Félcsoportok relációs foka

Diplomamunka

Írta: Kulin Júlia

Matematikus szak,
Matematikatanári kiegészítő szak

Témavezető:

Szabó Csaba, egyetemi tanár
Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2012

Tartalomjegyzék

Bevezetés **3**

1. Rees-mátrix-félcsoportok **5**

1.1. Teljesen 0-egyszerű félcsoportok 6

1.2. Rees-mátrix-félcsoportok kifejezései 7

2. Relációs fok **12**

2.1. Rees-mátrix-félcsoportok foka 17

2.1.1. $\mathbf{A}_2$ 17

2.1.2. $\mathbf{B}_2^1$ 19

2.1.3. $\mathbf{A}_2'$ 23

2.1.4. $\mathbf{A}_2^1$ 24

2.2. Kötegek foka 28

Irodalomjegyzék **33**

Bevezetés

Egy $\mathbf{A}$ algebra tetszőleges kifejezésfüggvénye minden $n \in \mathbb{N}$-re megőrzi $\mathbf{A}^n$ minden részalgebráját, azaz megőriz minden $\mathbf{A}$-val kompatibilis relációt. Tudjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ véges algebra, akkor bármely olyan véges változós függvénye, ami minden $n \in \mathbb{N}$-re megőrzi $\mathbf{A}^n$ minden részalgebráját, valójában egy kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}$-nak[3, 9].

Azt mondjuk, hogy egy algebra összes kifejezésfüggvényeinek halmazát meghatározza relációk valamilyen halmaza, ha az algebra tetszőleges függvénye pontosan akkor kifejezésfüggvény, ha megőrzi ezen relációk mindegyikét.

Felmerül a kérdés, vajon véges sok véges változós reláció által is jellemezhető-e, meghatározható-e egy algebra összes kifejezésfüggvényének a halmaza? Ha igen, nevezzük az algebrát végesen reláltnak vagy véges relációs fokúnak.

Például véges hálók kifejezésfüggvényei véges sok relációval meghatározhatóak[2]. Ellenben a $\langle \{0, 1\}, \rightarrow \rangle$ kételemű implikáció-algebrához nem adható meg ilyen relációk véges halmaza[7, 17].

A csoportokat tekintve ismert, hogy minden véges csoport véges relációs fokú[1]. Mivel egy véges csoport kifejezés-ekvivalens a belőle származó félcsoporttal, mindkettőnek ugyanaz a foka. További példák is ismertek véges relációs fokú félcsoportokra: minden véges félháló[6] és minden véges derékszögű köteg[5, 8] ilyen tulajdonságú.

Davey, Jackson, Pitkethly és Szabó 2011-ben igazolta, hogy minden véges nilpotens félcsoport és minden véges kommutatív félcsoport véges relációs fokú. Bebizonyították többek között azt is, hogy ugyanez igaz az egyik ötelemű Rees-mátrix-félcsoportra. Ehhez a félcsoporthoz egy egyváltozós műveletet hozzávéve példát adtak egy olyan unér félcsoportra, aminek végtelen a relációs foka[7].

Peter Mayr kevéssel később igazolta többek között, hogy minden véges 3-nilpotens monoid és minden véges Clifford-félcsoport relációs foka véges. Továbbá elsőként sikerült példát mutatnia olyan véges (hatelemű) félcsoportra, aminek végtelen a foka. Ez egy egységelemmel kibővített Rees-mátrix-félcsoport[15].

Szakdolgozatom első fejezetében röviden ismertetem a Rees-mátrix-félcsoportok meghatározásást, valamint Steve Seif és Szabó Csaba munkája [19] alapján bemu-

tatok két eredményt, ami két Rees-mátrix-félcsoport kifejezéseinek ekvivalenciájáról szól.

A második fejezetben először általánosan foglalkozom a relációs fokkal. Majd ismertetek a fenti példák közül néhányat.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőm, Szabó Csaba odaadó munkáját, a nagyon érdekes problémafelvetést, a rengeteg rám fordított időt, valamint azt, hogy ösztönzött, lelkesített és irányított a feladataim elvégzésében. Továbbá köszönöm Estélyi Istvánnak, hogy együtt gondolkodott velem a problémákon, Pongrácz Andrásnak $\mathbf{A}_2^1$ esetére vonatkozó hasznos ötletét, és barátaimnak a sok segítséget, amit tőlük kaptam.

1. fejezet

Rees-mátrix-félcsoportok

1.0.1 Definíció: Legyen I és Λ két nem üres halmaz, és $P = (p_{\lambda i})$ egy $|\Lambda| \times |I|$-es mátrix a nullelemmel kibővített G csoport $(G \cup \{0\})$ felett, melynek minden sora és oszlopa tartalmaz legalább egy 0-tól különböző elemet. Az $(I \times G \times \Lambda) \cup \{0\}$ halmazt az alábbi módon definiált szorzással Rees-mátrix-félcsoportnak nevezzük és $\mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P] := \langle (I \times G \times \Lambda) \cup \{0\}, \cdot \rangle$-lel jelöljük:

$$(i, g, \lambda) \cdot (j, h, \mu) = \begin{cases} (i, gp_{\lambda j}h, \mu), & \text{ha } p_{\lambda j} \neq 0, \\ 0, & \text{ha } p_{\lambda j} = 0, \end{cases}$$

$$(i, g, \lambda) \cdot 0 = 0 \cdot (i, g, \lambda) = 0 \cdot 0 = 0.$$

A P mátrixra használjuk a szendvicsmátrix, a G csoportra a struktúracsoport elnevezést is.

A Rees-mátrix-félcsoportoknak létezik egy szendvicsmátrixos reprezentációja is. Ekkor $\mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ elemei legyenek az $|I| \times |\Lambda|$-es, legfeljebb egy nemnulla elemet tartalmazó mátrixok. A félcsoportbeli szorzást a szendvicsmátrix beiktatásával, egyszerű mátrixszorzásként definiáljuk: $A \cdot B = APB$. Ez a szorzat értelmes, szintén eleme a félcsoportnak, és a mátrixok szorzásának asszociativitásából következik a most bevezetett művelet asszociativitása.

A két definícióval valóban izomorf félcsoportokat kapunk. A 0 elemnek feleljen meg a 0 mátrix, különben (i, g, λ)-nak az a mátrix, melyben az i-edik sor λ-adik eleme g, és a mátrix összes többi eleme 0. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a hozzárendelés valóban művelettartó.

Egyszerűbb struktúrát kapunk, ha a G csoport egyelemű: $G = \{1\}$. Ekkor $(i, 1, \lambda)$ helyett az $[i, \lambda]$ jelölést használjuk.

Szakdolgozatomban két sokat vizsgált, fontos Rees-mátrix-félcsoporttal foglalkozom.

1.0.2 Definíció: Legyen $G = \{1\}$, $I = \Lambda = \{1,2\}$. Ha $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, akkor $\mathcal{M}^0[\{1\};\{1,2\},\{1,2\};P]$ jele $\mathbf{A}_2$ [7]. Ha $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ az identitásmátrix, akkor $\mathcal{M}^0[\{1\};\{1,2\},\{1,2\};I]$-t $\mathbf{B}_2$-vel jelöljük, és Brandt-félcsoportnak nevezzük.

Az $\mathbf{A}_2$ félcsoportot szokták az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ szendvicsmátrixszal is megadni [13], könnyen látható, hogy a két félcsoport izomorf. Általánosan is igaz, hogy ha a szendvicsmátrix két sorát (vagy oszlopát) felcseréljük egymással, az eredetivel izomorf Rees-mátrix-félcsoportot kapunk [21].

$\mathbf{B}_2$ pedig izomorf azon 2×2-es mátrixok félcsoportjával, melyekben legfeljebb egy darab 1-es szerepel és a többi helyen 0 áll. Azaz

$$\mathbf{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Az $[i,\lambda]$ elem pont annak a mátrixnak felel meg, melyben az (i,λ) helyen 1 áll, máshol pedig 0 ($i,\lambda \in \{1,2\}$).

Ha $\mathbf{A}_2$-t, illetve $\mathbf{B}_2$-t kibővítjük az 1 egységelemmel, akkor az így kapott hatelemű félcsoportot rendre $\mathbf{A}_2^1$-gyel, illetve $\mathbf{B}_2^1$-gyel jelöljük.

1.1. Teljesen 0-egyszerű félcsoportok

1.1.1 Definíció: Legyen $\mathbf{S}$ egy félcsoport. S egy nem üres I részhalmazát balideálnak nevezzük, ha minden $s \in S$ és $x \in I$ esetén $sx \in I$, azaz $SI \subseteq I$. Hasonlóan I jobbideál, ha minden $s \in S$ és $x \in I$ esetén $xs \in I$, azaz $IS \subseteq I$. I (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is.

Nyilván minden bal- és jobbideál részfélcsoport is egyben. S maga is egy ideál. Egy I bal-, jobb- vagy kétoldali ideál valódi ideál, ha nem egyenlő S-sel.

1.1.2 Definíció: Egy $\mathbf{S}$ félcsoport egyszerű, ha nincs valódi ideálja.

Ha $0 \in S$, akkor $\{0\}$ ideálja $\mathbf{S}$-nek, ezért csak a 0-t nem tartalmazó félcsoportok lehetnek egyszerűek.

1.1.3 Definíció: Egy 0-t is tartalmazó $\mathbf{S}$ félcsoport 0-egyszerű, ha pontosan két ideálja van ($\{0\}$ és S) és $S^2 \neq \{0\}$.

Egy tetszőleges $\mathbf{S}$ félcsoport idempotens elemein megadhatunk egy részbenrendezést: ha e és f idempotensek, akkor $e \leq f$ pontosan akkor, ha $ef = fe = e$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a reláció valóban részbenrendezés. Ha $0 \in \mathbf{S}$, akkor 0 a félcsoport (egyetlen) legkisebb idempotens eleme. Egy félcsoport nemnulla idempotens elemei közül a legkisebbeket primitíveknek nevezzük.

1.1.4 Definíció: Egy $\mathbf{S}$ félcsoport teljesen 0-egyszerű, ha 0-egyszerű és létezik primitív idempotens eleme.

1.1.5 Tétel: (Rees) Az $\mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ Rees-mátrix-félcsoport teljesen 0-egyszerű. Minden teljesen 0-egyszerű félcsoport izomorf egy Rees-mátrix-félcsoporttal[10, 3.2.3. Tétel].

Kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok alatt pedig olyan Rees-mátrix-félcsoportokat értünk, amelyek struktúracsoportja egyelemű.

1.2. Rees-mátrix-félcsoportok kifejezései

1.2.1 Lemma: Legyen $\mathbf{R} = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ egy Rees-mátrix-félcsoport. Ekkor:

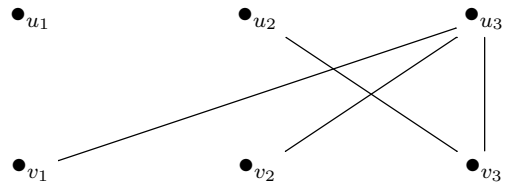
1. Bármely $a_j \in \mathbf{R}, 1 \leq j \leq n$ elemekre $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 0$ akkor és csak akkor, ha létezik k, $1 \leq k < n$, hogy $a_k a_{k+1} = 0$.

2. Ha $a_j = (i_j, g_j, \lambda_j)$ $(1 \leq j \leq n)$ és $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = (i, g, \lambda) \neq 0$, akkor $i = i_1$ és $\lambda = \lambda_n$.

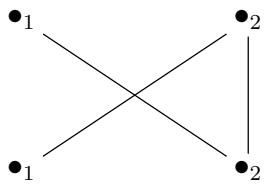
3. Ha $G = \{1\}$, akkor minden $s, t \in \mathbf{R}, s \neq 0, t \neq 0$ párra létezik $u, v \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $usv = t$.

Bizonyítás: Az első két állítás egyszerűen következik a szorzás definíciójából. A 3. bizonyításához legyen $s = [i, \lambda]$, $t = [j, \mu]$. Válasszunk ki P i. oszlopából és λ. sorából egy-egy nemnulla elemet, ilyenek léteznek. Azaz legyen κ és k olyan, hogy $p_{\kappa i} = p_{\lambda k} = 1$. Így az $u = [j, \kappa]$ és $v = [k, \mu]$ választással teljesül, hogy $usv = t$. $\square$

Az $\mathbf{A}_2$ feletti kifejezéseket vizsgálva minden termhez hozzárendelünk egy gráfot. $t(x_1, \dots x_n)$ esetén legyen $B(t)$ az a páros gráf, melynek a „felső” osztályában lévő csúcsait jelöljük $u_1, u_2, \dots u_n$-nel, az „alsó” osztályában lévőket pedig $v_1, v_2, \dots v_n$-nel. A felső és alsó csúcsok reprezentálják a változók első és második koordinátáját ($x_i = [u_i, v_i]$). A v_i és u_j csúcsok között pontosan akkor fusson él, ha $x_i x_j$ részszó t-ben, azaz ha x_j követi x_i-t valahol a szóban. Például a $t(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 x_2 x_3 x_3$ kifejezéshez az alábbi gráf tartozik:



Legyen P olyan mátrix, amely csak 0-t és 1-t tartalmaz. Ekkor Γ_P jelöli azt a páros gráfot, aminek P az incidencia mátrixa. Γ_P csúcsai P sorainak és oszlopainak az indexei, és az i. oszlopnak megfelelő csúcs pontosan akkor van összekötve a λ. sornak megfelelő csúccsal, ha $P(\lambda, i) = 1$. Ha $\mathbf{S}$ egy egyelemű csoport feletti Rees-mátrix-félcsoport, akkor a szendvicsmátrixa által meghatározott páros gráfra a Γ_S jelölést is használjuk. Például Γ_{A_2}:



Az $\mathbf{S}$-beli $t(x_1, \dots x_n)$ szó tetszőleges $(S \setminus \{0\})^n$ feletti kiértékelése megad egy f leképezést $V(B(t))$-ből $V(\Gamma_S)$-be. Ha az $x_k = [u_k, v_k]$ változóba az $[i, \lambda]$ elemet helyettesítjük, akkor legyen $f(u_k) = i$ és $f(v_k) = \lambda$.

