a p-től. Ez azt jelenti, hogy X és Y sima vektormezőkre a $g(X, Y) : p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$ függvény sima. A vektormezők skaláris szorzatát $\langle X, Y\rangle$-val is fogom jelölni.

A Riemann-geometria alaptétele szerint egyértelműen létezik *Levi-Civita-konnexió* (kovariáns deriválás). Ez egy $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés, amely a következőknek tesz eleget:

- Első változóban $\mathcal{C}(M)$-lineáris, vagyis $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ minden f sima függvényre.
- A második változóban a Leibniz-szabály érvényes: $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.
- *Torzió-mentes*: $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$.
- *Metrikus*: $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, vagy másképp $\nabla_X g = 0$.

Egy térkép értelmezési tartományán $\mathcal{G} = (g_{ij})_{i,j} = (\langle \partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j\rangle)_{i,j}$ jelölje a g metrika mátrixát, $\mathcal{G}^{-1} = (g^{ij})_{i,j}$ az inverzét. A konnexió

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

alakban írható, ahol az együtthatók (ún. *Christoffel-szimbólumok*) kifejezhetőek a metrika segítségével:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij}\right) g^{kl} \ .$$

A i és j indexek szimmetriája ekvivalens a konnexió torziómentességével.

Egy sokaságon adott konnexió segítségével tudunk értelmezni különféle görbületeket. A fejezet tételeiből ki fog derülni, hogy ezek a mennyiségek valami módon tényleg az intuíciónknak megfelelő görbületet mérik.

Nézzük az $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

leképezést. R mindegyik változójában $\mathcal{C}(M)$-lineáris, tehát $(3, 1)$ típusó tenzormező, a konnexió *Riemann-féle görbületi tenzora*. Ehhez a metrikára valójában nincs is

szükség, de a $(4,0)$-s változathoz már igen: $R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z,W\rangle$. R nyilvánvalóan antiszimmetrikus az 1. és a 2. változóban, és kevésbé nyilvánvaló, de antiszimmetrikus a 3. és a 4. változóban is, továbbá szimmetrikus az első kettő és az utolsó két változó megcserélésére.

Vezessük be a $\Lambda^2 M$ jelölést a $\Lambda^2_p M = \bigwedge^2 T_pM$-ből készített nyaláb sima szeléseire. ($\Lambda^2 M$ tehát a „bivektormezők" tere.) Az antiszimmetriákból adódóan egyértelműen létezik az $R : \Lambda^2 M \times \Lambda^2 M \to \mathbb{R}$, $R(X \wedge Y, W \wedge Z) = R(X,Y,Z,W)$ bilineáris leképezés. Viszont $\Lambda^k_p M$ terekre természetes módon ki lehet terjeszteni a skaláris szorzást a $\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k\rangle = \det(\langle u_i, v_j\rangle)$ formula lineáris kiterjesztésével, így egy skaláris szorzást kapunk $\Lambda^k_p M$-n. R legutóbbi verzióját reprezentálhatjuk erre a skaláris szorzásra nézve, így kapjuk az $\mathfrak{R} : \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$ *görbületi operátort*:

$$R(X \wedge Y, W \wedge Z) = \langle \mathfrak{R}(X \wedge Y), W \wedge Z\rangle \ .$$

R szimmetriáiból fakadóan $\mathfrak{R}$ szimmetrikus.

A $p \in M$ pontbeli *metszetgörbület*:

$$\sec(v,w) = \frac{R(v,w,w,v)}{\langle v,v\rangle\ \langle w,w\rangle\ - \langle v,w\rangle^2} = \frac{\langle \mathfrak{R}(v \wedge w), v \wedge w\rangle}{\langle v \wedge w, v \wedge w\rangle}$$

a (v,w) p-beli érintővektorpárhoz rendel számot, de az értéke valójában csak a két vektor által kifeszített altértől függ. Két dimenziós sokaság esetén ez az altér maga az érintősík, a pontbeli metszetgörbület pedig skalár, ez a *Gauss-görbület*:

$$K = \sec = \frac{R(v,w,w,v)}{\mathrm{vol}^2(v,w)}$$

tetszőleges v és w lineárisan független érintővektorok választásával (és $\mathrm{vol}^2(v,w)$ az általuk kifeszített paralelogramma területének a négyzete).

A *Ricci-görbület* a Riemann-görbület nyoma:

$$\mathrm{Ric}(v,w) = \mathrm{tr}(u \to R(u,v)w) = \sum_{i=1}^{m} d^i(R(e_i,v)w) \ ,$$

ahol (e_i) egy bázisa T_pM-nek, d^i pedig a hozzá tartozó duális bázis. Ha (e_i) ortonormált, akkor $\mathrm{Ric}(v,w) = \sum_{i=1}^m \langle R(e_i,v)w, e_i\rangle = \sum_{i=1}^m \langle R(e_i,w)v, e_i\rangle$, tehát a Ricci-görbület szimmetrikus $(2,0)$ típusú tenzor. A Ricci görbületnek legyárthatjuk az $(1,1)$ típusú változatát, hogy az $\mathrm{Ric}(v,w) = \langle \mathrm{Ric}(v), w\rangle$ összefüggés fönnálljon. Így $\mathrm{Ric}(v) = \sum_{i=1}^m R(v,e_i)e_i$.

A Ricci-görbület nyoma a *skalárgörbület*:

$$\mathrm{scal} = \mathrm{tr}(v \to \mathrm{Ric}(v)) \ .$$

A skalárgörbület a sokaságon egy sima függvény. A nyom előállítása az (e_i) ortonormált bázis segítségével:

$$\mathrm{scal} = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathrm{Ric}(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} R(e_i, e_j, e_j, e_i) =$$

$$= 2 \sum_{i<j} \langle \mathfrak{R}(e_i \wedge e_j), e_j \wedge e_i \rangle = 2\mathrm{tr}\mathfrak{R} = 2 \sum_{i<j} \sec(e_i, e_j) \ .$$

Egy térkép értelmezési tartományán a görbületek együtthatóit kifejezhetjük a konnexió Christoffel-szimbólumai, végső soron tehát a g metrika komponenseinek a segítségével. Most (e_i) a $\partial/\partial x^i$ bázismezők p-beli értékeiből álló bázis, tehát nem feltétlenül ortonormált.
$R(e_i, e_j)e_k = R^l_{ijk} e_l$, $R(e_i, e_j, e_k, e_l) = R_{ijkl} = R^s_{ijk} g_{ls}$, $\mathrm{Ric}(e_i, e_j) = \mathrm{Ric}_{ij} = R^k_{kij}$, $\mathrm{Ric}(e_i) = \mathrm{Ric}^j_i e_j = g^{js}\mathrm{Ric}_{si} e_j$ és $\mathrm{scal} = \mathrm{Ric}^i_i = g^{is} R^k_{ksi}$, ahol

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} \ .$$

2.2. Részsokaságok görbületei

Legyen (M, g) egy Riemann-sokaság és $(\tilde{M}, \tilde{g})$ egy Riemann-részsokaság, vagyis $\tilde{M} \subset M$ részsokaság a $\tilde{g} = g|_{\tilde{M}}$ örökölt metrikával. Jelölje ∇ (M, g) Levi-Civita konnexióját. Be lehet látni, hogy ez indukál egy részsokaság menti deriválást, amely nem függ a részsokaság menti vektormezők kiterjesztésétől, pontosabban:

13. Állítás. *Ha X, X', Y és Y' sima vektormezők M-en és $X'|_{\tilde{M}} = X|_{\tilde{M}} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$, $Y'|_{\tilde{M}} = Y|_{\tilde{M}} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$, akkor $\nabla_Y X|_{\tilde{M}} = \nabla_{Y'} X'|_{\tilde{M}}$.*

E nélkül az állítás nélkül is lehet tudni, hogy Y-tól valójában pontonként függ a konnexió: $\nabla_Y X = (p \mapsto \nabla_{Y_p} X)$. Ez abból következik, hogy abban a változóban a konnexió lineáris a sima függvények fölött. X-nek viszont egy adott pont tetszőleges környezetére vett megszorításától függ $\nabla_Y X$ pontbeli értéke, tehát X_p még nem határozza meg azt. Az állítás tehát erre a változóra nézve érdemleges: nem szükséges X-et egy egész környezeten ismerni, ha Y és X érintő irányúak egy részsokaságon, a részsokaság menti értékek már meghatározzák $\nabla_Y X$ értékeit a részsokaság pontjaiban.

Ez alapján, ha X és Y sima érintőmezők $\tilde{M}$-on, akkor $\nabla_Y X$ jelentse a mezők M-re való tetszőleges X' és Y' sima kiterjesztésével nyert $\nabla_{Y'} X'|_{\tilde{M}}$ kifejezést, amely tehát csak X-től és Y-tól függ. A kiterjesztés esetleg csak lokálisan létezik, de az előzőek alapján ez elég.

A $p \in \tilde{M}$-beli érintőtér $T_pM = T_p\tilde{M} \oplus T_p^{\perp}\tilde{M}$ g-ortogonális direktösszeg-felbontása alapján $\nabla_Y X = \tilde{\nabla}_Y X + \nabla_Y^{\perp} X$. Az érintő irányú tag, $\tilde{\nabla}_Y X$ tehát minden pontban $\nabla_Y X$ ortogonális vetülete $T_p\tilde{M}$-re. A konnexió tulajdonságainak ellenőrzésével belátható:

14. Állítás. *Az $(X, Y) \to \tilde{\nabla}_X Y$ leképezés az $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann-sokaság egyértelműen létező Levi-Civita konnexiója.*

Vezessük be az $\omega(X, Y) = \nabla_X^{\perp} Y$ jelölést. $\omega(X, Y) - \omega(Y, X) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)^{\perp} = [X, Y]^{\perp} = 0$ a torzió-mentesség miatt, tehát ω szimmetrikus bilineáris leképezés. Ez az $(\tilde{M}, \tilde{g})$ részsokaság *második alapformája.* (A $\tilde{g}$ Riemann-metrika az első alapforma.)

Számoljuk ki a görbületet! Legyenek X, Y, Z és $W \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ sima vektormezők. $\tilde{g} = g|_{\tilde{M}}$ miatt a $\langle , \rangle$ jelölést használom mindkét skaláris szorzatra.

$$\nabla_Y Z = \tilde{\nabla}_Y Z + \omega(Y, Z) \text{ , ebből}$$

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z + \omega(X, \tilde{\nabla}_Y Z) + \nabla_X(\omega(Y, Z)) \ ,$$

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z + \omega(Y, \tilde{\nabla}_X Z) + \nabla_Y(\omega(X, Z)) \ ,$$

$$\nabla_{[X,Y]} Z = \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z + \omega([X, Y], Z) \ .$$

Ezeket az egyenlőségeket szorozzuk skalárisan W-vel, és vegyük figyelembe, hogy $\langle \omega(\cdot, \cdot), W \rangle = 0$ és $\langle \nabla_X(\omega(Y, Z)), W \rangle = -\langle \omega(Y, Z), \nabla_X W \rangle = -\langle \omega(Y, Z), \omega(X, W) \rangle$, így kapjuk a *Gauss-egyenletet*:

15. Állítás (Gauss-egyenlet).

$$R(X, Y, Z, W) = \tilde{R}(X, Y, Z, W) - \langle \omega(Y, Z), \omega(X, W) \rangle + \langle \omega(X, Z), \omega(Y, W) \rangle$$

egyenlőség teljesül az (M, g) sokaság R és az $(\tilde{M}, \tilde{g})$ részsokaság $\tilde{R}$ görbülete között az X, Y, Z és W $\tilde{M}$-ot érintő vektormezőkre.

Ha $\tilde{M}$ eggyel kevesebb dimenziós, mint M, akkor $T_p\tilde{M}$ ortogonális kiegészítője 1 dimenziós, lokálisan pontosan két normális egységvektormező létezik, egymás ellentettjei. Ha mindkét sokaság irányított, akkor ilyen mező globálisan is létezik, sőt, M irányítottságát föltéve a normális egységvektormező létezése ekvivalens $\tilde{M}$ irányítottságával. Legyen N egy ilyen mező, azaz $N : \tilde{M} \to TM$, $\langle N_p, T_p\tilde{M} \rangle = 0$, $\langle N_p, N_p \rangle = 1$.

A második alapforma $(2, 0)$-s tenzor verziója: $\mathcal{B}(X, Y) = \langle \omega(X, Y), N \rangle = \langle \nabla_X Y, N \rangle$. Ezt reprezentálva kapjuk az L *Weingarten-operátort*: $\mathcal{B}(X, Y) = \langle L(X), Y \rangle$. A $0 = X\langle N, Y \rangle = \langle \nabla_X N, Y \rangle + \langle N, \nabla_X, Y \rangle$ egyenlőségből kapjuk, hogy

$L(X) = -\nabla_X N$. L pontonként $T_p\tilde{M}$-ből önmagába képez, hiszen $0 = \nabla_X \langle N, N\rangle = 2\langle N, L(X)\rangle$.

Jelölje $R^\top(X,Y)Z$ az $R(X,Y)Z$ mező pontonkénti merőleges vetületét $T_p\tilde{M}$-re. $\nabla_X(\omega(Y,Z)) = \nabla_X(\mathcal{B}(Y,Z)N) = \nabla_X(\mathcal{B}(Y,Z))N - \langle L(Y), Z\rangle L(X)$, ez alapján a Gauss-egyenlet egy másik alakja:

16. Állítás (Gauss-egyenlet).

$$R^\top(X,Y)Z = \tilde{R}(X,Y)Z - \langle L(Y), Z\rangle L(X) + \langle L(X), Z\rangle L(Y)$$

összefüggés áll fenn az $\tilde{M} \subset M$ 1 kodimenziós Riemann-részsokaság $\tilde{R}$ görbülete és M görbületének $R^\top$ vetülete között az $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ vektormezőkre.

A továbbiakban $\mathbb{R}^n$-nel jelölöm az $\mathbb{R}^n$ vektortér kanonikus skaláris szorzásával kapott Riemann-sokaságot. $\mathbb{R}^n$ minden Christoffel-szimbóluma és így a görbülete is 0. Ha $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ m dimenziós részsokaság (lokálisan hiperfelület), R a görbülete, a Gauss-egyenlet szerint

$$R(X,Y,Z,W) = \mathcal{B}(Y,Z)\mathcal{B}(X,W) - \mathcal{B}(X,Z)\mathcal{B}(Y,W)\ . \tag{3}$$

Speciálisan, $m = 2$-re vehetünk $u, v \in T_pM$ vektorokat, amelyek ortonormált bázist alkotnak. Helyettesítsük be őket a Gauss-egyenletbe, azaz legyen $X_p = W_p = u$ és $Y_p = Z_p = v$, így kapjuk Gauss "Nevezetes Tételét":

17. Állítás (Theorema Egregium). *Egy 2 dimenziós $M \subset \mathbb{R}^3$ részsokaság Gauss-görbülete:*

$$K = \frac{\det \mathcal{B}}{\det \mathcal{G}}\ ,$$

vagy a Weingarten-operátorral kifejezve

$$K = \det L\ .$$

Ennek a jelentőssége fordított megközelítésben látszódik igazán: ha a Gauss-görbületet az egyenlet jobb oldalán álló kifejezéssel definiáljuk, tehát *külső* geometriai mennyiség, a második alapforma segítségével, a Theorema Egregium szerint kifejezhető csupán a Riemann-metrika, tehát *belső* geometria felhasználásával.

2.3. Riemann-sokaságok térfogata

A $v_1, \ldots, v_m \in T_pM$ vektorok által kifeszített paralelopipedon térfogata $\det\left(\langle v_i, e_j\rangle\right)_{i,j}$, ha (e_i) pozitív irányítású ortonormált bázis. Ezt a mátrixot megszorozva a transzponáltjával bázistól független kifejezést kapunk: a térfogat $\sqrt{\det\left(\langle v_i, v_j\rangle\right)_{i,j}}$. Jelölje

$d\nu$ azt a maximális rangú differenciálformát, ami a belehelyettesített vektorokhoz épp az előbbi mennyiséget rendeli hozzá. $d\nu$ az irányított Riemann-sokaság *térfogati formája*:

$$d\nu(v_1, \ldots, v_m) = \det\left(\langle v_i, e_j\rangle\right) = \sqrt{\det\left(\langle v_i, v_j\rangle\right)}\ .$$

Egy pozitív irányítást adó térkép értelmezési tartományán $\det\left(\langle v_i, v_j\rangle\right) = \det\left(\langle v_i^l e_l, v_j^k e_k\rangle\right) = \det\left(v_i^l v_j^k g_{kl}\right) = \det^2\left(v_i^i\right)\det\left(g_{ij}\right)$, ahol $v_i^j = dx^j|_p(v_i)$, $e_i = (\partial/\partial x^i)|_p$ (nem feltétlenül ortonormált bázis). Ezért a térfogati forma

$$d\nu = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

alakú. Egy $U \subset M$ nyílt részhalmaz térfogatának az $\int_U d\nu$ számot nevezzük.

