Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Ujházy Márton

matematikus szak

Görbület és konvexitás

Nempozitív görbületű metrikus terek

Integrált szakdolgozat

témavezető:
Moussong Gábor, egyetemi adjunktus
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Geometriai Tanszék

Budapest, 2012.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **4**

1. Metrika, konnexió, görbület **6**

1.1. Szemi-Riemann sokaságok . . . 6
1.2. Metrika és koordináta rendszer . . . 7
1.3. A Lorentz-vektortér . . . 7
1.4. Kovariáns deriválás . . . 8
1.5. Kovariáns deriválás beágyazott felületeken . . . 9
1.6. Görbület, szekcionális görbület . . . 10
1.7. Szemi-Riemann hiperfelületek . . . 11
1.8. Hiperfelületek $\mathbb{R}^{n+1}_s$-be ágyazva . . . 13
1.9. Nevezetes felületek . . . 14
1.10. A fénykúp . . . 17

2. Görbület és konvexitás sima felületeken **18**

2.1. Alapfogalmak . . . 18
2.2. Konvexitás és a Weingarten-operátor a Riemann esetben . . . 18
2.3. A szemi-Riemann eset . . . 20

3. Nem sima felületek görbülete **21**

3.1. Bevezetés . . . 21
3.2. Metrika a felületen . . . 22
3.3. Geodetikus metrikus terek . . . 28
3.4. A $CAT(0)$ tulajdonságú terek . . . 29
3.5. A $CAT(0)$ terek néhány tulajdonsága . . . 33

4. Konvex, térszerű felületek közelítése sima felületekkel **35**

4.1. A konvolúció . . . 35
4.2. Konvexitás és térszerűség . . . 36
4.3. A közelítő felületeken vett távolság . . . 37
4.4. Görbület és konvexitás . . . 42

5. Konvexitási feladatok a középiskolában **45**

5.1. Konvex sokszögek analitikus leírása . . . 45
5.2. Konvex szögek, háromszögelések, sokszögfelbontások . . . 49
5.3. Alakzatok felbontása, és konvexitás . . . 56
5.4. Helly tétele . . . 59
5.4.1. Intervallumrendszerek . . . 59
5.4.2. Előkészítő feladatok . . . 61
5.4.3. Helly tétele a síkon . . . 64

5.4.4. Korábbi feladatok általánosításai a tétel segítségével 67
5.5. Konvex halmazok a gömbön 68
5.5.1. A síkbeli Helly-tétel néhány további alkalmazása 70
5.6. Néhány kombinatorikus geometriai feladat 72
5.7. A képtárprobléma 74

Irodalomjegyzék **78**

Bevezetés

Differenciálgeometriai tanulmányaink folyamán először az $\mathbb{E}^{n+1}$ euklideszi térbe ágyazott n-dimenziós Riemann-sokaságokkal találkozunk. Megismerkedünk ezek jellemzőivel, tulajdonságaival, vizsgáljuk e sokaságok görbületeit. Vizsgálataink során találkozhatunk azzal a (szemléletünk alapján egyáltalán nem meglepő) tétellel, hogy ha egy $M \subset \mathbb{E}^{n+1}$ n-dimenziós Riemann-sokaság konvex, akkor szekcionális görbületei tetszőleges pontjában nemnegatívak. A szakdolgozat célja e tétel általánosítási lehetőségének vizsgálata különböző típusú felületcsaládokon.

Áttekintjük, mi történik, ha a Riemann-sokaság az $\mathbb{R}^{n+1}_1$ térbe, az ún. Lorentz-vektortérbe ágyazott (ezt a teret úgy nyerjük, hogy az $\mathbb{R}^{n+1}$ vektorteret az egyik koordinátairányban negatív definit, a többiben pozitív definit skalárszorzattal látjuk el). Megvizsgáljuk, mit mondhatunk akkor, ha a befoglaló térből származó skaláris szorzat az M sokaság érintőterein nem pozitív definit, azaz maga az M nem Riemann-sokaság. Végül kiterjesztjük az eredményt metrikus terek egy olyan osztályára, melyen görbületfogalom bevezethető.

Az első fejezetben a Riemann-sokaságok fogalmának egy általánosítási lehetőségével foglalkozunk. Olyan sokaságokat vizsgálunk, melynek érintőnyalábján olyan $(0,2)$ típusú sima tenzormező adott, mely nem feltétlenül pozitív definit. Mindössze annyit követelünk meg a tenzormezőről, hogy semelyik pontjában ne legyen elfajuló, és a „negatív irányok száma" a sokaság minden érintőterében megegyezzen. Az ilyen sokaságokat nevezzük szemi-Riemann sokaságoknak.

Megmutatjuk, hogy Riemann-geometriából ismert fogalmaink (konnexió, görbületi tenzor, második alapforma, szekcionális görbület) különösebb változtatás nélkül átvihetők a szemi-Riemann esetre is. Konkrét példákat látunk nevezetes szemi-Riemann sokaságokra, megvizsgáljuk ezek topológiai és görbületi tulajdonságait. E fejezetnek nem célja a benne kimondott tételek igazolása, ezek legtöbbje a Riemann eset mintájára egy az egyben elvégezhető. Részletes kifejtése a témának megtalálható a [3] könyvben.

A második fejezetben megvizsgáljuk, hogy egy Riemann-sokaság konvexitása milyen görbületi tulajdonságokat von maga után. Belátjuk a közismert állítást: ha egy $\mathbb{E}^{n+1}$ euklideszi térbe ágyazott n-dimenziós Riemann-sokaság adott p pontjában konvex, akkor p-ben az összes szekcionális görbület nemnegatív.

Megmutatjuk hogy az előző állításban a befoglaló $\mathbb{R}^{n+1}$ vektortéren vett metrikának fontos szerepe volt. Igazoljuk ugyanis, hogy ha egy M konvex Riemann-sokaság $\mathbb{R}^{n+1}_1$-be ágyazott, akkor szekcionális görbületei minden pontjában nempozitívak. Fejezetünk végén belátjuk, hogy az állítás kis módosításokkal szemi-Riemann felületeken is igaz.

A harmadik részben további általánosítást készítünk elő. Olyan $\mathbb{R}^{n+1}_1$-be ágyazott n-dimenziós összefüggő topologikus sokaságokat vizsgálunk, melyek nem feltétlenül simák. A vizsgálandó sokaságokra két további feltételt teszünk. Egyrészt legyenek térszerűek, azaz bármely támaszhipersíkjuk térszerű legyen. Másrészt legyenek konvexek, azaz legyenek összefüggőek, és a felület elhagyása a befoglaló teret két összefüggőségi komponensre

bontsa, amelyek közül az egyik konvex.

Megmutajuk, hogy az ilyen felületeken metrikát vezethetünk be görbeívhosszak infimuma segítségével. Belátjuk azt is, hogy a definiált metrika ugyanazt a topológiát generálja, mint a befoglaló térből származó altértopológia.

Ugyanebben a fejezetben bevezetjük metrikus tereknek egy olyan osztályát, az úgynevezett geodetikus metrikus terekét, amelyekre a (Riemann-sokaságokon ismert) görbületfogalom görbületi egyenlőtlenségek segítségével kiterjeszthető.

Egy metrikus teret geodetikusnak nevezünk, ha két tetszőleges pontja, p és q közt $d(p,q)$ hosszúságú görbe húzható (a görbe ívhosszát mint közelítő töröttvonalak limeszét értelmezzük). Definiáljuk egy geodetikus metrikus tér $CAT(0)$ görbületi tulajdonságát. Ha ez a tulajdonság a téren csak lokálisan áll fenn, akkor a teret ≤ 0 Alekszandrov-görbületűnek nevezzük.

Megvizsgáljuk a $CAT(0)$ tulajdonság néhány lényeges következményét, majd kimondjuk azt a tételt, amely a hagyományos és az új görbületfogalmunk egyezését mutatja. E tétel szerint egy M Riemann-sokaság pontosan akkor ≤ 0 Alekszandrov-görbületű, ha tetszőleges $p \in M$-beli szekcionális görbületei nempozitívak. Belátjuk, hogy tetszőleges konvex térszerű $\mathbb{R}_1^{n+1}$-beli hiperfelület geodetikus metrikus tér, tehát beszélhetünk az Alekszandrov-görbületéről.

A negyedik fejezetben kiterjesztjük a görbület és a konvexitás kapcsolatáról szóló tételünket nem sima felületek esetére. Első lépésként a konvex térszerű hiperfelületeket sima (konvex, térszerű) hiperfelületek sorozatával közelítjük, a közelítő felületeket konvolúció alkalmazásával állítjuk elő. Belátjuk, hogy a közelítő felületek metrikája a limeszfelület metrikájához konvergál. Ennek segítségével bizonyítjuk a szakdolgozat legfontosabb eredményét:

Tetszőleges $\mathbb{R}_1^{n+1}$-beli konvex térszerű hiperfelület $CAT(0)$ tulajdonságú.

Az ötödik fejezet középiskolában alkalmazható, konvexitással kapcsolatos feladatokat tartalmaz.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani témavezetőmnek, Moussong Gábornak a témajavaslatért, azért, hogy segítségére mindig számíthattam. Nagy hálával tartozom neki észrevételeiért, a bizonyításokban nyújtott útmutatásaiért, amely nélkül e munkát nem tudtam volna elkészíteni.

Hálás lehetek továbbá nagyon sok barátomnak, kollégámnak, korábbi tanáromnak, és nem utolsó sorban a családomnak, akik mind hozzájárultak valamivel (közvetve vagy közvetlenül) e dolgozat megírásához.

1. Metrika, konnexió, görbület

1.1. Szemi-Riemann sokaságok

Legyen M egy sima sokaság, p pontbeli érintőterőt jelölje T_pM. Riemann-sokaságnak nevezünk egy sokaságot, ha minden $p \in M$-re létezik T_pM-en egy olyan pozitív definit skaláris szorzat $\langle\ ,\ \rangle$, amely simán függ p-től.

Másképp megfogalmazva, egy Riemann-sokaság olyan sima sokaság, melyen adott egy $(0,2)$ típusú pozitív definit tenzormező. Első célunk megvizsgálni, hogy hogyan változnak közismert differenciálgeometriai fogalmaink (kovariáns deriválás, szekcionális görbület, Weingarten leképzés), ha az érintőtereken értelmezett skalárszorzat nem pozitív definit.

Tekintsük át először a bilineáris függvényről ismert elnevezéseket.

Egy V vektortéren adott egy b szimmetrikus bilineáris függvény. Ez a függvény

- pozitív (negatív) definit, ha $\forall b \neq 0$ esetén $b(v;v) > 0 \quad (< 0)$.
- pozitív (negatív) szemidefinit, ha $\forall b \neq 0$ esetén $b(v;v) \geq 0 \quad (\leq 0)$.
- nemelfajuló, ha rögzített v esetén $b(v;w) = 0 \quad \forall w$-re, akkor $v = 0$.

1.1. Definíció. *Legyen adott egy V vektortéren egy b szimmetrikus bilineáris függvény. Legyen n azon k természetes számok maximuma, melyekhez létezik olyan $W \subset V$ k dimenziós altér, amelyen $b|W$ negatív definit. Ezt az értéket a b indexének nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy ha b indexe 0, akkor b pozitív szemidefinit. Ha b indexe $dim(V)$, akkor b negatív definit.

1.2. Definíció. *Szemi-Riemann sokaságnak nevezünk egy M sima sokaságot, ha TM-en adott egy olyan nemelfajuló g $(0,2)$ típusú tenzormező, melynek indexe konstans.*

Megjegyzés: Világos, hogy ha g indexe 0, akkor (M,g) egy Riemann-sokaság.

Külön elnevezést fogunk használni annak megkülönböztetésére, hogy egy érintővektor önmagával vett skaláris szorzatának mi az előjele.

1.3. Definíció. *Egy $0 \neq v \in T_pM$ érintővektor*

- *térszerű, ha $g(v,v) > 0$*
- *fényszerű, ha $g(v,v) = 0$*
- *időszerű, ha $g(v,v) < 0$*

Egy adott pont érintőterében a fényszerű vektorok halmazát fénykúpnak nevezzük, és a továbbiakban Λ-val jelöljük .

1.2. Metrika és koordináta rendszer

Legyen M egy n dimenziós sokaság, melynek $\mathcal{U} \subset M$ egy koordinátakörnyezete. Legyenek az $x^1, \dots x^n$ függvények a koordinátaleképzések, és jelölje a belőlük származó érintővektormezőket $\partial_1 \dots \partial_n$. Vizsgáljuk meg, hogy írható fel g az $\mathcal{U}$ koordniátakörnyezetben.

Ha $V = \sum v^i \partial_i$ és $W = \sum w^i \partial_i$ TM-beli vektormezők és $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ $(1 \leq i, j \leq n)$, akkor

$$g(V, W) = \sum g_{ij} v^i w^j \qquad \text{azaz} \quad g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Világos, hogy g szimmetrikus volta miatt $g_{ij} = g_{ji}$.

Példa: Tekintsünk $\mathbb{R}^n$-re mint sokaságra, melynek térképe az identitás. Ekkor minden $p \in \mathbb{R}^n$- re létezik egy kanonikus izomorfizmus $\mathbb{R}^n$ és $T_p\mathbb{R}^n$ közt, mely egy $V(v^1 \dots v^n)$ vektort a $V_p = \sum v^i \partial_i$ érintőtérbeli vektorba visz. Ha $\mathbb{R}^n$-t a szokásos pozitív definit skaláris szorzattal látjuk el, Riemann-sokaságot kapunk. Lássuk most el $\mathbb{R}^n$-t a következő skaláris szorzással:

$$g(v, W) = \langle V, W \rangle = -\sum_{i=1}^{s} v^i w^i + \sum_{i=s+1}^{n} v^j w^j$$

Az így nyert sokaság szemi-Riemann sokaság lesz, melynek indexe s. Ezt a sokaságot nevezzük *szemi-Euklideszi térnek*, a továbbiakban $\mathbb{R}^n_s$ -sel jelöljük.