1.2.2 Lemma: A t kifejezés egy kiértékelése akkor és csak akkor nem 0, ha a kiértékeléshez tartozó f függvény egy $B(t) \to \Gamma_S$ gráfhomomorfizmus.

Bizonyítás: Az előző 1.2.1. Lemma 1. pontja alapján $t(a_1, \dots, a_n)$ akkor és csak akkor nem 0, ha nem létezik olyan $x_k x_l$ részszava t-nek, amire $a_k a_l = 0$ $(1 \leq k, l \leq n)$. Azaz, ha nem létezik $x_k x_l$ részszó úgy, hogy $P(\lambda_k, i_l) = 0$, ahol $a_k = [i_k, \lambda_k]$, $a_l = [i_l, \lambda_l]$ és P jelöli S szendvicsmátrixát. Tekintsük $B(t)$ két olyan v_k és u_l csúcsát, melyek között fut él, ez pont azt jelenti, hogy x_l követi valahol x_k-t t-ben. Tehát az f kiértékelési függvényt véve $P(f(v_k), f(u_l)) \neq 0$, azaz $f(v_k)$ és $f(u_l)$ is össze van éllel kötve. □

Tetszőleges 0-t tartalmazó $\mathbf{S}$ félcsoport feletti $t(x_1, \dots, x_n)$ kifejezés esetén $Z(p)$-vel jelöljük t zérushalmazát, azon $\mathbf{S}$-beli rendezett n-esek halmazát, melyekre a kifejezés értéke 0: $Z(p) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{S}^n | t(a_1, \dots, a_n) = 0\}$.

1.2.3 Lemma: Legyen t_1 és t_2 két $\mathbf{A}_2$ feletti kifejezés. Ekkor $Z(t_1) = Z(t_2)$ akkor és csak akkor, ha $B(t_1) = B(t_2)$.

Bizonyítás: Az 1.2.2. Lemma alapján $Z(t_1)$ pontosan akkor egyezik meg $Z(t_2)$-vel, ha minden olyan f kiértékelési függvényre, ami $B(t_1)$ minden csúcsához ugyanazt

rendeli, mint $B(t_2)$ azonos indexű csúcsához, $f : B(t_1) \to \Gamma_{A_2}$ akkor és csak akkor gráfhomomorfizmus, ha $f : B(t_2) \to \Gamma_{A_2}$ is az.

Tegyük fel, hogy $B(t_1) \neq B(t_2)$. Ekkor feltehetjük, hogy létezik egy $v_k u_l$ él $B(t_1)$-ben, ami nem éle $B(t_2)$-nek. Definiáljuk a ϕ függvényt a következőképpen:

$$\phi(v_i) := \begin{cases} 1, & \text{ha } i = k, \\ 2, & \text{ha } i \neq k, \end{cases} \quad \phi(u_i) := \begin{cases} 1, & \text{ha } i = l, \\ 2, & \text{ha } i \neq l. \end{cases}$$

Ez a ϕ leképezés homomorfizmus $B(t_2)$-ből Γ_{A_2}-be, de nem homomorfizmus $B(t_1)$-ből Γ_{A_2}-be. Tehát $Z(t_1) \neq Z(t_2)$

Most tegyük fel, hogy létezik olyan $(a_1, \ldots, a_n)$, amire $t_1(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, de $t_2(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Ez a behelyettesítés olyan ϕ kiértékelési függvényt határoz meg, amire $\phi : B(t_1) \to \Gamma_{A_2}$ gráfhomomorfizmus, de $\phi : B(t_2) \to \Gamma_{A_2}$ nem. Így létezik $B(t_2)$-nek olyan éle, amihez nincs él hozzárendelve Γ_{A_2}-ben. Ez az él nem lehet benne $B(t_1)$-ben, azaz a két gráf valóban különböző.

□

1.2.4 Tétel: Legyen $t_1 = x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$ és $t_2 = y_1 \cdot \cdots \cdot y_m$ két $\mathbf{A}_2$ feletti kifejezés. Ekkor $t_1 \equiv t_2$ akkor és csak akkor, ha:

1. $x_1 = y_1$;
2. $x_n = y_m$;
3. $B(t_1) = B(t_2)$.

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy teljesül a három feltétel két t_1 és t_2 kifejezésre. Ekkor az 1. pontból és az 1.2.3. Lemmából követezik, hogy $t_1 = 0$ akkor és csak akkor, ha $t_2 = 0$. Ha pedig egy kiértékelésnél egyik kifejezés értéke sem 0, akkor a 2. és 3. pont, valamint az 1.2.1. Lemma miatt egyenlő az értékük.

Ha pedig $t_1 \equiv t_2$, akkor teljesül az 1. tulajdonság az 1.2.3. Lemma szerint. Továbbá tegyük fel indirekt, hogy $x_1 \neq y_1$. Vegyük a következő behelyettesítést: $x_1 = [1, 2]$, $x_i = [2, 2]$ minden $1 < i \leq n$-re és $y_j = [2, 2]$ minden $1 \leq j \leq m$-re. Ekkor $t_1 = [1, 2] \neq [2, 2] = t_2$, ellentmondáshoz jutottunk. Hasonló módon a 3. feltétel is egyszerűen igazolható.

□

Az $\mathbf{A}_2^1$ feletti kifejezések ekvivalenciájának eldöntéséhez újabb fogalmakat és jelöléseket vezetünk be. Jelöljük $r(t)$-vel (illetve $b(t)$-vel) a t szóban szereplő változók azon sorrendjét, amelyben megjelennek t-ben a jobb (illetve bal) irányból olvasva. Legyen x és y két (nem feltétlenül különböző) változó. A változóknak egy H halmaza összeköti x-et y-nal a t kifejezésben, ha az xy szorzat részszava annak a szónak, amit

úgy kapunk, hogy t-ből töröljük a H-beli változók összes előfordulását. Legyen $A_{t,x,y}$ az összes olyan tartalmazásra nézve minimális halmaz halmaza, amely összeköti x-et y-nal t-ben. Például $t = x_2x_3x_3x_2x_1x_3x_4x_2x_1x_2$ esetén $r(t) = (x_2, x_1, x_4, x_3)$, $l(t) = (x_2, x_3, x_1, x_4)$, $A_{t,x_3,x_1} = \{\{x_2\}\}$, $A_{t,x_1,x_3} = \{\emptyset\}$, $A_{t,x_2,x_2} = \{\{x_3\}, \{x_1\}\}$, $A_{t,x_2,x_3} = \{\emptyset\}$, $A_{t,x_4,x_3} = \emptyset$, stb.

1.2.5 Tétel: Legyen $t_1 = x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$ és $t_2 = y_1 \cdot \cdots \cdot y_m$ két $\mathbf{A}_2^1$ feletti kifejezés. Ekkor $t_1 \equiv t_2$ akkor és csak akkor, ha:

1. $r(t_1) = r(t_2)$;
2. $l(t_1) = l(t_2)$;
3. minden x és y változóra: $A_{t_1,x,y} = A_{t_2,x,y}$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $t_1 \equiv t_2$. Ekkor a két kifejezés $\mathbf{A}_2$ felett is ekvivalens, így teljesül az előző 1.2.4. Tétel 2. feltétele: $x_1 = y_1$. Az $x_1 = y_1 = 1$ helyettesítésből és ismét az $\mathbf{A}_2$ feletti ekvivalencia-feltételből azt kapjuk, hogy a két szóban balról a másodikként megjelenő változók is ugyanazok. Ezt az eljárást folytatva azt kapjuk, hogy $l(t_1) = l(t_2)$. Hasonlóan igazolható, hogy $r(t_1) = r(t_2)$.

Továbbá, ha léteznek $x \neq y$ változók úgy, hogy $A_{t_1,x,y} \neq A_{t_2,x,y}$, e két halmaz szimmetrikus differenciája nem üres. Vegyünk egy tartalmazásra nézve minimális U halmazt $A_{t_1,x,y} \triangle A_{t_2,x,y}$-ból. Feltehetjük, hogy $U \in A_{t_1,x,y}$. Legyen $x = [2,1]$, $y = [1,2]$, $x_i = 1$ minden $x_i \in U$ esetén és $x_j = [2,2]$ különben. Ekkor azt kapjuk, hogy $t_1 = 0$, mivel xy részszava annak a kifejezésnek, amit úgy kapunk t_1-ből, hogy töröljük az összes U-beli változót. Másrészt pedig $t_2 \neq 0$, mert x-et nem fogja y követni a t_2-ből hasonlóan kapott kifejezésben, azaz $[2,1]$-et nem fogja $[1,2]$ követni a kiértékelésnél. Ha létezik valamilyen x változó úgy, hogy $A_{t_1,x,x} \neq A_{t_2,x,x}$, akkor ugyanezt kapjuk arra a behelyettesítésre, amikor $x = [1,1]$, $x_i = 1$ minden $x_i \in U$ esetén és $x_j = [2,2]$ különben.

A fordított irányhoz legyen $t_1(s_1, \ldots, s_n) = 0$ és $t_2(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$. Ekkor az 1.2.1. Lemma 1. pontja szerint létezik s_i és s_j úgy, hogy $s_is_j = 0$ és létezik az x_i, x_j párnak legalább egy olyan előfordulása t_1-ben, hogy minden x_i és x_j közötti változóba 1-et helyettesítettünk, de t_2-ben x_j nem követi x_i-t úgy, hogy csak olyan változók választják el őket, amik 1-et vettek fel értékül. Azon x_i és x_j közötti változók halmazát, amelyekbe 1-et helyettesítettünk, jelöljük U-val. Minden ilyen, tartalmazásra nézve minimális U halmaz benne lesz $A_{t_1,x_i,x_j} \setminus A_{t_2,x_i,x_j}$-ben.

Ha pedig se $t_1(s_1, \ldots, s_n)$, se $t_2(s_1, \ldots, s_n)$ értéke nem 0, akkor az 1. és 2. pontból következik, hogy $t_1(s_1, \ldots, s_n) = t_2(s_1, \ldots, s_n)$. Ugyanis akármelyik változó helyébe írtunk is 1-est, az azonos megjelenési sorrend garantálja, hogy mindkét szorzatban

ugyanaz az első, illetve utolsó 1-től különböző s_k, illetve s_l. Így az 1.2.1. Lemma 2. pontja alapján valóban ugyanaz a két kifejezés értéke.

$\square$

2. fejezet

Relációs fok

Legyen $\mathbf{A} = \langle A; \mathcal{F} \rangle$ egy tetszőleges algebra. $\mathbf{A}$ összes kifejezésfüggvényeinek (termfüggvényeinek) halmazát $\mathrm{Clo}(\mathbf{A})$-val jelöljük, ez $\mathbf{A}$ egy klónja. $\mathbf{A}$ n-változós kifejezésfüggvényeinek halmazát $\mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$ jelöli.

Egy $f : A^n \to A$ leképezés megőrzi A egy k-változós ρ relációját, ha minden $(r_{1,i}, r_{2,i}, ..., r_{k,i}) \in \rho$ $(1 \leq i \leq n)$ esetén

$$(f(r_{1,1}, r_{1,2}, ..., r_{1,n}), f(r_{2,1}, r_{2,2}, ..., r_{2,n}), ..., f(r_{k,1}, r_{k,2}, ..., r_{k,n})) \in \rho.$$

Másképp: jelölje $\langle A; f \rangle$ azt az algebrát az A alaphalmazon, amelynek egyetlen művelete az f. f megőrzi ρ-t, ha ρ részalgebrája az $\langle A; f \rangle^k$ direkt hatványnak. Azt is mondjuk, hogy a ρ reláció kompatibilis az f függvénnyel. És ρ kompatibilis $\mathbf{A}$-val, ha részalgebrája $\mathbf{A}^k$-nak.

Vegyük észre, hogy $\mathrm{Clo}_k(\mathbf{A})$ részalgebrája $\mathbf{A}^{A^k}$-nak. Azt mondjuk, hogy $f : A^n \to A$ megőrzi $\mathrm{Clo}_k(\mathbf{A})$-t, ha minden $g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{Clo}_k(\mathbf{A})$ esetén a függvények kompozíciója:

$$f(g_1, \ldots, g_n) : A^k \to A, \qquad \underline{x} \mapsto f(g_1(\underline{x}), \ldots, g_n(\underline{x}))$$

eleme $\mathrm{Clo}_k(\mathbf{A})$-nak.