2.4. A Gauss-normálleképezés foka

Az $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ irányított m dimenziós Riemann-részsokaság *Gauss-leképezése* az $N : M \to S^m$ leképezés, amely minden ponthoz a pontbeli egységnormálist rendeli, méghozzá a két lehetőség közül azt, amellyel kiegészítve T_pM egy pozitív irányítású bázisát $\mathbb{R}^{m+1}$ pozitív irányítású bázisát kapjuk.

A Gauss-leképezés fokát megkapjuk, ha egy tetszőleges $\omega \in \Omega_c^m(S^m)$ differenciálforma N szerinti visszahúzottját integráljuk M-en (s persze lenormáljuk $\mathrm{vol}(S^m) = \int_{S^m} \omega$-val). Legyen ez a forma S^m térfogati formája!

Egy (U, Φ) térkép értelmezési tartományán jelölje $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}$ rendre a Riemann-metrika, a második alapforma illetve az N szerinti gömbi kép Riemann-metrikájának a mátrixát. Szokás $\mathcal{G}$-t első, $\mathcal{H}$-t harmadik alapformának is nevezni. L továbbra is a Weingarten-operátort jelöli. Első feladat kifejezni $\mathcal{H}$-t a többivel. Legyen v, $w \in T_pM$ két érintővektor!

$$\mathcal{H}(T_pN(u), T_pN(v)) = \langle \partial_u N, \partial_v N\rangle = \langle L(u), L(v)\rangle = \langle L^2(u), v\rangle = \mathcal{G}L^2(u, v)\ ,$$

és L definíciója miatt $\mathcal{B} = \mathcal{G}L$, amiből így a következőt kapjuk:

$$\mathcal{H} = \mathcal{B}\mathcal{G}^{-1}\mathcal{B}\ .$$

Ezt egész precízen úgy kell érteni, hogy az $N_p \in S^m$ pont egy környezetében a $\Phi \circ N^{-1}$ térképet használjuk, és az így kapott koordináták segítségével fejezzük ki $\mathcal{H}$-t. Ehhez az kell, hogy N lokálisan diffeomorfizmus legyen, és ez általában így is van, ha görbület nem 0. Ha pedig nem lokális diffeomorfizmus N a p körül, akkor is van értelme a fölírt kifejezéseknek, csak nem mondhatjuk rá, hogy $\mathcal{H}$ a gömb Riemann-metrikájának a mátrixa, hiszen nem bázisban lett fölírva.

Ugyanezt a térképet használva a gömb térfogati formája

$$\sqrt{\det \mathcal{H}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m = \sqrt{\det(\mathcal{B}\mathcal{G}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{G}^{-1})}\sqrt{\det \mathcal{G}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m = \det L \; d\nu \ ,$$

ahol $d\nu$ az M térfogati formája. A térképválasztás miatt ez az alak egyúttal a gömb térfogati formájának M-re való visszahúzottja, ezért lenormálva kapjuk, hogy

$$\deg N = \frac{1}{\mathrm{vol} S^m} \int_M \det L \; d\nu \ . \tag{4}$$

Ha M 2 dimenziós, az előző számolás alapján kijön a Gauss-görbület egy másik lehetséges értelmezése is, miszernt a p pontbeli Gauss-görbület egy p körüli kis U környezet gömbi képe felületének és U felületének az aránya. Hiszen

$$\frac{\mathrm{vol}\ N(U)}{\mathrm{vol}\ U} = \frac{\int_U \det L \; d\nu}{\mathrm{vol}\ U} = \frac{\det L_{\xi(U)} \int_U d\nu}{\mathrm{vol}\ U} = \det L_{\xi(U)} = K_{\xi(U)} \ ,$$

ahol $\xi(U) \in U$ az integrálás középértéktétele szerint létező pont, és tart a p-hez, ha U átmérője tart 0-hoz, tehát a felületek aránya valóban K_p-hez tart.

Térjünk vissza a (4) egyenlőséghez és vizsgáljuk meg a két oldalát külön-külön! Az integrálban szereplő $\det L$ nyilvánvalóan a Gauss-görbület többdimenziós általánosítása, és a következő állítás szerint belső geometriai mennyiség, ha m páros. Ha pedig m páratlan, akkor $|\det L|$ belső.

18. Állítás. *$M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ irányított m dimenziós Riemann-részsokaság esetén*

$$(\det L)^{m-1} = \det \mathfrak{R} \ .$$

Bizonyítás: L szimmetrikus bilineáris operátor, ezért a főtengelytétel szerint létezik $e_1, \ldots, e_m \in T_pM$ g-ortonormált sajátbázisa a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sajátértékekkel: $L(e_i) = \lambda_i e_i$ és $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_i^j$. Belátjuk, hogy $(e_i \wedge e_j)_{i<j}$ sajátbázisa $\mathfrak{R}$-nek. A Gauss-egyenlet szerint

$$\langle \mathfrak{R}(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l \rangle = R(e_i, e_j, e_l, e_k) = \langle L(e_j), e_l \rangle \langle L(e_i), e_k \rangle - \langle L(e_i), e_l \rangle \langle L(e_j), e_k \rangle =$$

$$= \langle \lambda_j e_j, e_l \rangle \langle \lambda_i e_i, e_k \rangle - \langle \lambda_i e_i, e_l \rangle \langle \lambda_j e_j, e_k \rangle \ ,$$

ez pedig 0, ha $(i,j) \neq (k,l)$, és $\lambda_i \lambda_j$, ha a két indexpár megegyezik. Azt kaptuk, hogy

$$\mathfrak{R}(e_i \wedge e_j) = \lambda_i \lambda_j e_i \wedge e_j \ , \text{ és így}$$

$$\det \mathfrak{R} = \prod_{i<j} \lambda_i \lambda_j = (\lambda_1 \ldots \lambda_m)^{m-1} = (\det L)^{m-1} \ . \ \square$$

Ezt összevetve a (4)-gyel:

19. Állítás. *Az $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ kompakt, irányított, $m = 2n$ dimenziós Riemann-részsokaság Gauss-leképezésének a foka*

$$\deg N = \frac{1}{\mathrm{vol} S^m} \int_M \sqrt[m-1]{\det \mathfrak{R}}\ d\nu\ .$$

A következő alfejezet szerint $\deg N = \frac{1}{2}\chi(M)$, ha M Riemann-részsokasága $\mathbb{R}^{m+1}$-nek és a dimenziója, m páros. Így:

20. Állítás. *$M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ kompakt, irányított, $m = 2n$ dimenziós Riemann-részsokaság esetén*

$$\chi(M) = \frac{2}{\mathrm{vol} S^m} \int_M \sqrt[m-1]{\det \mathfrak{R}}\ d\nu\ .$$

Ez az egyenlőség viszont már független a beágyazástól: a baloldalon szereplő Euler-karakterisztika M topológiai jellemzője, a jobboldali integrál pedig belső geometriai mennyiség. Emiatt az a sejtésünk támadhat, hogy az egyenlőség tetszőleges kompakt, irányított, páros dimenziós Riemann-sokaságra igaz, és ezt a sejtést erősíti, hogy 2 dimenziós esetben ez így is van:

21. Tétel (Gauss-Bonnet). *Ha M kompakt, irányított, 2 dimenziós Riemann-sokaság, a Gauss-görbületének a felületi integrálja (M „teljes görbülete") az Euler-karakterisztika konstansszorosa:*

$$2\pi\chi(M) = \int_M K\ d\nu\ .$$

A sejtés azonban nem igaz! Egy ellenpélda a komplex projektív sík, $\mathbb{C}P^2$.

22. Állítás. *$\chi(\mathbb{C}P^2) = 3$, és $\det \mathfrak{R} = 0$ a $\mathbb{C}P^2$ minden pontjában.*

A következő alfejezetek célja – egy kis differenciáltopológiai kitérő után – a Gauss-Bonnet-tétel általánosítása, azaz olyan görbületi mennyiség keresése, aminek az integrálja tetszőleges kompakt, irányított, páros dimenziós Riemann-sokaságra megadja az Euler-karakterisztikát.

2.5. Vektormezők és Euler-karakterisztika

Nagyon vázlatosan összefoglalom, hogy tisztán topológiai megközelítéssel miket lehet tudni az érintő vektormezők, a Gauss-leképezés és az Euler-karakterisztika kapcsolatáról.

Legyen $U \subset \mathbb{R}^m$ nyílt részhalmaz. Az $X \in \mathfrak{X}(U)$ véges sok nullhellyel rendelkező folytonos vektormező $p \in U$ pontbeli *indexe* $\xi_p(X) = \deg(X/\|X\|)|_{S_p^{m-1}(\epsilon)}$, vagyis a lenormált vektormező, mint S^{m-1}-be képező függvény p körüli megfelelően kis $0 < \epsilon$ sugarú gömbre vett megszorításának a foka. Minden ponthoz van olyan ϵ,

hogy az ϵ sugarú gömbön $X \neq 0$, tehát $X/\|X\|$ értelmes. Ha X az ϵ sugarú gömb belsejében sem 0, csak esetleg a p-ben, akkor ennél kisebb ϵ-okra is ugyanezt az értéket kapjuk, hiszen az $\epsilon \to \deg(X/\|X\|)|_{S_p^{m-1}(\epsilon)}$ leképezés folytonos, egész értékű, tehát konstans. Ezért az index definíciója jó, nem függ ϵ választásától. Ha $X_p \neq 0$, akkor X folytonossága miatt $\xi_p(X) = 0$. (Vesd össze a a 12. állítással.)

Legyen M irányított sima m dimenziós sokaság, $X \in \mathfrak{X}$ sima vektormerző, és $U \subset M$ a $p \in M$ pont olyan környezete, hogy $U \setminus \{p\}$-be nem esik X-nek nullhelye, továbbá U diffeomorf a $D^m \subset \mathbb{R}^m$ nyílt gömbbel, $\phi : U \to D^m$ egy irányítástartó diffeomorfizmus. Ekkor X p-beli indexe definíció szerint legyen $\phi_*(X)$ indexe $\phi(p)$-ben. A definíció jó: az index nem függ a diffeomorfizmus választásától, mert a különböző irányítástartó diffeomorfizmusok homotópak egymással.

23. Állítás. *Legyen $M \subset \mathbb{R}^m$ sima peremes m dimenziós részsokaság, ∂M kompakt, $X \in \mathfrak{X}(M)$ sima vektormező a $p_1, \ldots, p_n \in \mathrm{int}(M)$ nullhelyekkel, és $X|_{\partial M}$ kifelé mutat. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{p_i}(X) = \deg N \ ,$$

ahol $N : \partial M \to S^{m-1}$ a határ Gauss-leképezése.

Bizonyítás: Alkamazzuk a 12. állítást az $\tilde{X} = X/\|X\| : M_\epsilon = M \setminus D_{p_i}^m(\epsilon) \to S^{m-1}$ leképezésre:

$$0 = \deg \tilde{X} = \deg(X|_{\partial M}) - \sum_{i=1}^{n} \xi_{p_i}(X) \ .$$

A második tag azért szerepel negatív előjellel, mert M_ϵ ellentétes irányítást indukál $S_{p_i}^{m-1}(\epsilon)$-on, mint a $\overline{D_{p_i}^m}(\epsilon)$-ból jövő alapértelmezett. A Poincaré-lemma miatt homotóp leképezések foka egyenlő, hiszen a képtéren lévő differenciálforma ugyanabba a homológiaosztályba húzódik vissza homotóp leképezések által. Be lehet látni, hogy $X|_{\partial M}$ és N homotópok, ez bizonyítja az állítást. $\square$

24. Tétel (Poincaré-Hopf). *Legyen M kompakt, irányított sima sokaság, $X \in \mathfrak{X}(M)$ sima vektormező a $p_1, \ldots, p_n \in \mathrm{int}(M)$ nullhelyekkel. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{p_i}(X) = \chi(M) \ .$$

A tétel klasszikus bizonyításához M-et be kell ágyazni egy megfelelően nagy dimenziós euklideszi térbe, és ott venni M egy csőszerű környezetét. Erre a környezetre kiterjeszthető az X vektormező úgy, hogy ne keletkezzen új nullhely, a kiterjesztés indexe megegyezzen X indexével minden p_i pontban és az új vektormező kifelé

mutasson a csőszerű környezet határán. Így az indexek összege a határ Gauss-leképezésének a foka, vagyis nem függ X-től. Ezek után mutatni kell egy olyan vektormezőt M-en, amire az indexösszeg jól láthatóan az Euler-karakterisztika: adott szimplexekre bontás esetén tűnjön el a mező a szimplexek „középpontjaiban", a szimplex dimenziójának megfelelően ± 1 indexszel.

25. Tétel. *$M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ kompakt, irányított, $m = 2n$ dimenziós részsokaság esetén*

$$\deg N = \frac{1}{2}\chi(M) \ ,$$

ahol N a sokaság Gauss-leképezése.

Bizonyítás (vázlat): A csőszerű környezet ez esetben M megvastagítását jelenti: $\tilde{M} = \{p \in \mathbb{R}^{m+1} \mid d(p, M) \leq \epsilon\}$. Legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$ sima vektormező véges sok nullhellyel, és $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ az X vektormező kiterjesztése a Poincaré-Hopf tételt követő bekezdésben leírt tulajdonságokkal. Ekkor a 23. állítás és a Poincaré-Hopf tétel szerint

$$\chi(M) = \sum \xi_i(X) = \sum \xi_i(\tilde{X}) = \deg \tilde{X}|_{\partial\tilde{M}} = \deg N_{\partial\tilde{M}} \ ,$$

ahol $N_{\partial\tilde{M}}$ $\tilde{M}$ határának a Gauss-leképezése. $\partial\tilde{M}$ mindkét összefüggő komponense diffeomorf M-mel, és az $\tilde{M}$-től örökölt irányításuk ellentétes. A két komponenst jelölje M_1 és M_2, $\phi_i : M_i \to M$ a diffeomorfizmus, ami M_i minden pontjához M legközelebb eső pontját rendeli, N_i pedig legyen M_i Gauss-leképezése. Így $N \circ \phi_1 = N_1$, és $N \circ \phi_2 = -N_2$. Folytatva az egyenlőséget

$$\deg N_{\partial\tilde{M}} = \deg N_1 - \deg N_2 = \deg N - \deg(-N) = \deg N - (-\deg N) = 2 \deg N \ ,$$

mert M páros dimenziója miatt N és $-N$ nem homotópok, $\deg(-N) = -\deg N$. $\square$

Megjegyzés: Abból következik, hogy N és $-N$ nem homotópok, hogy az $S^m \to S^m : p \mapsto -p$ leképezés foka $(-1)^{m+1}$, mert páratlan dimenziós gömb egy pontjában lévő pozitív irányítású bázis átmozgatható az origóra vett tükörképébe, míg páros dimenziós gömbön nem. Ha M páratlan dimenziós lenne, $\partial\tilde{M}$ két komponensén az irányítás ugyanígy ellentétes volna, de N és $-N$ homotópok lennének, hiszen páratlan dimenziós gömbfelületen egy vektormező folytonosan áttranszformálható az origóra vonatkozó tükörképébe. Ezért $\deg N = \deg(-N)$ alapján $\deg \tilde{X}|_{\partial\tilde{M}} = 0$ jönne ki, vagyis az Euler-karakterisztika 0, ahogy azt már régebben beláttuk.

2.6. A görbületi forma

Legyen (M, g) egy m dimenziós Riemann-sokaság, és egy U nyílt részhalmazán $E_1, \ldots, E_m \in \mathfrak{X}(U)$ egy bázismező, azaz minden $p \in U$ pontban $(E_1|_p, \ldots, E_m|_p)$

T_pM egy bázisa. Nem feltétlenül létezik olyan térkép, hogy $E_1, \dots, E_m$ a térképhez tartozó bázismező, $[E_i, E_j]$ nem feltétlenül 0. Egy ilyen bázismező mindig kicserélhető ortonormáltra, azaz E-ből Gram-Schmidt eljárással tudunk csinálni ortonormált bázismezőt U fölött. Ezért eleve föltesszük, hogy $(E_1, \dots, E_m)$ ortonormált U minden pontjában.

Jelölje $\theta^1, \dots, \theta^m$ a duális 1-formákat, vagyis $\theta^j(E_i) = \delta_i^j$. ∇ az (M, g) Riemann-sokaság Levi-Civita-konnexiója, $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$ és $R(E_i, E_j)E_k = R_{ijk}^l E_l$, de általában $\Gamma_{ij}^k \neq \Gamma_{ji}^k$, ha $[E_i, E_j] \neq 0$. Viszont $R_{ijk}^l = -R_{jik}^l$ teljesül a Riemann-görbületi tenzor definíciója miatt.