A szemi-Euklideszi téren a metrika igen egyszerű alakot ölt. Legyen

$$\varepsilon_i := \begin{cases} -1 & \text{ha } 1 \leq i \leq s \\ 1 & \text{ha } s+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Tehát igaz a következő összefüggés:

$$g = \sum \varepsilon_i dx^i \otimes dx^j$$

1.3. A Lorentz-vektortér

Kiemelkedően fontos az olyan szemi-Riemann sokaságok szerepe, melyek tenzor-metrikája 1 indexű, ezek az ún. Lorentz-sokaságok. Érintőterei tehát olyan vektorterek, melyeken a skaláris szorzat 1 indexű. Az ilyen vektortereket Lorentz-vektortereknek hívjuk, ezek képezik fejezetünk témáját.

Legyen tehát $(V; g)$ egy Lorentz-vektortér, W pedig V altere. Első célunk a vektorokra bevezetett osztályzást kiterjeszteni alterekre. Nevezzük a továbbiakban W-t:

- térszerűnek, ha $g|W$ pozitív definit.
- időszerűnek, ha $g|W$ 1 indexű nem degenerált.
- fényszerűnek, ha $g|W$ degenerált.

Az elnevezés jogosságát az adja, hogy ha egy vektor térszerű, akkor az általa generált egy dimenziós altér is térszerű, stb. Észrevehetjük azt is, hogy egy Lorentz-vektortérbeli időszerű vektor direkt kiegészítő altere mindig térszerű. Sőt, ez általánosabban is igaz, egy W időszerű altér direkt kiegészítője mindig térszerű. Ennek értelmében kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk a térszerű és időszerű alterek közt.

Az időszerű alterek a következőképp jellemezhetők:

1.4. Állítás. *Legyen W egy ≥ 2 dimenziós altér egy Lorentz-vektortérben. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. *W időszerű.*
2. *W tartalmaz két lineárisan független fényszerű vektort.*
3. *W tartalmaz időszerű vektort.*

Bizonyítás:

1. $\Rightarrow$ 2. Ha W időszerű, akkor $e_1, \ldots, e_n$ ortonormált bázisa pontosan 1 időszerű vektort tartalmaz, legyen ez e_1. Ekkor $e_1 + e_2$ és $e_1 - e_2$ két független fényszerű vektor.

2. $\Rightarrow$ 3. Ha u és v lineárisan független fényszerű vektorok, akkor skaláris szorzatuk nem lehet nulla, ellenkező esetben W tartalmazna két dimenziós elfajuló alteret. $g(u+v, u+v) = 2g(u, v)$, $g(u-v, u-v) = -2g(u, v)$, tehát $u+v$ illetve $u-v$ közül tehát valamelyik biztosan fényszerű.

3. $\Rightarrow$ 1. Legyen v egy időszerű vektor. Ekkor v direkt kiegészítőjén a skaláris szorzat pozitív definit. Tehát W valóban 1 indexű. ■

Hasonló feltétel W fényszerűségére is megfogalmazható.

1.4. Kovariáns deriválás

A kovariáns deriválás nagyon hasonlóan működik szemi-Riemann tereken, mint Riemann-sokaságokon, a definíció egy az egyben átvehető. Érvénybe marad a következő alapvető tétel:

1.5. Tétel. *Egy M szemi-Riemann sokaságon egyértelműen létezik ∇ konnexió, mely teljesíti az alábbi két tulajdonságot:*

1. $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$
2. $X\langle V, W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$,

ahol $V, W, X \in TM$ tetszőleges vektormezők. E konnexió neve az M sokasághoz tartozó Levi-Civita konnexió.

A tétel a Riemann eset mintájára bizonyítható.

1.6. Definíció. *Legyen az $\mathbb{R}^n_s$ tér természetes koordinátarendszere $u^1, \dots, u^n$, valamint $V = \sum v^i \partial_i$ és $W = \sum w^i \partial_i$ legyen két vektormező az $\mathbb{R}^n_s$ sokaságon. Ekkor a*

$$\nabla_V W = \sum V(W^i)\partial_i$$

képlettel nyert konnexió neve temészetes konnexió.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy az így nyert tenzor valóban konnexió, ellenőrizni kell a konnexió-tulajdonságokat, ez egyszerűen megtehető.

1.7. Állítás. *Az $\mathbb{R}^n_s$ tér, mint sokaság Levi-Civita konnexiója éppen a természetes konnexió.*

Bizonyítás: Mivel az 1.5. tétel szerint a Levi-Civita konnexió egyértelmű, ezért elég ellenőrizni, hogy az ott szereplő két tulajdonság teljesül-e a természetes konnexióra:

1) $\nabla_V W - \nabla_W V = \sum V(W^i)\partial_i - \sum W(V^i)\partial_i = \sum (V(W^i) - W(V^i))\partial_i = [V, W]$

2) $X\langle V, W\rangle = X(\sum \varepsilon_i V^i W^i) = \sum \varepsilon_i X(V^i) W^i + \sum \varepsilon_i V^i X(W^i) = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$

Tehát az állítás igaz. ■

Fejezetünk végén megemlítjük, hogy a Γ^k_{ij} Christoffel-szimbólumok szintén változtatás nélkül bevezethetők, és fennáll rájuk a

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}$$

egyenlőség. Ebből közvetlenül következik, hogy $\mathbb{R}^n_s$ -en mint sokaságon az összes Christoffel-szimbólum 0.

1.5. Kovariáns deriválás beágyazott felületeken

Legyen $\widetilde{M}$ egy szemi-Riemann sokaság, melynek M részsokasága. Jelölje $\widetilde{M}$ Levi-Civita konnexióját $\widetilde{\nabla}$. A kovariáns deriválás lehetőséget adott arra, hogy egy adott TM-beli vektormezőt egy másik TM-beli vektormező szerint deriválni tudjuk. Ezzel mérhettük egy érintővektormező elmozdulását egy adott irányban.

Ha azonban beágyazott felületet tekintünk, akkor nem csak érintővektormezők elmozdulását akarjuk megfigyelni, tetszőleges $\widetilde{M}$-beli vektormezőt szeretnénk deriválni M-beli vektormező szerint a részsokaság pontjaiban. Tehát szeretnénk egy olyan $TM \times T\widetilde{M} \to T\widetilde{M}$ függvényt gyártani, amely hasonlóan viselkedik, mint egy konnexió. Ezt a következőképpen tehetjük meg:

Legyen $p \in M$, $V \in TM$, valamint $W \in T\widetilde{M}$. Vegyük p-nek egy $\widetilde{M}$-beli $\mathcal{U}$ koordinátakörnyezetét, $\mathcal{U}$-ra V simán kiterjeszthető. A kiterjesztett $\widetilde{V}$ vektormező szerint már tudjuk W-t kovariánsan deriválni:

$$\widetilde{\nabla}_V W := \widetilde{\nabla}_{\widetilde{V}} W|_{\mathcal{U} \cap M}$$

Temészetesen kérdéses, hogy a fenti képlet független-e a kiterjesztéstől, illetve a koordinátakörnyezettől.

1.8. Állítás. *A $\widetilde{\nabla}_V W$ vektormező jóldefiniált, és érvényben maradnak rá a Levi-Civita konnexió tulajdonságai.*

A $\widetilde{\nabla}_V W$ vektormező persze nem feltétlenül lesz M érintővektormezője, ezért két komponensre bontható:

$$\widetilde{\nabla}_V W = \tan \widetilde{\nabla}_V W + \widetilde{\nabla}_V W^{\perp},$$

ahol $\tan \widetilde{\nabla}_V W \in T_p M$, valamint $\widetilde{\nabla}_V W^{\perp} \in T_p M^{\perp}$

Ezen a ponton meg kell állnunk egy megjegyzés erejéig. Megszokhattuk ugyanis, hogy pozitív definit skalárszorzat esetén a fenti felbontás mindig működik. Szemidefinit esetben azonban vannak olyan vektorok, amelyek merőlegesek önmagukra. Ezek benne vannak saját $n-1$ dimenziós kiegészítő alterükben, azaz a két altér direkt összege nem adja ki a teljes teret. Hogy $\widetilde{\nabla}_V W$ fenti felbontása mégis mindig megtehető, az alábbi lineáris algebrai lemma biztosítja:

1.9. Lemma. *Legyen V vektortér egy nemelfajuló skaláris szorzattal. Ekkor egy $W \subset V$ altér pontosan akkor nemelfajuló, ha $V = W \oplus W^{\perp}$.*

Mivel a szemi-Riemann sokaságokat úgy definiáltuk, hogy érintőterükön a skaláris szorzás nemelfajuló, ezért alkalmazhatjuk a lemmát. Ezzel megindokoltuk a fenti felbontás jogosságát.

Térjünk vissza a felbontáshoz, illetve az abban szereplő tagokhoz. Az érintő irányú komponens nem hordoz új információt a felületről, belátható, hogy ha $W \in TM$ akkor $\tan \widetilde{\nabla}_V W = \nabla_V W$, ahol ∇ M Levi-Civita konnexióját jelöli. Később látni fogjuk, hogy a merőleges irányú annál inkább, ezért erre külön elnevezést használunk:

1.10. Definíció. *A $II(V,W) = \widetilde{\nabla}_V W^{\perp}$ formulával definiált $TM \otimes TM \to TM^{\perp}$ függvényt második alapformának nevezzük.*

Könnyen látható, hogy a második alapforma bilineáris a függvények fölött és szimmetrikus.

1.6. Görbület, szekcionális görbület

Egy fejezettel ezelőtt láttuk, hogy a Levi-Civita konnexió definiálható szemi-Riemann esetben is, semmi akadálya tehát a görbületet szokásos módon definiálni, mely csak ezeket a fogalmakat használta.

1.11. Definíció. *Egy M szemi-Riemann sokaság Riemann-görbülete az*

$$R : T^3 M \to TM \quad R_{XY} Z = \nabla_{[X,Y]} Z - [\nabla_X Z, \nabla_Y Z]$$

képlettel nyert (1,3) típusú tenzormező, ahol ∇ az M-hez tartozó Levi-Civita konnexió.

Érvényben maradnak a Riemann esetből ismert azonosságok (X, Y, Z, W vektormezők):

1. $R_{XY}Z = -R_{YX}Z$
2. $\langle R_{XY}Z, V\rangle = -\langle R_{XY}V, Z\rangle$
3. $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$
4. $\langle R_{XY}Z, V\rangle = \langle R_{ZV}X, Y\rangle$

A szekcionális görbület definíciója is változatlan: ha Π T_pM 2 dimenziós altere (érintősíkja), továbbá u, v Π egy bázisa, akkor

$$K(\Pi) := \frac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

Belátható, hogy $K(\Pi)$ független Π bázisának választásától. Igaz továbbá, hogy ha egy adott $p \in M$ pontban $K(\Pi) = 0 \quad \forall\, \Pi$ érintősíkra, akkor $R = 0$ p-ben.

A második alapforma segít minket beágyazott felületek görbületének és szekcionális görbületének kiszámításában. A következő tételben leírt azonosságot nevezzük Gauss egyenletnek:

1.12. Tétel. *Legyen M az $\widetilde{M}$ szemi-Riemann sokaság részsokasága, Riemann-görbületeik R és $\widetilde{R}$, M második alapformája pedig II. Ekkor tetszőleges V, W, X, Y TM-beli vektormezők esetén igaz az alábbi egyenlőség:*

$$\langle R_{VW}X, Y\rangle = \langle \widetilde{R}_{VW}X, Y\rangle + \langle II(V, X), II(W, Y)\rangle - \langle II(V, Y), II(W, X)\rangle.$$

Ez átfogalmazható a szekcionális görbületekre is:

1.13. Következmény. *Legyen $\Pi \subset T_pM$ két dimenziós altér, bázisa v, w, jelölje K az M-beli, $\widetilde{K}$ a $\widetilde{M}$-beli szekcionális görbület. Ekkor igaz a következő:*

$$K(v, w) = \widetilde{K}(v, w) + \frac{\langle II(v, v), II(w, w)\rangle - \langle II(v, w), II(v, w)\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}.$$

Fontos látnunk, hogy sem a Levi-Civita konnexió, sem pedig a Riemann-görbület nem függ a beágyazástól. Ez azt jelenti, hogy a szekcionális görbületek is függetlenek a beágyazástól, izometria-invariánsak. Ez a következmény éppen Gauss híres tétele, a Theorema Egregium.

1.7. Szemi-Riemann hiperfelületek

Ha adott egy $\widetilde{M}$ szemi-Riemann sokaság, részsokaságai közt kiemelten fontos szerepet játszanak az 1 kodimenziójúak. Ezeket nevezzük szemi-Riemann hiperfelületeknek. Az 1 kodimenzió azt is jelenti, hogy T_pM direkt kiegészítője 1 dimenziós altér. Ez az 1 dimenzió fontos információt hordoz a hiperfelületen lévő skaláris szorzat indexéről, ez indokolja a következő elnevezést:

1.14. Definíció. *Egy szemi-Riemann hiperfelület ε normál-előjele*

- $+1$, *ha* $\langle z, z\rangle > 0$ *minden* z *normálvektorra.*
- -1, *ha* $\langle z, z\rangle < 0$ *minden* z *normálvektorra.*

Meg kell gondolnunk, hogy a z normálvektor önmagával vett skaláris szorzata lehet-e 0. T_pM- ről tudjuk, hogy rajta a skaláris szorzat nem elfajuló, tehát az 1.9. lemma miatt $T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$. A lemma újból alkalmazásával nyerjük, hogy $T_pM^{\perp}$ sem elfajuló. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges normálvektor önmagával vett skaláris szorzata nem lehet 0.

Világos az is, hogy ha a felület egy p pontbeli normálvektorára $\langle z, z\rangle > 0$, akkor ez igaz bármely p-beli normálvektorra. Sőt, tetszőleges pontbeli normálvektorra is, hisz az M-en lévő metrika mindenütt ugyanolyan indexű. Tehát a normál-előjel a felületre jellemző állandó.