A kérdés, amit vizsgálok, az, hogy vajon létezik-e véges sok $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_d$ reláció A-n, melyekre egy $f : A^n \to A$ leképezés pontosan akkor kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}$-nak, ha megőrzi az összes ρ_i $(1 \leq i \leq d)$ relációt. Azaz $\mathrm{Clo}(\mathbf{A})$ meghatározható-e véges sok reláció által?

2.0.6 Definíció: Az $\mathbf{A}$ algebra relációs foka véges, ha $\mathrm{Clo}(\mathbf{A})$ meghatározható A véges sok változós relációinak egy véges halmazával. Ilyenkor azt mondjuk, $\mathbf{A}$ végesen relált. Különben pedig $\mathbf{A}$ relációs foka végtelen.

Ha minden véges változós leképezés A-n egy kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}$-nak (azaz $\mathbf{A}$

primál algebra), akkor $\mathbf{A}$ relációs foka 0. Különben, ha $\mathbf{A}$ relációs foka véges, akkor ez a fok a legkisebb olyan $d \in \mathbb{N}$, amelyre $\mathbf{A}$ d-változós relációi meghatározzák $\mathrm{Clo}(\mathbf{A})$-t.

A következő lemma segítségével direkt úton megmutatható egy algebráról, hogy véges relációs fokú.

2.0.7 Lemma: Legyen $d \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{A}$ egy véges algebra. A következők ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ relációs foka legfeljebb d;
2. minden $n \in N$-re, ha egy $f : A^n \to A$ hozzárendelés megegyezik egy kifejezésfüggvénnyel minden olyan $S \subseteq A_n$ halmazon, melyre $|S| \leq d$, akkor f egy kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}$-nak.

Általában egy kevésbé direkt módszert használnak a relációs fok vizsgálatakor, melynek a most bevezetésre kerülő fogalom az alapja.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $\overline{1,n}$ jelölje az $\{1, 2, ..., n\}$ n-elemű halmazt. $\overline{1,n}$ minden α ekvivalenciarelációjára definiáljuk az $\hat{\alpha} : \overline{1,n} \to \overline{1,n}$ leképezést úgy, hogy $\hat{\alpha}(i)$ legyen a legnagyobb szám i α szerinti blokkjában. $k < n$ esetén $\mathrm{Eq}_k(n)$-nel jelöljük $\overline{1,n}$ összes k darab blokkból álló ekvivalenciarelációinak halmazát.

Legyen $\mathcal{V}$ egy varietás, legyen $k < n$, $k, n \in \mathbb{N}$ és tekintsünk egy n-változós $t(x_1, \ldots, x_n)$ kifejezést (termet, szót) $\mathcal{V}$ felett. Minden $\alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)$ megad egy új n-változós t_α kifejezést t-ből azáltal, hogy azonosítjuk az α szerint azonos blokkban lévő változókat: $t_\alpha(x_1, \ldots, x_n) := t(x_{\hat{\alpha}(1)}, \ldots, x_{\hat{\alpha}(n)})$.

A $k = n - 1$ esetben, ha α azt az $\mathrm{Eq}_{n-1}(n)$-beli ekvivalenciarelációt jelöli, amely i-t és j-t azonosítja ($i < j \leq n$), akkor egy t n-változós kifejezés esetén t_α helyett a t_{ij} jelölést használjuk. Azaz t_{ij} az a szó, amit úgy kapunk t-ből, hogy x_i-t mindenhol x_j-re cseréljük.

Vegyük az összes ilyen k-blokkú ekvivalenciarelációhoz tartozó kifejezést: az n-változós kifejezések $\mathcal{F}_t := \{t_\alpha(x_1, \ldots, x_n) | \alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)\}$ halmazát a t-ből származó (n, k)-sémának nevezzük. $\mathcal{F}_t$ kielégíti a következő két feltételt:

$$\text{minden } \alpha \in \mathrm{Eq}_k(n) \text{ esetén: } \mathcal{V} \models t_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \approx t_\alpha(x_{\hat{\alpha}(1)}, \ldots, x_{\hat{\alpha}(n)}); \tag{2.1}$$

$$\text{minden } \alpha, \beta \in \mathrm{Eq}_k(n), \gamma := \alpha \vee \beta\text{-ra: } \mathcal{V} \models t_\alpha(x_{\hat{\gamma}(1)}, \ldots, x_{\hat{\gamma}(n)}) \approx t_\beta(x_{\hat{\gamma}(1)}, \ldots, x_{\hat{\gamma}(n)}). \tag{2.2}$$

2.1-et abból kapjuk, hogy minden $1 \leq i \leq n$-re $\hat{\alpha}(\hat{\alpha}(i)) = \hat{\alpha}(i)$. 2.2 pedig azért igaz, mert $\alpha \circ \gamma = \gamma = \beta \circ \gamma$, így minden $1 \leq i \leq n$-re $\hat{\alpha}(\hat{\gamma}(i)) = \hat{\beta}(\hat{\gamma}(i))$.

2.0.8 Definíció: Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$. A $\mathcal{V}$ varietás egy (n,k)-sémája n-változós kifejezéseknek egy olyan $\{t_\alpha(x_1, \ldots, x_n) | \alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)\}$ indexelt családja, melyben 2.1 és 2.2 teljesül. $\mathcal{V}$ két (n,k)-sémája, $\{s_\alpha | \alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)\}$ és $\{t_\alpha | \alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)\}$, ekvivalens, ha minden $\alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)$-ra $\mathcal{V} \models s_\alpha \approx t_\alpha$. $\mathcal{V}$ egy (n,k)-sémája kifejezésből származik, ha ekvivalens $\mathcal{F}_t$-vel valamilyen n-változós t kifejezésre.

Legyen $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, $f : A^n \to A$ egy függvény. Minden $\alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)$-ra így definiáljuk az $f_\alpha : A^n \to A$ leképezést: $f_\alpha(a_1, \ldots, a_n) := f(a_{\hat{\alpha}(1)}, \ldots, a_{\hat{\alpha}(n)})$. A $k = n-1$ esetben hasonlóan f_α helyett a f_{ij}-t írunk.

Ha $f : A^n \to A$ megőrzi A egy ρ relációját, akkor természetesen minden $\alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)$ esetén f_α is megőrzi ρ-t. Ha f egy kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}$-nak, akkor f_α is az.

Azt mondjuk, hogy egy $f : A^n \to A$ függvény függ az i. változójától (x_i-től), ha létezik $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n) \in A^n$ úgy, hogy $a_j = b_j$ minden $j \in \overline{1,n} \setminus \{i\}$ esetén és $f(a_1, \ldots, a_n) \neq f(b_1, \ldots, b_n)$. Például az i. projekció függ x_i-től, de nem függ a többi változótól.

Vegyük észre, hogy $\alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)$ esetén f_α legfeljebb k darab változójától függ.

2.0.9 Lemma: Legyen $\mathbf{A}$ egy véges algebra, jelölje $\mathcal{V}(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ által generált varietást. Legyen $\mathcal{F} = \{t_\alpha(x_1, \ldots, x_n) | \alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)\}$ $\mathcal{V}(\mathbf{A})$ egy (n,k)-sémája, ahol $|A| \leq k < n$. Ekkor:

1. Egyértelműen létezik egy $f : A^n \to A$ leképezés, melyre minden $\alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)$ esetén $f_\alpha = t_\alpha^{\mathbf{A}}$.

2. Ez az f akkor és csak akkor n-változós kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}$-nak, ha az $\mathcal{F}$ (n,k)-séma kifejezésből származik.

Bizonyítás: Az 1. állításhoz tekintsünk egy tetszőleges $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ n-est. Mivel $|A| \leq k < n$, a_i-k közül néhány megegyezik egymással, pontosabban létezik legalább egy olyan $\alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)$, hogy $(a_1, \ldots, a_n) = (a_{\hat{\alpha}(1)}, \ldots, a_{\hat{\alpha}(n)})$. Így tetszőleges $f : A^n \to A$ függvényre $f(a_1, \ldots, a_n) = f(a_{\hat{\alpha}(1)}, \ldots, a_{\hat{\alpha}(n)}) = f_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$. Tehát egyetlen függvény létezhet, amely az 1. pontbeli tulajdonságot teljesíti, az, amelyet így definiálunk: legyen $f(a_1, \ldots, a_n) := t_\alpha^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. Meg kell mutatnunk, hogy a definíció független attól, hogy az $(a_1, \ldots, a_n) = (a_{\hat{\alpha}(1)}, \ldots, a_{\hat{\alpha}(n)})$-t kielégítő α-k közül melyiket választjuk.

Legyen ρ ez az ekvivalenciareláció $\overline{1,n}$-en: $(i,j) \in \rho \Leftrightarrow a_i = a_j$. Legyen $\alpha, \beta \in \mathrm{Eq}_k(n)$, melyekre $\alpha, \beta \subseteq \rho$. Ekkor $\gamma := \alpha \vee \beta \subseteq \rho$. Felhasználva, hogy az $\mathcal{F}$ (n,k)-

sémára teljesül a 2.2 tulajdonság:

$$t_\alpha^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n) = t_\alpha^{\mathbf{A}}(a_{\hat\gamma(1)},\dots,a_{\hat\gamma(n)}) = t_\beta^{\mathbf{A}}(a_{\hat\gamma(1)},\dots,a_{\hat\gamma(n)}) = t_\beta^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n)$$

Tehát f valóban független α választásától.

Innen a 2. állítás már nyilvánvalóan teljesül. Ha ez az f kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}$-nak, azaz $f = t^{\mathbf{A}}$ valamilyen kifejezésre, akkor $\mathcal{F}$ ekvivalens $\mathcal{F}_t$-vel. Ha pedig $\mathcal{F}$ egy t kifejezésből származik, az egyértelműség miatt $f = t^{\mathbf{A}}$.

□

2.0.10 Tétel: Legyen $\mathbf{A}$ egy véges algebra. $\mathbf{A}$ relációs foka akkor és csak akkor véges, ha létezik olyan $k \geq |A|$, melyre az alábbi ekvivalens feltételek teljesülnek:

1. minden $n > k$-ra $\mathcal{V}(\mathbf{A})$ minden (n,k)-sémája kifejezésből származik;
2. minden $n > k$-ra $\mathcal{V}(\mathbf{A})$ minden $(n,n-1)$-sémája kifejezésből származik;
3. minden $n > k$-ra, ha egy $f : A^n \to A$ leképezés esetén minden $\alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)$-ra $f_\alpha : A^n \to A$ kifejezésfüggvénye A-nak, akkor f is az;
4. minden $n > k$-ra, ha egy $f : A^n \to A$ leképezés esetén minden $i < j \leq n$ párra $f_{ij} : A^n \to A$ kifejezésfüggvénye A-nak, akkor f is az.

Továbbá, ha $\mathbf{A}$ relációs foka d, akkor a feltételek teljesülnek $k = |A|^d$-nel; és ha a fentiek fennállnak valamilyen $k \geq |A|$ mellett, akkor $\mathbf{A}$ relációs foka legfeljebb $|A|^k$.

Bizonyítás: Jablonskiĭ bizonyította, hogyha $\mathbf{A}$ relációs foka d, akkor a 3. állítás teljesül $k = |A|^d$-vel, és ha létezik a 3. tulajdonságot kielégítő k természetes szám, akkor $\mathbf{A}$ relációs foka legfeljebb $|A|^k$.[11] Rosenberg és Szendrei eredményei alapján a 3. és 4. feltétel ekvivalens egymással.[18] Megmutatjuk, hogy ha $k \geq |A|$, akkor 1. $\Leftrightarrow$ 3. Annak a bizonyítása, hogy 2. $\Leftrightarrow$ 4., teljesen analóg.

1. $\Rightarrow$ 3.: Tegyük fel, hogy az 1. tulajdonság teljesül, és tekintsünk egy $f : A^n \to A$ leképezést, amelyre igaz, hogy minden $\alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)$-hoz létezik egy $t_\alpha(x_1,\dots,x_n)$ úgy, hogy $f_\alpha = t_\alpha^{\mathbf{A}}$. Aszerint az indoklás szerint, amivel 2.1-et és 2.2-t is igazoltuk, $f_\alpha(x_1,\dots,x_n) = f_\alpha(x_{\hat\alpha(1)},\dots,x_{\hat\alpha(n)})$ és $f_\alpha(x_{\hat\gamma(1)},\dots,x_{\hat\gamma(n)}) = f_\beta(x_{\hat\gamma(1)},\dots,x_{\hat\gamma(n)})$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Eq}_k(n), \gamma = \alpha\vee\beta)$. Tehát $\mathcal{F} = \{t_\alpha(x_1,\dots,x_n) | \alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)\}$ egy (n,k)-sémája $\mathcal{V}(\mathbf{A})$-nak. A tétel 1. állítása miatt $\mathcal{F}$ egy t kifejezésből származik. A 2.0.9. Lemma 1. pontjában megfogalmazott egyértelműség alapján $f = t^{\mathbf{A}}$, azaz f valóban kifejezésfüggvény.

3. $\Rightarrow$ 1.: Tegyük fel, hogy a 3. állítás igaz. Legyen $n > k$ és tekintsük $\mathcal{V}(\mathbf{A})$ egy tetszőleges $\mathcal{F} = \{t_\alpha(x_1,\dots,x_n) | \alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)\}$ (n,k)-sémáját. A 2.0.9. Lemma szerint

egyértelműen létezik egy $f : A^n \to A$ függvény úgy, hogy $f_\alpha = t_\alpha^{\mathbf{A}}$ minden $\alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)$ esetén. A 3. pont alapján f kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}$-nak. Tehát a 2.0.9. Lemma 2. pontja miatt $\mathcal{F}$ valóban kifejezésből származik.