Vezessük be az ω_i^j 1-formákat és az Ω_i^j 2-formákat:

$$\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j \theta^k \quad \text{és} \quad \Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{kli}^j \theta^k \wedge \theta^l = \sum_{k<l} R_{kli}^j \theta^k \wedge \theta^l \ .$$

Az ω_i^j-k a Riemann-sokaság *konnexió-formái*, az Ω_i^j-k a *görbületi formái* az $E_1, \dots, E_m$ bázis szerint. Ezekkel kifejezhető a konnexió és a görbület:

$$\nabla_{E_k} E_i = \omega_i^j(E_k) E_j \quad \text{illetve} \quad R(E_k, E_l)E_i = \Omega_i^j(E_k, E_l) E_j \ ,$$

sőt $\nabla_X E_i = \omega_i^j(X) E_j$ és $R(X, Y)E_i = \Omega_i^j(X, Y) E_j$ teljesül tetszőleges X és Y sima vektormezőkre.
$\omega = (\omega_j^i)_{i,j}$ és $\Omega = (\Omega_j^i)_{i,j}$ mátrixok az $(\Omega^1(U), \wedge)$ illetve az $(\Omega^2(U), \wedge)$ gyűrűk felett.

26. Állítás. *A konnexió-formákra és a görbületi formákra teljesülnek a következő azonosságok:*

- $\omega_i^j = -\omega_j^i$, *azaz* ω *antiszimmetrikus mátrix.*
- $d\theta^i = -\omega_k^i \wedge \theta^k$, *azaz* $d\theta = -\omega \wedge \theta$.
- $d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i$, *azaz* $d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega$.
- $\Omega_i^j = -\Omega_j^i$, *azaz* Ω *antiszimmetrikus mátrix.*

Bizonyítás: $0 = E_k\langle E_i, E_j\rangle = \langle \nabla_{E_k} E_i, E_j\rangle + \langle E_i, \nabla_{E_k} E_j\rangle = \langle \omega_i^s(E_k) E_s, E_j\rangle + \langle E_i, \omega_j^l(E_k) E_l\rangle = (\omega_i^j + \omega_j^i)(E_k)$ minden k-ra az ortonormáltság miatt, ez bizonyítja az első azonosságot.
$d\theta^i(E_j, E_k) = E_j(\theta^i(E_k)) - E_k(\theta^i(E_j)) - \theta^i([E_j, E_k]) = \theta^i(\nabla_{E_k} E_j - \nabla_{E_j} E_k) = \theta^i(\omega_j^l(E_k) E_l - \omega_k^s(E_j) E_s) = \omega_j^i(E_k) - \omega_k^i(E_j)$ a d operátor definíciója és ∇ torziómentessége miatt, ez pedig egyenlő a második azonosság jobb oldalával minden (j, k)-ra, hiszen $-\omega_s^i \wedge \theta^s(E_j, E_k) = \theta^s(E_j)\omega_s^i(E_k) - \omega_s^i(E_j)\theta^s(E_k) = \omega_j^i(E_k) - \omega_k^i(E_j)$.
A harmadik azonossághoz be kell látnunk, hogy $\left(d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k\right)(E_l, E_s) = \Omega_j^i(E_l, E_s)$.

$$\Omega_j^i(E_l, E_s) = R_{lsj}^i = \theta^i\left(R(E_l, E_s)E_j\right) = \theta^i\left(\nabla_{E_l}\nabla_{E_s} E_j - \nabla_{E_s}\nabla_{E_l} E_j - \nabla_{[E_l, E_s]} E_j\right) =$$

$$= \theta^i \left(\nabla_{E_l} \left(\omega_j^k(E_s) E_k \right) - \nabla_{E_s} \left(\omega_j^k(E_l) E_k \right) - \omega_j^k \left([E_l, E_s] \right) E_k \right) \text{ , ebből}$$

$$\theta^i \left(\omega_j^k \left([E_l, E_s] \right) E_k \right) = \omega_j^i \left([E_l, E_s] \right) \text{ és}$$

$$\theta^i \left(\nabla_{E_l} \left(\omega_j^k(E_s) E_k \right) \right) = E_l \left(\omega_j^i(E_s) \right) + \omega_j^k(E_s) \omega_k^i(E_l) \text{ , és így}$$

$$\Omega_j^i(E_l, E_s) = E_l \left(\omega_j^i(E_s) \right) - E_s \left(\omega_j^i(E_l) \right) - \omega_j^i \left([E_l, E_s] \right) + \omega_j^k(E_s) \omega_k^i(E_l) - \omega_j^k(E_l) \omega_k^i(E_s) =$$

$$= \left(d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k \right) (E_l, E_s) \ .$$

A negyedik azonosság R antiszimmetriájából és az ortonormáltságból közvetlenül adódik: $\Omega_i^j(E_k, E_l) = \langle R(E_k, E_l) E_i, E_j \rangle = \langle R(E_k, E_l) E_j, E_i \rangle = \Omega_j^i(E_k, E_l)$. $\square$

Megjegyzés: Legyen M egy m dimenziós sima sokaság, és egy nyílt részén az $E_1, \ldots, E_m$ bázismező, $\theta_1, \ldots, \theta_m$ a duális mező. Be lehet látni a következőt:

27. Állítás. *Egyértelműen léteznek olyan ω_i^j 1-formák, amikre teljesül, hogy*

$$\omega_i^j = -\omega_j^i \text{ és } d\theta^i = -\omega_k^i \wedge \theta^k \ .$$

A bizonyítás ugyanúgy megy, mint a Riemann-geometria alaptételének a bizonyítása, és ez az állítás valóban annak az átfogalmazása. Hiszen a bázismező értelmezési tartományán egyértelműen létezik olyan Riemann-metrika, amelyre nézve $(E_i)_i$ ortonormált, és az állítás szerint egyértelműen léteznek ehhez a metrikához konnexió-formák, úgy, hogy a hozzájuk tartozó konnexió az első tulajdonság szerint metrikus, a második szerint torziómentes. Tehát ahelyett, hogy a Riemann-sokaságon konnexiót vezetünk be, követhetnénk másik utat is: a Riemann-metrika szerint ortonormált bázismező értelmezési tartományán vegyük az ω_i^j konnexióformákat, vizsgáljuk meg, hogyan változnak ezek, ha másik bázist veszünk (lásd 30. állítás), és ezek segítségével vezessük be a szükséges fogalmakat. Ebben a felépítésben a görbületi tenzor helyett a görbületi formákat definiálhatjuk az $\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k$ összefüggéssel. Az így kapott Ω mátrix antiszimmetriája következik a definícióból és ω antiszimmetriájából. Ebből lehet definiálni a Riemann-féle görbületi tenzort, például a $(4,1)$ típusú változat $R(X, Y, E_i, E_j) = \Omega_i^j(X, Y)$, tehát a második két változóbeli antiszimmetria következik Ω antiszimmetriájából. Külön bizonyítást az igényel, hogy az $(E_i, E_j, E_k) \to R(E_i, E_j) E_k = \Omega_k^l(E_i, E_j) E_l$ leképezés pontbeli értéke csak a vektormezők pontbeli értékétől függ.

Van még két fontos szimmetriája R-nek, amiről eddig nem esett szó, nézzük ezeknek a formás alakját.

28. Állítás (Bianchi-azonosságok). *(1)* $\Omega \wedge \theta = 0$

(2) $d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$

Bizonyítás: Első: $0 = d(d(\theta)) = d(-\omega \wedge \theta) = -d\omega \wedge \theta + \omega \wedge d\theta = -(-\omega \wedge \omega + \Omega) \wedge \theta + \omega \wedge (-\omega \wedge \theta) = -\Omega \wedge \theta$. A második: $0 = d(d(\omega)) = d(-\omega \wedge \omega + \Omega) = -d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega + d\Omega = -(-\omega \wedge \omega + \Omega) \wedge \omega + \omega \wedge (-\omega \wedge \omega + \Omega) + d\Omega = -\Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega + d\Omega$. $\square$

Az elsőt kiszámolva: $0 = (\Omega \wedge \theta)^i = \Omega^i_j \wedge \theta^j = \frac{1}{2} R^i_{klj} \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^j$. Ha ebbe behelyettesítjük az (E_k, E_l, E_j) vektormezőket, a keletkező determinánsok kibontásával kapjuk, hogy $R^i_{klj} + R^i_{jkl} + R^i_{ljk} = 0$. Hasonló, csak sokkal bonyolultabb számolással lehet kibontani a második azonosságot is, eredményül pedig a szokásos alakot kapnánk:

29. Állítás (Bianchi-azonosságok). *(1)* $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$

(2) $\nabla_X R(Y,Z) + \nabla_Z R(X,Y) + \nabla_Y R(Z,X) = 0$

Szükségünk lesz még arra, hogy a bevezetett formák hogyan transzformálódnak.

30. Állítás. *Legyen $E = (E_1, \ldots, E_m)$ és $E' = (E'_1, \ldots, E'_m)$ két ortonormált bázismező, és a kapcsolat közöttük $E' = EA$, vagyis $E'_i = E_j A^j_i$. Jelöljük az E'-höz tartozó formákat aposztróffal. A következő transzformációs szabályok teljesülnek:*

- $\theta' = A^{-1}\theta$
- $\omega' = A^{-1}dA + A^{-1}\omega A$
- $\Omega' = A^{-1}\Omega A$.

Bizonyítás: $I = (\theta^i(E_j))_{i,j} = \theta' E' = \theta A^{-1} A E$, ez bizonyítja az elsőt. Vezessük be a $\nabla E_i = \omega^k_i \otimes E_k$ jelölést. $\nabla E'_i = \nabla(E_k A^k_i) = dA^k_i \otimes E_k + A^k_i \nabla E_k = dA^k_i \otimes E_k + A^k_i \omega^l_k \otimes E_l$, másrészt $\nabla E'_i = \omega'^k_i \otimes E'_k = A^l_k \omega'^k_i \otimes E_l$, ebből pedig kapjuk, hogy $dA^l_i + A^k_i \omega^l_k = A^l_k \omega'^k_i$, vagyis $(dA + \omega A)^l_i = (A\omega')^l_i$, ami átszorozva
$A^{-1}dA + A^{-1}\omega A = \omega'$. $\square$

A harmadik transzformációs szabály bizonyítása előtt nézzük meg a konnexió kiterjesztését a $\nabla : \mathfrak{X}(U) \to \Omega^1(U) \otimes \mathfrak{X}(U)$ mintájára. Itt $\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X$ teljesül. Legyen tehát

$$\nabla : \Omega^q(U) \otimes \mathfrak{X}(U) \to \Omega^{q+1}(U) \otimes \mathfrak{X}(U) \ , \ \nabla(\eta \otimes X) = d\eta \otimes X + (-1)^q \eta \wedge \nabla X \ .$$

Így $\nabla^2 E_i = \nabla\left(\omega^k_i \otimes E_k\right) = d\omega^k_i \otimes E_k - \omega^k_i \wedge \omega^l_k \otimes E_l = (d\omega^l_i + \omega^l_k \wedge \omega^k_i) \otimes E_l$, vagyis

$$\nabla^2 E_i = \Omega^l_i \otimes E_l \ . \tag{5}$$

Továbbá ∇^2 lineáris $\mathcal{C}(U)$ fölött:
$\nabla^2(fX) = \nabla(df \otimes X + f\nabla X) = -df \wedge \nabla X + df \wedge X + f\nabla^2 X = f\nabla^2 X$.

Bizonyítás(3. transzformációs szabály): $\nabla^2 E'_i = \nabla^2(E_l A^l_i) = \Omega^s_l A^l_i \otimes E_s$, másrészt $\nabla^2 E'_i = \Omega'^l_i \otimes E'_l = A^s_l \Omega'^l_i \otimes E_s$, vagyis $A\Omega' = \Omega A$. $\square$

2.7. A klasszikus Gauss-Bonnet tétel

A görbületi forma segítségével a klasszikus Gauss-Bonnet tétel lényegében a Stokes-tétel alkalmazása lesz.

Legyen M 2 dimenziós irányított Riemann-sokaság, $E = (E_1, E_2)$ pozitívan irányítot ortonormált bázismező egy $U \subset M$ nyílt halmaz fölött. A duális formák, a konneció-formák és a görbületi formák mátrixa rendre

$$\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 \\ -\omega^1_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \Omega^1_2 \\ -\Omega^1_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\omega^1_2 \wedge \omega^1_2 = 0$, ezért $\omega \wedge \omega = 0$. Ezt figyelembe véve és kifejtve a formák aonosságait, a

$$d\theta^1 = -\omega^1_2 \wedge \theta^2 \ , \ d\theta^2 = \omega^1_2 \wedge \theta^1 \text{ és}$$

$$d\omega^1_2 = \Omega^1_2 = R^1_{122}\theta^1 \wedge \theta^2 = K d\nu \tag{6}$$

egyenlőségeket kapjuk. Az utolsó azért, mert E ortonormált.

Legyen $E' = EA$ egy másik bázismező. Az $(E_1, E'_1)\angle = \alpha$ jelöléssel

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Itt persze az $\alpha : U \to \mathbb{R}$ függvényt megfelelően kellene értelmezni, és lokálisan mindig meg tudjuk úgy választani két sima vektormező szögét, hogy az simán függjön a ponttól. A lehetséges választások 2π többszörösében térnek el egymástól, ezért $d\alpha$ egyértelmű, az egész U-n értelmezett differenciálforma. Figyelembe véve, hogy $A^{-1} = A^T$ és $d(f(\alpha)) = f'(\alpha)d\alpha$, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sima függvény, a transzformációs szabály kifejtésével azt kapjuk, hogy

$$\omega'^1_2 = \omega^1_2 - d\alpha \ . \tag{7}$$

Szükségünk lesz néhány fogalomra a görbe menti eltolással és a geodetikusokkal kapcsolatban. Legyen $\gamma : [a, b] \to M$ sima görbe, a képe $\Gamma \subset M$. A Riemann-részsokaság menti konnexió spaciális esete, hogy ha X sima vektormező Γ egy

környezetében, a $(\nabla_{\gamma'}X)|_\Gamma$ vektormező csak $X|_\Gamma$-tól függ. Így a görbe menti deriválás egyértelműen meghatározott.

Az X vektormező *párhuzamos γ mentén*, ha $\nabla_{\gamma'}X = 0$. Ha X és Y két γ mentén párhuzamos vektormező, akkor $\langle X, Y\rangle$ állandó a Γ-n ∇ metrikussága miatt. Speciálisan, az általuk bezárt szög és mindkettőjük hossza állandó.

γ *geodetikus*, ha γ' párhuzamos γ mentén, vagyis $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. A geodetikusok a sokaság „egyenesei". A differenciálegyenletek egzisztenciatétele szerint tetszőleges $p \in M$ ponton keresztül tetszőleges $v \in T_pM$ kezdősebességgel indul geodetikus.

A p pontbeli *exponenciális leképezés* $\exp : T_pM \to M$ a p-ből v kezdősebességgel induló geodetikus menti egységnyi idejű utazás: $\exp(v) = \gamma(1)$, ahol γ a szóban forgó geodetikus, vagyis $\gamma(0) = p$ és $\gamma'(0) = v$. Az exponenciális leképezés diffeomorfizmus $p \in M$ egy környezete és $0 \in T_pM$ egy környezete között.

Egy (M, g) Riemann-sokaság természetes módon metrikus tér a $\rho(p, q) = \inf_\gamma\{\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt \mid \gamma : [a, b] \to M, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$ metrikával.

Egy γ ívhossz szerint paraméterezett görbe *geodetikus görbülete* $\kappa_g = \|\nabla_{\gamma'}\gamma'\|$. Ha M 2 dimenziós irányított, (E_1, E_2) pozitív irányítású ortonormált bázismező, $E_1 = \gamma'$, akkor $\kappa_g = \langle E_2, \nabla_{\gamma'}\gamma'\rangle$. Ez valójában az előjeles geodetikus görbület, a κ_g jelölést erre fogom használni.

31. Lemma. *Legyen M egy 2 dimenziós irányított Riemann-sokaság, $E = (E_1, E_2)$ pozitívan irányított ortonormált bázismező egy $U \subset M$ nyílt halmaz fölött, $\gamma : [a, b] \to U$ sima görbe. Legyen $X \in \mathfrak{X}(U)$ sima vektormező és $\alpha = (E_1, X)\angle$ a szög tetszőleges differenciálható megválasztása, és $\alpha(\gamma(t)) = \beta(t)$ a görbe mentén. Ekkor*

(1) X pontosan akkor párhuzamos γ mentén, ha $-\omega_2^1(\gamma'(t)) + \beta'(t) = 0$.