Hiperfelületek esetén nem csak az érintőtérre merőleges vektorok vizsgálata lesz könnyebb, hanem az eddig tanult fogalmak is jobban kezelhetővé válnak. Ehhez szükségünk van a következő definícióra:

1.15. Definíció. *Legyen az $M \subset \widetilde{M}$ szemi-Riemann hiperfelület egy pontja p, U normális egységvektormező M-en. Ekkor az $S_p(v) = -\widetilde{\nabla}_v U$ összefüggéssel definiált $T_pM \to T_p\widetilde{M}$ leképzést $M \subset \widetilde{M}$ hiperfelület U-hoz tartozó Weingarten operátorának nevezzük.*

Megjegyzés: Ha adott egy V vektormező, akkor az előző kovariáns deriválás minden pontban elvégezhető, így tenzormezőt kapunk. Ezt is szokás Weingarten-operátornak nevezni, ebben az esetben az $S(V)$ jelölést használjuk.

A következő állítás mutatja a Weingarten-leképzés hasznosságát, valamint azt, hogy az operátor valójában M érintőterébe képez.

1.16. Állítás. *Tetszőleges $V, W \in TM$ esetén igazak az alábbiak:*

1. $S_p(V) \in T_pM$ *és* S *önadjungált.*
2. $\langle S(V), W\rangle = \langle II(V, W), U\rangle$

Bizonyítás: Az $\langle U, U\rangle = 1$ összefüggést deriválva kapjuk, hogy $2\langle\widetilde{\nabla}_V U, U\rangle = 0$, azaz $\widetilde{\nabla}_V U$ érintő.

$\langle S(V), W\rangle = -\langle\widetilde{\nabla}_V U, W\rangle = \langle\widetilde{\nabla}_V W, U\rangle = \langle II(V, W), U\rangle$, ezzel a második állítást is igazoltuk. 2)-ből, és II szimmetriájából következik, hogy S önadjungált. ■

A 2. egyenlőségből következik, hogy $II(v, w) = \varepsilon\langle Sv, w\rangle U$. Ez azt jelenti, hogy ha a sokaságon rögzítünk egy normális vektormezőt, akkor a második alapforma adott vektorpárra egy számmal, $\langle Sv, w\rangle$-tal jellemezhető, azaz a második alapforma egy (2,0) típusú tenzormezőnek tekinthető. Ezt a tenzormezőt hagyományosan B-vel szokás jelölni.

A 2.-es egyenlőtlenség felhasználásával a Gauss-egyenlet a következőképpen írható:

$$K(v,w) = \widetilde{K}(v,w) + \varepsilon \frac{\langle Sv, v\rangle\langle Sw, w\rangle - \langle Sv, w\rangle^2}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}. \tag{1}$$

1.8. Hiperfelületek $\mathbb{R}^{n+1}_s$-be ágyazva

Ebben a fejezetben áttekintjük, hogy hogyan alakulnak az előző fejezetben kapott eredmények, ha a befoglaló tér $\mathbb{R}^{n+1}_s$. Adott tehát egy n-dimenziós szemi-Riemann hiperfelület $\mathbb{R}^{n+1}_s$-ben, jelölje a továbbiakban a koordinátázó leképezéseket u ($\mathbb{R}^n \to M$ függvény).

Először a második alapforma B mátrixát vizsgáljuk. Adott pontban az érintőteret a $\partial_1 u \dots \partial_n u$ vektorok generálják, tehát a B mátrixhoz a $\nabla_{\partial_i}\partial_j$ deriváltakat kell meghatározni. A szemi-Euklideszi tér Levi-Civita konnexióját már tárgyaltuk korábban. Ebből tudjuk, hogy a kívánt kovariáns deriválások éppen másodrendű parciális deriválást jelentenek. Ebből kapjuk az alábbi összefüggést:

1.17. Állítás. *Adott pontban a második alapforma U normális egységvektormezőhez tartozó B mátrixát a*

$$b_{ij} = \langle \partial_i \partial_j u, U\rangle \tag{2}$$

formula írja le, ahol u a térképező leképzés.

*Megjegyzés:*A normális egységvektormezőre lokálisan két választás lehetséges. Ezek közül azt szokás választani, amellyel a $\partial_1 u, \dots, \partial_n u, U$ bázis a tér egy természetes orientációját adja.

Nézzük most a Weingarten-leképezést. $S_p(v)$-t a $-\widetilde{\nabla}_v U$ képlettel definiáltuk, azaz normális vektormezőt deriváltunk v irányban. Ezt így is megtehetjük: veszünk egy $\alpha : I \to M$ paraméteres görbét, melyre teljesül, hogy $\alpha(t_0) = p, \quad \alpha'(t_0) = v$. Ebben az esetben a kovariáns deriválás nem más, mint egy görbe menti deriválás:

$$S_p(v) = -\widetilde{\nabla}_v U = -(U \circ \alpha)'(t_0).$$

Ebből a megközelitésből kapjuk az alábbi fontos állítást a Weingarten-operátorra:

1.18. Állítás. *Ha $\alpha : I \to M$ egy paraméteres görbe, melyre teljesül, hogy $\alpha(t_0) = p, \quad \dot{\alpha}(t_0) = v$, akkor*

$$\langle \ddot{\alpha}(t_0), U_p\rangle = \langle S_p(v), v\rangle = II(v,v).$$

Bizonyítás: Az előző megállapítás szerint $-\big\langle S_p(v), v\big\rangle = \big\langle (U\circ\alpha)'(t_0), \dot{\alpha}(t_0)\big\rangle$. A Leibniz szabály használatával a következőt kapjuk:

$$-\big\langle S_p(v), v\big\rangle = \big\langle (U\circ\alpha)'(t_0), \dot{\alpha}(t_0)\big\rangle =$$

$$= \big\langle (U\circ\alpha), \dot{\alpha}(t)\big\rangle'(t_0) - \big\langle U\circ\alpha(t_0), \ddot{\alpha}(t_0)\big\rangle = -\big\langle \ddot{\alpha}(t_0), U_p\big\rangle,$$

Az utolsó egyenlőségben azt használtuk fel, hogy $U\circ\alpha$ és $\alpha'(t)$ merőlegesek a görbe mentén (az egyik érintő, a másik normálvektor), azaz skalárszorzatuk 0. Ezzel az állítást beláttuk. ■

Nézzük meg, hogyan alakul a Gauss egyenlet az $\mathbb{R}^{n+1}_s$-be ágyazott esetben! Az 1. egyenletből a $\widetilde{K}(v,w)$ tag kiesik, így ebben az esetben a görbület B mátrixából és a metrikából számolhatjuk.

Tovább egyszerűsödik a helyzet, ha a befoglaló tér $\mathbb{R}^3$ (azaz a szekcionális görbület a szorzatgörbület maga), hiszen a számláló éppen $det(B)$, a nevező pedig $det(G)$, ahol G a metrika mátrixa, formulával

$$K = \frac{detB}{detG}.$$

1.9. Nevezetes felületek

Sok olyan n-dimenziós Riemann-sokasággal találkozhatunk, melyet egy $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ függvény értékeinek ősképeként nyerünk. Például az $f(x) = x_1^2 + \dots x_{n+1}^2$ függvény r^2-hez tartozó ősképeként épp az r sugarú n-dimenziós gömböt kapjuk. Ebben a fejezetben azt szeretnénk megvizsgálni, hogy milyen szemi-Riemann felületeket kaphatunk függvényértékek ősképeiként, ha a befoglaló terünk $\mathbb{R}^{n+1}_s$. Hogy valóban hiperfelületekről lesz szó, a következő tétel biztosítja:

1.19. Tétel. *Legyen egy $f : \mathbb{R}^{n+1}_s \to \mathbb{R}$ sima függvény tetszőleges értéke c. Ekkor $M = f^{-1}(c)$ pontosan akkor szemi-Riemann sokaság, ha M minden pontjában $\langle grad(f), grad(f)\rangle > 0$ vagy $\langle grad(f), grad(f)\rangle < 0$. Ekkor M normálelőjele épp $\langle grad(f), grad(f)\rangle$ előjele és az $U = grad(f)/|grad(f)|$ képlettel definiált vektormező M normális egységvektormezője.*

Megjegyzések:

1. A tételben $grad(f) \neq 0$ feltétel már elegendő ahhoz, hogy sima hiperfelületet kapjunk.

2. Ha M összefüggő, akkor a $\langle grad(f), grad(f)\rangle > 0$ feltétel helyett értelemszerűen elegendő a $\langle grad(f), grad(f)\rangle \neq 0$ feltétel.

A következőkben $\mathbb{R}^{n+1}_s$ néhány hiperfelületét szeretnénk vizsgálni. A gömbhöz hasonlóan induljunk ki most is a befoglaló tér metrikájából. Legyen tetszőleges $u \in \mathbb{R}^{n+1}_s$ esetén

$$f(u) = \langle u; u\rangle = \sum \varepsilon_i (u^i)^2$$

Ellenőrizzük le, hogy erre a függvényre teljesülnek-e a tétel feltételei!

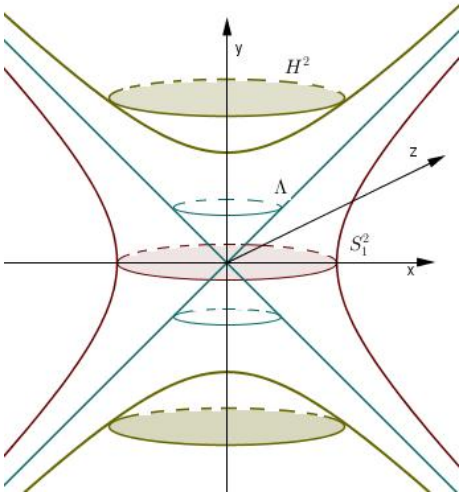
$grad(f)(u) = (\varepsilon_1 2u^1, \dots, \varepsilon_{n+1} 2u^{n+1})$, ami azt jelenti, hogy

$$\langle grad(f), grad(f)\rangle = \sum (\varepsilon_i)^2 4(u^i)^2.$$

Azaz, ha $x \neq 0$, akkor a $f^{-1}(x)$ tulajdonságú $\mathbb{R}^{n+1}_s$-beli pontok valóban szemi-Riemann felületet alkotnak.

1.20. Definíció. *Legyen $n \geq 2$ egész szám, f pedig legyen az előbb definiált függvény. Ekkor az $S^n_s(r) = f^{-1}(r^2)$ képlettel definiált hiperfelületet r sugarú pszeudoszférának vagy de-Sitter gömbnek nevezzük.*

1.21. Definíció. *Legyen $n \geq 2$ egész szám, f pedig legyen az előbb definiált függvény. Ekkor az $H^n_{s-1}(r) = f^{-1}(-r^2)$ képlettel definiált hiperfelületet r sugarú pszeudohiperboloidnak nevezzük.*



1. ábra. A két dimenziós pszeudoszféra és pszeudohiperboloid

Megjegyzések:

1. A most definiált felületcsaládokba beletartoznak jól ismert Riemann-sokaságok, hiszen $S^n = S^n_0$ épp az n dimenziós gömb, $H^n = H^n_0$ pedig a hiperbolikus tér.

2. Könnyen látható, hogy az indexelés információt ad a metrikáról, azaz S^n_s, illetve H^n_s indexe éppen s.

A 1.19. tétel segítségével egyben megkapjuk a felületek egy normális egységvektormezőjét is. Ha P a helyvektormező, akkor az előbbi számolás szerint $grad(f) = 2P$, azaz az $U = P/r$ vektormező normális egységvektormező. Szintén ebből a tételből következik, hogy a pszeudoszféra normál-előjele $+1$, a pszeudo-hiperboloidé pedig -1.

Vizsgáljuk meg, mekkora ezeknek a felületeknek a görbülete! Ehhez a Gauss-egyenlet szerint a Weingarten-operátort kellene kiszámolnunk.

Legyen $V \in TM$ vektormező, ekkor

$$S(V) = -\widetilde{\nabla}_V(P/r) = -1/r\widetilde{\nabla}_{\sum v^i\partial_i}P = -1/r\sum v^i\widetilde{\nabla}_{\partial_i}P = -1/r\sum v^i\partial_i = -\frac{1}{r}V.$$

Ez azt jelenti, hogy a Weingarten leképezés az identitás konstansszorosa. Ha ezt az eredményt behelyettesítjük az 1. egyenletbe, a következő eredményt kapjuk:

1.22. Állítás. *Az $S^n_s(r)$ pszeudoszféra $1/r^2$ konstans görbületű, míg a $H^n_s(r)$ pszeudohiperboloid $-1/r^2$ konstans görbületű felület.*

A görbületek különböző előjele azt mutatja, hogy a két felületcsalád lényegesen különböző, izometria még csak lokálisan sem képzelhető el köztük. Metrikájuk közt mégis erős kapcsolat fedezhető fel. Ez a kapcsolat rámutat arra is, hogy miért csak előjelben tér el a felületek görbülete.

1.23. Állítás. *A* $\sigma : \mathbb{R}^{n+1}_s \to \mathbb{R}^{n+1}_{n-s+1}$ $\sigma(p_1, \ldots, p_{n+1}) = (p_{s+1}, \ldots, p_{n+1}, p_1, \ldots, p_s)$ *függvény antiizometria* $S^n_s(r)$ *és* $H^n_{n-s}(r)$ *közt, azaz olyan diffeomorfizmus, melyre tetszőleges* $v, w \in T_pS^n_s(r)$ *vektorok esetén teljesül, hogy* $\langle v, w\rangle = -\langle d\sigma(v), d\sigma(w)\rangle$.