□

2.0.11 Definíció: $\mathbf{A}$ véges algebra, melynek véges a relációs foka. $\mathbf{A}$ kifejezésfoka legyen az a legkisebb $k \geq |A|$, ami kielégíti az előző tétel feltételeit.

Egy algebra relációs foka akkor és csak akkor véges, ha a kifejezésfoka is véges. Ezért nem okoz problémát ha a végesség kérdését vizsgálva egyszerűen csak fokról beszélünk.

2.0.12 Tétel: Ha két véges algebra ugyanazt a varietást generálja, és az egyik véges fokú, akkor a másik is.

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két véges algebra, melyekre $\mathcal{V}(\mathbf{A})$, és tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ foka véges. Ekkor a 2.0.10. Tétel 2. pontja teljesül valamilyen $k \geq |A|$-ra, és így teljesül $k' := \max(k, |B|)$-ra is. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy $\mathbf{B}$ foka véges. □

Tehát a véges fokúság egy varietás-tulajdonság, csakúgy mint például a véges azonosságbázis létezése.

2.0.13 Megjegyzés: Amikor azt vizsgáljuk, hogy egy véges $\mathbf{A}$ algebra teljesíti-e a 2.0.10. Tétel 4. feltételét, feltehetjük, hogy $f : A^n \to A$ mindegyik változójától függ. Ellenkező esetben abból, hogy minden $1 \leq i < j \leq n$-re $f_{ij} : A^n \to A$ kifejezésfüggvény, rögtön következne, hogy f is az. Ugyanis tegyük fel, hogy f nem függ az i. változójától valamilyen $1 \leq i < n$-re, ekkor $f_{i,i+1} = f$, tehát f kifejezésfüggvény. Ha pedig f nem függ az n. változójától, akkor minden $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ esetén $f(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n-1}) = f_{n-1,n}(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_n, a_{n-1})$, ezért f kifejezésfüggvény.

2.0.14 Lemma: Legyen $\mathbf{A}$ egy véges algebra. Tegyük fel, hogy létezik $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\mathbf{A}$ minden kifejezésfüggvénye legfeljebb m darab változójától függ. Ekkor $\mathbf{A}$ kifejezésfoka legfeljebb $\max(m + 2, |A|)$.

Bizonyítás: Leellenőrizzük, hogy a 2.0.10. Tétel 4. feltétele teljesül-e. Legyen $n > |A|$ és $f : A^n \to A$ olyan, hogy f_{ij} kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}$-nak minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén. Bebizonyítjuk, hogy ha f nem kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}$-nak, akkor $n \leq m+2$. Az előző 2.0.13. Megjegyzés szerint f mindegyik változójától függ. Ekkor Willard eredménye alapján létezik $1 \leq i < j \leq n$ úgy, hogy f_{ij} legalább $n - 2$ változótól függ.[22] Mivel f_{ij} kifejezésfüggvény, $n - 2 \leq m$, igazoltuk az állítást. □

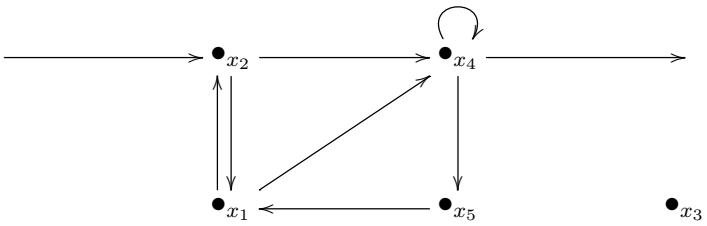
2.0.15 Lemma: Legyen A egy véges halmaz, $n > |A| + 1$ és $f : A^n \to A$ egy függvény. Ha f függ a k. változójától valamely $1 \leq k \leq n$-re, akkor léteznek különböző $i, j \in \overline{1,n} \setminus \{k\}$ indexek úgy, hogy f_{ij} függ a k. változójától.

BIZONYÍTÁS: A definíció szerint léteznek $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n)$ rendezett n-esek A^n-ben úgy, hogy $a_l = b_l$ minden $l \in \overline{1,n} \setminus \{k\}$ esetén és $f(a_1, \ldots, a_n) \neq f(b_1, \ldots, b_n)$. Mivel $n > |A|+1$, a skatulyaelv alapján a_i-k közül vagy legalább 3 vagy legalább 2-2 megegyezik egymással. Ezért létezik két egymástól és k-tól különböző i és j index, melyekre $b_i = a_i = a_j = b_j$. Így $f_{ij}(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \neq f(b_1, \ldots, b_n) = f_{ij}(b_1, \ldots, b_n)$, azaz f_{ij} függ a k. változójától. □

2.1. Rees-mátrix-félcsoportok foka

2.1.1. $\mathbf{A}_2$

Ismét megfeleltetünk minden $\mathbf{A}_2$ feletti kifejezésnek egy gráfot, de kicsit másképp, mint az 1.1. szakaszban tettük. Nevezzünk be-ki-gráfnak egy véges irányított gráfot megkülönböztetett „be” és „ki” csúcsokkal. Egy $t(x_1, \ldots, x_n)$ kifejezéshez rendeljük hozzá azt a G_t be-ki-gráfot, amelynek $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a csúcshalmaza, a „be” és „ki” csúcsai a t szóban szereplő első és utolsó változók és x_i-ből pontosan akkor fusson él x_j-be, ha $x_i x_j$ részszava t-nek $(i, j \in \overline{1,n})$. Például a $t(x_1, \ldots, x_5) = x_2 x_4 x_5 x_1 x_2 x_1 x_4 x_4$ szóhoz az alábbi gráf tartozik:



Egy be-ki-gráf akkor és csak akkor származik egy kifejezésből, ha létezik olyan irányított séta a „be” csúcsból a „ki” csúcsba, ami a gráf minden élén legalább egyszer áthalad. Egy ilyen sétát szósétának fogunk hívni.

Bármely $t(x_1, \ldots, x_n)$ kifejezés és α $\overline{1,n}$ feletti ekvivalenciareláció esetén a $t(x_{\hat{\alpha}(1)}, \ldots, x_{\hat{\alpha}(n)})$ szóhoz tartozó gráf megkapható úgy, mint a G_t gráf képe az $x_k \mapsto x_{\hat{\alpha}(k)}$ leképezésnél.

Trahtman bebizonyította, hogy két $\mathbf{A}_2$ feletti szó pontosan akkor ekvivalens, ha ugyanaz a be-ki-gráf tartozik hozzájuk[20].

2.1.1 Tétel: $\mathbf{A}_2$ kifejezésfoka 5.

Bizonyítás: Bebizonyítjuk, hogy teljesül a 2.0.10. Tételben megfogalmazott 2. feltétel. Tehát legyen $n > 5$ és tekintsük $\mathcal{V}(\mathbf{A}_2)$ egy tetszőleges $\mathcal{F} = \{t_{ij}(x_1, \ldots, x_n) | 1 \leq i < j \leq n\}$ $(n, n-1)$-sémáját. Be akarjuk látni, hogy $\mathcal{F}$ kifejezésből származik.

A $t_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ kifejezéshez tartozó be-ki-gráfot jelölje G_{ij}, ennek $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i\}$ a csúcshalmaza. Abból, hogy $\mathcal{F}$ kielégíti a 2.2 feltételt, következik a G_{ij} gráfok következő tulajdonsága:

- $1 \leq i < j \leq n$-re és $1 \leq k < l \leq n$-re jelölje γ azt a legkisebb ekvivalencia-relációt $\overline{1, n}$-en, amire $(i, j) \in \gamma$ és $(k, l) \in \gamma$. Ekkor G_{ij} képe az $x_k \mapsto x_{\hat{\gamma}(k)}$ leképezést véve ugyanaz, mint G_{kl} képe a $x_k \mapsto x_{\hat{\gamma}(k)}$ leképezésnél.

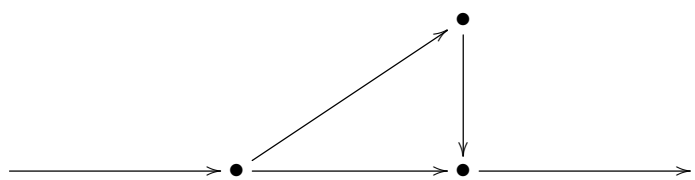
Mivel $n > 5$, könnyű belátni, hogy ez a tulajdonság biztosítja egy olyan G be-ki-gráf létezését az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ csúcshalmazon, amelyre teljesül, hogy minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén az a be-ki-gráf, amit G-ből az x_i és x_j csúcsok összevonásával kapunk, az G_{ij}. Valóban, ha valamelyik G_{kl}-ben x_p a „be" csúcs és x_r a „ki" csúcs, ahol $p, r \notin \{k, l\}$, akkor G-ben is ugyanez teljesül. Tetszőleges G_{kl}-ből az is leolvasható, hogy G-ben milyen az x_s és x_t csúcs összeköttetése, ahol $s, t \notin \{k, l\}$. És ha két t_{ij} és t_{kl} szóhoz tartozó gráf különbözőképpen határozná meg G valamely részét, az ellentmondana a fenti tulajdonságnak: G_{ij} és G_{kl} képe különbözne a γ szerinti összevonásnál.

A bizonyítás további részében belátjuk, hogy létezik szóséta G-ben, ezért G egy $t(x_1, \ldots, x_n)$ kifejezésből származik. Így $\mathcal{F}$ ekvivalens $\mathcal{F}_t$-vel, és ezt akartuk igazolni.

A továbbiakban különböző $u, v \in V(G)$ csúcsokra G_{uv}-val jelöljük azt a be-ki-gráfot, amit u és v összevonásával kapunk G-ből. Egy ilyen gráfot G összevont vagy összehúzott képének nevezek.

2.1.2 Állítás: Legyen G egy tetszőleges be-ki-gráf legalább 4 csúccsal, $|V(G)| \geq 4$. Tegyük fel, hogy G minden összehúzott képében létezik szóséta. Ekkor G-ben is létezik szóséta.

Bizonyítás: Az előző gondolatmenethez, amellyel megkaptuk G éleit a G_{kl} gráfokból, legalább 4 csúcsra volt szükségünk. Valamint itt egy konkrét példa, miért szükséges a $|V(G)| \geq 4$ feltétel:



Először tegyük fel, hogy létezik egy $z \in V(G)$ csúcs, aminek 0 a foka. Válasszunk egy tetszőleges $u \in V(G) \setminus \{z\}$-t. Ekkor G_{uz} egy szósétája nyilván megad egy szósétát G-ben.

Ezután tegyük fel, hogy létezik G-ben egy C irányított kör, ami nem csak egy hurok. Azaz létezik uv él C-ben, amire $u \neq v$. G_{uv} egy szósétája a C kör segítségével könnyen kiterjeszthető G szósétájává.

Tehát feltehetjük, hogy G nem tartalmaz 0 fokú csúcsokat és köröket. Konstruáljunk egy G' irányított gráfot G-ből azáltal, hogy vesszük az él-reláció reflexív és tranzitív lezártját. Így G' egy rendezett halmaz lesz. Jelölje 0 és 1 rendre G „be" és „ki" csúcsát.

1. 0 és 1 rendre G' legkisebb és legnagyobb eleme.

Legyen $u \in V(G) \setminus \{0\}$. Kell találnunk egy irányított sétát G-ben 0-ból u-ba. Válasszunk ki egy $v \in V(G) \setminus \{0, u\}$ csúcsot. Mivel a 0 csúcs foka nem 0, G_{uv} szósétája muszáj tartalmazzon egy $0w$ élt G-ből, valamilyen $w \neq 0$-ra. Feltehetjük, hogy $u \neq w$. Most egy szóséta G_{0w}-ben megad egy G-beli sétát 0-ból u-ba. Hasonlóan igazolhatjuk, hogy 1 G' legnagyobb eleme.

2. Ha az $u \prec v$ csúcsok szomszédosak G'-ben, akkor G_{uv} körmentes.

Vegyük észre, hogy létezik uv él G-ben. Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy C kör G_{uv}-ben. Feltehetjük, hogy C nem tartalmazza az uu hurkot. C-ből nem keletkezik kör G-ben, ezért C-nek tartalmaznia kell $a \to v = u \to b$ alakú részsétát, ahol av és ub él G-ben. De ebből az következik, hogy létezik G-ben legalább 2 hosszú út u-ból v-be, ami ellentmond annak, hogy az $u \prec v$ csúcsok szomszédosak G'-ben.

G egy összehúzott képét nevezzük lineárisnak, ha nem más mint egy irányított út 0-ból 1-be, esetleg néhány hurokkal együtt. G'-ben szomszédos $u \prec v$ csúcsokra tudjuk, hogy G_{uv}-ben létezik szóséta és G_{uv} körmentes, tehát biztosan lineáris is.

Mivel G' egy korlátos rendezett halmaz, aminek az elemszáma legalább 4, létezik olyan $a, z \in V(G)$, hogy $0 \prec a \neq z \prec 1$. Abból, hogy G_{0a} és G_{z1} lineáris, egyszerűen következik, hogy G is lineáris. Vagyis létezik szóséta G-ben, kész vagyunk.