(2) Ha γ ívhossz szerint paraméterezett, akkor $\kappa_g(t) = -\omega_2^1(\gamma'(t)) + \beta'(t)$.

Bizonyítás:

$$\langle \nabla_{\gamma'}E_1', E_2'\rangle = \omega_1'^2(\gamma') = -\omega_2'^1(\gamma') = -\omega_2^1(\gamma') + d\alpha(\gamma') \tag{8}$$

a (7) alapján. Az első állításhoz válasszuk az új bázismezőt úgy, hogy $E_1' = X$ legyen és (E_1', E_2') pozitív irányítású, és legyen. X pontosan akkor párhuzamos γ mentén, ha a (8) bal oldala 0, vagyis

$$0 = -\omega_2^1(\gamma')(\gamma(t)) + d\alpha(\gamma')(\gamma(t)) = -\omega_2^1(\gamma'(t)) + d\alpha(\gamma'(t)) =$$

$$= -\omega_2^1(\gamma'(t)) + (\alpha \circ \gamma)'(t) = -\omega_2^1(\gamma'(t)) + \beta'(t)\ .$$

A második állításhoz legyen $E_1' = \gamma'$, (E_1', E_2') pozitív irányítású, így a (8) bal oldala épp κ_g. Vagyis

$$\kappa_g(t) = -\omega_2^1(\gamma'(t)) + d\alpha(\gamma'(t)) = -\omega_2^1(\gamma'(t)) + \beta'(t) \ . \ \square$$

A következő tétel szerint a görbület integrálja egy peremes tartományon megegyezik a perem mentén önmagával párhuzamosan körbevitt vektor szögelfordulásával.

32. Tétel (szögelfordulásos Gauss-Bonnet). *Legyen M 2 dimenziós irányított Riemann-sokaság, K a Gauss-görbülete, $d\nu$ a térfogati formája. Legyen $N \subset M$ kompakt 2 dimenziós peremes Riemann-részsokaság összefüggő és sima peremmel, $\gamma : [a,b] \to \partial N$ sima zárt görbe, tehát $\gamma(a) = \gamma(b)$ és $\gamma'(a^+) = \gamma'(b^-)$, és $\gamma'(t)$ pozitív irányítású a ∂N-en indukált irányítás szerint. Legyen X egységvektormező, amely párhuzamos γ mentén. Ha (E_1, E_2) pozitív irányítású ortonormált bázismező N-en, $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ az $(E_1, X)\angle$ szög differenciálható megválasztása γ mentén, akkor*

$$\int_N K d\nu = \beta(b) - \beta(a) \ .$$

Bizonyítás: Alkalmazzuk a (6)-t és a Stokes-tételt:

$$\int_N K d\nu = \int_N d\omega_2^1 = \int_{\partial N} \omega_2^1 = \int_a^b \omega_2^1(\gamma'(t))dt = \int_a^b \beta'(t)dt = \beta(b) - \beta(a) \ . \ \square$$

33. Tétel (sima peremes Gauss-Bonnet). *Legyen M és N, és γ, mint az előző tételben, továbbá tegyük fel, hogy N diffeomorf $\mathbb{R}^2$ egy egyszeresen összefüggő részhalmazával, és γ ívhossz szerint paraméterezett. Jelölje ds az indukált irányítás által meghatározott térfogati formát ∂N-en, és ∂N előjeles geodetikus görbületét κ_g. Ekkor*

$$\int_N K d\nu + \int_{\partial N} \kappa_g ds = 2\pi \ .$$

Bizonyítás: Az N-re tett feltevés miatt N egy környezetén van (x, y) térkép. Legyen (E_1, E_2) ortonormált bázismező úgy, hogy E_1 minden pontban $\partial/\partial x$ pozitív számszorosa. Válasszuk meg folytonosan a $\beta(t) = (E_1(\gamma(t)), \gamma'(t))\angle$ szöget. Így

$$\int_N K d\nu = \int_a^b \omega_2^1(\gamma'(t))dt = \int_a^b \beta'(t)dt - \int_a^b \kappa_g(t)dt = \beta(b) - \beta(a) - \int_{\partial N} \kappa_g ds \ ,$$

tehát azt kell belátnunk, hogy $\beta(b) - \beta(a) = 2\pi$. $\beta(b)$ és $\beta(a)$ egyaránt E_1 és $\gamma'(b) = \gamma'(a)$ vektorok szöge, tehát a különbségük 2π törbbszöröse. A Riemann-metrika folytonos transzformálásával vissza lehet vezetni a problémát $\mathbb{R}^2$-beli tartományra: N helyett vegyük annak a diffeomorfizmus általi $N' \subset \mathbb{R}^2$ képét, és ezen a $g^{(t)}$

Riemann-metrikákat: $g^{(t)} = tg + (1-t)h$, ahol h $\mathbb{R}^2$ kanonikus skaláris szorzata. $g^{(t)}$-hez definiáljuk az $(E_1^{(t)}, E_2^{(t)})$ pozitív irányítású ortonormált bázismezőket, hogy $E_1^{(t)}$ pozitív számszorosa legyen $\partial/\partial x$-nek, és legyen $\beta^{(t)} = (E_1^{(t)}, \gamma')\angle$ szög folytonos megválasztása γ mentén úgy, hogy $\beta^{(t)}(a)$ folytonosan függjön $\beta(a)$-tól. Így $\beta^{(t)}(b) - \beta^{(t)}(a)$ folytonos függvénye t-nek, az értéke minden t-re 2π többszöröse, ezért ez a függvény konstans. Elég tehát a kanonikus metrikával értelmezett $\beta^{(0)}(b) - \beta^{(0)}(a)$ értéket meghatározni. Ezt meg is adja a következő tétel. □

34. Tétel (Hopf Umlaufsatz). *Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ önátmetszés nélküli sima zárt görbe, az általa határolt tartomány által indukált irányításnak megfelelően paraméterezve. Jelölje $\beta(t)$ a x tengely és $\gamma'(t)$ által bezárt szög egy folytonos megválasztását. Ekkor $\beta(b) - \beta(a) = 2\pi$.*

Bizonyítás (vázlat): Vezessük be a $\phi : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt: $t < s$ esetén $\phi(t,s)$ a $\gamma(t)$ ből $\gamma(s)$-en át irányított szelő és az x tengely szöge, $\phi(t,t) = \beta(t)$, és válasszuk ϕ-t úgy, hogy (a,a)-ban folytonos legyen. Ekkor ϕ folytonos az egész $[a,b]^2$-en és sima. A Stokes-tétel szerint

$$\phi(b,b) - \phi(a,a) = \int_{\mathrm{im}(\delta)} d\phi \ ,$$

ha $\delta : [c,d] \to [a,b]^2$ tetszőleges (szakaszonként) sima görbe, amelyre $\delta(c) = (a,a)$ és $\delta(d) = (b,b)$. Legyen δ az $\{(a, a+t)\} \cup \{(a+t, b)\}$ törötvonal egy paraméterezése, ennek a darabjain pedig belátható, hogy π-t változik a szög: például az első szakaszon $\phi(a,a) = \beta(a)$, $\phi(a,b) = \beta(a) + (2k+1)\pi$, és van olyan érték moduló 2π, amit nem vesz föl, ha a $\gamma(a)$ kezdőpontot megfelelően választjuk, mégpedig úgy, hogy a görbe a kezdőpontbeli érintőegyenes egyik oldalán helyezkedjen el. Összesen tehát 2π a szögváltozás. □

Megjegyzés: Be lehet látni, hogy síkgörbékre $\beta'(t) = \kappa(t)$, a görbe adott pontbeli görbülete. Így az Umlaufsatz tétel a Gauss-Bonnet 1 dimenziós analógiájának tekinthető: Egy egyszerű sima görbe teljes görbülete $\int_{\mathrm{im}(\gamma)} \kappa = \beta(b) - \beta(a) = 2\pi$.

A $\gamma : [a,b] \to M$ zárt görbe *töröttvonal*, ha szakaszosan sima. Azaz, van olyan $a = t_0 < t_1 \cdots < t_n < t_{n+1} = b$ pontsorozat, hogy $\gamma'(t)$ létezik minden $t \neq t_i$ pontban, és a t_i pontokban létezik mindkét oldali deriváltja, $\gamma'(t_i^+)$ és $\gamma'(t_i^-)$. (A végpontokban $\gamma'(a^+) = \gamma'(b^-)$.) Értelmezzük a t_i pontokban a töröttvonal *belső és külső szögét.* A külső szög $\delta_i = (\gamma'(t_i^-), \gamma'(t_i^+))\angle \in [-\pi, \pi]$, a belső szög $\iota_i = (-\gamma'(t_i^+), \gamma'(t_i^-))\angle \in [0, 2\pi]$, és igaz rájuk, hogy $\delta_i = \pi - \iota_i$. Ez az értelmezés rendben is van, ha M irányított Riemann-sokaság, az egyetlen gond azzal van, ha a két vektor szöge 0 vagy 2π, a definíció erre az esetre nem mondja meg, hogy a

két-két lehetséges érték közül mennyi a belső illetve a külső szög. Ebben az esetben $\iota_i = \lim_{\epsilon\to 0}(w_1(\epsilon), w_1(\epsilon))\angle$, ahol $w_1(\epsilon)$ a $\gamma(t_i)$-ből $\gamma(t_i+\epsilon)$-ba, $w_2(\epsilon)$ a $\gamma(t_i)$-ből $\gamma(t_i-\epsilon)$-ba menő geodetikus érintővektora. Be lehet látni, hogy ez (általában is) jó definíció.

35. Tétel (peremes Gauss-Bonnet). *Legyen M 2 dimenziós irányított Riemann-sokaság, K a Gauss-görbülete, $d\nu$ a térfogati formája. Legyen $N \subset M$ kompakt 2 dimenziós peremes Riemann-részsokaság diffeomorf $\mathbb{R}^2$ egy részhalmazával és a pereme összefüggő, a $\gamma : [a,b] \to \partial N$ ívhossz szerint paraméterezett töröttvonal a $t_1 \dots t_n$ csúcsokkal és ι_i belső, δ_i külső szögekkel. ds jelölje ∂N térfogati formáját és κ_g az előjeles geodetikus görbületét. Ekkor*

$$\int_N K d\nu + \int_{\partial N} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 2\pi \ .$$

Bizonyítás: Mint a sima peremes Gauss-Bonnetnál, itt is választhatunk egy térképet N egy környezetében, annak megfelelően (E_1, E_2) bázismezőt és folytonosan értelmezett $\beta_i(t) = E_1(\gamma(t)), \gamma'(t))\angle$ $(t \in [t_{i-1}, t_i])$ szögeket úgy, hogy $\beta_{i+1}(t_i) = \beta_i(t_i) + \delta_i$. Az előző bizonyításokhoz hasonlóan:

$$\int_N K d\nu = \int_{\partial N} \omega_2^1 = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega_2^1(\gamma'(t))dt = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \beta_i'(t)dt - \int_{\partial N} \kappa_g ds \ , \text{ és}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \beta_i'(t)dt = \sum_{i=1}^{n+1} (\beta_i(t_i) - \beta_i(t_{i-1})) = -\sum_{i=1}^{n} \delta_i + \beta_{n+1}(b) - \beta_1(a) \ .$$

A sima peremes Gauss-Bonnet tételnél részletezett eljárás alapján elég belátni, hogy egyszerű szakaszosan sima zárt síkgörbékre igaz, hogy $\beta_{n+1}(b) - \beta_1(a) = 2\pi$, ez pedig az Umlaufsatz tétel általánosítása szakaszosan sima görbékre, a bizonyítása sima görbével való közelítéssel történik. □

36. Következmény. *A tételben kifejtett szereposztással*

$$\int_N K d\nu + \int_{\partial N} \kappa_g ds = \sum_{i=1}^{n} \iota_i + (2-n)\pi \ ,$$

speciálisn $N = \Delta$ geodetikusokkal határolt háromszögre

$$\int_\Delta K d\nu = \iota_1 + \iota_2 + \iota_3 - \pi \ .$$

37. Tétel (Gauss-Bonnet). *Legyen M kompakt irányított 2 dimenziós Riemann-sokaság, K a Gauss-görbülete és $d\nu$ a térfogati formája. Ekkor*

$$\int_M K d\nu = 2\pi\chi(M) \ .$$

Bizonyítás: Vegyünk egy háromszögekre bontást, $M = \bigcup_i \Delta_i$ a Δ_i (nem feltétlenül geodetikusokkal határolt) háromszögekkel. A háromszögek, az élek és a csúcsok számát jelölje rendre L, E és C, a Δ_i háromszög belső szögeit pedig α_i, β_i és γ_i.

$$\int_M K d\nu = \sum_{i=1}^{L} \int_{\Delta_i} K d\nu = \sum_{i=1}^{L} \left(- \int_{\partial \Delta_i} \kappa_g ds + (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) + 2\pi - 3\pi \right)$$

Nézzük a tagokat sorban!

$$\sum_{i=1}^{L} \int_{\partial \Delta_i} \kappa_g ds = 0 \ ,$$

mivel egyazon élen kétszer integrálunk a két oldalán fekvő háromszögektől örökölt ellentétes irányítás szerint.

$$\sum_{i=1}^{L} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = 2\pi C \ ,$$

mert egy adott csúcs körüli szögek összege 2π. $2E = 3L$, ezért a maradék két tag

$$\sum_{i=1}^{L} (2\pi - 3\pi) = 2\pi L - 2\pi E \ ,$$

összesen tehát

$$\int_M K d\nu = 2\pi(L - E + C) = 2\pi\chi(M) \ . \ \square$$

És egy másik bizonyítás a Gauss-Bonnet tételre vagy a 2 dimenziós Poincaré-Hopfra, attól függően, hogy honnan nézzük.

38. Tétel. *Legyen M kompakt irányított 2 dimenziós Riemann-sokaság, K a Gauss-görbülete és $d\nu$ a térfogati formája. $X \in \mathfrak{X}(M)$ sima vektormező a $p_1, \ldots, p_n$ null-helyekkel és a nullhelyeken vett $\xi_1, \ldots, \xi_i$ indexekkel. Ekkor*

$$\int_M K d\nu = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \xi_i \ .$$

Bizonyítás: Legyen $N(\epsilon) = M \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} D_i(\epsilon))$, ahol $D_i(\epsilon)$ a p_i körüli ϵ sugarú gömb belseje. $N(\epsilon)$-on egészítsük ki $E_1 = X/\|X\|$-t (E_1, E_2) pozitívan irányított ortonormált bázismezővé. Ezzel

$$\int_{N(\epsilon)} K d\nu = \int_{\partial N(\epsilon)} \omega_2^1 = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega_2^1 \ .$$

Válasszunk egy konkrét $D_i(\epsilon)$-on (E_1', E_2') pozitív irányítású ortonormált bázismezőt, és $\alpha = (E_1, E_1')\angle$ legyen a szög egy folytonos értelmezése a bemetszett $D_i(\epsilon)$-on.

$$\int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega_2^1 = \int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega_2'^1 + \int_{\partial D_i(\epsilon)} d\alpha = \int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega_2'^1 + \int_a^b \alpha'(t) dt \ ,$$

egy $[a,b] \to \partial D_i(\epsilon)$ paraméterezést véve. Az első tag 0-hoz tart, ha $\epsilon \to 0$, a második tag pedig $\alpha(a)-\alpha(b)$, az α szög megváltozása $\partial D_i(\epsilon)$-on. Ez -1-szerese az $(E_1', X)\angle$ szög megváltozásának, és $\partial D_i(\epsilon)$-t most mint $N(\epsilon)$ határát irányítottuk, vagyis a második tag valóban 2π-szer az X indexe. Ezért határátmenetet véve megkapjuk az állítást:

$$\int_M K d\nu = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{N(\epsilon)} K d\nu = 0 + 2\pi \sum_{i=1}^{n} \xi_i \ . \ \square$$

2.8. A Pfaff-forma

Kommutatív algebra feletti antiszimmetrikus mátrixok determinánsa négyzetelem, sőt, a determináns, mint a mátrix elemeinek polinomja, a *Pfaff-polinom* négyzete. Ezt, és így a Pfaff-polinom létezését be lehet látni egyszerű algebrai ügyeskedéssel, de nekünk szükségünk lesz a Pfaff-polinom konkrét alakjára, ezért abból kiindulva látjuk be a fenti tulajdonságot.

Először, ha $A \in R^{n\times n}$ antiszimmetrikus mátrix az R kommutatív algebra felett, és n páratlan, akkor $\det(A) = 0$, hiszen $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$, ezért páratlan rangú mátrixokra a Pfaff-polinom definíció szerint 0.