Bizonyítás: Azt fogjuk belátni, hogy a függvény a befoglaló terek közt antiizometria, és a két felületet egymásba viszi. Világos, hogy a koordniátacsere diffeomorfizmus. Az antiizometria belátásához elég csak $\mathbb{R}^{n+1}_s$-beli vektorokat vizsgálni, hisz ott a pontonkénti érintőterek mind azonosíthatók a befoglaló térrel. Vegyünk tehát két vektort, u, v-t $\mathbb{R}^{n+1}_s$-ből. Ekkor

$$\langle u, v\rangle = -\sum_{i=1}^{s} u^i v^i + \sum_{i=s+1}^{n} u^j v^j, \quad \langle d\sigma(u), d\sigma(v) = \sum_{i=1}^{s} u^i v^i - \sum_{i=s+1}^{n} u^j v^j.$$

Ezzel egyben azt is igazoltuk, hogy a leképzés egy $S^n_s(r)$-beli pontot valóban $H^n_{n-s}(r)$-belibe visz. ■

Eddig a felületek differenciálgeometriai tulajdonságait vizsgáltuk, nem foglalkoztunk még topológiájukkal. A következő állítás azt mutatja, hogy a pszeudoszférának és a pszeudohiperboloidnak nem csak a görbületi tulajdonságai írhatóak le nagyon egyszerűen, hanem topológiájuk is.

1.24. Állítás. *Az* $S^n_s(r)$ *pszeudoszféra diffeomorf az* $\mathbb{R}^s \times S^{n-s}$ *térrel, a* $H^n_{n-s}(r)$ *pszeudohiperboloid pedig az* $S^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ *térrel.*

Bizonyítás: A fent tárgyalt antiizometria miatt elég csak a pszeudoszféra esetével foglalkoznunk, ezek közt is elég csak az egység „sugarút” vizsgálni. Feladatunk egy olyan diffeomorfizmust gyártani, mely egy $(x, p) \in \mathbb{R}^s \times S^{n-s}$ párhoz S^n_s-beli pontot rendel. Legyen

$$\psi(x, p) = (x_1, \ldots, x_s, (1 + |x|^2)^{1/2} p_1 \ldots 1 + |x|^2)^{1/2} p_{n+1-s}) \in \mathbb{R}^s_s \times \mathbb{R}^{n+1-s} \approx \mathbb{R}^{n+1}_s.$$

Vizsgáljuk meg, hogy ψ valóban S^n_s-be rendel:

$$\langle \psi(x, p), \psi(x, p)\rangle = -|x|^2 + (1 + |x|^2) \cdot 1 = 1$$

Könnyen látható, hogy ψ akárhányszor differenciálható, és létezik inverze, tehát valóban diffeomorfizmus S^n_s és $\mathbb{R}^s \times S^{n-s}$ közt. ■

1.10. A fénykúp

Az előző fejezetben nem foglalkoztunk azzal, hogy milyen halmazt alkotnak azok a pontok, melyek az $f(u) = \sum \varepsilon_i (u^i)^2$ függvény 0-hoz tartozó ősképei. Másképp fogalmazva, mit alkotnak az önmagukra merőleges vektorok.

Világos, hogy az 1.19. tétel szerint nem kaphatunk szemi-Riemann felületet, hiszen $\langle grad(f), grad(f) \rangle = 0$ az egész felületen. Azonban az origót kivéve minden pontban igaz, hogy $grad(f) \neq 0$. Tehát azon $\mathbb{R}^{n+1}_s$-beli $p \neq 0$ pontok, melyekhez tartozó helyvektorok önmagukra merőlegesek, az 1.19. tétel utáni megjegyzés szerint hiperfelületet alkotnak. A korábbiakkal összhangban ezt a felületet, illetve vektorhalmazt fénykúpnak nevezzük és Λ-val jelöljük.

Az előző fejezetben vizsgáltuk a pszeudoszféra és a pszeudohiperboloid topológiai struktúráját, tegyük meg most ezt a fénykúppal is.

1.25. Állítás. *A $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n+1}_s$ fénykúp diffeomorf az $(\mathbb{R}^s \setminus 0) \times S^{(n-s)}$ térrel.*

Bizonyítás: Most olyan ψ leképzést kell találnunk, mely egy $(x, p) \in \mathbb{R}^s \setminus 0) \times S^{n-s}$ párhoz rendel egy fénykúpbeli elemet. Legyen ψ a következő:

$$\psi(x, p) = (x, |x|p) \in \mathbb{R}^s_s \times \mathbb{R}^{n+1-s}.$$

Ekkor

$$\langle \psi(x, p), \psi(x, p) \rangle = -|x| + |x| = 0.$$

Ez a leképzés akárhányszor deriválható, invertálható, tehát diffeomorfizmus, és a fenti egyenlet szerint valóban a fénykúpba képez. ■

Megjegyzés: Szembetűnő az állításban a hasonlóság a pszeudoszféra, a pszeudohiperboloid és a fénykúp topológikus struktúrája közt. Ez nem véletlen, hiszen a fénykúpra, mint a pszeudoszféra illetve a pszeudohiperboloid határhelyzetére is tekinthetünk (a skaláris szorzás elromlik a határátmenetnél). Ez a határhelyzet köti össze - választja el az előző fejezetben látott két felületcsaládot.

A fénykúp elválasztó tulajdonságát kicsit precizebben is megfogalmazzuk. Ha veszünk egy $p \in S^n_s$ és egy $q \in H^n_s$ pontot, akkor mindenképp létezik az összekötő szakaszukon egy fénykúpbeli elem. Ezt a valós függvényekre vonatkozó Bolzano-tétel indokolja. A $t \mapsto \langle t \cdot p + (1-t) \cdot q, t \cdot p + (1-t) \cdot q \rangle$ függvény folytonos, egyik végpontjában pozitív, másikban negatív értéket vesz fel. Ekkor viszont valahol 0-t is felvesz, ez csak egy fénykúpbeli helyen lehetséges.

2. Görbület és konvexitás sima felületeken

2.1. Alapfogalmak

Konvexitásról halmaz és részhalmazainak viszonylatában beszélhetünk, ennek sokaságok esetén két útja lehet. Egyrészt beszélhetünk konvex halmazokról magán a sokaságon, geodetikusok és exponenciális leképzés segítségével. Másrészt beszélhetünk arról, hogy egy sokaság részsokasága mikor konvex. Ebben a fejezetben ezt az utat követjük, befoglaló terünk $\mathbb{R}^{n+1}_s$ lesz. Jegyezzük meg, hogy ezesetben a beágyazott M sokaság pontjaira egyben, mint a befoglaló tér vektoraira is tekinthetünk.

2.1. Definíció. *Egy $M \subset \mathbb{R}^{n+1}_s$ hiperfelület konvex, ha minden $p \in M$ pontjára teljesül, hogy M-et tartalmazza az egyik T_pM által meghatázozott féltér, azaz*

$$\forall q \in M: \quad \langle q-p, N(p)\rangle \geq 0 \quad \textit{vagy} \quad \langle q-p, N(p)\rangle \leq 0,$$

ahol N(p) egy, a T_pM érintőtérre merőleges vektor.

A definícióban szereplő féltereket H_p^+-szal, és H_p^--szal jelöljük. Szigorúan konvexnek akkor nevezünk egy hiperfelületet, ha a definícióban egyenlőség csak a p pontban teljesül. Beszélhetünk ezen kívül pontbeli konvexitásról is:

2.2. Definíció. *Egy $M \subset \mathbb{R}^{n+1}_s$ hiperfelület konvex $p \in M$ pontjában, ha p-nek létezik olyan környezete, amely mint sokaság konvex.*

Felmerül a kérdés, hogy ha egy felület minden pontjában konvex, akkor globálisan konvex-e. Erre a válasz nemleges, a logaritmikus spirál ellenpéldát szolgáltat.

2.2. Konvexitás és a Weingarten-operátor a Riemann esetben

Ebben a fejezetben belátjuk, hogy konvexitás és görbület közt szoros kapcsolat áll fenn. Korábban láttuk, hogy a Gauss-görbület a második alapforma segítségével számítható, ezért először ezzel foglalkozunk. A következőkben a második alapformára, mint $(0,2)$ típusú tenzorra fogunk tekinteni, ez a korábban leírtak miatt megtehető.

2.3. Állítás. *Legyen M olyan $\mathbb{R}^{n+1}$-beli hiperfelület, mely konvex egy p pontjában. Ekkor a hiperfelület második alapformája szemidefinit p-ben.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a $p \in M$ egy $K \subset M$ környezete a H_p^+ féltérben van, azaz $\forall q \in K: \quad \big\langle q-p, N(p)\big\rangle \geq 0$. A 1.18. tételt akarjuk használni, ehhez válasszunk egy $\alpha : I \to K$ paraméteres görbét, melyre teljesül, hogy $\alpha(0) = p, \quad , \dot{\alpha}(0) = v$. Definiáljuk a $h : I \to \mathbb{R}$ egyváltozós, valós értékű függvényt a következőképpen:

$$h(t) = \langle \alpha(t) - p, N(p)\rangle$$

Ekkor tudjuk, hogy $h(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$, és $h(0) = 0$, tehát h-nak 0-ban minimuma van. Node ekkor

$$II(v,v) = \langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = (\ddot{h})(0) \geq 0.$$

Ha a kezdeti feltevésünkkel ellentétben a p pont $K \subset M$ környezete a H_p^- féltérben van, akkor a h függvénynek 0-ban maximuma van, azaz az utolsó egyenlőtlenségben biztosan ≤ 0 szerepel. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

Megjegyzés: Az állítás azt is kimondja, hogy ha a hiperfelület konvex, akkor második alapformája minden pontjában szemidefinit.

Nézzük meg mint mond az állítás valós függvényekre. Adott egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor $M = graph(f)$ sokaságot alkot az $\mathbb{R}^{n+1}$ térben, melynek térképe $u : \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, f(x))$. Nézzük meg, hogyan áll elő a második alapforma B mátrixa. A 2. egyenlet szerint ehhez a $\langle \partial_i \partial_j u, N \rangle$ skaláris szorzatot kellene kiszámolnunk.

Világos, hogy $\partial_i \partial_j u = (0, \ldots, 0, \partial_i \partial_j f)$, hátra van tehát egy normálvektormező kiszámítása. M-re tekinthetünk úgy is, mint a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto x_{n+1} - f(x_1 \ldots x_n)$ függvény 0-hoz tartozó ősképe, azaz $M = g^{-1}(0)$. Ilyen előállítás esetén $grad(g)$ M-en normális vektromezőt alkot.

$$N = grad(g) = (-\partial_1 f, \cdots - \partial_n f, 1).$$

Állítsuk elő a második alapforma B mátrixát:

$$b_{ij} = \langle \partial_i \partial_j u, N \rangle = \langle (0, \ldots, 0, \partial_i \partial_j f), grad(g)/\|grad(g)\| \rangle = \frac{\partial_i \partial_j f}{\|grad(g)\|}.$$

Igaz tehát a következő:

2.4. Állítás. *Ha egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex függvény konvex egy pontjában, akkor ott a másodrendű parciális deriváltakból álló Hesse-mátrix szemidefinit.*

A 2.3. állításnak lényeges következménye van a szekcionális görbületekre nézve.

2.5. Következmény. *Legyen M olyan $\mathbb{R}^{n+1}$-beli Riemann-hiperfelület, mely konvex egy p pontjában. Ekkor a p-beli szekcionális görbületek nemnegatívak.*

Bizonyítás: Korábban leírtak alpján a $K(v,w) = \frac{\langle Sv,v \rangle \langle Sw,w \rangle - \langle Sv,w \rangle^2}{\langle v,v \rangle \langle w,w \rangle - \langle v,w \rangle^2}$ kifejezést kell kiszámolni. A nevezőről tudjuk a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján, hogy pozitív. Az előző állításból az is következik, hogy a második alapforma szemidefinit.

Ha pozitív szemidefinit, akkor a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget alkalmazva azt kapjuk, hogy a számláló ≥ 0, azaz a görbület pozitív vagy 0. Ha negatív szemidefinit, akkor ellentettjére alkalmazva a Cauchy-Schwarz egyenlőséget azt kapjuk, hogy a számláló szintén ≥ 0, tehát ugyanez elmondható. Ezzel az állítást igazoltuk. ■

Felmerülhet a kérdés hogy igaz-e az állítás megfordítása, azaz ha egy sokaság egy p pontjában a második alapforma szemidefinit, akkor konvex-e a felület p-ben. A válasz nemleges, tekintsük a következő példát:

Legyen az $f(x,y) = x^4 - y^2$ függvény grafikonja a sokaságunk (azaz a térképező u leképzés $(x,y) \to (x,y,x^4-y^2)$). Világos, hogy a sokaság az origóban nem konvex. Nézzük meg itt a második alapforma mátrixát! $\partial_{x,x}u = (0,0,12x^2)$, $\partial_{x,y}u = (0,0,4x^3-2y)$, $\partial_{y,y}u = (0,0,-2)$. Origóban megfelelő normális vektor az N=(0,0,1). Ebből azt kapjuk, hogy a B mátrix a 0 pontban: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, ami szemidefinit.

2.3. A szemi-Riemann eset

Az előző fejezetben tárgyalt állítások gyakorlatilag mind változatlanul átvihetők a szemi-Riemann esetre is. Tekintsük át ezeket.