□

2.1.2. $\mathbf{B}_2^1$

2.1.3 Lemma: Jelölje K_n a teljes irányított gráfot az $\overline{1,n}$ csúcshalmazon, amely nem tartalmaz hurokélt ($n \geq 2$). Létezik w irányított séta K_n-en az alábbi tulajdonságokkal:

1. w $(1, 2, \ldots, n)$-nel kezdődik és ér véget;

2. w áthalad K_n minden élén legalább egyszer;

3. minden $i \in \overline{1,n}$-re az i és $i+1$ csúcsok váltakozó sorrendben szerepelnek w-ben;

4. minden olyan $i, j \in \overline{1,n}$ párra, amelyre $|i-j| > 1$, létezik i-nek két előfordulása w-ben úgy, hogy nem szerepel közöttük j.

Például K_3-ra a $w = (1,2,3,1,2,1,3,2,3,1,2,3)$ séta rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

Bizonyítás: n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást.

$n = 2$-re $w = (1,2,1,2)$ megfelel.

Tegyük fel, hogy $n \geq 3$ és u egy megfelelő tulajdonságú séta K_{n-1}-en.

A $w_1, \ldots, w_l$ sétákra és csúcsokra $(w_1, \ldots, w_l)$-lel jelöljük azt a sétát, amit $w_1, \ldots, w_l$ összefűzésével kapunk.

Legyenek $u_1, \ldots, u_r$ olyan séták, amik $n-1$-ben érnek véget, de különben nem haladnak át $n-1$-en, úgy, hogy $u = (u_1, \ldots, u_r, 1, \ldots, n-1)$.

Minden $1 \leq i \leq n-2$-re legyen $v_i := (1, \ldots, i-1, n-1, i, n, i+1, \ldots, n-2)$.

Legyen

$$w := (u_1, n, u_2, n, \ldots, u_r, n, 1, 2, \ldots, n-2, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}, n-1, n, 1, 2, \ldots, n).$$

Azt állítjuk, hogy ez a séta rendelkezik a keresett tulajdonságokkal.

Az 1. tulajdonság nyilvánvalóan teljesül.

Vágjuk szét w-t v_1 első két csúcsa között két részre, $w = (w_1, w_2)$:

$$w_1 := (u_1, n, u_2, n, \ldots, u_r, n, 1, 2, \ldots, n-2, n-1),$$

$$w_2 := (1, n, 2, 3, \ldots, n-2, v_2, \ldots, v_{n-2}, n-1, n, 1, 2, \ldots, n).$$

w_1-et úgy kaptuk u-ból, hogy néhány helyre beillesztettük n-et. Tehát az indukciós feltevés miatt K_{n-1} összes éle szerepel w_1-ben, leszámítva az $(n-1, i)$ alakúakat $(1 \leq i \leq n-2)$. Utóbbiak azonban részei $v_1, \ldots, v_{n-2}$-nek. Így már csak az n-be és n-ből futó élek meglétét kell leellenőrizni. $1 \leq i \leq n-2$-re (n, i) megtalálható w_1-ben, (i, n) pedig v_i-ben. A fennmaradó $(n, n-1)$ és $(n-1, n)$ élek pedig részei $(v_{n-2}, n-1, n)$-nek. Ezzel beláttuk, hogy w teljesíti a 2. tulajdonságot.

$1 \leq i \leq n-2$ esetén az indukciós feltevés miatt i és $i+1$ váltakozó sorrendben követi egymást w_1-ben, méghozzá $i+1$-gyel zárul i és $i+1$ alternáló sorozata. w_2-ben i korábban szerepel, mint $i+1$, valamint i és $i+1$ itt is váltakozó sorrendben szerepel. $n-1$ és n szintén váltakozva fordul elő w-ben. Így a 3. tulajdonságot is leellenőriztük.

Legyen $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ úgy, hogy $|i-j| > 1$. Az indukciós feltevés miatt létezik két i w_1-ben úgy, hogy nincs közöttük j. $(1, 2, \ldots, n-2, v_1)$ tartalmaz két 1-est úgy, hogy nem áll közöttük n. $2 \leq i \leq n-2$-re (v_{i-1}, v_i) tartalmaz két i-t, amit nem választ el n. Végezetül a $(v_{n-2}, n-1, n)$-ben lévő $(n, n-1, n)$ olyan része a sétának, ahol a két n csúcs között $1, \ldots, n-2$ egyike sem szerepel. Azaz w valóban kielégíti a 4. tulajdonságot is, a lemmát beláttuk.

□

2.1.4 Tétel: $\mathbf{B}_2^1$ relációs foka végtelen.

Bizonyítás: Legyen $n \geq 3$ tetszőleges. A 2.1.5. Tétel bizonyításához hasonlóan megadunk egy f n-változós leképezést $\mathbf{B}_2^1$-n, ami nem kifejezésfüggvény, de minden $1 \leq i < j \leq n$-re f_{ij} az. Így a 2.0.10. Tétel 4. feltétele miatt $\mathbf{B}_2^1$ nem végesen relált.

Legyen $f : (B_2^1)^n \to B_2^1$ az alábbi függvény:

$$f(\underline{x}) := \begin{cases} x_1 x_2 \cdot \cdots \cdot x_n, & \text{ha } \underline{x} \in \{0, [1,1], [2,2], 1\}^n, \\ [1,1], & \text{ha } \underline{x} \in \{([1,2], [2,1], 1, \ldots, 1), (1, [1,2], [2,1], 1, \ldots, 1), \ldots, \\ & (1, \ldots, 1, [1,2], [2,1]), ([2,1], 1, \ldots, 1, [1,2])\}, \\ [2,2], & \text{ha } \underline{x} \in \{([2,1], [1,2], 1, \ldots, 1), (1, [2,1], [1,2], 1, \ldots, 1), \ldots, \\ & (1, \ldots, 1, [2,1], [1,2]), ([1,2], 1, \ldots, 1, [2,1])\}, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

f nem kifejezésfüggvény. Tegyük fel indirekt, hogy az, és valamilyen t kifejezésből származik. Mivel f értéke nem változik, ha a változókat ciklikusan permutáljuk, feltehetjük, hogy t x_1-gyel kezdődik. Ekkor $f([2,1], 1, \ldots, 1, [1,2]) \in [2,1] \cdot B_2^1$, ami ellentmond annak, hogy $f([2,1], 1, \ldots, 1, [1,2]) = [1,1]$.

Legyen $1 \leq i < j \leq n$, megmutatjuk, hogy f_{ij} kifejezésfüggvény.

Legyen $w = (w_1, w_2, \ldots, w_l)$ egy olyan séta K_n-en, ami rendelkezik az előző lemmában felsorolt tulajdonságokkal ($w_1, w_2, \ldots, w_l \in \overline{1, n}$). Legyen $g : (B_2^1)^n \to B_2^1$ az alábbi kifejezésfüggvény:

$$g(x_1, \ldots, x_n) := x_{w_1} \cdot x_{w_2} \cdot \cdots \cdot x_{w_l}.$$

Ekkor

$$g(\underline{x}) := \begin{cases} x_1x_2\cdot\dots\cdot x_n, & \text{ha } \underline{x}\in\{0,[1,1],[2,2],1\}^n, \\ [1,1], & \text{ha } \underline{x}\in\{([1,2],[2,1],1,\dots,1),(1,[1,2],[2,1],1,\dots,1),\dots, \\ & (1,\dots,1,[1,2],[2,1])\}, \\ [2,2], & \text{ha } \underline{x}\in\{([2,1],[1,2],1,\dots,1),(1,[2,1],[1,2],1,\dots,1),\dots, \\ & (1,\dots,1,[2,1],[1,2])\}, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez valóban így van, ha bármelyik változó értéke 0, vagy az összesé 1. Továbbá az első esetben, ha 1-en kívül $[1,1]$ és $[2,2]$ közül csak az egyik szerepel a változók értékei között, $[1,1]\cdot[1,1]=[1,1]$ és $[2,2]\cdot[2,2]=[2,2]$ miatt $g(x)=[1,1]$ vagy $[2,2]$, csakúgy mint $x_1x_2\cdot\dots\cdot x_n$. Ha pedig $[1,1]$-et és $[2,2]$-t is helyettesítünk a változók helyére, $g(x)$ és $x_1x_2\cdot\dots\cdot x_n$ értéke is 0 lesz $[1,1]\cdot[2,2]=[2,2]\cdot[1,1]=0$ és e két elem imént említett idempotens tulajdonsága miatt.

A második és harmadik esetben azért teljesül az egyenlőség, mert w-ben a szomszédos csúcsok váltakozó sorrendben követik egymást, a nagyobbik indexű szerepel utoljára, $[1,2]\cdot[2,1]=[1,1]$, $[1,1]\cdot[1,2]=[1,2]$ stb. és $[2,1]\cdot[1,2]=[2,2]$, $[2,2]\cdot[2,1]=[2,1]$ stb.

Különben pedig $g^{\mathbf{B}_2^1}(\underline{x})=0$ valóban. Ugyanis, ha csak 1-est és csak egy $[1,2]$-t vagy egy $[2,1]$-t helyettesítünk, ez adódik abból, hogy minden változó több mint kétszer szerepel a szorzatban, és $[1,2]\cdot[1,2]=0$ vagy $[2,1]\cdot[2,1]=0$. Ha az 1-eseken kívül pontosan egy-egy koordinátába helyettesítünk $[1,2]$-t és $[2,1]$-t, de ezek nem szomszédosak, akkor a w séta 4. tulajdonsága miatt a szorzatnak része lesz majd $[1,2]\cdot 1\cdot\dots\cdot 1\cdot[1,2]=0$ is. Ha egynél több változó helyére is $[1,2]$ vagy $[2,1]$ kerül, akkor azért igaz az állítás, mert w-ben mindegyik él szerepel, és $[1,2]\cdot[1,2]=0$, $[2,1]\cdot[2,1]=0$. Ha pedig $[1,2]$ vagy $[2,1]$ és $[1,1]$ vagy $[2,2]$ egyszerre szerepel a behelyettesítésben, $[1,2]\cdot[1,1]=0$, $[2,2]\cdot[1,2]=0$, $[2,1]\cdot[2,2]=0$, $[1,1]\cdot[2,1]=0$ miatt lesz $g(\underline{x})=0$.

$\underline{x}\in(B_2^1)^n$-re legyen:

$$h_{ij}(\underline{x}) := g(x_j^2, x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_j^2,x_{j+1},\dots,x_{n-1},x_n,x_1,x_2,\dots,x_{i-2},x_{i-1}).$$

Azt állítjuk, hogy $f_{ij}=h_{ij}^{\mathbf{B}_2^1}$.

$f_{ij}|_{\{0,[1,1],[2,2],1\}^n}=h_{ij}^{\mathbf{B}_2^1}|_{\{0,[1,1],[2,2],1\}^n}$ az előzőhöz hasonló megfontolással.

Legyen $\underline{x}\in(B_2^1)^n\setminus\{0,[1,1],[2,2],1\}^n$. Tegyük fel, hogy $f_{ij}(\underline{x})\neq 0$. Ekkor létezik $k,k'\in\overline{1,n}\setminus\{i,j\}$ úgy, hogy $k+1\equiv k' \pmod n$, $(x_k,x_{k'})\in\{([1,2],[2,1]),([2,1],[1,2])\}$

és $x_u = 1$ minden $u \in \overline{1,n} \setminus \{i,k,k'\}$. Így $f_{ij}(\underline{x}) = x_k \cdot x_{k'} = h_{ij}^{\mathbf{B}_2^1}(\underline{x})$. Hasonlóan, ha $h_{ij}^{\mathbf{B}_2^1}(\underline{x}) \neq 0$, akkor $h_{ij}^{\mathbf{B}_2^1}(\underline{x}) = f_{ij}(\underline{x})$. Ezzel beláttuk, hogy minden $\underline{x} \in (B_2^1)^n \setminus \{0,[1,1],[2,2],1\}^n$ esetén is $f_{ij}(\underline{x}) = h_{ij}^{\mathbf{B}_2^1}(\underline{x})$. f_{ij} valóban kifejezésfüggvény.

□

2.1.3. $\mathbf{A}_2'$

Jelöljük $\mathbf{A}_2'$-vel azt az unér félcsoportot, amit úgy kapunk, hogy $\mathbf{A}_2$-t kibővítjük a következő $'$ egyváltozós művelettel: $0' := 0$ és $[i,j]' := [j,i]$. Vegyük észre, hogy $\mathbf{A}_2'$-ben teljesül az $(xy)' \approx y'x'$ azonosság.

2.1.5 Tétel: $\mathbf{A}_2'$ relációs foka végtelen.

Bizonyítás: Legyen $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Megadunk egy olyan $f : A_2^n \to A_2$ függvényt, ami nem kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}_2'$-nek, de bármely $1 \leq i < j \leq n$ esetén f_{ij} az. Így a 2.0.10. Tétel 4. pontja szerint $\mathbf{A}_2'$ végtelen relációs fokú.

Definiáljuk az $f : A_2^n \to A_2$ függvényt a következőképpen:

$$f(a_1,\ldots,a_n) = \begin{cases} [2,2], & \text{ha létezik } 1 \leq l \leq n \text{ úgy, hogy } a_l \neq 0 \\ & \text{és } a_k = [2,2] \text{ minden } k \neq l\text{-re,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

2.1.6 Állítás: f nem kifejezésfüggvénye $\mathbf{A}_2'$-nek.