4. Definíció. *Egy R kommutatív algebra feletti $(a_{ij})_{i,j} = A \in R^{2n\times 2n}$ antiszimmetrikus mátrix Pfaff-polinomja*

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma_1\sigma_2} a_{\sigma_3\sigma_4} \dots a_{\sigma_{2n-1}\sigma_{2n}} \ .$$

Ezt az alakot egyszerűsíthetjük. $\mathrm{sgn}(\sigma)$ valójában csak a $\rho = \{(\sigma_1,\sigma_2),\dots,(\sigma_{2n-1},\sigma_{2n})\}$ halmaztól függ, a párok sorrendjétől nem, hiszen két pár megcserélése az két csere. Ezzel eltűntethetjük az $n!$-t. A antiszimmetriája miatt $a_{ij} = -a_{ji}$, és a megfelelő permutáció előjele is ellentétes lesz, ezzel a 2^n együttható is eltűnik. Legyen tehát $P_n = \{\rho \mid \rho = \{(h_1,k_1),\dots,(h_n,k_n)\}, 1 \le h_i < k_i \le 2n\}$, és $\mathrm{sgn}(\rho) = \mathrm{sgn}(h_1,k_1,\dots,h_n,k_n)$. Így a Pfaff-polinom:

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\rho \in P_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_\rho \ ,$$

ahol $a_\rho = a_{h_1k_1} \dots a_{h_nk_n}$, ha $\rho = \{(h_1,k_1),\dots(h_n,k_n)\}$.

Megjegyzés: A V páros dimenziós vektortér feletti antiszimmetrikus mátrixok azonosíthatóak $\bigwedge^2 V^*$ elemeivel, például az $(e_i)_i$ bázisban fölírt $A = (a_{ij})_{i,j}$ antiszimmetrikus mátrixnak az $\omega = \frac{1}{2} a_{ij} d^i \wedge d^j$ 2-forma felel meg, ahol $(d^j)_j$ a duális bázis. Ekkor

$$\frac{1}{n!}\omega^n = \mathrm{Pf}(A) d^1 \wedge \dots \wedge d^{2n} \ ,$$

ahol ω^n az ω önmagával való n-szeres összeékelésével kapott $2n$-formát jelöli.

Nézzük meg, hogyan viselkedik a Pfaff-polinom báziscsere esetén!

39. Állítás. *$A, B \in R^{2n\times 2n}$, A antiszimmetrikus, B invertálható mátrixokra*

$$\mathrm{Pf}(B^T AB) = \det(B)\mathrm{Pf}(A) \ .$$

Bizonyítás: Ha $A = (a_{ij})_{i,j}$, $B = (b_{ij})_{i,j}$,

$$B^T AB = \left(\sum_k \sum_l a_{kl} b_{lj} b_{ki}\right)_{i,j} \text{, így}$$

$$2^n n! \mathrm{Pf}(B^T AB) = \sum_{\sigma\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\sum_{k_1,l_1} a_{k_1 l_1} b_{l_1\sigma_2} b_{k_1\sigma_1}\right) \dots \left(\sum_{k_n,l_n} a_{k_n l_n} b_{l_n\sigma_{2n}} b_{k_n\sigma_{2n-1}}\right) \ .$$

A $\tau = (k_1, l_1, \dots, k_n, l_n)$ jelöléssel ez

$$\sum_{\sigma\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{\tau_1,\dots,\tau_{2n}} a_{\tau_1\tau_2} a_{\tau_3\tau_4} \dots a_{\tau_{2n-1}\tau_{2n}} b_{\tau_1\sigma_1} \dots b_{\tau_{2n}\sigma_{2n}}$$

Az összeg azon tagjai, amelyek tartalmaznak megegyező $\tau_i = \tau_j$ indexeket, kiesnek. Ennek igazolásához vegyünk egy tagot a σ permutácóhoz tartozó összegből, amiben $\tau_i = \tau_j$. Ugyanez a tag megjelenik a $\sigma \circ (i, j)$ permutációnál is, ahol (i, j) a cserét jelöli. Mivel $\mathrm{sgn}(\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma \circ (i, j))$, a tag két előfordulása kiejti egymást.
Ha a k_i, l_j indexek mind különbözőek, akkor τ egy permutáció, így az a-s tényezőket kiemelve kapjuk, hogy

$$\sum_{\tau\in S_{2n}} a_{\tau_1\tau_2} a_{\tau_3\tau_4} \dots a_{\tau_{2n-1}\tau_{2n}} \sum_{\sigma\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{\tau_1\sigma_1} \dots b_{\tau_{2n}\sigma_{2n}} =$$

$$= \sum_{\tau\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\tau) a_{\tau_1\tau_2} a_{\tau_3\tau_4} \dots a_{\tau_{2n-1}\tau_{2n}} \sum_{\sigma\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau) b_{\tau_1\sigma_1} \dots b_{\tau_{2n}\sigma_{2n}} \ ,$$

ami pedig nyilvánvalóan $2^n n! \det(B)\mathrm{Pf}(A)$. $\square$

Legyen $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

40. Állítás. *Minden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antiszimmetrikus mátrixhoz van olyan $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix, amivel A*

$$B^T AB = \underbrace{S \oplus S \oplus \dots \oplus S}_{k} \oplus 0$$

normálalakra hozható, ami azt jelenti, hogy a főátló mentén $k < n/2$ darab S blokk áll és egy $n - 2k$ méretű nullmátrix, mindenhol máshol 0.

Bizonyítás: Először a következőt látjuk be: ha V egy n dimenziós vektortér, $\alpha \in \bigwedge^2 V^*$, akkot van V^*-nak olyan (d^i) bázisa, amelyben felírva

$$\alpha = d^1 \wedge d^2 + \cdots + d^{2r-1} \wedge d^{2r} \ .$$

Indukcióval megválasztjuk a kívánt (d^i) duális bázisát. $n = 1$-re jó, tegyük fel, hogy $< n$ dimenziós terekre tudjuk. A V n dimenziós vektortér felett az $\alpha \in \bigwedge^2 V^*$ forma, föltehetjük, hogy $\alpha \neq 0$. Ekkor van $e_1, e_2 \in V$, hogy $\alpha(e_1, e_2) = 1$, és jelölje U az általuk kifeszített alteret. Legyen $W = \{v \in V \mid \alpha(e_1, v) = \alpha(e_2, v) = 0\} = \ker \alpha(e_1, \cdot) \cap \ker \alpha(e_2, \cdot)$. $\dim W \geq n - 2$, és $W \cap U = 0$, ezért $\dim W = n - 2$ és $V = W \oplus U$. Az indukciós feltevés szerint létező $e_3, \ldots, e_n \in W$ megfelelő bázis e_1, e_2-vel való kipótlásával készen vagyunk.
Legyen (e'_i) az eredeti bázis, és $e_i = b_i^k e'_k$, α az A-nak megfelelő 2-forma. Így

$$\alpha(e_i, e_j) = b_i^k b_j^l \alpha(e'_k, e'_l) = b_i^k b_j^l a_{kl} = (B^T A B)_{ij} \ ,$$

ahol $B = (b_i^j)$, és az (e_i) bázisban felírt mátrix épp olyan alakú, amilyet szerettünk volna. □

41. Következmény. *Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ antiszimmetrikus mátrixra*

$$(\mathrm{Pf}(A))^2 = \det(A) \ .$$

Bizonyítás: Válasszunk az előző állítás szerint B mátrixot. A normálformának a determinánsa és a Pfaff-polinomja is 1, ezért $\det(B)\mathrm{Pf}(A) = 1 = (\det(B))^2 \det(A)$, ebből átosztva kapjuk az állítást. □

42. Következmény. *Ha $A = A_1 \oplus A_2$ a főátló menti A_1 és A_2 blokkokból álló antiszimmetrikus mátrix, akkor*

$$\mathrm{Pf}(A) = \mathrm{Pf}(A_1)\mathrm{Pf}(A_2) \ .$$

Legyen M irányított $m = 2n$ dimenziós Riemann-sokaság és egy nyílt része fölött $E = (E_i)$ pozitív irányítású ortonormált bázismező. A görbületi formák Ω mátrixa a $\left(\bigoplus_{q=0}^n \Omega^{2q}(M), \wedge\right)$ kommutatív algebra feletti antiszimmetrikus mátrix, $K = \mathrm{Pf}(\Omega)$ egy m-forma. Az $E' = EA$ bázisban fölírva $\Omega' = A^{-1}\Omega A = A^T \Omega A$, mert $A \in SO(m)$. Ezért $\mathrm{Pf}(\Omega') = \det(A)\mathrm{Pf}(\Omega) = \mathrm{Pf}(\Omega)$.

43. Állítás. *Egy M irányított $m = 2n$ dimenziós Riemann-sokaságon egyértelműen létezik olyan K m-forma, amely tetszőleges ortonormált bázismező értelmezési tartományán*

$$K = \mathrm{Pf}(\Omega) = \sum_{\rho \in P_n} \mathrm{sgn}(\rho) \Omega_{k_1}^{h_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{k_n}^{h_n} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma_2}^{\sigma_1} \wedge \Omega_{\sigma_4}^{\sigma_3} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma_m}^{\sigma_{m-1}}$$

alakú.

K a sokaság *Pfaff-formája.*

Számoljuk ki K hatását az $E = (E_1, \dots, E_m)$ pozitív irányítású ortonormált bázismezőre E értelmezési tartományán!

$$\Omega^{\sigma_1}_{\sigma_2} \wedge \Omega^{\sigma_3}_{\sigma_4} \wedge \dots \wedge \Omega^{\sigma_{m-1}}_{\sigma_m}(E_1, \dots, E_m) =$$

$$= \frac{1}{(2!)^n} \sum_{\tau \in S_m} \operatorname{sgn}(\tau) \Omega^{\sigma_1}_{\sigma_2}(E_{\tau_1}, E_{\tau_2}) \Omega^{\sigma_3}_{\sigma_4}(E_{\tau_3}, E_{\tau_4}) \dots \Omega^{\sigma_{m-1}}_{\sigma_m}(E_{\tau_{m-1}}, E_{\tau_m}) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{\tau \in S_m} \operatorname{sgn}(\tau) R_{\tau_1 \tau_2 \sigma_1 \sigma_2} \dots R_{\tau_{m-1} \tau_m \sigma_{m-1} \sigma_m}$$

a görbületi formák definíciója szerint. Ez alapján

$$K(E_1, \dots, E_m) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \Omega^{\sigma_1}_{\sigma_2} \wedge \Omega^{\sigma_3}_{\sigma_4} \wedge \dots \wedge \Omega^{\sigma_{m-1}}_{\sigma_m}(E_1, \dots, E_m) =$$

$$= \frac{1}{2^m n!} \sum_{\sigma, \tau \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) R_{\tau_1 \tau_2 \sigma_1 \sigma_2} \dots R_{\tau_{m-1} \tau_m \sigma_{m-1} \sigma_m} = \tilde{K} \ .$$

Másképp megfogalmazva, ha $d\nu$ az M térfogati formája, akkor a bevezetett jelöléssel

$$K = \tilde{K} d\nu \ .$$

Most tegyük fel, hogy $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ Riemann-részsokaság, és számoljuk ki a Weingarten-leképezés determinánsát más megközelítésben, mint a normálleképezés fokáról szóló szakaszban! Ehhez megint egy lineáris algebrai kitérő szükséges.

Legyen V egy $m = 2n$ dimenziós vektortér és $f : V \to V$ egy lineáris leképezés, $A = a^i_j$ az f mátrixa az $e_1, \dots, e_m$ bázisban felírva. (d^j)-vel jelölve a duális bázist. Értelmezzük a V fölötti alternáló multilineáris leképezések visszahúzását a szokásos módon: $f^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(V)$, $f^*(T)(v_1, \dots, v_k) = T(f(v_1), \dots, f(v_k))$. A következő összefüggések teljesülnek:

$$f(e_i) = a^j_i e_j \ , \ f^*(d^j) = a^j_i d^i \ ,$$

$$f^*(d^1 \wedge \dots \wedge d^k) = f^*(d^1) \wedge \dots \wedge f^*(d^k) \ , \text{ és}$$

$$f^*(d^1 \wedge \dots \wedge d^m) = \det f d^1 \wedge \dots \wedge d^k \ .$$

Ez utóbbi miatt, és mert $\dim \Omega^m(V) = 1$ és f^* lineáris, $f^* : \Omega^m(V) \to \Omega^m(V)$ valójában $\det(A)$-val való szorzás. Másrészt:

$$f^*(d^1 \wedge \dots \wedge d^m) = \big(f^*(d^1) \wedge f^*(d^2)\big) \wedge \dots \wedge \big(f^*(d^{m-1}) \wedge f^*(d^m)\big) =$$

$$= \big(a^1_i d^i \wedge a^2_j d^j\big) \wedge \dots \wedge \big(a^{m-1}_i d^i \wedge a^m_j d^j\big) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}[a_i^1 a_j^2 - a_i^2 a_j^1]d^i \wedge d^j\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{1}{2}[a_i^{m-1} a_j^m - a_i^m a_j^{m-1}]d^i \wedge d^j\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma \in S^m} \mathrm{sgn}(\sigma) D(1, 2, \sigma_1, \sigma_2) \dots D(m-1, m, \sigma_{m-1}, \sigma_m) d^1 \wedge \cdots \wedge d^m =$$

$$= \frac{1}{2^n m!} \sum_{\sigma, \tau \in S^m} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau) D(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2) \dots D(\tau_{m-1}, \tau_m, \sigma_{m-1}, \sigma_m) d^1 \wedge \cdots \wedge d^m \ ,$$

ahol $D(i, j, k, l) = a_k^i a_l^j - a_l^i a_k^j$ a 2×2-es előjeles aldetermináns. Összefoglalva:

$$\det f = \frac{1}{2^n m!} \sum_{\sigma, \tau \in S^m} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau) D(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2) \dots D(\tau_{m-1}, \tau_m, \sigma_{m-1}, \sigma_m) \ .$$

Térjünk vissza az M Riemann-részsokasághoz, és alkalmazzuk a determinánsra kiszámolt képletet az L Weingarten-leképezésre:

$$\det L = \frac{1}{2^n m!} \sum_{\sigma, \tau \in S^m} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau) D(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2) \dots D(\tau_{m-1}, \tau_m, \sigma_{m-1}, \sigma_m) \ .$$

$D(i, j, k, l) = \langle L(E_i), E_k \rangle \langle L(E_j), E_l \rangle - \langle L(E_i), E_l \rangle \langle L(E_j), E_k \rangle$ az ortonormáltság miatt. Ez a második alapformával kifejezve $\mathcal{B}(E_i, E_k)\mathcal{B}(E_j, E_l) - \mathcal{B}(E_i, E_l)\mathcal{B}(E_j, E_k)$, ami pedig a (3) szerint $R(E_i, E_j, E_l, E_k) = R_{ijlk}$. Azt kaptuk, hogy

$$\det L = \frac{1}{2^n m!} \sum_{\sigma, \tau \in S^m} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau) R_{\tau_1 \tau_2 \sigma_1 \sigma_2} \dots R_{\tau_{m-1} \tau_m \sigma_{m-1} \sigma_m} = \frac{2^n n!}{m!} \tilde{K} \ . \qquad (9)$$

Ez alapján $\frac{2^n n!}{m!} \tilde{K}$ is tekinthető a Gauss-görbület általánosításának, és ($\mathbb{R}^{m+1}$-be) beágyazott sokaság esetén $\frac{2^n n!}{m!} \tilde{K} = \sqrt[m-1]{\det \mathfrak{R}}$. Mivel a normálleképezés foka $\deg N = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^m)} \int_M \det L d\nu = \frac{1}{2}\chi(M)$, megfogalmazhatjuk a Gauss-Bonnet tétel általánosításának szánt egyenlőséget $\tilde{K}$ segítségével is, ez azonban már beágyazhatóságtól függetlenül igaz lesz.

44. Tétel (Gauss-Bonnet-Chern). *Tetszőleges $m = 2n$ dimenziós kompakt irányított M Riemann-sokaságra*

$$\frac{2^{n+1} n!}{m! \mathrm{vol} S^m} \int_M \tilde{K} d\nu = \chi(M) \ ,$$

ahol $d\nu$ az M térfogati formája, $\tilde{K} d\nu = K = \mathrm{Pf}(\Omega)$ a Pfaff-forma és $\chi(M)$ az Euler-karakterisztika.

A következő fejezet célja e tétel bebizonyítása.