2.6. Állítás. *Legyen M $\mathbb{R}^{n+1}_s$-beli hiperfelület konvex egy p pontjában. Ekkor a hiperfelület második alapformája szemidefinit p-ben.*

Bizonyítás: Egy az egyben lemásolható a Riemann-eset bizonyítása, hiszen ott csak azt használtuk ki, hogy a megfelelő görbe a féltérben marad, valamint a valós függvényekről szóló ismereteinket. ■

Igaz marad az állítás következménye is:

2.7. Következmény. *Ha M egy $\mathbb{R}^{n+1}_s$-beli Riemann-hiperfelület konvex egy p pontjában, akkor ott a szekcionális görbületek nem válthatnak előjelet (azaz egyforma előjelűek, esetleg 0-k).*

Bizonyítás: Ebben az esetben a $K(v,w) = \varepsilon \frac{\langle Sv,v\rangle\langle Sw,w\rangle - \langle Sv,w\rangle^2}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$ kifejezést kell vizsgálnunk. A Weingarten operátorról ugyanúgy tudjuk, hogy szemidefinit, ezért a tört értéke nemnegatív, ε pedig a felületre jellemző állandó. Ebből azt is láthatjuk, hogy a szekcionális görbületek előjele csak a felület normál-előjelétől függ. ■

Fontos szerepet játszik a továbbiakban az alábbi következmény:

2.8. Következmény. *Ha egy $M \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$ hiperfelület érintőterei térszerűek, és M konvex egy p pontjában, akkor a p-beli szekcionális görbületek nempozitívak.*

3. Nem sima felületek görbülete

3.1. Bevezetés

A továbbiakban olyan $\mathbb{R}_1^{n+1}$-beli n-dimenziós összefüggő topologikus sokaságokkal fogunk foglalkozni, amelyek nem feltétlenül simák. Általánosítjuk rájuk a hagyományos görbületfogalmat, és megvizsgáljuk kapcsolatát a konvexitással.

3.1. Definíció. *Egy $M \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ hiperfelület konvex, ha összefüggő, és a felületet $\mathbb{R}_1^{n+1}$-ből elhagyva a tér két összefüggőségi komponensre esik szét, melyek közül az egyik konvex. Ezt a konvex halmazt a továbbiakban K_M-mel jelöljük.*

3.2. Definíció. *Egy M konvex hiperfelület térszerű, ha K_M tartalmazza a felület bármely pontjához tartozó zárt pozitív fénykúpot, a fénykúp csúcspontját kivéve.*

A definíció szemléletes tartalma az, hogy a felületen való elmozdulás iránya a fénykúpon kívül esik, azaz térszerű.

Jegyezzük meg, hogy ugyanígy nevezhetnénk egy konvex hiperfelületet térszerűnek akkor is, ha K_M tartalmazza a felület bármely pontjába tartozó zárt negatív fénykúpot. Ez azonban semmi újdonságot nem hozna, hiszen egy ilyet tükrözve az $x_{n+1} = 0$ síkra (izometria), egy, a definíciónak megfelelő felületet kapunk.

3.3. Definíció. *Egy M konvex hiperfelület húrján a hiperfelület két tetszőleges pontja közti zárt szakaszt értjük.*

3.4. Állítás. *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *M térszerű.*
2. *M bármely húrja térszerű.*
3. *M térszerű, akkor bármely támaszhipersíkja is térszerű.*

Bizonyítás:

1. $\Rightarrow$ 3. Tegyük fel, hogy $p \in M$ pontban létezik nem térszerű támaszhipersík. Ekkor triviális, hogy a p-beli fénykúp nem lehet teljes egészében K_M-ben.

3. $\Rightarrow$ 2. Tegyük fel, hogy a görbének létezik nem térszerű húrja, legyenek végpontjai p és q. Vegyük a p-re és q-ra illeszkedő függőleges két dimenziós síkot. Ennek metszete M-mel egy folytonos görbe. E görbének van olyan támaszegyenese, amely párhuzamos a pq szakasszal, legyen az egyenes közös pontja a felülettel x. Ekkor van olyan x-beli támaszhipersík, melynek része a támaszegyenes. Ez ellentmondás, hisz egy térszerű hipersík minden részegyenese is szükségszerűen térszerű.

2. $\Rightarrow$ 1. Ha lenne olyan p pont, amelybe állított fénykúp belemetsz a felületbe, a metszéspontot p-vel összekötve nem térszerű húrt kapnánk. ■

Fejezetünk végén megjegyezzük, hogy ha adott egy tetszőleges $\mathbb{R}_1^{n+1}$-beli hiperfelület, akkor az, mint altér, topológiát örököl a befoglaló térből. A következőkben látni fogjuk, hogy konvex és térszerű felületen gyárthatunk olyan metrikát, mely ekvivalens ezzel a topológiával.

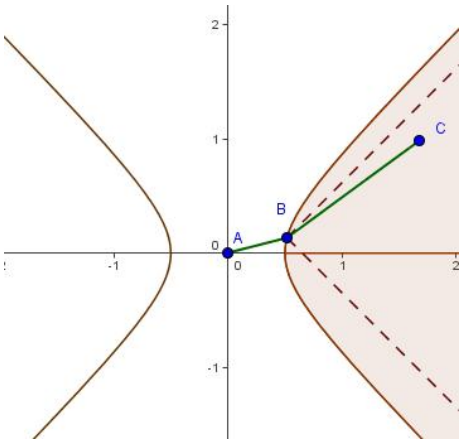
3.2. Metrika a felületen

Ahhoz, hogy a felületen metrikát definiálhassunk, először a felület görbéinek ívhosszát fogjuk meghatározni, ez áll fejezetünk első részében.

A görbéket töröttvonalakkal közelítjük szokás szerint. A töröttvonalak a felületnek olyan húrjaiból állnak, melyek térszerű egyeneseket határoznak meg. Ez egyben azt is jelenti, hogy a szakaszokon külön-külön tudunk távolságot mérni az örökölt euklideszi metrika segítségével. Ha összeadjuk a szakaszok hosszait, megkapjuk a töröttvonal hosszát.

A befoglaló terünk az $\mathbb{R}_1^{n+1}$, amelyen a metrika indefinit. Ez azt eredményezheti, hogy ha finomítjuk a felosztást, a keletkezett töröttvonal hossza rövidebb lehet, mint a durvább felosztású töröttvonalé. A következő állítás ezt pontosítja.

3.5. Állítás. *Legyenek A, B, C olyan $\mathbb{R}_1^1$-beli pontok, melyek térszerű egyenesket feszítenek ki, és megfelelő első koordinátáikra $a_1 < b_1 < c_1$. Ekkor igaz lesz a fordított háromszög-egyenlőtlenség, azaz mindig fennáll az $AB + BC \leq AC$ összefüggés.*



2. ábra. A fordított háromszögegyenlőtlenség

Bizonyítás: Feltehető, hogy A az origóban van, hisz az eltolás izometria. A B pont koordinátái legyenek (b_1, b_2), C-é (c_1, c_2). A következőt kell igazolni:

$$\sqrt{c_1^2 - c_2^2} \geq \sqrt{b_1^2 - b_2^2} + \sqrt{(c_1 - b_1)^2 - (c_2 - b_2)^2}$$

A számolás váza a következő:

$$\underbrace{\sqrt{c_1^2 - c_2^2} - \sqrt{b_1^2 - b_2^2}}_{(1)} \geq \sqrt{(c_1 - b_1)^2 - (c_2 - b_2)^2} \qquad /^2$$

$$\sqrt{(c_1^2-c_2^2)}\sqrt{(b_1^2-b_2^2)} \le \underbrace{c_1b_1-c_2b_2}_{(2)} \qquad /^2$$

$$-c_1^2b_2^2-c_2^2b_1^2 \le -2c_1b_1c_2b_2$$

$$0 \le (c_1b_2-c_2b_1)^2$$

(1) Meg kell viszgálnunk, hogy a kifejezés miért pozitív, hiszen csak ekkor ekvivalens átalakítás a négyzetreemelés. A kifejezés pontosan akkor pozitív, ha $c_1^2-c_2^2 > b_1^2-b_2^2$. Rögzített B esetén a feltételt kielégítő C pontok az $x^2-y^2=b_1^2-b_2^2$ egyenletű hiperbola által határolt, a 2. ábrán jelzett területen vannak. Ám, ha BC térszerű és $b_1 < c_1$, akkor ez teljesül.

(2) Hasonlóan meg kell gondolnunk, hogy miért pozitív a kifejezés. Tudjuk, hogy $|c_1| > |c_2|$, valamint $|b_1| > |b_2|$, emiatt $c_1b_1 = |c_1||b_1| > |c_2||b_2| \ge c_2b_2$, azaz tényleg pozitív a kifejezés.

Ezzel az állítást beláttuk. ■

Megjegyzés: A bizonyításból az is leolvasható, hogy az állításban egyenlőség csak akkor fordul elő, ha $c_1b_2-c_2b_1=0$. Átalakítva $\frac{c_1}{c_2}=\frac{b_1}{b_2}$, ami azt jelenti, hogy AB és AC iránya megegyezik, azaz a három pont egy egyenesbe esik.

Az előző állításnál többet is elmondhatunk:

3.6. Állítás. *Ha A, B, C az előző állításbeli pontok és B-t függőlegesen lefele mozgatjuk úgy, hogy továbbra is térszerű szakaszokat kapjunk, akkor az $AB+BC$ hossz csökken.*

Bizonyítás: A hosszfügvényt paraméteresen felírva és deriválva az előzőhöz hasonló számolással adódik az eredmény. ■

Szükségünk lesz a továbbiakban a következő jelölésekre: ha p és q pontok a felületen, akkor

$$\|p,q\|_s := \sqrt{(p_1-q_1)^2+\cdots+(p_n-q_n)^2-(p_{n+1}-q_{n+1})^2}$$

$$\|p,q\|_e := \sqrt{(p_1-q_1)^2+\cdots+(p_n-q_n)^2+(p_{n+1}-q_{n+1})^2}$$

$$\|p,q\|_v := \sqrt{(p_1-q_1)^2+\cdots+(p_n-q_n)^2}.$$

Ezzel jelöljük tehát a két pont szemi-euklideszi, euklideszi, és a vízszintes hipersíkra vett vetületeik euklideszi távolságát.

3.7. Állítás. *Tetszőleges $p, q \in M$ esetén*

$$\|p,q\|_s \le \|p,q\|_v \le \|p,q\|_e$$

Térjünk rá görbék ívhosszának meghatározására:

3.8. Definíció. *A $\gamma : [a,b] \to M$ görbe rektifikálható, és ívhossza $L(\gamma)$, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0$, hogy tetszőleges olyan $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ felosztásra, melyre $t_i - t_{i-1} < \delta \quad (i = 1...n)$, teljesül, hogy*

$$\left|\sum_1^n \|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|_s - L(\gamma)\right| < \varepsilon.$$

Az euklideszi eset bizonyítását kis mértékben módosítva kapjuk a következő tételt:

3.9. Állítás. *Ha M sima hiperfelület, $\gamma : [a,b] \to M$ sima görbéje, és $\|\gamma'(t)\|_s$ integrálható, akkor γ rektifikálható, és $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_s dt$.*

Görbék ívhossza segítségével már definiálhatjuk a felület két tetszőleges pontjának távolságát:

3.10. Definíció. *Tetszőleges $p, q \in M$ esetén*

$$d(p,q) = inf\big\{L(\gamma)\big|\, \gamma \quad p,q \text{ közti rektifikálható görbe}\big\}$$

Először is lássuk be, hogy bármely két pontot köt össze rektifikálható görbe. Erre szükség van, különben előfordulhatna, hogy az üreshalmaz infimumát vesszük, ami végtelen távolságokat eredményezne.

3.11. Lemma. *Egy konvex térszerű hiperfelület bármely két pontja közt létezik rektifikálható görbe.*

Bizonyítás: Ha p és q a felület két pontja, akkor a rájuk illeszkedő függőleges két dimenziós sík folytonos γ görbében metszi a felületet. A 3.5. állítás szerint γ tetszőleges felosztásához tartozó töröttvonal hossza $\leq \|p,q\|_s$. Eszerint a görbe korlátos változású, azaz rektifikálható.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy adott p, q pontokhoz és tetszőleges $\varepsilon \geq 0$-hoz mindig találhatunk olyan M-beli csúcsokkal rendelkező töröttvonalat, melynek hossza $\leq d(p,q)+\varepsilon$. Keressünk ugyanis egy olyan görbét, amelynek eltérése a távolságtól $\varepsilon/3$, majd ezt a görbét közelítsük olyan töröttvonallal, mely hosszának eltérése a görbéétől szintén $\varepsilon/3$. Nyilván egy ilyen töröttvonal megfelelő lesz.

3.12. Tétel. *Az így definiált távolság metrikát határoz meg.*

Bizonyítás:

1. $d(a,b) \geq 0$. Ez természetesen igaz, mert egy görbe hossza nemnegatív, a távolság meg nemnegatív számok infimuma, ami szintén nemnegatív.

2. $d(a,b) = d(b,a)$ triviális.

3. $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$ $\forall a,b,c \in M$. Tegyük fel, hogy $d(a,b) + d(b,c) < d(a,c)$ valamely $a,b,c \in M$-re. Ha az eltérés a két oldal közt ε, akkor $d(a,b)$-t és $d(b,c)$-t két görbével $\varepsilon/3$-nyira megközelítve, és azokat összefűzve olyan görbét kapunk, melynek hossza kisebb, mint $d(a,c)$, ami ellentmondás.

4. $d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$. Tegyük fel, hogy a és b olyan nem egybeeső pontok, melyek távolsága 0. Ezzel ekvivalens, hogy létezik tetszőlegesen rövid töröttvonal a és b közt. Az ellentmondás igazolásához szükségünk lesz néhány fogalomra és lemmára.

3.13. Definíció. *Legyen két $\mathbb{R}_1^{n+1}$-beli pontunk $X(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ és $Y(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$, az általuk meghatározott egyenest jelölje e. Ha az e egyenes függőleges, meredeksége legyen ∞, ha pedig nem függőleges, meredekségén a következő számot értsük:*

$$m_e = m(X, Y) = \sqrt{\frac{(y_{n+1} - x_{n+1})^2}{(y_1 - x_1)^2 + \ldots (y_n - x_n)^2}}$$

Vegyük észre, hogy a kifejezés éppen az egyenesen vett függőleges és vízszintes (n-dimenziós) elmozdulás hányadosa. Fogalmunk annyiban tér el a két dimenziós meredekségfogalomtól, hogy most nem beszélünk negatív meredekségről. Könnyű meggondolni továbbá, hogy a definíció jó, nem fordulhat elő, hogy egy egyenes két különböző pontpárjából kiindulva különböző meredekségeket kapunk.

3.14. Állítás.

$$\|p, q\|_s = \sqrt{\|p, q\|_v{}^2 - (m(pq))^2 \|p, q\|_v{}^2},$$

ahol $m(pq)$ a pq egyenes meredeksége.