Bizonyítás: Legyen t egy tetszőleges n-változós kifejezés $\mathbf{A}_2'$ felett, megmutatjuk, hogy $f \neq t^{\mathbf{A}_2'}$. Mivel $\mathbf{A}_2'$-ben teljesül, hogy $(xy)' \approx y'x'$, feltehetjük, hogy t egy félcsoportbeli kifejezés az $X \dot\cup X'$ változóhalmaz felett. t vagy az x_l vagy az x_l' változóval ér véget valamilyen $1 \leq l \leq n$-re. Definiáljuk $(b_1,\ldots,b_n) \in A_2^n$-et így: $b_l := [1,1]$ és $b_k := [2,2]$ minden $k \neq l$ esetén. Ekkor $f(b_1,\ldots,b_n) = [2,2] \neq t^{\mathbf{A}_2'}(b_1,\ldots,b_n)$. Tehát f valóban nem kifejezésfüggvény. □

Azt, hogy az f_{ij} leképezések kifejezésfüggvények, egy irányított gráf segítségével látjuk be. Tekintsük a változók $X := \{x_1,\ldots,x_n\}$ halmazát, és vegyük hozzá az $X' := \{x_1',\ldots,x_n'\}$ halmazt. Legyen G az az irányított gráf, melynek $X \dot\cup X'$ a csúcshalmaza, és bármely két csúcsa között mindkét irányban fut él, kivéve azokat a csúcsokat, melyeknek ugyanaz az alsó indexük. Vegyük észre, hogy G erősen összefüggő, azaz bármely két csúcsa között mindkét irányban létezik irányított séta. Továbbá minden csúcsnak ugyanaz a ki- és a be-foka. Így G-ben létezik Euler-kör.

Tetszőleges $1 \leq j \leq n$-re legyen w_j a csúcsok sorozata G egy olyan Euler-körében, amely x_j-ben kezdődik és x_j-ben ér véget. w_j-t tekinthetjük úgy, mint az

unér félcsoport egy kifejezését az X változóhalmaz felett. Most minden $1 \leq i < j \leq n$-re készítsük el a w_{ij} szót w_j-ből úgy, hogy x_i-t mindenhol x_j-re cseréljük.

2.1.7 Állítás: Minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén f_{ij} megegyezik a $w_{ij}^{\mathbf{A}_2'}$ kifejezésfüggvénnyel.

Bizonyítás: Rögzítsük $1 \leq i < j \leq n$-et és legyen $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A_2^n$. Először nézzük azt az esetet, amikor $f_{ij}(\underline{a}) = [2,2]$. Ekkor $a_j = [2,2]$ és létezik $l \leq n$ úgy, hogy $a_l \neq 0$ és $a_k = [2,2]$ minden $k \notin \{i,l\}$ esetén. Vegyük észre, hogy minden $b \in A_2 \setminus \{0\}$-re teljesül $\mathbf{A}_2'$-ben, hogy $[2,2] \cdot b \cdot [2,2] = [2,2] = [2,2] \cdot b' \cdot [2,2]$. Ebből és abból, hogy w_{ij}-ben x_j-t és x_j'-t leszámítva nem következik egymás után két azonos alsó indexű változó, azt kapjuk, hogy $w_{ij}^{\mathbf{A}_2'}(\underline{a}) = [2,2] = f_{ij}(\underline{a})$.

Most feltehetjük, hogy $f_{ij}(\underline{a}) = 0$. Ekkor fennáll az alábbi három eset valamelyike:

1. $a_k = 0$ valamilyen $k \neq i$-re. Így nyilván $w_{ij}^{\mathbf{A}_2'}(\underline{a}) = 0 = f_{ij}(\underline{a})$.

2. $a_k \neq [2,2]$ és $a_l \neq [2,2]$ különböző $k, l \in \overline{1,n} \setminus \{i\}$ esetén. Ekkor az $a_k a_l$, $a_k' a_l$, a_k, a_l', a_k', a_l' szorzatok közül legalább egy 0-val egyenlő $\mathbf{A}_2'$-ben. Mivel $x_k x_l$, $x_k' x_l$, $x_k x_l'$ és $x_k' x_l'$ mindegyike előfordul w_{ij}-ben, $w_{ij}^{\mathbf{A}_2'}(\underline{a}) = 0 = f_{ij}(\underline{a})$.

3. $a_j \neq [2,2]$. Ekkor legalább egy az $a_j a_j'$ és $a_j' a_j$ szorzatok közül 0-val egyenlő $\mathbf{A}_2'$-ben. Mivel w_j-ben szerepel $x_i x_j'$ és $x_i' x_j$ is, w_{ij}-nek része az $x_j x_j'$ és az $x_j' x_j$ kifejezés is. Ezért $w_{ij}^{\mathbf{A}_2'}(\underline{a}) = 0 = f_{ij}(\underline{a})$.

□

Ebből a két állításból a 2.0.10. Tétel 4. pontja alapján következik, hogy $\mathbf{A}_2'$ relációs foka végtelen. Másrészt, ahogy azt a 2.0.10. Tétel bizonyításában is említettük, tetszőleges $f : A^n \to A$ függvény esetén $\{f_\alpha | \alpha \in \mathrm{Eq}_k(n)\}$ is teljesíti a 2.1 és 2.2 feltételt. Mivel itt mindegyik $f_i j = w_{ij}^{\mathbf{A}_2'}$ kifejezésfüggvény, megadtunk egy $\mathcal{F} = \{w_{ij}(x_1, \ldots, x_n) | 1 \leq i < j \leq n\}$ $(n, n-1)$-sémát $\mathcal{V}(\mathbf{A}_2')$-ben. A 2.0.9. Lemma szerint $\mathcal{F}$ nem kifejezésből származik, így a 2.0.10. Tétel 2. pontjára is hivatkozhatnánk.

□

2.1.4. $\mathbf{A}_2^1$

Továbbra sem ismert azonban annak a félcsoportnak a foka, amit $\mathbf{A}_2$-ból kapunk az egységelem hozzávételével.

2.1.8 Probléma: Véges-e $\mathbf{A}_2^1$ relációs foka?

Peter Mayr ötlete, amivel $\mathbf{B}_2^1$ végtelen relációs fokát igazolta, a koordináták ciklikus szétvágása, itt sajnos nem működik. Ugyanis tegyük fel, hogy mégis találtunk

a 2.1.4. Tétel bizonyításához hasonlóan egy megfelelő f hozzárendelést, ami nem kifejezésfüggvény, egy g kifejezésfüggvényt, és a változóknak valamilyen ciklikus szétvágását és esetleg négyzetre emelését úgy, hogy $f_{ij} = h_{ij}^{\mathbf{A}_2^1}$.

Tegyük fel, hogy n páros, és vegyük azt az $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (A_2^1)^n$ elemet, amiben $a_{\frac{n}{2}} = [2,2]$, $a_n = [2,1]$ és $a_i = 1$ minden $i \in \overline{1, n-1} \setminus \{\frac{n}{2}\}$ esetén. Nézzük a $h_{1,2}^{\mathbf{A}_2^1}$ kifejezésfüggvényt. Abból, hogy $[2,1] \cdot [2,1] = [2,1]$, $[2,2] \cdot [2,2] = [2,2]$, $[2,1] \cdot [2,2] = [2,2]$, $[2,2] \cdot [2,1] = [2,1]$ és az 1.2.1. Lemmából következik, hogy $h_{1,2}^{\mathbf{A}_2^1}(\underline{a}) = [2,1]$ vagy $= [2,2]$ attól függően, hogy a szorzatban mi az utolsó 1-től különböző elem. Tegyük fel, hogy $h_{1,2}^{\mathbf{A}_2^1}(\underline{a}) = [2,1]$.

Ekkor azonban nézzük a $h_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2}^{\mathbf{A}_2^1}$ kifejezésfüggvény értékét az $\underline{a}$ helyen. Itt $[2,1]$ és $[2,2]$ szerepe pont felcserélődik, tehát azt kapjuk, hogy $h_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2}^{\mathbf{A}_2^1}(\underline{a}) = [2,2]$. Azonban amiatt, hogy $a_1 = a_2 = a_{\frac{n}{2}+1} = a_{\frac{n}{2}+2} = 1$, teljesülnie kell annak, hogy $[2,1] = f_{1,2}(\underline{a}) = f(\underline{a}) = f_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2}(\underline{a}) = [2,2]$, ami ellentmondás.

Hasonlóan beláthatjuk, hogy a 2.1.4. Tétel bizonyításának módszere nem működik olyan egyelemű csoportok feletti, egységelemmel bővített Rees-mátrix-félcsoportok esetén, amelyek szendvicsmátrixában van olyan sor vagy oszlop, amely egynél több 1-est tartalmaz. Tehát csak akkor működik ez a módszer, ha az adott Rees-mátrix-félcsoport izomorf azzal, amely szendvicsmátrixa az egységmátrix.

Viszont az 1.2.5. Tételben megfogalmazott ekvivalenciafeltétel talán segíthet a relációs fok vizsgálatánál.

Ugyanis, tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{F} = \{t_{ij}(x_1, \ldots, x_n) | 1 \leq i < j \leq n\}$ $(n, n-1)$-sémája $\mathcal{V}(\mathbf{A}_2^1)$-nek. Ez azt jelenti, hogy minden $1 \leq i < j \leq n$-re és minden $1 \leq k < l \leq n$-re ismerjük a változók $l(t_{ij})$, $r(t_{ij})$ sorrendjeit, valamint az A_{t_{ij},x_k,x_l} halmazokat. Meg lehet-e ezekből határozni $l(t)$-t, $r(t)$-t és az A_{t,x_k,x_l} halmazokat úgy, hogy $\mathcal{F}$ a t kifejezésből származzon?

A változók t-beli megjelenési sorrendjei legalább 4 változó esetén könnyen meghatározhatóak. Legyen x_k, x_l, x_p, x_r négy különböző változója $t(x_1, \ldots, x_n)$-nek ($n \geq 4$). Tekintsük azokat a kifejezéseket, amiket t-ből az ezen változók alkotta párok összevonásával kapunk. Ezek között biztosan lesz olyan t_{ij} ($i, j \in \{k, l, p, r\}$ különbözőek), hogy $l(t_{ij})$ első két eleme különbözik x_j-től. Ekkor ez a két változó megegyezik $l(t)$ első két tagjával. Jelöljük őket x_1-gyel és x_2-vel. Ezután $l(t_{12})$-ből egyértelműen megkapjuk a többi változó megjelenési sorrendjét balról olvasva. $r(t)$ is hasonlóan meghatározható ugyanennek a 4 változónak a felhasználásával. Vegyük észre, hogy legfeljebb 6 darab összevont kifejezést kellett megvizsgálnunk a sorrendek megállapításához.

Az A_{t,x_i,x_j} halmazrendszerek meghatározása kicsit bonyolultabb. Bár, ha létezik $1 \leq k < l \leq n$ úgy, hogy x_k és x_l nem szerepel egyik A_{t_{ij},x_1,x_2}-beli halmazban sem,

akkor $A_{t,x_i,x_j} = A_{t_{kl},x_i,x_j}$. Általában nem ilyen egyszerű a helyzet.

2.1.9 Állítás: Bármilyen $n \geq 4$ esetén létezik $1 \leq i < j \leq n$ és olyan $t(x_1, \ldots, x_n)$ kifejezésből származó $(n, n-1)$-séma, amelyből tetszőlegesen kiválasztva két szót, azok nem határozzák meg egyértelműen A_{t,x_i,x_j}-t. Azaz két összevont kifejezésből még nem határozható meg A_{t,x_i,x_j}.

BIZONYÍTÁS: Az egyszerűség kedvéért legyen $i = 1$ és $j = 2$.

Például tekintsünk egy olyan sémát, amelyben

$$\text{minden } 1 \leq i < j \leq n \text{ esetén } A_{t_{ij},x_1,x_2} = \{x_j\} \cup \{\{x_k, x_l\} | k, l \notin \{i, j\}\}, \tag{2.3}$$

$$A_{t_{1j},x_j,x_2} = \{\emptyset\}, A_{t_{2j},x_1,x_j} = \{\emptyset\}, A_{t_{12},x_2,x_2} = \{\emptyset\}. \tag{2.4}$$

Most, ha különböző i, j, k, l-re kiválasztjuk a t_{ij} és t_{kl} szavakat, akkor az A_{t_{ij},x_1,x_2}-ben és A_{t_{kl},x_1,x_2}-ben szereplő halmazokat megkaphatnánk például a következő két halmazrendszer mindegyikéből:

$$\{\{x_p, x_r\} | p \neq r\} \text{ és } \{\{x_p, x_r\} | p \neq r\} \setminus \{x_i, x_k\}, \{x_i, x_l\}, \{x_j, x_k\}, \{x_j, x_l\}.$$

Mindkét halmazrendszerben teljesül, hogy egyik halmaz se része a másiknak, azaz mindkettő megfelelne A_{t,x_1,x_2}-nek. Tehát t_{ij}-ből és t_{kl}-ből nem tudjuk egyértelműen meghatározni A_{t,x_1,x_2}-t.