3. Vektornyalábok Euler-osztálya és görbülete

3.1. Nyalábok

Legyenek X és F topologikus terek. Azt mondjuk, hogy $\xi = \pi : E \to X$ *nyaláb* az X *bázistér* fölött az F *fibrummal*, ha E topologikus tér (a nyaláb *totális tere*), $\pi : E \to M$ ráképezés (a nyaláb *projekciója*) úgy, hogy minden $p \in X$ pontra $F_p = \pi^{-1}(p) \cong F$ teljesüljön. Ezen kívül megköveteljük, hogy ξ *lokálisan triviális* legyen, azaz minden $p \in X$ pontnak van olyan $U \subset X$ környezete és $\phi : \pi^{-1}(U) \cong U \times F$ homeomorfizmus, hogy minden $v \in \pi^{-1}(U)$-ra $\pi(f) = \pi_1(v)$ teljesüljön, ahol $\pi_1 : U \times F \to U$ az első koordinátára való vetítés. Ha X és F sokaságok, akkor a totális tér dimenziója $\dim E = \dim X + \dim F$. Minket kétféle nyaláb fog leginkább érdekelni, sima sokaság fölötti vektornyalábok és principiális nyalábok.

$\xi = \pi : E \to M$ *sima vektornyaláb* az M sima sokaság fölött, ha E sima sokaság, π sima leképezés, a fibrum $\mathbb{R}^n$, azaz F_p vektortér strukturával rendelkezik minden $p \in M$ pontra, és $F_p \cong \mathbb{R}^n$ izomorfak, mint vektorterek, továbbá a lokális trivializálás sima ϕ-vel is megvalósítható, ami a fibrumokra megszorítva lineáris.

3.2. A Thom-osztály, az Euler-osztály és az Euler-szám

Legyen $\xi = \pi : E \to M$ sima vektornyaláb $\mathbb{R}^n$ fibrummal az M kompakt, irányított sima m dimenziós sokaság fölött. Tegyük fel, hogy E irányítható, ekkor M és $\mathbb{R}^n$ irányítása indukál egy irányítást E-n is: a $v \in E$ pontban T_vE egy pozitívan irányított bázisa $(e_1, \ldots, e_m, e'_1, \ldots, e'_n)$, ha $(T_v\pi(e_i))_i$ a $T_{\pi(v)}M$-nek, $(e'_j)_j$ pedig olyan bázisa T_uF_p-nek, hogy bármelyik lokális trivializásból származó $T_uF_p \cong \mathbb{R}^n$ izomorfizmus irányítástartó. Ekkor irányított nyalábról beszélünk.

Legyen $U_1, \ldots, U_k$ jó fedése M-nek, ami fölött ξ triviális. Ekkor E-nek egy véges jó fedését adják a $\pi^{-1}(U_1), \ldots, \pi^{-1}(U_k)$ halmazok, vagy másképp írva $\phi_1^{-1}(U \times \mathbb{R}^n), \ldots, \phi_k^{-1}(U \times \mathbb{R}^n)$, ahol a ϕ_i-k a trivializáló diffeomorfizmusok. $s : M \to E$ a nyaláb *szelése*, ha $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. Tetszőleges két szelés homotóp egymással, és $s \circ \pi$ homotóp E identitásával, ezért E homotóp ekvivalens M-mel. Alkalmazzuk a Poincaré-dualitást és a Poincaré-lemmát:

$$H_c^q(E) \cong H^{m+n-q}(E)^* \cong H^{m+n-q}(M)^* \cong H_c^{q-n}(M) = H^{q-n}(M) \ . \qquad (10)$$

Az első izomorfizmust az $\omega \mapsto \int_E \cdot \wedge \omega$ leképezés szolgáltatja, a másodikkal viszont nem foglalkoztunk eddig: ebben az esetben $H^l(M) \to H^l(E) : [\omega] \mapsto [\pi^*(\omega)]$.
Legyen $[\mu] \in H^m(M)$ generátora (1 integrállal). Egyértelműen létezik $[\Phi] \in H_c^n(E)$ osztály, amire $\pi^*([\mu]) \wedge [\Phi] \in H_c^{m+n}(E)$ generátor, azaz $\int_E \pi^*(\mu) \wedge \Phi = 1$. $[\Phi]$ a ξ nyaláb *Thom-osztálya*.

A Poincaré-lemma utolsó pontjában az izomorfizmus:

$$H_c^{q-n}(M) \cong H_c^q(M \times \mathbb{R}^n) : [\omega] \mapsto [\pi_1^*(\omega)] \wedge [\pi_2^*(\eta)] \ ,$$

ha $[\eta] \in H_c^n(\mathbb{R}^n)$ generátor, azaz $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$. A másik irányú izomorfizmus a forma kiintegrálása a fibrum mentén a fibrum változói szerint, $q = n$-re ez

$$H_c^n(M \times \mathbb{R}^n) \cong H_c^0(M) : [\omega] \mapsto \left[(p \mapsto \int_{F_p \cong \mathbb{R}^n} \omega|_{F_p}) \right]$$

alakban írható.

Nyalábok esetén – amikor π_2 globálisan általában nem létezik – Φ felel meg a $\pi_2^*(\eta)$-nak.

45. Tétel. *Ha M összefüggő, akkor a Thom-osztály, $[\Phi] \in H_c^n(E)$ az egyetlen eleme $H_c^n(E)$-nek a minden $p \in M$ pont esetén teljesülő*

$$\int_{F_p} \Phi|_{F_p} = 1 \tag{11}$$

tulajdonsággal.

A tétel bizonyítása a Mayer-Vietoris egzakt sorozat segítségével, a véges jó fedés elemszámára vonatkozó indukcióval történik. Ha ez az elemszám 1, akkor a tétel éppen a Ponicaré-lemma utolsó pontjához fűzött megjegyzés.

A Thom-osztály segítségével definiálhatjuk a $H^{q-n}(M) \cong H_c^q(E)$ *Thom-izomorfizmust*:

$$[\omega] \mapsto [\pi^*(\omega)] \wedge [\Phi] \ .$$

Megjegyzés: Ha M (véges jó fedéssel rendelkező) irányított sima sokaság, a Thom-forma segítségével legyártható a – Poincaré-dualitás szerint létező – $H_q(M) \cong H_{dR,c}^{m-q}(M)$ izomorfizmus. Legyen $[S] \in H_q(M)$, $S \subset M$ q dimenzós irányított részsokaság, és T egy csőszerű környezete S-nek. Ilyen mindig létezik, pl. tetszőleges Riemann-metrika bevezetésével $T = \{p \in M \mid d(p, S) < \epsilon\}$. S legközelebbi pontjába való vetítéssel kapunk egy $\xi = \pi : T \to S$ nyalábot $\mathbb{R}^{m-q}$ fibrummal, ennek a Thom-osztálya M-re 0-val kiterjesztve az $[S]$ Poincaré-duálisa, $[\Phi_S]$. $\int_M \omega \wedge \Phi_S = \int_S \omega$ teljesül minden $[\omega] \in H_{dR}^q(M)$ osztályra.

A ξ nyaláb *Euler-osztálya* $\chi(\xi) = s^*([\Phi]) \in H^n(M)$, azaz a Thom-osztály visszahúzottja egy tetszőleges $s : M \to E$ sima szeléssel. A definíció nem függ a szelés választásától, mert bármelyik két szelés homotóp. Rögtön adódik, hogy ha létezik sehol sem eltűnő szelés, vagyis $s_p \neq 0$ minden $p \in M$ pontra, akkor $\chi(\xi) = 0$, ugyanis megfelelően nagy c konstanssal $\mathrm{im}(cs) \cap \mathrm{supp}(\Phi) = \emptyset$.

Legyen $[\mu] \in H^m(M)$, $\int_M \mu = 1$, ezt az osztályt M *fundamentális osztályának* is nevezzük. Ha $m = n$, értelmezhetjük a ξ nyaláb $e(\xi)$ *Euler-számát* a $\chi(\xi) = e(\xi)[\mu]$ egyenlőséggel.

46. Tétel. *Ha $\xi = \pi : TM \to M$ az M összefüggő, irányított, kompakt sima sokaság érintőnyalábja, $X : M \to TM$ sima vektormező véges sok nullhellyel és a nullhelyeken vett indexek összege σ, akkor*

$$\chi(\xi) = \sigma[\mu] \ .$$

Ezt a Poincaré-Hopf tétellel kombinálva kapjuk, hogy

$$\chi(\xi) = \chi(M)[\mu] \ , \ \textit{tehát} \ e(\xi) = \chi(M) = \chi(TM) \ ,$$

vagyis az érintőnyaláb Euler-száma megegyezik az Euler-karakterisztikával.

Bizonyítás: Az utolsó egyenlőséget M és TM homotóp ekvivalenciája indokolja. Valójában azt kell belátnunk, hogy

$$\int_M X^*(\Phi) = \sigma \ ,$$

ahol Φ a Thom-osztály egy reprezentánsa. Válasszunk B_i megfelelően kicsit golyókat a p_i nullhelyek körül. X helyett elég nagy konstansszorosát véve elérhető, hogy $\mathrm{supp}(X^*(\Phi)) \subset \bigcup_i B_i$, ezért azt kellene belátnunk, hogy $\int_{B_i} X^*(\Phi)$ az X vektormező p_i-beli indexe. Feltehetjük, hogy $\pi^{-1}(B) \cong B \times T_pM$, és a diffeomorfizmus szerint azonosítjuk is őket, ez sem az integrálon, sem az indexen nem változtat. B pontrahúzható, és a pontrahúzás indukál egy

$$H : (B \times T_pM) \times [0,1] \to B \times T_pM \ , \ H_0 = \mathrm{id}_{B \times T_pM} \ , \ H_1(q,v) = (p, \pi_2(v))$$

homotópiát, aminek a segítségével belátható, hogy $\pi_2^*(\Phi|_{T_pM}) - \Phi = d\lambda$ valamilyen $\lambda \in \Omega_c^{m-1}(B \times T_pM)$ formával. Így

$$\int_B X^*(\Phi) = \int_B X^*(\pi_2^*(\Phi|_{T_pM})) - \int_M X^*(d\lambda) = \int_B X^*(\pi_2^*(\Phi|_{T_pM}))$$

a Stokes-tétel szerint. $\Phi|_{T_pM}$ zárt forma $\Omega^m(T_pM)$-ben, ezért egzakt is, tehát van olyan $\rho \in \Omega^{m-1}(T_pM)$ – nem feltétlenül kompakt tartójú – forma, hogy $d\rho = \Phi|_{T_pM}$. Válasszunk normát T_pM-en úgy, hogy $\Phi|_{T_pM}$ tartója benne legyen a $D \subset T_pM$ egységgömbben. A Stokes-tétel szerint

$$\int_{\partial D} \rho = \int_D \Phi|_{T_pM} = \int_{T_pM} \Phi|_{T_pM} = 1 \ . \tag{12}$$

Most a $B \setminus \{p\}$ halmazon nézhetjük X helyett a lenormáltját, továbbra is X-szel jelölve, ez a vektormező homotóp az eredetivel ∂B-n is.

$$\int_B X^*(\Phi) = \int_B X^*(\pi_2^*(d\rho)) = \int_{\partial B} X^*(\pi_2^*(\rho)) = \int_{\partial B} (\pi_2 \circ X)^*(\rho) \ ,$$

ez pedig a (12) miatt valóban az index. $\square$

Legyen $\xi_1 = \pi_1 : E_1 \to M$ és $\xi_2 = \pi_2 : E_2 \to M$ két vektornyaláb M fölött a V_1 illetve V_2 fibrumokkal. Értelmezzük a két nyaláb *Whitney-összegét*, aminek a fibruma $V_1 \oplus V_2$. A totális tér legyen

$$E = \bigcup_{p \in M} \pi_1^{-1}(p) \times \pi_2^{-1}(p) \subset E_1 \times E_2$$

az altértopológiával ellátva, $\pi(\pi_1^{-1}(p) \times \pi_2^{-1}(p)) = p$, így a ξ_1 és ξ_2 Whitney-összege $\xi_1 \oplus \xi_2 = \pi : E \to M$.

47. Állítás. *Ha $\xi_i = \pi_i : E_i \to M$ $(i = 1, 2)$ két vektornyaláb M fölött a $[\Phi_i]$ Thom-osztályokkal, $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$ a Whitney-összegük a $[\Phi]$ Thom-osztállyal, $\rho_i : E \to E_i$ a megfelelő komponensre való vetítés a fibrumokban, akkor*

- $[\Phi] = \rho_1^*([\Phi_1]) \wedge \rho_2^*([\Phi_2])$
- $\chi(\xi) = \chi(\xi_1) \wedge \chi(\xi_2)$.

Bizonyítás: Egy $p \in M$ pont fölött

$$\int_{\pi^{-1}(p)} \rho_1^*(\Phi_1) \wedge \rho_2^*(\Phi_2) = \int_{\pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_1^{-1}(p)} \rho_1^*(\Phi_1) \wedge \rho_2^*(\Phi_2) = \int_{\pi_1^{-1}(p)} \Phi_1 \int_{\pi_2^{-1}(p)} \Phi_2 = 1 \ ,$$

ez pedig karakterizálja a Thom-osztályt. Az Euler-osztályhoz vegyünk $s_i : M \to E_i$ szeléseket, $s = s_1 + s_2 : M \to E$, így

$$\chi(\xi) = s^*([\Phi]) = [(s_1 + s_2)^*(\rho_1^*(\Phi_1)) \wedge (s_1 + s_2)^*(\rho_2^*(\Phi_2))] =$$

$$= [(\rho_1 \circ (s_1 + s_2))^*(\Phi_1) \wedge (\rho_2 \circ (s_1 + s_2))^*(\Phi_2)] = [s_1^*(\Phi_1)] \wedge [s_2^*(\Phi_2)] = \chi(\xi_1) \wedge \chi(\xi_2) \ . \ \square$$

Egy $\xi = \pi : E \to M$ vektornyalábon értelmezhetünk g Riemann-metrikát úgy, hogy minden fibrumon kijelölünk egy g_p skaláris szorzatot, hogy bármelyik két sima szelésre $g(s_1, s_2) = (p \mapsto g_p(s_1(p), s_2(p)))$ sima függvény legyen M-en. Valójában a ξ-ből legyártható a fibrumok fölötti $(2, 0)$ típusú szimmetrikus pozitív definit tenzorok vektornyalábja, g ennek egy sima szelése.

A Riemann-metrika segítségével értelmezhetjük a ξ-ből származtatott $\delta = \pi_1 : D \to M$ golyónyalábot és a $\sigma = \pi_0 : S \to M$ gömbnyalábot, ahol $D = \{v \in E \mid \|v\| \leq 1\}$ és $S = \{v \in E \mid \|v\| = 1\}$, a projekciók pedig $\pi_1 = \pi|_D$, $\pi_0 = \pi|_S$. Ezen nyalábok fibrumai $\overline{D^n}$ illetve S^{n-1}. D irányított kompakt sima peremes sokaság és $\partial D = S$.

48. Tétel (Gysin egzakt sorozat). *A ξ Riemann-metrikával ellátott vektornyalábból származó $\sigma = \pi_0 : S \to M$ gömbnyaláb esetén a következő sorozat egzakt:*

$$\to H^q(S) \xrightarrow{\alpha} H^{q-n+1}(M) \xrightarrow{\beta} H^{q+1}(M) \xrightarrow{\gamma} H^{q+1}(S) \to \ ,$$

ahol $\alpha([\omega]) = \int_{\text{fibrum}}(\omega)$ a forma kiintegrálása a fibrumok mentén a fibrumok változói szerint, $\beta([\omega]) = [\omega] \wedge \chi(\xi)$ és $\gamma = \pi_0^*$.

Bizonyítás: Tekintsük a következő sorozatot

$$0 \longrightarrow \Omega^{\cdot}_c(D - S) \xrightarrow{\iota} \Omega^{\cdot}(D) \xrightarrow{r} \Omega^{\cdot}(S) \longrightarrow 0 \ , \tag{13}$$

ahol ι a beágyazás és r a határra való megszorítás. Az világos, hogy $r \circ \iota = 0$, viszont a sorozat nem egzakt: azok a $\Omega^{\cdot}(D)$-beli formák, amelyek a határra megszorítva 0-t adnak, nem feltétlenül kompakt tartójúak $D - S$-en. Ennek a problémának az igazi megoldása a *csírák* fogalma. Legyenek $D \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset S$ szűkülő csőszerű környezetei a határnak úgy, hogy $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = S$, és nevezzük az $\omega \in \Omega^q(V_i)$ és az $\eta \in \Omega^q(V_j)$ formákat ekvivalensnek, ha van olyan $l > i, j$, hogy $\omega|_{V_l} = \eta|_{V_l}$. Az ekvivalenciaosztályok a *q-formák S körüli csírái.* Ezek között is értelmezni lehet a d operátort, és be lehet látni, hogy az így keletkező komplexus homológiája izomorf $H^*(S)$-nel. Értelmes továbbá az $\Omega^q(D)$-beli formák megszorítása a csírákra. A (13) sorozatban $\Omega^{\cdot}(S)$-t a csírák terére cserélve az így keletkező sorozat már egzakt. Valójában ez felel meg a szinguláris homológiában a relatív homológia egzakt sorozatának.