Bizonyítás: Észrevételünk közvetlenül következik a meredekség definíciójából. ■

Vegyük észre, hogy ha egy felület térszerű, akkor húrjai meredekségeinek szuprémuma ≤ 1. A következő két lemma ezt az észrevételt annyival egészíti ki, hogy egy kompakt halmazon belül ez a szuprémum határozottan kisebb 1-nél.

3.15. Lemma. *Legyen az M hiperfelületnek p egy pontja, $K \subset M$ pedig p-t tartalmazó kompakt halmaz. Ekkor*

$$m_p = sup\,\{m(pq) | q \in K\} < 1$$

Bizonyítás: Az állítás igazolásához szükségünk lesz a következő függvényre: $f: \; K \to \mathbb{R} \quad q \mapsto m(pq)$. Ez a függvény nyilván folytonos a p pontot kivéve. Tegyük fel, hogy a fenti szuprémum értéke 1. Ekkor létezik olyan q_i pontsorozat, mely mentén az $m(pq_i)$ meredekségek 1-hez konvergálnak. Ennek a q_i sorozatnak létezik torlódáspontja K-ban, legyen ez r. Két esetet kell megkülönböztetnünk.

1. Ha $r \neq p$, akkor f folytonossága miatt a pr húr meredeksége 1 lenne, ami ellentmondás.

2. Ha $p = r$. Ekkor a pq_i egyenesek sorozatából kiválasztható konvergens részsorozat. Feleltessük meg ugyanis az egyenesek irányait egy p körüli euklideszi egységgömb elemeinek. Ezeknek van torlódáspontja a gömbön. A torlódáspont meghatároz egy irányt, és ezzel egy olyan p-n átmenő érintőegyenest, amely része a p-beli fénykúpnak. Ez szintén ellentmondás. ■

3.16. Lemma. *Legyen az M hiperfelületnek K egy kompakt részhalmaza. Ekkor*

$$sup\,\{m(pq) | p, q \in K\} < 1$$

Bizonyítás: Az előző lemma eredményét használjuk. Legyen $Mer: \ K \to \mathbb{R} \ p \mapsto m_p$. Könnyen látható, hogy ez egy folytonos függvény K-n, így ott felveszi maximumát. Ez a maximum mindenképp < 1. ■

3.17. Lemma. *Adott az M hiperfelület egy K kompakt részhalmazában két pont, p és q. Ha egy p és q közti töröttvonal végig K-ban halad, akkor a töröttvonal hossza legalább $\|p,q\|_v\sqrt{1-S^2}$, ahol S az előző állításban kapott meredekség-szuprémum (és egyben maximum).*

Bizonyítás: Jelölje a töröttvonalak szakaszainak végpontjait $p = p^0, p^1, \dots p^n = q$. Nézzük először a p^i, p^j távolságot.

$$\|p^i,p^j\|_s = \sqrt{\left(p_1^i - p_1^j\right)^2 + \dots + \left(p_n^i - p_n^j\right)^2 - \left(p_{n+1}^i - q_{n+1}^j\right)^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\left(p_1^i - p_1^j\right)^2 + \dots + \left(p_n^i - p_n^j\right)^2 - S^2 \cdot \left(p_1^i - p_1^j\right)^2} = \sqrt{1-S^2} \cdot \|p^i,p^j\|_v$$

.

Becsüljük most a töröttvonal hosszát:

$$\|p^0,p^1\|_s + \dots + \|p^{n-1},p^n\|_s \geq \sqrt{1-S^2} \cdot \left(\|p^0,p^1\|_v + \dots + \|p^{n-1},p^n\|_v\right) \geq \|p,q\|_v\sqrt{1-S^2}.$$

Az utolsó lépésben az n dimenziós euklideszi téren használtunk háromszög-egyenlőtlenséget, amivel az állítást beláttuk. ■

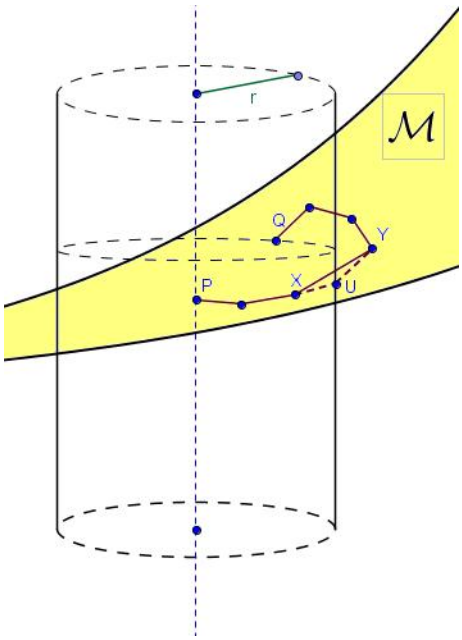
Most kialakított foglamaink és lemmáink már lehetővé teszik állításunk bizonyítását:

3.18. Tétel. *Ha adott $p, q \in M$ és $p \neq q$, akkor $d(p,q) \neq 0$*

Bizonyítás: Legyen H az a zárt henger, melynek forgástengelye egy függőleges, p-n átmenő egyenes, p körüli alapgömbjének sugara pedig $\|p,q\|_v$. Messük el ezt a hengert a felülettel, így egy kompakt K halmazt kapunk. A K halmaz két pontja közt haladó húrok meredekségeinek létezik 1-nél kisebb szuprémuma, jelölje ezt S. Tegyük fel, hogy létezik tetszőlegesen rövid γ töröttvonal p és q közt.

1. Ha egy töröttvonal nem lép ki K-ból, akkor hossza legalább $\|p,q\|_v\sqrt{1-S^2}$ az előző lemma szerint (S-t most ehhez a K halmazhoz választjuk), tehát nem lehet tetszőlegesen rövid.

2. Ha egy töröttvonal kilép K ból, akkor a következőt tehetjük. Induljon γ p-ből, a K határát először átlépő szakaszának végpontjait jelölje x és y (ld. a 3. ábra). Tekintsük az xy egyenesre illeszkedő függőleges 2 dimenziós síkot, ennek van közös egyenese a hengerpalásttal, legyen ez e. Az e egyenesnek létezik M-mel metszéspontja, legyen ez u. Ekkor $\|p,u\|_v = \|p,q\|_v$. Tudjuk továbbá a 3.5. állításból, hogy $\|x,u\|_s + \|u,y\|_s \leq \|x,y\|_s$. Ha kicseréljük γ-ban az xy szakaszt xu-ra és uy-ra, akkor a töröttvonalat rövidítjük. Viszont a töröttvonal u-ig terjedő részének hosszát becsülhetjük alulról a $\|p,u\|_v\sqrt{1-S^2} = \|p,q\|_v\sqrt{1-S^2}$ kifejezéssel. A teljes töröttvonal ennél biztosan hosszabb, amivel az állítást beláttuk. ■



3. ábra.

Megjegyzés: A bizonyításból azt is megkaptuk, hogy

$$d(p,q) \geq \|p,q\|_v \sqrt{1-S^2}, \tag{3}$$

ahol S a fent kapott meredekség-szuprémum.

A most keletkezett metrika a felületen egy topológiát generál. Szeretnénk belátni hogy ez a topológia azonos a befoglaló térből örökölt topológiával.

3.19. Állítás. *Az M felület $\mathbb{R}^{n+1}_1$-ből örökölt, és metrikából származó topológiája azonos.*

Bizonyítás: A metrikából származó topológiát a tetszőleges sugarú és középpontú metrikus nyílt gömbök generálják, az örökölt topológiának pedig úgy kaphatjuk bázisát, ha vesszük az $n+1$ dimenziós euklideszi nyílt gömbök metszeteit M-mel (a továbbiakban ezeket csak egyszerűen euklideszi gömböknek nevezzük).

Először azt bizonyítjuk, hogy ha veszünk egy R sugarú nyílt metrikus gömböt (B_R), és annak egy belső q pontját, akkor létezik q középpontú euklideszi gömb, mely része B_R-nek is. Mivel q belső pont, ezért létezik olyan q körüli metrikus gömb, mely része B_R-nek, legyen ez B_r. Tudjuk, hogy tetszőleges $x \in M$ esetén $d(q,x) \leq \|q,x\|_e$. Ez azt jelenti, hogy ha $\|q,x\|_e < r$, akkor $d(q,x) < r$, azaz ha x belső pontja az r sugarú, q középpontú euklideszi gömbnek, akkor belső pontja az r sugarú, q középpontú metrikus gömbnek is. Ez igazolja, hogy a q középpontú, r sugarú euklideszi gömb része B_R-nek. Ezzel az ekvivalencia egyik irányát bebízonyítottuk.

Következzen a másik irány. Vegyünk egy R sugarú p középpontú euklideszi B_R gömböt. Tetszőleges $q \in M \cap B_R$ ponthoz kell találnunk olyan q középpontú nyílt metrikus gömböt, mely része B_R-nek. A fenti gondolatmenet szerint feltehető, hogy $p = q$. Tudjuk, hogy B_R

két pontja közt húzódó húrok meredekségei felülről becsülhetők valamilyen $S < 1$ számmal (vegyük B_R lezártját). Sőt, a 3. egyenletből azt is tudjuk, hogy tetszőleges $x \in B_R$ pontra $\|p,x\|_e \frac{\sqrt{1-S^2}}{2} \leq \|p,x\|_v \sqrt{1-S^2} \leq d(p,x)$. Tehát ha $d(p,x) \leq R\frac{\sqrt{1-S^2}}{2}$, akkor $\|p,x\|_e \leq R$. Ez azt jelenti, hogy ha x eleme a p középpontú $R\frac{\sqrt{1-S^2}}{2}$ sugarú metrikus gömbnek, akkor eleme B_R-nek is. Ezzel belátuk, hogy a p középpontú, $R\frac{\sqrt{1-S^2}}{2}$ sugarú metrikus gömb része B_R-nek. ■

Fejezetünk végén megjegyezzük, hogy ha M sima felület, akkor a most bevezetett metrika egyezik a Riemann-metrikából származóval. Ez a 3.9. állítás következménye.

3.3. Geodetikus metrikus terek

Most tárgyalt felületeinken görbületet szeretnénk értelmezni, ehhez szükségünk lesz a geodetikus metrikus terek fogalmára.

3.20. Definíció. *Legyen I egy zárt intervallum, X, d pedig egy metrikus tér. Egy $\gamma : I \to X$ görbe geodetikus, ha tetszőleges $s, t \in I$ pontok esetén*

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|,$$

azaz γ izometrikus beágyazása az intervallumnak.

3.21. Definíció. *Egy γ $I \to X$ görbe lokálisan geodetikus, ha tetszőleges $t \in I$ pontjának van olyan környezete, melyre γ-t leszűkítve geodetikust kapunk.*

Vegyük észre, hogy Riemann-sokaságok esetén nem minden geodetikus vonal marad geodetikus ebben az új értelemben. Vegyünk például egy π-nél hosszabb zárt főkörívet az egységgömbön, ennek végpontjainál nem igaz a fenti egyenlőség. Hagyományos geodetikusainkra az mondható el, hogy lokálisan geodetikusak az új értelemben.

3.22. Definíció. *Egy (X, d) metrikus tér geodetikus, ha $\forall p, q \in X$ esetén létezik olyan γ görbe a két pont közt, hogy*

$$L(\gamma) = d(p, q),$$

ahol $L(\gamma)$ a görbe korábban tárgyalt ívhosszát jelöli.

Megjegyzés:

1. Vegyük észre, hogy egy Riemann-sokaság nem feltétlenül lesz geodetikus metrikus tér, ilyen például $\mathbb{R}^2 \backslash 0$ a szokásos euklideszi metrikával. Viszont ha egy M Riemann-sokaság geodetikusan teljes, akkor M geodetikus metrikus tér is egyben.

2. Ha γ egy, a definíció feltételét teljesítő görbe, akkor szükségképpen geodetikus.

3. Ha X geodetikus metrikus tér, akkor szükségképpen összefüggő.

3.23. Definíció. *Egy (X, d) metrikus tér r-geodetikus, ha $\forall p, q \in X$, $d(p, q) < r$ esetén létezik őket összekötő geodetikus.*

Világos, hogy a ≥ 1 dimenziós egységgömb éppen π-geodetikus, az r sugarú gömb pedig $r\pi$ geodetikus lesz. A továbbmenetelhez szükségünk lesz az Arzelá-Ascoli tétel egyik változatára.

3.24. Állítás (Arzelá-Ascoli). *Legyen $f_n(x)$ egy $[a, b] \to X$ függvénysorozat. Ha létezik egy olyan $K \subset X$ kompakt halmaz, hogy $f_n(x) \in K$ $\forall n \in \mathbb{N}$ és $x \in [a, b]$ esetén, és az f_n függvények egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, akkor a függvénysorozatnak kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozata.*

3.25. Tétel. *Egy konvex térszerű hiperfelület mindig geodetikus metrikus tér.*

Bizonyítás: Vegyük a felület tetszőleges p és q pontját. Ezek távolságát, mint görbehosszak infimumát értelmeztük, tehát létezik egy olyan $\gamma_n : [a, b] \to M$ görbesorozat, hogy $\gamma_n(a) = p, \gamma_n(b) = b$ $\forall n$ és $\lim_{n\to\infty} L(\gamma) = d(p, q)$ Ezekről a közelítő görbékről könnyen látszik, hogy egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak. Ha belátnánk tehát, hogy a görbék egy M-beli kompakt halmazon belül mozognak, akkor lenne egyenletesen konvergens részsorozatuk. Ennek az egyenletesen konvergáló görbesorozatnak lenne pontonként határértéke, mégpedig egy folytonos görbe, melynek ívhossza épp $d(p, q)$.