Hasonlóan, ha különböző i, j, k-ra kiválasztjuk a t_{ij} és t_{ik} kifejezéseket, akkor ezek alapján például a következő halmazrendszereket nem fogjuk tudni megkülönböztetni:

$$\{\{x_p, x_r\} | p \neq r\} \text{ és } \{x_i, x_j\}, \{x_i, x_k\} \cup \{\{x_p, x_r\} | p \neq i, r \neq i\}.$$

Ha különböző i, j, k-ra a t_{ik} és t_{jk} kifejezéseket választjuk, akkor például a következő halmazrendszerek lesznek megkülönböztethetetlenek:

$$\{\{x_p, x_r\} | p \neq r\} \text{ és } \{\{x_p, x_r\} | p \neq r\} \setminus \{x_i, x_j\}.$$

Ha különböző i, j, k-ra a t_{ij} és t_{jk} kifejezéseket választjuk, akkor például a következő halmazrendszerek lesznek megkülönböztethetetlenek:

$$\{\{x_p, x_r\} | p \neq r\} \text{ és } \{\{x_p, x_r\} | p \neq r\} \setminus \{x_i, x_k\}.$$

Ha A_{t_{ij},x_1,x_2}-t és A_{t_{1j},x_j,x_2}-t vizsgáljuk, akkor pedig például az a két t_1 és t_2 kifejezés lesz megkülönböztethetetlen, amelyekre $A_{t_1,x_1,x_2} = \{\{x_p, x_r\}|p \neq r\}$ és t_1-ben valahol x_j megelőzi x_2-t, valamint $A_{t_2,x_1,x_2} = \{x_j\} \cup \{\{x_k, x_l\}|k, l \notin \{i, j\}\}$ és t_2-ben valahol x_j megelőzi x_2-t. Az összes fennmaradó esetben is hasonlóan igazolható, hogy nem határozható meg belőlük A_{t,x_1,x_2}.

Viszont világos, hogy létezik kifejezés úgy, hogy a belőle származó sémában teljesülön a 2.3. és 2.4. feltétel:

$$t := x_1x_3x_4x_2x_1x_5x_3x_2x_1x_3x_6x_2 \ldots x_1x_px_rx_2 \ldots x_1x_{n-2}x_{n-1}x_2x_1x_nx_{n-2}x_2x_1x_{n-1}x_nx_2,$$

azaz t-ben x_1 és x_2 között minden különböző változópár szerepel, és mindegyik x_1-től és x_2-től különböző változó megelőzi valahol x_2-t, illetve követi valahol x_1-et.

□

De legalább 5 változó esetén 3 kifejezésfüggvényből már meghatározható A_{t,x_i,x_j}.

2.1.10 Állítás: Legyen $n \geq 5$ és $i, j \in \overline{1, n}$. Ekkor tetszőleges $(n, n-1)$-séma esetén, a séma 3 tagjából egyértelműen előállítható az A_{t,x_i,x_j} halmazrendszer.

Bizonyítás: Tekintsük az $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ változóhalmaz 5 különböző elemét. Ezek közül legalább 3 különbözik x_i-től és x_j-től, jelöljük ezeket x_k-val, x_l-lel és x_m-mel.

Sorra fogjuk venni a változók halmazának összes részhalmazát, és mindről eldöntjük, hogy eleme-e A_{t,x_i,x_j}-nek vagy sem. Ehhez tekintsük a részhalmazok valamilyen tartalmazás szerinti növekvő sorrendjét, azaz kezdjünk az üres halmazzal, és egy tetszőleges halmaz csakis akkor kerüljön sorra, ha előtte már minden valódi részhalmaza szerepelt. Így, ha belátjuk egy H halmazról, hogy $H \in A_{t,x_i,x_j}$, akkor az őt tartalmazó $H' \supset H$ halmazokat már nem kell vizsgálni, hiszen ezek nem lehetnek benne A_{t,x_i,x_j}-ben.

Tehát vegyünk egy tetszőleges $H \in \mathcal{P}(X)$ halmazt, és tegyük fel, hogy a sorrendben előtte álló halmazok mindegyikét megvizsgáltuk már. Ha volt olyan részhalmaza, ami szerepelt A_{t,x_i,x_j}-ben, akkor $H \notin A_{t,x_i,x_j}$. Ezért feltehetjük, hogy egyik valódi részhalmaza sem minimális összekötő halmaza x_i-nek és x_j-nek.

Az x_k, x_l, x_m változók között vagy létezik legalább kettő ami eleme H-nak, vagy létezik legalább kettő, ami nem. Tegyük fel, hogy $x_k, x_l \notin H$. Ekkor nyilván $H \in A_{t_{kl},x_i,x_j}$ akkor és csak akkor, ha $H \in A_{t,x_i,x_j}$.

Most tegyük fel, hogy $x_k, x_l \in H$, azt állítjuk ekkor is igaz, hogy $H \in A_{t,x_i,x_j}$ pontosan akkor, ha a H-ból x_k és x_l összevonásával kapott halmaz eleme A_{t_{kl},x_i,x_j}-nek. Az egyik irányhoz nézzük azt az esetet, amikor $H \in A_{t,x_i,x_j}$. Ekkor, ha a H-ból

x_k és x_l összevonásával kapott halmaz, azaz $H \setminus \{x_k\}$ nem lenne eleme A_{t_{kl},x_i,x_j}-nek (ha $k < l$), akkor mivel $H \setminus \{x_k\}$ nyilván összeköti x_i-t és x_j-t t_{kl}-ben, csakis az lehetne, hogy létezik olyan $M \subset H \setminus \{x_k\}$ valódi részhalmaz, ami benne van A_{t_{kl},x_i,x_j}-ben. Azonban annak az $M' \in \mathcal{P}(X)$ halmaznak, amiből az $x_k = x_l$ azonosítással M-et kaptuk, minden eleme egyben H-nak is eleme. Ezáltal M' valódi része H-nak és $M' \in A_{t,x_i,x_j}$, ami ellentmondás. A másik irányhoz tegyük fel, hogy a H-ból x_k és x_l összevonásával kapott halmaz eleme A_{t_{kl},x_i,x_j}-nek, azaz mivel $x_l \in H \setminus \{x_k\}$, $H \setminus \{x_k\} \in A_{t_{kl},x_i,x_j}$. $H \setminus \{x_k\}$-t az alábbi halmazok valamelyikéből kaptuk a két változó azonosítása során: $H \setminus \{x_k\}$, $H \setminus \{x_l\}$ vagy H. De az első két halmaz valódi része H-nak, azaz róluk már tudjuk, hogy nem elemei A_{t,x_i,x_j}-nek, tehát $H \in A_{t,x_i,x_j}$.

Ezzel beláttuk, hogy H pontosan akkor minimális összekötő halmaza x_i-nek és x_j-nek t-ben, ha a H-ból x_k és x_l összevonásával kapott halmaz minimális összekötő halmaza x_i-nek és x_j-nek t_{kl}-ben. Ezáltal a t_{kl}, t_{km} és t_{lm} kifejezés felhasználásával egyértelműen meghatározható A_{t,x_i,x_j}.

□

Sőt, különböző $\{i, j\}$ párokat véve a hozzájuk tartozó A_{t,x_i,x_j} halmazok meghatározhatók ugyanabból a 3 t_{kl}, t_{km}, t_{lm} kifejezésből akkor, ha x_k-tól, x_l-től és x_m-től különböző változók összekötő halmazaira vagyunk kíváncsiak. Ha nem, akkor pedig 5 változó esetén még 7 kifejezésfüggvényre van szükségünk, $n \geq 6$ változó esetén pedig még 3-ra. Összesen tehát $n = 5$ változó esetén az $(5, 4)$-séma 10, azaz mindegyik, tagjából, $n \geq 6$ változó esetén pedig az $(n, n-1)$-séma 6 tagjából biztosan meghatározható a teljes $\{A_{t,x_i,x_j}\}_{i,j \in \overline{1,n}}$ halmazrendszer.

Ezzel a 2.1.8. kérdést úgy fogalmaztuk át, hogyha $n \geq 5$ esetén tekintjük $\mathcal{V}(\mathbf{A}_2^1)$ tetszőleges $(n, n-1)$-sémájához tartozó $l(t)$-t,$r(t)$-t és A_{t,x_i,x_j}-t minden $i, j \in \overline{1,n}$-re, akkor létezik-e olyan t kifejezés, amely pont ilyen tulajdonságú?

2.2. Kötegek foka

2.2.1 Definíció: Egy olyan félcsoportot, amiben teljesül az $x^2 \approx x$ azonosság (azaz minden elem idempotens), kötegnek nevezünk. Egy köteg:

- derékszögű, ha $xyz \approx xz$ is teljesül benne;
- balreguláris, ha $xyx \approx xy$;
- jobbreguláris, ha $xyx \approx yx$;
- reguláris, ha $xyxzx \approx xyzx$.

Egy derékszögű köteg minden kifejezésfüggvénye legfeljebb 2 változójától függ, ezért a 2.0.14. Lemmát alkalmazva a következő megfigyelést kapjuk:

2.2.2 Állítás: Minden **S** véges derékszögű köteg végesen relált, és legfeljebb $\max(4, |S|)$ a kifejezésfoka.

2.2.3 Definíció: Egy olyan kommutatív félcsoportot, amiben teljesül az $x^2 \approx x$ azonosság, félhálónak nevezünk.

Legyen **S** egy tetszőleges félcsoport. S egy kétváltozós ρ relációja balkompatibilis (az **S**-beli szorzással), ha minden $a, b, z \in S$ esetén $(a, b) \in \rho$-ból következik, hogy $(za, zb) \in \rho$. Jobbkompatibilis, ha minden $a, b, z \in S$ esetén $(a, b) \in \rho$-ból következik, hogy $(az, bz) \in \rho$. Továbbá kompatibilis, ha minden $a, b, c, d \in S$-re abból, hogy $(a, b) \in \rho$ és $(c, d) \in \rho$ következik, hogy $(ac, bd) \in \rho$. A definíció egybecseng az algebrákra megfogalmazottakkal.

2.2.4 Definíció: S egy (bal-, jobb-) kompatibilis ekvivalenciarelációját (bal-, jobb-) kongruenciának nevezzük.

Legyen a S egy eleme. Az a-t tartalmazó legszűkebb balideál $Sa \cap \{a\}$. Jelöljük ezt $L(a)$-vel, és nevezzük az a által generált fő balideálnak. Hasonlóan definiáljuk az a által generált fő jobbideált és főideált: $R(a)$-t és $J(a)$-t.

2.2.5 Definíció: Legyen $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ és $\mathcal{J}$ a következő ekvivalenciarelációja S-nek:

$$a\mathcal{L}b \iff L(a) = L(b),$$

$$a\mathcal{R}b \iff R(a) = R(b),$$

$$a\mathcal{J}b \iff J(a) = J(b).$$

Ezeket a relációkat Green-féle (ekvivalencia)relációknak nevezzük.

A definíciókból egyszerűen adódik a következő észrevétel.

2.2.6 Megjegyzés: $\mathcal{L}$ jobbkongruencia, $\mathcal{R}$ pedig balkongruencia.

A következő lemma Peter Mayr kéziratában tetszőleges balreguláris kötegre volt kimondva. Azonban észrevettem (és úgy tudom, korábban már ő is rájött), hogy a bizonyítás nem működik abban az esetben, ha a köteg nem kommutatív és teljesül benne a $zxy \approx zyx$ azonosság. Ezért az eredményeit kissé megszorítva közlöm.

2.2.7 Definíció: Egy köteg balnormális, ha teljesül benne a $zxy \approx zyx$ azonosság, illetve jobbnormális $xyz \approx yxz$ esetén.

2.2.8 Lemma: Legyen **S** egy véges balreguláris, vagy kommutatív vagy nem balnormális köteg. Ekkor **S** kifejezésfoka legfeljebb $\max(4, |S|+1)$.

BIZONYÍTÁS: Vegyük észre, hogy minden t $x_1, \ldots, x_n$-től függő **S**-feletti kifejezésre létezik egy π permutáció $\overline{1,n}$-en úgy, hogy t ekvivalens $x_{\pi(1)} \cdot \cdots \cdot x_{\pi(n)}$-nel.

Mivel **S** köteg, a Green-féle $\mathcal{J}$ reláció egy kongruenciája **S**-nek, és így $\mathbf{S}/\mathcal{J}$ félháló.[10, 4.1.3. Tétel] Feltehetjük, hogy $|S/\mathcal{J}| > 1$, különben **S** derékszögű lenne [10, 4.4.1. Tétel] és a 2.2.2. Állításból következne a lemma.

Legyen $n > \max(4, |S|+1)$ és $f : S^n \to S$ olyan függvény, amire minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén f_{ij} kifejezésfüggvény és f mindegyik változójától függ. Megmutatjuk, hogy f is kifejezésfüggvény.

Tetszőleges $1 \leq k < l < m \leq n$-re tekintsük **S**-nek azt a 4-változós leképezését, amit úgy kapunk f-ből, hogy a k., l. és m. koordinátájába rendre x_k-t, x_l-t és x_m-t írunk, az összes többi koordinátájába pedig ugyanazt, az ezektől különböző változót:

$$g(x_k, x_l, x_m, z) := f(z, \ldots, z, x_k, z, \ldots, z, x_l, z, \ldots, z, x_m, z, \ldots, z).$$

Mivel $n > 4$, g megegyezik valamelyik f_{ij}-vel, azaz kifejezésfüggvény, tehát valamilyen u x_i, x_j, x_l, z változók feletti kifejezésből származik.