A Mayer-Vietoris konstrukció szerint komplexusok rövid egzakt sorozatából legyártható a homológiáik hosszú egzakt sorozata. A (13) módosításából származó hosszú egzakt sorozat:

$$\to H^q(S) \xrightarrow{\delta} H_c^{q+1}(D - S) \xrightarrow{H(\iota)} H^{q+1}(D) \xrightarrow{H(r)} H^{q+1}(S) \to \ . \tag{14}$$

A továbbiakban $H(\iota)$-t és $H(r)$-t is ι-val illetve r-rel jelölöm. A δ operátor a Mayer-Vietoris konstrukcióból adódóan az $[\omega] \in H^q(S)$ osztályhoz a $\delta([\omega]) = [d\tilde{\omega}] \in H_c^{q+1}(D-S)$ osztályt rendeli, ahol $\tilde{\omega} \in \Omega^q(D)$ az ω forma (vagy csíra) kiterjesztése D-re. A kiterjesztés megtehető például egy, a $\text{supp}(f) \subset V_i$ és $f|_{V_{i+1}} \equiv 1$ feltételeknek eleget tevő $f : D \to \mathbb{R}$ sima függvénnyel: $\tilde{\omega}$ legyen $f\omega$ kiterjesztése D-re 0-val. Viszont $d(f\omega) = df \wedge \omega$, és $[df]$ az f függvény definiáló tulajdonsága miatt az S „picit beljebb húzott példányához" tartozó csőszerű környezet Thom-osztálya , vagyis az $[S] \in H_{m+n-1}(D)$ Poincaré-duálisa. A 14 sorozatból legyártjuk a Gysin sorozatot. $D - S$ diffeomorf E-vel, és $H_c^{q+1}(D - S) \equiv H^{q-n+1}(M)$, egyik irányú izomorfizmus a fibrumokon való integrálás, másik irányú a $[\Phi_{D-S}]$ Thom-osztállyal való ékelés.

D és M homotóp ekvivalensek, ezért $H^{q+1}(D) \equiv H^{q+1}(M)$, az egyik irányban egy tetszőleges $s : M \to D$ szelés szerinti visszahúzás, a másik irányban π_1^* az izomorfizmusok. Így a következő diagrammot kapjuk:

$$\begin{tikzcd}
H^q(S) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & H_c^{q+1}(D-S) \arrow[r, "\iota"] & H^{q+1}(D) \arrow[r, "r"] & H^{q+1}(S) \\
& H^{q-n+1}(M) \arrow[u, shift left, "\int_{D_p}"] \arrow[u, shift right, "\pi_1^*(\cdot)\wedge[\Phi]"'] \arrow[r, "\beta"'] & H^{q+1}(M) \arrow[u, shift left, "s^*"] \arrow[u, shift right, "\pi_1^*"'] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd} .$$

Számoljuk ki a kompozíciókat! Az $[\omega] \in H^q(S)$ formára

$$\alpha([\omega]) = \int_{D_p} \delta([\omega]) = \int_{D_p} [df] \wedge [\omega] = (f|_{V_i} - f|_S) \int_{S_p} [\omega] = \int_{S_p} [\omega]$$

minden $p \in M$ pontban a Fubini-tétel szerint. Ha $[\omega] \in H^{q-n+1}(M)$:

$$\beta([\omega]) = s^*(\pi_1^*([\omega]) \wedge [\Phi]) = [\omega] \wedge \chi(\xi) \ .$$

És végül $\gamma = r \circ \pi_1^* = \pi_0^*$. $\square$

49. Következmény. *Tegyük fel, hogy M összefüggő. Az $[\omega] \in H^n(M)$ osztályra $\pi_0^*([\omega]) = 0$ pontosan akkor, ha $[\omega] = c\chi(\xi)$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstanssal.*

Bizonyítás: Írjuk föl a Gysin egzakt sor $q = n-1$-hez tartozó szakaszát:

$$\to H^{n-1}(S) \xrightarrow{\alpha} H^0(M) \xrightarrow{\beta} H^n(M) \xrightarrow{\gamma} H^n(S) \to \ .$$

Itt $\beta([f]) = [f] \wedge \chi(\xi) = [f]\chi(\xi)$, és $f \equiv c$ konstans függvény, mivel $df = 0$ és M összefüggő. A bizonyítandó állítás épp a Gysin sor egzaktsága $H^n(M)$-ben. $\square$

3.3. Nyalábok visszahúzása

Ebben az alfejezetben vázlatosan, bizonyítások nélkül összefoglalom a nyalábok visszahúzásáról és a Grassman-sokaságok fölötti természetes nyalábokról szóló – a továbbiakhoz szükséges – tudnivalókat.

Legyen $\xi_i = \pi_i : E_i \to M_i$ $(i = 1, 2)$ két sima vektornyaláb. $(\tilde{f}, f) : \xi_1 \to \xi_2$ *nyalábleképezés*, ha $f : M_1 \to M_2$ és $\tilde{f} : E_1 \to E_2$ sima leképezések, $\tilde{f}$ fibrumot fibrumba visz, vagyis $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{f}$, és a fibrumokon $\tilde{f} : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(f(p))$ lineáris izomorfizmus. (Gyengébb értelemben is szokták használni ezt a fogalmat, de ebben a dolgozatban csak erre az erősebb változatra lesz szükség.)

Ugyanazon sokaság fölötti $\xi_1 = \pi_1 : E_1 \to M$ és $\xi_2 = \pi_2 : E_2 \to M$ nyalábok *ekvivalensek*, ha létezik $(\tilde{f}, \mathrm{id}_M) : \xi_1 \to \xi_2$ nyalábleképezés. Ezt így jelöljük: $\xi_1 \cong \xi_2$.

Ha adott egy $\xi = \pi : E \to M_2$ sima nyaláb, és egy $f : M_1 \to M_2$ sima leképezés, akkor definiálhatjuk a nyaláb *visszahúzását* M_1 fölé: $f^*(\xi) = \pi' : E' \to M_1$, ahol

$E' = \{(p, v) \in M_1 \times E \mid f(p) = \pi(v)\}$ az altértopológiával ellátva, és $\pi'(p, v) = p$. Ekkor értelmezhetünk egy $(\tilde{f}, f) : \xi' \to \xi$ nyalábleképezést az $\tilde{f}(p, v) = v$ képlettel.

Összefoglaljuk a visszahúzás néhány tulajdonságát, ezek az állítások egyszerűen bizonyíthatóak. Legyen $f : M_1 \to M_2$ sima leképezés és $\xi = \pi : E \to M_2$ sima nyaláb. A nyalábok visszahúzása a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- Ha $M_1 \subset M_2$, és $f : M_1 \to M_2$ a beágyazás, akkor $f^*(\xi) \cong \xi|_{M_1}$.
- Ha $g : N \to M_1$ sima leképezés, akkor $g^*(f^*(\xi)) \cong (f \circ g)^*(\xi)$.
- Ha $\xi' = \pi' : E' \to M_1$ és létezik $(\tilde{f}, f) : \xi' \to \xi$ nyalábleképezés, akkor $\xi' \cong f^*(\xi)$.
- Ha ξ_1 és ξ_2 két sima vektornyaláb M_2 fölött, akkor $f^*(\xi_1 \oplus \xi_2) \cong f^*(\xi_1) \oplus f^*(\xi_2)$.
- Ha ξ irányított sima vektornyaláb a $\Phi(\xi)$ Thom-osztállyal, akkor $\tilde{f}^*(\Phi(\xi)) \cong \Phi(f^*(\xi))$.
- Ha ξ irányított sima vektornyaláb, akkor az Euler-osztályára $f^*(\chi(\xi)) \cong \chi(f^*(\xi))$ teljesül.

Az utolsó két pont állítása különösen fontos lesz a továbbiakhoz. Ezek bizonyítása azon múlik, hogy a Thom-osztály visszahúzottja $f^*(\xi)$ fibrumain leintegrálva 1, ez pedig karakterizálja $f^*(\xi)$ Thom-osztályát.

A következő tétel alapvető jelentősségű.

50. Tétel. *Ha M_1 és M_2 sima kompakt sokaságok, f, $g : M_1 \to M_2$ két sima leképezés és f homotóp g-vel, akkor $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$ tetszőleges $\xi = \pi : E \to M_2$ nyaláb esetén.*

Legyen $G_n(\mathbb{R}^N) = \{V < \mathbb{R}^N \mid \dim V = n\}$ az $\mathbb{R}^N$ n dimenziós altereinek halmaza. Ez természetes módon ellátható sima sokaság strukturával a következő módon. A *Stiefel-sokaság* $\mathbb{R}^N$ lineárisan független vektor-n-eseiből áll, és így nyílt részhalmaza $(\mathbb{R}^N)^n$-nek. Ha minden n-eshez hozzárendeljük az általuk kifeszített alteret, az egy szürjekció a Stiefel-sokaságról $G_n(\mathbb{R}^N)$-re, így $G_n(\mathbb{R}^N)$ előáll a Stiefel-sokaság faktoraként e szürjekció szerint. Ezzel a struktúrával ellátott $G_n(\mathbb{R}^N)$-t nevezzük *Grassmann-sokaságnak.* Ugyanehhez a sokasághoz jutunk, ha $\mathbb{R}^N$ ortonormált vektorrendszereiből indulunk ki, és ez alapján belátható, hogy $G_n(\mathbb{R}^N)$ diffeomorf az $O(N)/O(n) \times O(N-n)$ balmellékosztályok terével. Ezért $G_n(\mathbb{R}^N)$ kompakt sokaság, és a dimenziójára $\dim G_n(\mathbb{R}^N) = n(N-n)$ adódik. A Grassmann-sokaságok a projektív terek általánosításai: $G_1(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathbb{R}P^N$.

A Grassmann-sokaságok fölött van egy természetes vektornyaláb, $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$, amelyben minden pont fölött a fibrum ő maga, mint vektortér:

$$E(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) = \{(V, v) \in G_n(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N \mid v \in V\}$$

az altértopológiával ellátva, és $\pi(V, v) = V$ a projekció.

51. Tétel. *Legyen $\xi = \pi : E \to M$ sima vektornyaláb n dimenziós fibrummal az M kompakt sima sokaság fölött. Ekkor van olyan N és $f : M \to G_n(\mathbb{R}^N)$ sima leképezés, hogy $\xi \cong f^*(\gamma^n(\mathbb{R}^N))$.*

Természetesen ha találtunk ilyen N-et, akkor minden annál nagyobb szám is jó. Ugyanis, ha $M > N$, akkor $G_n(\mathbb{R}^N)$ beágyazható $G_n(\mathbb{R}^M)$-be[2], és $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$ a beágyazás szerinti visszahúzottja (megszorítása) $\gamma^n(\mathbb{R}^M)$-nek, pontosabban azzal ekvivalens.

Példa: Ha $M \subset \mathbb{R}^N$ sima m dimenziós részsokaság, $\xi = \pi : TM \to M$ az érintőnyaláb, akkor könnyen találhatunk megfelelő f-et: $f(p) = T_pM \subset \mathbb{R}^N$ megfelel.

Adott N-re az f nem egyértelmű homotópia erejéig sem, igaz viszont a következő.

52. Tétel. *Ha M kompakt sima sokaság, $f, g : M \to G_n(\mathbb{R}^N)$ sima függvények, és $f^*(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) \cong g^*(\gamma^n(\mathbb{R}^N))$, akkor $M > 2N$ választással $\iota \circ f$ és $\iota \circ g$ homotóp leképezések, ahol $\iota : G_n(\mathbb{R}^N) \to G_n(\mathbb{R}^M)$ jelöli a beágyazást.*

Megjegyzés: Vehetjük a $G_n(\mathbb{R}^{n+1}) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+2}) \subset \dots$ bővülő sorozat unióját ellátva a gyenge topológiával: $G_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{k=1}^\infty G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, és $U \subset G_n(\mathbb{R}^\infty)$ nyílt, ha minden k-ra $U \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ nyílt. $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ az n dimenziós vektornyalábok *klasszifikáló tere.* Ugyanis, a Grassmann-sokaságok fölötti nyalábhoz hasonlóan van egy γ^n vektornyaláb $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ fölött, amire teljesül, hogy minden – kompakt sima sokaság fölötti, de természetesen van ennél általánosabb változat is – n dimenziós vektonyaláb γ^n visszahúzottja egy alkalmas, az alaptérből γ^n-be képező függvénnyel, és ez a függvény homotópia erejéig meghatározott. Vagyis egy M kompakt sima sokaság fölötti n dimenziós vektornyalábok ekvivalenciaosztályai kölcsönösen egyértelműen megfelelnek az $M \to G_n(\mathbb{R}^\infty)$ sima függvények homotópiaosztályainak. γ^n az *n dimenziós univerzális nyaláb.* Jegyezzük meg, hogy $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ nem sokaság.

Szükségünk lesz a fönti fogalmak és tételek irányított nyalábokra vonatkozó megfelelőire. Két irányított nyaláb közti $(\tilde{f}, f) : \xi_1 \to \xi_2$ nyálableképezés irányítástartó, ha f és $\tilde{f}$ is az.

[2] $V \in G_n(\mathbb{R}^N)$-re $V \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^M$

Definiáljuk a $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^N)$ irányított Grassmann-sokaságokat, mint $\mathbb{R}^N$ irányított altereinek összességét. Ez is sima kompakt sokaság, ráadásul irányított, és izomorf az $SO(N)/SO(n) \times SO(N-n)$ balmellékosztályok terével. Ha minden irányított altérhez hozzárendeljük magát az alteret, akkor $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^N) \to G_n(\mathbb{R}^N)$ kétszeres fedést kapunk.

A $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^N)$ sokaságok fölött ugyanúgy definiálhatóak a $\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)$ nyalábok, mint a nem irányított esetben, $\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)$ irányított nyaláb. Minden M irányított kompakt sima sokaság fölötti ξ irányított vektornyalábhoz van olyan N, hogy $\xi \cong f^*(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N))$ alkalmas $f : M \to \tilde{G}_n(\mathbb{R}^N)$ irányítástartó leképezéssel, és $2N$-nél nagyobb dimenziós irányított Grassmann-sokaságba továbbképezve M-et az ekvivalens visszahúzást adó leképezések homotópak egymással.

3.4. Konnexió és görbület vektornyalábokon

Legyen $\xi = \pi : E \to M$ sima vektornyaláb az M sima m dimenziós sokaság fölött n dimenziós fibrummal. Jelölje $\Gamma(\xi)$ a nyaláb sima szeléseinek terét. A $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$ $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés konnexió ξ-n, ha az első argumantumban $\mathcal{C}(M)$-lineáris, második argumentumban a Leibniz-szabály teljesül. Azaz $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$ és $\nabla_X(fs) = Xfs + f\nabla_X s$ tetszőleges $s \in \Gamma(\xi)$ sima szelésre, $X \in \mathfrak{X}(M)$ sima vektormezőre és $f \in \mathcal{C}(M)$ sima függvényre. Ha a nyalábon Riemann-metrika is van, egy konnexiót metrikusnak nevezünk, ha $X\langle s_1, s_2\rangle = \langle \nabla_X s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \nabla_X s_2\rangle$ is teljesül minden X vektormezőre és s_1, s_2 szelésekre. Most azonban a torziómentességnek nincsen értelme, az egy Riemann-metrikához tartozó konnexiók közül nem tudunk kitüntetni egyet, mint azt a Riemann-sokaságoknál tettük.

Mint az érintőnyaláb konnexióinál, most is tekinthetjük a konnexiót $\nabla : \Gamma(\xi) \to \Omega^1(M) \otimes \Gamma(\xi)$ leképezésnek: $\nabla_X s = (\nabla s)(X)$. Ezt kiterjesztjük:

$$\nabla : \Omega^q \otimes \Gamma(\xi) \to \Omega^{q+1}(M) \otimes \Gamma(\xi) \ ,$$

$$\nabla(\eta \otimes s) = d\eta \otimes s + (-1)^q \eta \wedge \nabla s \ .$$

Legyen $U \subset M$ olyan nyílt halmaz, ami fölött $\xi|_U$ triviális, az $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(\xi)$ szelések U minden pontja fölött a fibrum egy bázisát alkotják. Vezessük be a konnexió 1-formáit és a görbületi 2-formákat az alábbi azonosságokkal definiálva:

$$\nabla s_i = \omega_i^j \otimes s_j, \text{ illetve } \nabla^2 s_i = \Omega_i^j \otimes s_j \ .$$

Az (5) előtti számolást megismételve kapjuk, hogy

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k \ , \text{ vagy mátrixosan írva: } \Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \ . \tag{15}$$

Szintén az a számolás mutatja, hogy $\nabla^2 fs = f\nabla^2 s$ minden f sima függvényre, tehát ∇^2 lineáris $\mathcal{C}(M)$ fölött. A 30. állítás utolsó két pontjának a bizonyítása szó szerint működik. Ezért, ha $s' = sA$ egy másik bázismező ($A_p \in GL(\mathbb{R}^n)$, akkor a következő transzformációs szabályok érvényesek:

$$\omega' = A^{-1}dA + A^{-1}\omega A \text{ , illetve } \Omega' = A^{-1}\Omega A \text{ .} \tag{16}$$

Érvényes a 28. állításból a differenciális Bianchi-azonosság:

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega \text{ .} \tag{17}$$

Ha ξ-n Riemann-metrika is van, legyen $s = (s_1, \ldots, s_n)$ ortonormált bázismező (ilyen az eredeti s-ből Gram-Schmidt ortogonalizációval kapható). A konnexió metrikussága ekvivalens azzal, hogy ω antiszimmetrikus mátrix, a 26. állítás bizonyítása elismételhető. A (15) azonosság miatt Ω is antiszimmetrikus.