3.26. Lemma. *Létezik olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $N \in \mathbb{N}$, hogy tetszőleges $t \in [a, b]$ és $N < n$ esetén $f_n(t) \in K$.*

Bizonyítás: Vegyük a p középpontú, $2 \cdot d(p, q)$ sugarú zárt metrikus gömböt. Ez a halmaz a topológiák ekvivalenciája miatt kompakt, és egy olyan görbe, melynek ívhossza $\leq 3/2 \cdot d(p, q)$, nem léphet ki belőle. Ezzel a lemmát beláttuk, a lemma bizonyításával pedig tételünket is igazoltuk.■

3.4. A $CAT(0)$ tulajdonságú terek

Rátérünk a görbületfogalom bevezetésére geodetikus metrikus terekben. Mivel nincs kezünkben a differencálási apparátus, más eszközhöz kell nyúlnunk. Nem lehet reális célunk az sem, hogy geodetikus metrikus terek minden pontjában görbületet értelmezzünk. Gondoljunk arra, hogy a felületnek lehetnek „csúcsai”, ahol a görbületfogalom épeszű kiterjesztése aligha lehetséges, tehát a görbületfogalmat lokálisan szeretnénk értelmezni. Először a ≤ 0 görbület esetét tárgyaljuk.

A differenciálapparátus hiányát terek összehasonlításával pótoljuk. Összehasonlítási térnek konstans 0 görbületű felületet szeretnénk használni, mégpedig az euklideszi síkot. Felmerülhet a kérdés, hogy miért éppen ezt választjuk a konstans 0 görbületű felületek közül. Erre az euklideszi sík kitüntetett szerepe adja a választ a konstans 0 görbületű 2 dimenziós felületek közt. Tudjuk ugyanis, hogy egyedül ez teljes és egyszeresen összefüggő az

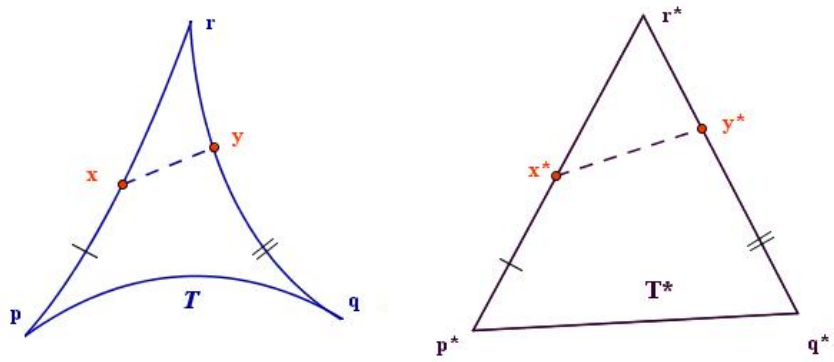
ilyen tulajdonságú felületek közt. Sőt, minden más 2 dimenziós teljes, összefüggő, konstans 0 görbületű felület előállítható, mint az euklideszi sík faktora.

3.27. Definíció. *Legyen X geodetikus metrikus tér. Egy X-beli háromszögön X három pontjának, és három, a pontokat páronként összekötő geodetikus szakaszának unióját értjük.*

3.28. Definíció. *Legyen X geodetikus metrikus tér, $\triangle(p,q,r)$ pedig legyen egy X-beli háromszög. A $\triangle(p,q,r)$ $\mathbb{R}^2$-beli összehasonlítási háromszögén olyan $\mathbb{R}^2$-beli p^*, q^*, r^* pont-hármast, és őket összekötő geodetikus szakaszokat értünk, melyekre teljesül, hogy $d(p,q) = d^*(p^*q^*)$, $d(q,r) = d^*(q^*,r^*)$, valamint $d(r,p) = d^*(r^*,p^*)$, ahol $d^*(\ ,\ )$ az euklideszi síkon mért távolság.*

A $\angle_p^{\varepsilon}(q,r)$ pedig legyen az összehasonlítási háromszög p-nél fekvő belső szöge.

Vegyük észre, hogy összehasonlítási háromszög mindig létezik és izometria erejéig egyértelmű. Fontos lesz a továbbiakban az is, hogy az eredeti és az összehasonlítási háromszög megfelelő oldalai egymásnak izometriával megfeleltethetőek, hisz azok egyforma hosszú geodetikusok.



4. ábra. Összehasonlítási háromszög és $CAT(0)$-egyenlőtlenség

3.29. Definíció. *Egy X metrikus tér $CAT(0)$ tulajdonságú, ha*

1. *X geodetikus metrikus tér.*
2. *Teljesül a $CAT(0)$-egyenlőtlenség (ld. 4. ábra), miszerint tetszőleges X-beli T háromszög, és bármely $x, y \in T$ esetén teljesül az*

$$d(x,y) \leq d^*(x^*, y^*)$$

összefüggés, ahol d^* az euklideszi távolság, és x^*, y^* az x-nek és y-nak megfelelő pontok az összehasonlítási háromszögben.

Megjegyzés: Ha X $CAT(0)$ tulajdonságú, akkor X egyben geodetikus metrikus is, tehát biztosan összefüggő.

3.30. Definíció. *Egy X metrikus tér Alekszandrov-görbülete < 0, ha a tér minden pontjának van $CAT(0)$ tulajdonságú környezete.*

A továbbiakban szeretnénk megvizsgálni a definíció néhány ekvivalens alakját.

3.31. Állítás. *Legyen X geodetikus metrikus tér. Az alábbiak ekvivalensek:*

1. *X $CAT(0)$ tulajdonságú.*
2. *Tetszőleges X-beli $\triangle(p,q,r)$ és $x \in [qr]$ esetén $d(p,x) \leq d(p^*,x^*)$, ahol p^*, x^* a megfelelő pontok az összehasonlítási háromszögben.*
3. *Tetszőleges X-beli $\triangle(p,q,r)$ és $x \in [pq]$, $y \in [p,r]$ esetén*

$$\angle_p^\varepsilon(x,y) \leq \angle_p^\varepsilon(q,r)$$

Bizonyítás vázlata: Az $1 \Rightarrow 2$ irány triviális, először belátjuk az $2 \Rightarrow 1$ irányt, majd az $1 \Leftrightarrow 3$ ekvivalenciát.

$2 \Rightarrow 1$ Vegyünk egy $x \in [q,r]$ és egy $y \in [p,q]$ pontot. A $CAT(0)$ tulajdonság igazolásához elég belátnunk, hogy $d(x,y) \leq d^*(x^*,y^*)$. A $\triangle(p,x,r)$ összehasonlítási háromszögben x-nek és y-nak megfelelő pontok távolsága nyilván legfeljebb d(x,y). Vegyük ezután a $\triangle(p,q,r)$ összehasonlítási háromszögét. Tudjuk, hogy ha két háromszög két oldala megegyezik, akkor a harmadik oldal abban nagyobb, amelyben a két egyező oldal által közrezárt szög nagyobb. Ez igazolja az állítást.

$1 \Longleftrightarrow 3$ Legyen $\triangle(p,q,r)$ X-beli háromszög, $x \in [pq]$, $y \in [p,r]$. Vegyük $\triangle(p,q,r)$ $\mathbb{R}^2$-beli összehasonlítási háromszögét $(\triangle^*(p^*,q^*,r^*))$, benne az x és y pontoknak feleljen meg x^* és y^*. Vegyük ezen kívül $\triangle(p,x,y)$ $\mathbb{R}^2$-beli összehasonlítási háromszögét $(\triangle'(p',x',y'))$. Tudjuk, hogy ekkor $d(p,x) = d(p^*,x^*) = d(p',x')$, valamint $d(p,x) = d(p^*,y^*) = d(p',y')$. Ezek szerint az $\mathbb{R}^2$-beli $\triangle(p'x',y')$ és $\triangle^*(p^*,x^*,y^*)$ két oldala megegyezik. Használjuk fel ismét, hogy ha két háromszög két oldala megegyezik, akkor a harmadik oldal abban nagyobb, amelyben a két egyező oldal által közrezárt szög nagyobb. Eszerint $d(x^*,y^*) \geq d(x',y')$ pontosan akkor teljesül, ha $\angle_p^\varepsilon(q,r) \geq \angle_p^\varepsilon(x,y)$. Mivel $d(x,y) = d(x',y')$, az ekvivalenciát beláttuk. ■

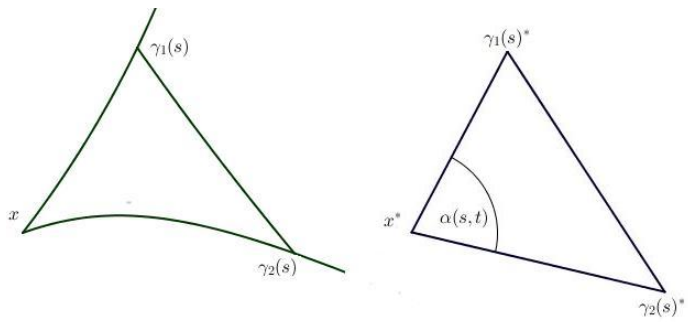
Egy negyedik, közismert átfogalmazáshoz szükségünk lesz egy újabb szögfogalomra.

3.32. Definíció. *Legyen X metrikus tér, melynek $\gamma_1 : [0,a] \to X$ és $\gamma_2 : [0,b] \to X$ közös kezdőpontú geodetikusai, azaz $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Tekintsük a x $\gamma_1(s)$, $\gamma_2(t)$ ponthármas összehasonlítási háromszögét az $\mathbb{R}^2$ téren, jelölje az összehasonlítási háromszög x^*-nál lévő szögét $\alpha(s,t)$ (ld 5. ábra). A két geodetikus, γ_1 és γ_2 Alekszandrov-szögén a következőt értjük:*

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \limsup_{s,t\to 0} \alpha(s,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{0<s,t<\varepsilon} \alpha(s,t).$$

3.33. Állítás. *Ha X geodetikus metrikus tér, akkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. *X $CAT(0)$ tulajdonságú*
2. *X tetszőleges geodetikus háromszögében bármely oldalpár által bezárt Alekszandrov-szög kisebb, mint az $\mathbb{R}^2$-beli összehasonlítási háromszög megfelelő belső szöge.*



5. ábra. Az Alekszandrov-szög

A fejezet végén fontos még néhány szót szólnunk arról, hogy mennyire esik egybe a most kialakított görbületfogalmunk a Riemann-sokaságok körében megismert görbületfogalommal. Sok félreértésre adhatna ugyanis okot, ha egy Riemann-sokaságon a két görbületfogalom nem csengene egybe, mást értenénk lokálisan a felület hagyományos, illetve Alekszandrov-görbületén. Hogy ez nem fordulhat elő, a következő fontos tétel biztosítja. Bizonyítása megtalálható [1] 165-170. oldalán.

3.34. Tétel. *[Alekszandrov, Toponogov] Legyen M teljes Riemann-sokaság. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *X Alekszandrov-görbülete ≤ 0*
2. *M szekcionális görbületei nempozitívak a felület minden pontjában.*

Megjegyzés: Fontosnak tartjuk megemlíteni, hogy a definíció ötletét használva beszélhetünk nem csak $CAT(0)$, hanem $CAT(\varepsilon)$ tulajdonságú terekről is, ahol ε tetszőleges valós szám. Mindössze annyit kell változtatnunk az eddigieken, hogy az összehasonlítási háromszöget pozitív esetben az ε görbületű kétdimenziós gömbön, negatív esetben pedig az ε görbületű hiperbolikus síkon tekintjük. Ennek segítségével a $CAT(\varepsilon)$-tulajdonság definíciója a negatív esetre változatlanul, pozitív esetre néhány apró technikai kiegészítéssel átvihető (ezekre a techinkai feltételekre azért van szükség, mert a gömbön nem létezik akármilyen hosszúságú geodetikus, így nem tekinthetjük akármilyen háromszög összehasonlítási háromszögét).

3.5. A $CAT(0)$ terek néhány tulajdonsága

Ebben a fejezetben összegyűjtjük a $CAT(0)$ terek néhány egyszerű jellemzőjét, majd bizonyítás nélkül megemlítünk néhány tételt az ilyen tulajdonságú terek elméletéből. Megjegyezzük, hogy állításainkat ugyanúgy kimondhatóak negatív görbületre, illetve kisebb módosításokkal pozitív görbületre is.

3.35. Állítás. *Legyen X $CAT(0)$ típusú tér. Ekkor a tér két tetszőleges pontja közt húzott geodetikus egyértelmű.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy létezik $p, q \in X$, melyek közt két különböző geodetikus is húzható $(\gamma_1,\ \gamma_2)$. Legyen $s \in \gamma_1$ illetve $r \in \gamma_2$ két olyan pont, melyekre $d(p,s) = d(p,r)$. Ha vesszük a $\triangle(p,q,r)$ (valódi) háromszög összehasonlítási háromszögét, elfajuló háromszöget kapunk, melyben $s^* = r^*$. E pontpárra alkalmazva a $CAT(0)$ tulajdonságot ellentmondásba ütközünk. ■

Megszoktuk, hogy „rendes" terekben a nyílt/zárt gömbök konvex halmazok. A $CAT(0)$ tulajdonság közvetlen következménye, hogy most vizsgált metrikus tereinkre öröklődik ez a tulajdonság.

3.36. Állítás. *Egy $CAT(0)$ tulajdonságú X metrikus tér tetszőleges sugarú és középpontú gömbje konvex.*

Folytassuk vizsgálatainkat a konvexitás körében.

3.37. Állítás. *Ha X egy $CAT(0)$ tulajdonságú metrikus tér, akkor a $d:\ X \times X \to \mathbb{R}$ függvény konvex, azaz tetszőleges $\gamma_1,\ \gamma_2:\ [0,1] \to X$ geodetikusok esetén a $d:[0,1] \to \mathbb{R}\quad t \mapsto d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ egyváltozós, valós értékű függvény konvex.*

Bizonyítás: Állításunkhoz elég igazolni a következő egyenlőséget: $\forall t \in [0,1]$ esetén

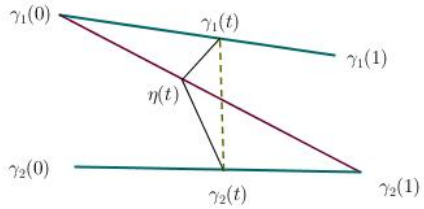
$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq (1-t)d(\gamma_1(0)\gamma_2(0)) + t \cdot d(\gamma_1(0), \gamma_2(1).$$

Két esetet különböztetünk meg.