Tetszőleges $a \in S$ esetén jelöljük J_a-val az a-t tartalmazó $\mathcal{J}$-szerinti ekvivalenciaosztályt. Az $|S/\mathcal{J}|$ elemszámára tett feltétel miatt létezik $a, b \in S$ úgy, hogy $J_a > J_b$ a félhálóbeli rendezés szerint. Mivel g kifejezésfüggvény, S elemeinek idempotencia miatt $f(a, \ldots, a) = a$. Továbbá a 2.0.15. Lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy $f(a, \ldots, a, b, a, \ldots, a) \in J_b$. Ezért

$$g \text{ az } x_k, x_l \text{ és } x_m \text{ változók mindegyikétől függ.} \tag{2.5}$$

Ebből és a baloldali regularitásból következik, hogy ha g-ben x_m helyére is z-t írunk, azaz különböző $1 \leq k < l \leq n$ indexekre tekintjük a következő 3-változós függvényét **S**-nek:

$$h(x_k, x_l, z) := f(z, \ldots, z, x_k, z, \ldots, z, x_l, z, \ldots, z),$$

akkor $h(x_k, x_l, z)$ a zx_kx_l, x_kzx_l, x_kx_lz, zx_lx_k, x_lzx_k vagy x_lx_kz kifejezés valamelyikéből származik.

Definiáljuk a $\prec$ rendezést $\overline{1,n}$-en a következőképpen: legyen $k \prec l$, ha $h(x_k, x_l, z)$ zx_kx_l-ből, x_kzx_l-ből vagy x_kx_lz-ből származik, azaz balról olvasva x_k megelőzi x_l-t.

Ha **S** kommutatív, akkor a $\prec$ rendezés reflexív lezártja, $\preceq$ univerzális relációja $\overline{1,n}$-nek.

Ha $\mathbf{S}$ nem kommutatív, $\preceq$ egy teljes (lineáris) rendezése $\overline{1,n}$-nek. Mivel $\mathbf{S}$ nem balnormális, $h(x_k, x_l, z)$ nem származhat a zx_kx_l és a zx_lx_k kifejezésből is. Ha pedig $h(x_k, x_l, z)$ megegyezne x_k és x_l sorrendjének szempontjából két különböző típusú, de nem az előbbi kifejezésfüggvénnyel, az idempotenciát és balregularitást felhasználva azt kapnánk, hogy $\mathbf{S}$ kommutatív. Például, ha $xyz \approx yzx$ teljesülne, akkor az $x = a$, $y = z = b$ helyettesítésből az jönne ki, hogy $ab = ba$ minden $a, b \in \mathbf{S}$ esetén. A többi eset is hasonlóan ellenőrizhető. Ezzel igazoltuk a $\preceq$ rendezés antiszimmetriáját.

Ha pedig $k \prec l$ és $l \prec m$, akkor a $g(x_k, x_l, x_m, z)$-t meghatározó szóban x_m helyére is z-t írva, azt kapjuk, hogy balról olvasva x_k előbb jelenik meg, mint x_l, ugyanakkor ha x_k-t cseréljük z-re, abból az jön ki, hogy x_l megelőzi x_m-et. Ezért az x_l változót x_m-mel felülírva láthatjuk, hogy $k \prec m$, azaz a tranzitivitás is teljesül. Így $\preceq$ valóban teljes rendezés.

Ezért mindkét esetben létezik olyan permutációja $\overline{1,n}$-nek: $\{1, \ldots, n\} = \{i_1, \ldots, i_n\}$, hogy $i_1 \prec i_2 \prec \cdots \prec i_n$. Legyen $t : S^n \to S$ az alábbi kifejezésfüggvény:

$$t(x_1, \ldots, x_n) := x_{i_1} \cdot \cdots \cdot x_{i_n}.$$

Bebizonyítjuk, hogy $f = t^{\mathbf{S}}$. Legyen $(a_1, \ldots, a_n) \in S^n$ tetszőleges. Mivel $k > |S|$, létezik $1 \leq l < m \leq n$ úgy, hogy $a_l = a_m$. A 2.5 észrevétel alapján f_{lm} függ x_m-től és x_k-tól minden $k \in \overline{1,n} \setminus \{l, m\}$ esetén.

Ha $\mathbf{S}$ kommutatív, akkor f_{lm} a $\prod_{i \in \overline{1,n} \setminus \{l\}} x_i$ kifejezésből származik, és $f(a_1, \ldots, a_n) = f_{lm}(a_1, \ldots, a_n) = t^{\mathbf{S}}(a_1, \ldots, a_n)$.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{S}$ nem kommutatív és f_{lm} egy v kifejezésből származik.

2.2.9 Állítás: Legyen $i \in \overline{1,n} \setminus \{l, m\}$. v-ben balról olvasva x_i akkor és csak akkor jelenik meg előbb, mint x_m, ha $i \prec l$ és $i \prec m$.

Bizonyítás: Ha $i \prec l$ és $i \prec m$, akkor abban a kifejezésben, amit úgy kapunk a $g(x_i, x_l, x_m, z)$-et meghatározó termből, hogy x_l helyett mindenhol x_m-et írunk, balról olvasva x_i előbb szerepel, mint x_m. Mivel ezt a kifejezésfüggvényt úgy kapjuk f_{lm}-ből, hogy azonosítjuk az összes x_i-től és x_m-től különböző változót, x_i megelőzi x_m-et v változóinak baloldali megjelenési sorrendjében is.

Ha $l \prec i$ vagy $m \prec i$, akkor az előbbi módon definiált kifejezésben balról olvasva x_m előbb szerepel, mint x_i. Az előző gondolatmenet alapján ugyanez teljesül v-ben is. □

Ebből következik, hogy $f_{lm} = t^{\mathbf{S}}_{lm}$. Így $f(a_1, \ldots, a_n) = f_{lm}(a_1, \ldots, a_n) = t^{\mathbf{S}}(a_1, \ldots, a_n)$. Tehát f valóban kifejezésfüggvény. ezzel beláttuk, hogy $\mathbf{S}$ kielégíti a 2.0.10. Tétel 4. feltételét.

□

A lemma igaz jobbreguláris, de nem kommutatív esetben nem jobbnormális kötegekre is, ez hasonlóan bizonyítható.

2.2.10 Tétel: Legyen $\mathbf{S}$ olyan véges reguláris köteg, amire $\mathbf{S}/\mathcal{R}$ vagy kommutatív vagy nem balnormális. Ekkor $\mathbf{S}$ végesen relált.

BIZONYÍTÁS: Legyen $\mathbf{S}$ egy véges reguláris köteg. Ekkor a Green-féle $\mathcal{L}$ és $\mathcal{R}$ relációk kongruenciái $\mathbf{S}$-nek úgy, hogy $\mathbf{S}/\mathcal{L}$ jobbreguláris, $\mathbf{S}/\mathcal{R}$ balreguláris, továbbá $\mathbf{S}$ $\mathbf{S}/\mathcal{L}$ és $\mathbf{S}/\mathcal{R}$ szubdirekt szorzata.[16, V.1.3. Megjegyzés]

Az előző lemma bizonyításához hasonlóan itt is feltehetjük, hogy $|S/\mathcal{J}| > 1$, különben $\mathbf{S}$ derékszögű lenne és alkalmazhatnánk a 2.2.2. Állítást.

Legyen f egy olyan n-változós függvény S-en, ami megőrzi $\mathcal{L}$-t, $\mathcal{R}$-t és $\mathrm{Clo}_{\max(4,|S|+1)}(\mathbf{S})$-t. Azt állítjuk, hogy $f \in \mathrm{Clo}(\mathbf{S})$.

Mivel $\mathbf{S}/\mathcal{R}$ balreguláris, az előző 2.2.8. Lemma alapján létezik olyan s kifejezés, hogy minden $\underline{a} \in S^n$ esetén $(f(\underline{a}), s^{\mathbf{S}}(\underline{a})) \in \mathcal{R}$. Hasonlóan létezik t kifejezés úgy, hogy minden $\underline{a} \in S^n$ esetén $(f(\underline{a}), t^{\mathbf{S}}(\underline{a})) \in \mathcal{L}$. Tegyük fel, hogy f mindegyik koordinátájától függ. Mivel $S/\mathcal{J}$ egy nemtriviális félháló és f megőrzi $\mathrm{Clo}_{|S|+1}(\mathbf{S})$-et, a 2.0.15. Lemmából azt kapjuk, hogy az a leképezés, amit f modulo $\mathcal{J}$ határoz meg, szintén minden koordinátájától függ. $\mathcal{J}$ tartalmazza $\mathcal{L}$-t és $\mathcal{R}$-t. Így f modulo $\mathcal{L}$ és f modulo $\mathcal{R}$ is függ minden koordinátájától. Azaz s-ben és t-ben is szerepel az $x_1, \ldots, x_n$ változók mindegyike.

Legyen $\underline{a} \in S^n$. Mivel $\mathbf{S}/\mathcal{R}$ balreguláris, $(s^{\mathbf{S}}(\underline{a})t^{\mathbf{S}}(\underline{a}), s^{\mathbf{S}}(\underline{a}))$ és $(s^{\mathbf{S}}(\underline{a}), f(\underline{a})) \in \mathcal{R}$. Hasonlóan $(s^{\mathbf{S}}(\underline{a})t^{\mathbf{S}}(\underline{a}), t^{\mathbf{S}}(\underline{a}))$ és $(t^{\mathbf{S}}(\underline{a}), f(\underline{a})) \in \mathcal{L}$. Így $(s^{\mathbf{S}}(\underline{a})t^{\mathbf{S}}(\underline{a}), f(\underline{a})) \in \mathcal{R} \wedge \mathcal{L}$. Mivel $\mathcal{R} \wedge \mathcal{L}$ S diagonális relációja, $f = (st)^{\mathbf{S}}$.

□

Korábban már azt is bebizonyították, hogy véges félhálók és derékszögű kötegek relációs foka véges. A következő általános kérdésre azonban még nem ismert a válasz:

2.2.11 Probléma: Minden véges köteg végesen relált?

Irodalomjegyzék

[1] E. Aichinger, P. Mayr és R. McKenzie: *On the Number of Finite Algebraic Structures*, kézirat.

[2] K. A. Baker és A. F. Pixley: *Polynomial Interpolation and the Chinese Remainder Theorem for Algebraic Systems*, Math. Z., 143., 165–174., 1975.

[3] V. G. Bodnarčuk, L. A. Kalužnin, V. N. Kotov és B. A. Romov: *Galois Theory for Post Algebras I., II.*, Kibernetika (Kiev), 3., 1–10., 5., 1–9., 1969.

[4] S. Burris, H. P. Sankappanavar: *Bevezetés az univerzális algebrába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[5] D. M. Clark és B. A. Davey: *Natural Dualities for the Working Algebraist*, Cambridge University Press, 1998.

[6] B. A. Davey: *Dualisability in General and Endodualisability in Particular*, Logic and Algebra, Pontignano, 1994. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 180., Dekker, New York, 437–455., 1996.

[7] B. A. Davey, M. Jackson, J. G. Pitkethly, Cs. Szabó: *Finite Degree: Algebras in General and Semigroups in Particular*, Semigroup Forum, 83., 89–122., 2011.

[8] B. A. Davey és B. J. Knox: *From Rectangular Bands to k-primal Algebras*, Semigroup Forum, 64., 29–54., 2002.

[9] D. Geiger: *Closed Systems of Functions and Predicates*, Pacific J. Math., 27., 95–100., 1968.

[10] John M. Howie: *Fundamentals of Semigroup Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[11] S. V. Jablonskiĭ: *The Structure of the Upper Neighborhood for Predicately Describable Classes in P_k*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 218., 304–307., 1974 (orosz nyelven). Angol fordítás: Soviet Math. Dokl. 15., 1353–1356., 1974.

[12] Kátai-Urbán Kamilla, Szabó Csaba: *Free Spectrum of the Variety Generated by the Five Element Combinatorial Brandt Semigroup*, Semigroup Forum, 2006.

[13] Kátai-Urbán Kamilla, Szabó Csaba: *On the Free Spectrum of the Variety Generated by the Combinatorial Completely 0-Simple Semigroups*, Glasgow Math. J., 49., 93–98., 2007.

[14] Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, Typotex, Budapest, 2007.

[15] Peter Mayr: *On Finitely Related Semigroups*, kézirat.

[16] M. Petrich és N. R. Reilly: *Completely Regular Semigroups*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, 23., John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. A Wiley-Interscience Publication.

[17] E. L. Post: *The Two-valued Iterative Systems of Mathematical Logic*, Princeton University Press, 1941.

[18] I. G. Rosenberg, Á. Szendrei: *Degrees of Clones and Relations*, Houston J. Math., 9., 545–880., 1983.

[19] Steve Seif, Szabó Csaba: *Computational Complexity of Checking Identities in 0-Simple Semigroups and Matrix Semigroups over Finite Fields*, Semigroup Forum, 72., 207–222., 2006.

[20] A. N. Trahtman: *Graphs of Identities of a Completely 0-Simple 5-Element Semigroup*, kézirat, Ural State Technical Institute, 1981 (orosz nyelven). Angol fordítás: *Identities of a Five-element 0-Simple Semigroup*, Semigroup Forum, 48., 385–387., 1994.

[21] Vértesi Vera: *Azonosságok 0-egyszerű félcsoportokban*, szakdolgozat, 2005.

[22] R. Willard: *Essential Arities of Term Operations in Finite Algebras*, Discrete Math., 149., 239–259., 1996.