Egy n^2 változós P polinom *invariáns polinom*, ha $P(AB) = P(BA)$ érvényes tetszőleges $(A_{ij}) = A$ és $(B_{ij}) = B$ változómátrixra. Másképpen írva: $P(B^{-1}AB) = P(A)$. Invariáns polinomra példa a nyom, a determináns, vagy általánosabban a karakterisztikus polinom együtthatói, ezek az elemi szimmetrikus polinomjai A sajátértékeinek, ha algebrailag zárt test fölött nézzük.

53. Állítás. *Ha P invariáns polinom, Ω egy vektornyaláb görbületi formáinak a mátrixa, akkor*

$$dP(\Omega) = 0 \text{ .}$$

Bizonyítás: Legyen $P'(A) = (\partial P/\partial A_{ji})_{ij}$ a polinom teljes deriváltjának a transzponáltja. Tetszőleges A mátrixra igaz, hogy

$$P'(A)A = AP'(A) \text{ .} \tag{18}$$

Ezt úgy láthatjuk be, ha a polinom invarianciájából adódó

$$P((I + tE_{ji})A) = P(A(I + tE_{ji}))$$

azonosság t szerinti deriváltját vesszük a $t = 0$ helyen:

$$\sum_k A_{ik}\left(\frac{\partial P}{\partial A_{jk}}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial P}{\partial A_{ki}}\right) A_{kj} \text{ .}$$

A két oldal épp a (18) két oldalán álló mátrix (i, j) pozíciójú eleme. (I az egységmátrixot jelöli, E_{ij} pedig azt a mátrixot, aminek i-edik sor j-edig helyén 1-es áll,

mindenhol máshol 0.)

$$dP(\Omega) = \sum \frac{\partial P}{\partial \Omega_i^j}(\Omega) \wedge d\Omega_i^j = \mathrm{tr}(P'(\Omega) \wedge d\Omega) = \mathrm{tr}(P'(\Omega) \wedge (\Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega))$$

a Bianchi-azonosságot szerint. Kihasználva az $\Omega \wedge P'(\Omega) = P'(\Omega) \wedge \Omega$ kommutálást

$$dP(\Omega) = \mathrm{tr}\,[\Omega \wedge (P'(\Omega) \wedge \omega) - (P'(\Omega) \wedge \omega) \wedge \Omega] = 0\ . \ \square$$

Ezek szerint minden P invariáns polinom meghatároz egy $[P(\Omega)] \in H^q(M)$ osztályt.

54. Állítás. *Tetszőleges P invariáns polinom esetén a $[P(\Omega)]$ osztály független a konnexiótól.*

Bizonyítás: A bizonyítás azon múlik, hogy a konnexiók affin teret alkotnak: ha ∇ és ∇' konnexiók, akkor $\nabla^{(t)} = t\nabla + (1-t)\nabla'$ is konnexió minden $t \in [0,1]$ esetén. Legyen ∇^0 és ∇^1 két konnexió ξ-n. Az $f : M \times \mathbb{R} \to M$, $f(p,t) = p$ projekció segítségével definiálhatjuk az $f^*(\xi)$ nyalábot $M \times \mathbb{R}$ fölött, és ezen a $\nabla = tf^*(\nabla^0) + (t-1)f^*(\nabla^1)$ konnexiót. Az $\iota_t : M \to M \times \mathbb{R}$, $\iota_t(p) = (p,t)$ beágyazással visszahúzott $\iota_t^*(f^*(\xi))$ nyaláb ekvivalens ξ-vel, és ezen van egy $\iota_t^*(\nabla)$ konnexió. A görbületi formáinak a mátrixát jelölje $\Omega^{(t)}$. Ekkor

$$\iota_t^*(P(\Omega)) = P(\Omega^{(t)})\ , \tag{19}$$

és mivel különböző t értékekre az ι_t leképezések homotópok, ezért a kohomológiaosztály ugyanaz, speciálisan $[P(\Omega^{(0)}] = [P(\Omega^{(1)})]$. $\square$

Ebben a bizonyításban fölhasználtunk egy konstrukciót, a konnexiók visszahúzását. Ha $f : M' \to M$ sima leképezés, és az M fölötti ξ nyalábon adott a ∇ konnexió, akkor egyértelműen létezik egy $f^*(\nabla)$ konnexió $f^*(\xi)$-n, hogy lokálisan

$$f^*(\nabla)f^*(s_i) = f^*(\omega_i^j) \otimes f^*(s_j)$$

minden $(s_1, \ldots, s_m)$ bázismerőre M egy nyílt része fölött. Belátható, hogy a (19) egyenlőség valóban teljesül.

Megjegyzés: Komplex nyalábokon – azaz, ha a fibrumok $\mathbb{C}$ fölötti vektorterek – az Ω mátrix invariáns polinomjai megfelelnek a Chern-osztályoknak. Minden invariáns polinomhoz tartozik egy karakterisztikus osztály M megfelelő dimenziós kohomológiájában, ezek épp a páros valós dimenziók.

Legyen ξ irányított, Riemann-metrikával ellátott vektornyaláb $n = 2N$ dimenziós fibrummal, $s = (s_i)$ pedig pozitív irányítású ortonormált bázismező, ω és Ω a

konnexió-formák illetve a görbületi formák mátrixa egy metrikus konnexióból származtatva. Legyen $K \in \Omega^n(M)$ a Pfaff-forma:

$$K = \mathrm{Pf}(\Omega) = \sum_{\rho \in P_N} \mathrm{sgn}(\rho)\Omega^{h_1}_{k_1} \wedge \cdots \wedge \Omega^{h_N}_{k_N} = \frac{1}{2^N N!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\Omega^{\sigma_1}_{\sigma_2} \wedge \Omega^{\sigma_3}_{\sigma_4} \wedge \cdots \wedge \Omega^{\sigma_{n-1}}_{\sigma_n} \ .$$

Mint a 43. állítás mutatja, K valóban kiterjed globális formává.

55. Állítás.

$$dK = 0 \ .$$

A (18) kommutálás a $P = \mathrm{Pf}$ polinomra is teljesül, ezért a bizonyítás ugyanúgy működik, mint invariáns polinomokra.

A $C(\xi) = [K] \in H^n(M)$ osztályt nevezzük a ξ nyaláb *görbületi osztályának.* A cél: belátni, hogy $C(\xi)$ a $\chi(\xi)$ Euler-osztály számszorosa.

56. Állítás. *$C(\xi)$ független a Riemann-metrika és a metrikus konnexió választásától.*

Az 54. állítás bizonyításához hasonlóan itt is az a trükk, hogy a metrikákat és a velük kompatibilis konnexiókat ki lehet terjeszteni a nyaláb $M \times \mathbb{R}$ fölötti visszahúzottjára, és az $M \times \{0\}$, illetve $M \times \{1\}$ beágyazásokra vett megszorítások épp a kiindulási metrikákat és konnexiókat adják vissza. Az ι_t beágyazó leképezések pedig homotópok, ez igazolja a görbületi osztályok egyenlőségét.

57. Állítás.

- *Ha $f : M' \to M$ sima leképezés, akkor $C(f^*(\xi)) = f^*(C(\xi))$.*
- *Ha $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$ két vektornyaláb ortogonális Whitney-összege, akkor $C(\xi) = C(\xi_1) \wedge C(\xi_2)$.*
- *Ha van $s : M \to \xi$ szelés, amire $s(p) \neq 0$ teljesül minden $p \in M$ pontban, akkor $C(\xi) = 0$.*

Bizonyítás (vázlat): Az első állítás a visszahúzott konnexió segítségével igazolható. A második álításnál az ortogonalitás miatt a Riemann-metrika direkt összegre bomlik, $g = g_1 \oplus g_2$. Ha adott a $\nabla^{(1)}$ és a $\nabla^{(2)}$ metrikus konnexió a ξ_1-en illetve a ξ_2-n, a Whitney-összeg felbontás indukál egy metrikus konnexiót ξ-n: $\nabla^{(1)} \oplus \nabla^{(2)}(s_1 + s_2) = \nabla^{(1)}s_1 + \nabla^{(2)}s_2$, ha s_i a ξ_i egy szelése. Ennek a konnexiónak az Ω mátrixa a két komponensnek megfelelő görbületiforma-mátrixok direkt összegéra bomlik. A 42. következmény szerint egy ilyen mátrix Pfaff-polinomja a blokkok Pfaff-polinomjainak a szorzata. A harmadik állítás következik a másodikból: $\xi = s \oplus s^\perp$ és $\pi|_{\mathrm{im}(s)} : \mathrm{im}(s) \to M$ triviális nyaláb, ezért $C(s) = 0$. $\square$

58. Állítás. *Legyen $\widehat{\chi}$ egy olyan operáció, amely kompakt sima sokaság fölötti n dimenziós irányított vektornyalábokhoz az alapterük H^n kohomológiájának elemeit rendeli, és teljesülnek rá az alábbiak:*

- *Ha $f : M' \to M$ sima leképezés, akkor $\widehat{\chi}(f^*(\xi)) = f^*(\widehat{\chi}(\xi))$.*
- *Ha van $s : M \to \xi$ szelés, amire $s(p) \neq 0$ teljesül minden $p \in M$ pontban, akkor $\widehat{\chi}(\xi) = 0$.*

Ekkor $\widehat{\chi}$ minden nyalábhoz az Euler-osztályának egy számszorosát rendeli.

Bizonyítás: A ξ nyalábon M kompaktsága miatt egy egységosztás segítségével bevezethetünk egy Riemann-metrikát. A metrika segítségével vehetjük a $\sigma = \pi_0 : S \to M$ gömbnyalábot. Ekkor $\pi_0^*(\xi)$ egy vektornyaláb S, a gömbnyaláb totális tere fölött. Az $s(v) = (v, v)$ $(v \in S)$ a $\pi_0^*(\xi)$ nyaláb egy szelése, és nyilvánvalóan nem 0, mert $\langle v, v\rangle = 1$ az S definíciója alapján. Ezért $\pi_0^*(\widehat{\chi}(\xi)) = \widehat{\chi}(\pi_0^*(\xi)) = 0$. A 49. következmény miatt $\widehat{\chi}(\xi) = c\chi(\xi)$ alkalmas $c \in \mathbb{R}$ számmal. $\square$

59. Következmény. *Ha ξ irányított sima vektornyaláb az M kompakt sima sokaság fölött, akkor*

$$C(\xi) = A_\xi \chi(\xi)$$

alkalmas $A_\xi \in \mathbb{R}$ számmal.

3.5. Az általánosított Gauss-Bonnet tétel

Megmutatjuk, hogy az Euler-osztály és a görbületi osztály közötti szorzó nem függ a nyalábtól, csak a fibrum dimenziójától.

60. Állítás. *Minden páros n-hez van olyan A_n konstans, hogy minden ξ irányított sima vektornyalábra, aminek n dimenziós a fibruma*

$$C(\xi) = A_n \chi(\xi)$$

teljesül.

Bizonyítás: Egyszerűen használjuk, hogy $\xi \cong f^*(\gamma^n(\mathbb{R}^N))$ elég nagy N-re megfelelő f-fel. Legyen $C(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) = A_{n,N}\chi(\gamma^n(\mathbb{R}^N))$. Így az osztályok visszahúzás-invarianciájából kapjuk, hogy

$$C(\xi) = f^*(C(\gamma^n(\mathbb{R}^N))) = A_{n,N} f^*(\chi(\gamma^n(\mathbb{R}^N))) = A_{n,N}\chi(\xi) \ .$$

Ha $M > N$, akkor $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$ a $\gamma^n(\mathbb{R})^M$ visszahúzottja a $G_n(\mathbb{R}^N) \to G_n(\mathbb{R}^M)$ beágyazás által, tehát a $\xi \rightsquigarrow \gamma^n(\mathbb{R}^N)$, $\gamma^n(\mathbb{R}^N) \rightsquigarrow \gamma^n(\mathbb{R}^M)$ szereposztással kapjuk, hogy

$$A_{n,M}\chi(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) = C(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) = A_{n,N}\chi(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) \ ,$$

ebből pedig következik, hogy $A_{n,M} = A_{n,N}$, feltéve, hogy $\chi(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) \neq 0$. Ez pedig igaz. Jelölje $\xi : TS^n \to S^n$ a gömb érintőnyalábját és $[\mu]$ a fundamentális osztályát, így

$$\chi(\xi) = \chi(S^n)[\mu] = f^*(\chi(\gamma^n(\mathbb{R}^N))) \neq 0$$

alkalmas N, f-fel, mert páros dimenziós gömb Euler-karakterisztikája 2. Itt még használtuk valójában azt is, hogy tetszőleges $N > n$ megfelel, és ez így is van gömb esetében, hiszen $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, és az 51. tétel utáni példa épp erről szólt. $\square$

Ha ξ egy $m = 2n$ dimenziós sokaság érintőnyalábja, akkor $C(\xi), \chi(\xi) \in H^m(M) \cong \mathbb{R}$, tehát az, hogy egymás számszorosai, semmitmondó. Viszont kiszámolhatjuk az A_m konstansokat ebben az esetben.

61. Tétel (Gauss-Bonnet-Chern). *Ha M tetszőleges $m = 2n$ dimenziós kompakt irányított Riemann-sokaság, akkor*

$$\int_M K = \frac{m!\mathrm{vol}S^m}{2^{n+1}n!}\chi(M) = (2\pi)^n\chi(M) \ .$$

Bizonyítás: Legyen $[\mu] \in H^m(M)$ az M sokaság fundamentális osztálya, azaz a topdimenziós kohomológia generátora, és $\xi = \pi : TM \to M$ az érintőnyaláb.

$$C(\xi) = \left(\int_M K\right)[\mu] = A_m\chi(\xi) = A_m\chi(M)[\mu] \ ,$$

ez alapján pedig

$$\int_M K = A_m\chi(M) \ .$$

Ha $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, akkor tudjuk, hogy

$$\int_M K = \int_M \tilde{K} d\nu = \frac{m!\mathrm{vol}S^m}{2^{n+1}n!}\chi(M) \ ,$$

és minden m-re van is ilyen sokaság, például az $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ gömb, ezért általában is ennek kell teljesülnie. A második egyenlőséget megkapjuk, ha behelyettesítjük az $m = 2n$ dimenziós gömb felszínképletét:

$$\mathrm{vol}S^m = \frac{\pi^n 2^{m+1} n!}{m!} \ .$$

$\square$

62. Következmény. *A konstans értéke*

$$A_m = \frac{m!\mathrm{vol}S^m}{2^{n+1}n!} = (2\pi)^n \ ,$$

ahol $m = 2n$.

Bizonyítás: Az előző tétel bizonyítása szerint van olyan nyaláb, amelynél ez a szorzó.
$\square$

Irodalomjegyzék

[1] *Raoul Bott, Loring W. Tu: Differential Forms in Algebraic Topology*
Springer-Verlag New York New York Heidelberg Berlin, 1982.

[2] *Szenthe János: Bevezetés a sima sokaságok elméletébe*
ELTE Eötvös Kiadó, 2002.

[3] *Peter Petersen: Riemannian Geometry*
Springer, Second Edition, 2006.

[4] *Szűcs András: Topológia*
`www.cs.elte.hu/~szucs/Top1-2.pdf`

[5] *Michael Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*
Publish or Perish, INC., Houston, Texas 1999., Volume 1

[6] *Michael Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*
Publish or Perish, INC., Houston, Texas 1999., Volume 2

[7] *Michael Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*
Publish or Perish, INC., Houston, Texas 1999., Volume 3

[8] *Michael Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*
Publish or Perish, INC., Houston, Texas 1999., Volume 4

[9] *Michael Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*
Publish or Perish, INC., Houston, Texas 1999., Volume 5

[10] *Madsen, Tornehave: From Calculus to Cohomology*
Cambridge University Press, 1997.

[11] *J. W. Milnor, J. D. Stasheff: Characteristic Classes*
Princeton University Press and University Of Tokyo Press,
Princeton, New Jersey 1974.