1. Ha γ_1 és γ_2 kezdőpontja közös, akkor a kezdőpontok távolsága 0, azaz csak annyit kell igazolni, hogy $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq t \cdot d(\gamma_1(0), \gamma_2(1)$. Vegyük a $\gamma_1(0),\ \gamma_1(1),\ \gamma_2(1)$ ponthármas euklideszi összehasonlítási háromszögét. Ebben $d(\gamma_1^*(t), \gamma_2^*(t)) = t \cdot d(\gamma_1^*(0), \gamma_2^*(1)$ hasonlóság miatt. Mivel a tér $CAT(0)$, az eredeti pontokra épp a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

2. Ha γ_1 és γ_2 kezdőpontja különböző. Kössük össze $\gamma_1(0)$-t és $\gamma_2(0)$-t egy $\eta[0,1] \to X$ lineárisan átparamétrezett geodetikussal. Ekkor az előző eset alapján a következőket mondhatjuk:

$$d(\gamma_1(t), \eta(t)) \leq t \cdot d(\gamma_1(0), \gamma_2(1), \text{ valamint } \quad d(\gamma_2(t), \eta(t)) \leq (1-t) \cdot d(\gamma_1(0), \gamma_2(0))$$



6. ábra. A metrika konvexitása

Ha összeadjuk a két egyenlőtlenséget, és felhasználjuk, hogy $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t) \leq d(\gamma_1(t), \eta(t)) + d(\gamma_2(t), \eta(t))$ (háromszög egyenlőtlenség), megkapjuk a kívánt összefüggést. ■

A $CAT(0)$ tulajdonságnak komoly topológiai következménye is van, erről szól a következő állításunk.

3.38. Állítás. *Tetszőleges $CAT(0)$ tulajdonságú tér pontra húzható.*

Bizonyítás: Az állítás feltételből következik, hogy X tetszőleges két pontja közt egyértelműen húzható geodetikus szakasz. Válasszuk ki X egy tetszőleges p pontját. A kívánt $X \times [0,1] \to X$ homotópia legyen a p pontból geodetikusok mentén történő egyenletes összehúzása a térnek. Precízen: egy adott x ponthoz tekintsük a p-t és x-t összekötő geodetikust. Adottt, x párhoz a geodetikus p-től $t \cdot d(p, x)$ távolságra lévő pontját. Könnyen látható a $CAT(0)$ tulajdonságból, hogy ez egy folytonos leképzés, így egy megfelelő homotópia. Ezzel az állítást beláttuk. ■

Fontos eredmény, hogy a Riemann-geometriából ismert Cartan-Hadamard tétel általánosítható geodetikus metrikus terekre. A tétel Mihail Gromov tollából származik, kulcsa pedig a következő tétel, mely a lokális görbület és a $CAT(0)$ tulajdonság közt talál kapcsolatot. Bizonyítását például a [2] jegyzet tartalmazza.

3.39. Tétel. *[Gromov] Legyen X lokálisan kompakt, teljes metrikus tér, melynek Alekszandrov-görbülete nempozitív. Ha X egyszeresen összefüggő, akkor egyben $CAT(0)$ tulajdonságú is.*

3.40. Következmény. *Ha X teljes, nempozitv görbületű geodetikus metrikus tér, akkor univerzális fedőtere pontra húzható.*

Bizonyítás: Ha X nempozitív görbületű, akkor nyilván univerzális fedőtere is az. Az előző tétel szerint az univerzális fedőtér $CAT(0)$ tulajdonságú, amiből következil, hogy pontra húzható. ■

Fejezetünk végén újabb példát mutatunk $CAT(0)$ tualjdonságú térre előző tételünk segítségével.

3.41. Következmény. *A $H^n(r)$ hiperbolikus tér $CAT(0)$ tulajdonságú tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $r > 0$ esetén.*

Bizonyítás: Mivel $H^n(r)$ teljes és konstans negatív görbületű (a hagyományos értelemben), a 3.34. tétel szerint ≤ 0 Alekszandrov-görbületű. Viszont $H^n(r)$ egyszeresen összefüggő, tehát $CAT(0)$-tulajdonságú az előző eredmény értelmében.

4. Konvex, térszerű felületek közelítése sima felületekkel

Görbületfogalmunk segítségével fő célunk a 2.7. tétel kiterjesztése nem sima esetre, ezt határátmenettel szeretnénk végezni. Ehhez szükségünk lesz felületeink közelítésére.

Vegyük észre, hogy egy konvex, térszerű hiperfelület mindig megfelel egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos, konvex függvény grafikonjának, ezért valójában elég folytonos függvények grafikonját közelíteni sima függvények grafikonjával. Ehhez a konvolúciót fogjuk segítségül hívni.

4.1. A konvolúció

4.1. Definíció. *Az f és a g $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények konvolúcióján az*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ d\lambda(y)$$

függvényt értjük, amennyiben az integrál értelmes.

Mint a definíció is említi, az integrál csak bizonyos esetekben értelmes. Nekünk a következő feltétel lesz kézenfekvő:

4.2. Állítás. *Ha f lokálisan integrálható, g pedig kompakt tartójú, akkor $f * g$ létezik.*

Megemlítjük, hogy ha a konvolúció értelmes, akkor, mint függvények közti művelet, kommutatív, asszociatív, disztributív.

Lássuk most, hogyan tudjuk felhasználni a konvolúciót tetszőleges folytonos függvény simákkal való közelítésére. Ehhez értelmezzük az $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt a következő módon:

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{ha } |x| < 1 \\ 0 & \text{ha } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Közismert tény, hogy ekkor $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, valamint $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$.

Értelmezzünk további, η megfelelő nyújtásával-zsugorításával keletkező függvényeket:

$$\eta_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

ahol a c_ε konstanst úgy választjuk, hogy $\eta_\varepsilon(x)$ integrálja szintén 1 legyen. Foglaljuk össze eredményeinket:

4.3. Állítás. *Az η_ε függvénycsalád elemei simák, L_1-beli normájuk 1, és* $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon = B_\varepsilon(0)$

A következő közismert tétel garantálja a folytonos közelítést (megtalálható például [6] 34. oldalán).

4.4. Tétel. *Legyen u egy $L_1(\mathbb{R}^n)$-beli függvény, mely egy kompakt halmazon kívül m. m. 0. Értelmezzük $u_\varepsilon(x)$-t a következő konvolúcióként:*

$$u_\varepsilon(x) := u * \eta_\varepsilon(x).$$

Ekkor $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Továbbá ha u folytonos, akkor $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen, amennyiben $\varepsilon \to +0$.

Kis szépséghibája a dolognak, hogy a tétel alkalmazásához a kiindulási u függvény kompakt tartójú kell, hogy legyen, amit sajnos semmi nem garantál konvex térszerű függvények esetén. Ezen azonban könnyen segíthetünk.

Mivel az Alekszandrov-görbület lokális tulajdonság, elég nekünk az f konvex, térszerű függvényt lokálisan egyenletesen közelíteni. Legyen x az a pont, amely egy környezetében közelíteni akarunk. Vegyük az x körüli r sugarú zárt $\overline{B_r(x)}$ euklideszi gömböt, amely egy kompakt halmaz, majd szűkítsük le f-et erre a kompakt halmazra (f'). Ismert, hogy f'-t ki tudom terjeszteni $\mathbb{R}^n$-re úgy, hogy a kiterjesztés folytonos és kompakt tartójú legyen, jelölje a kiterjesztést $\widetilde{f}$.

Az előző tétel szerint az $\widetilde{f}$ függvényt már tudom egyenletesen közelíteni a $\widetilde{f}_\varepsilon$ függvényekkel. Viszont a $B_r(x)$ halmazon $f = \widetilde{f}$, így $\widetilde{f}\varepsilon \to f$ egyenletesen a $B_r(x)$ nyílt halmazon. Ezzel meggondoltuk azt, hogy f grafikonja egyenletesen közelíthető tetszőlegesen nagy kompakt halmazon.

Hiperfelületeink közelítése folyamán azt is garantálni szeretnénk, hogy a közelítő függvények is konvexek és térszerűek legyenek, ezt vizsgáljuk következő alfejezetünkben.

4.2. Konvexitás és térszerűség

Ebben a fejezetben az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a benne szereplő függvények a teljes $\mathbb{R}^n$ téren értelmezve vannak.

4.5. Állítás. *Ha f konvex, valamint az $f * g$ konvolúció létezik, akkor $f * g$ is konvex.*

Bizonyítás: Vegyünk tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^n$ pontokat. Azt kell bizonyítanunk, hogy tetszőleges $t \in [0,1]$ esetén $t \cdot f * g(x) + (1-t) \cdot f * g(z) \geq f * g(tx + 1 - t)y)$.

$$t \cdot f * g(x) + (1-t) \cdot f * g(z) = t \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ d\lambda(y) + (1-t) \int_{\mathbb{R}^n} f(z-y)g(y) d\lambda(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} t \cdot f(x-y)g(y) + (1-t)f(z-y)g(y) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^n} (t \cdot f(x-y) + (1-t)f(z-y))\, g(y) d\lambda(y).$$

Tudjuk, hogy f konvexitása miatt $t \cdot f(x-y) + (1-t)f(z-y)q \geq f(t(x-y) + (1-t)(z-y)) = f(tx + (1-t)y)$. Ezt behelyettesítve a fenti formulába épp a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk. ■

Következzen a konvexitás után a térszerűség. A továbbiakban térszerűnek nevezünk egy folytonos, konvex függvényt, ha grafikonjának tetszőleges húrja „térszerű”, pontosabban fogalmazva $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén $|f(x) - f(y)| < \|x - y\|$.

4.6. Állítás. *Legyen adott egy konvex térszerű f függvény, valamint egy kompkat tartójú g, melyre $\|g\|_1 = 1$. Ekkor $f * g$ is térszerű.*

Bizonyítás: Azt kellene belátnunk, hogy tetszőleges $\forall x, z \in \mathbb{R}^n$ esetén $|f * g(x) - f * g(z)| \leq \|x - z\|$. Lássuk a számolást:

$$|f * g(x) - f * g(z)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)d\lambda(y) - \int_{\mathbb{R}^n} f(z-y)g(y)d\lambda(y) \right| \leq$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-y) - f(z-y)\big)g(y)d\lambda(y) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y) - f(z-y)\big| \cdot |g(y)|d\lambda(y) \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \big\| \underbrace{(x-y) - (z-y)}_{x-z} \big\| \cdot |g(y)|d\lambda(y) \leq \|x-z\| \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|d\lambda y = \|x-z\|.$$

Az utolsó előtti egyenlőtlenségében f térszerűségére hivatkozunk. Az egyenlőtlenséglánccal pedig az állítást beláttuk. ■

Odáig jutottunk tehát, hogy tetszőleges M konvex, térszerű hiperfelületet tudunk (tetszőleges kompakt halmazon egyenletesen) közelíteni egy M_n sima, konvex, térszerű hiperfelület-sorozattal. Mivel ezt a közelítést arra akarjuk használni, hogy M $CAT(0)$-ságát belássuk, igen lényeges az alábbi állítás.

4.7. Állítás. *Az M_n felületek $CAT(0)$ tulajdonságúak.*

Bizonyítás: Mivel M_n konvex, ezért tetszőleges pontjában vett tetszőleges szekcionális görbülete ≤ 0 (ld. 2.7. következmény). Viszont ekkor tudjuk róla, hogy Alekszandrov-görbülete nempozitív. Sőt, mivel egy függvénygrafikon mindig pontrahúzható, ezért a 3.39. tétel szerint $CAT(0)$ tulajdonságú is egyben.

4.3. A közelítő felületeken vett távolság

E fejezetben azt szeretnénk megvizsgálni, hogy mi történik a közelítő felületeken vett metrikus távolsággal a limeszelés során.

Van tehát egy M konvex tészerű hiperfelület az $\mathbb{R}^{n+1}_1$ térben, valamint tetszőleges $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz fölött egy M_n, egyenletesen közelítő hiperfelület-sorozat. Az M felületet a K halmaz fölött egy $f: K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, a közelítő felelületet pedig egy $f_n: K \to \mathbb{R}$ függvénysorozat grafikonjaként nyerhetjük, ahol $f_n \to f$ egyenletesen. Ezek alapján az $(x, f(x))$ pár egyértelműen megad egy $p \in M$ pontot, ahol $x \in K$ (hasonlóan az $(x, f_n(x))$ párok M_n-beli pontokat határoznak meg).

Elnevezések:

- Az M felület egy $(x, f(x))$ pontjának n-edik felemeltjén az $(x, f_n(x)) \in M_n$ pontot értjük. Ha p az eredeti pont, az n-edik felemeltet p_n-nel jelöljük.
- Egy M-beli húr n-edik felemeltjén a végpontok felemeltjeit összekötő M_n-beli húrt értjük.

- Egy M-beli töröttvonal n-edik felemeltjén az osztópontok n-edik felemeltjeiből és az őket összekötő húrokból képzett M_n-beli töröttvonalat érjük.

Tisztázzunk még egy apróságot. Legyenek adottak a $p = (x, f(x))$ és a $q = (y, f(y))$ M-beli pontok. Ekkor $|f(x) - f(y)|$ értelemszerűen a két függvényértékek különbségének abszolútértékét jelöli, azaz a két pont magasságának eltérését. Vegyük észre, hogy a pq húr hosszát ebben az esetben így írhatjuk fel: $\|p, q\|_s^2 = \|x - y\|^2 - |f(x) - f(y)|^2$.

A következőkben szeretnénk belátni, hogy ha adott két M beli pont, p és q, akkor a pontok felemeltjeinek távolsága tart a $d(p, q)$ távolsághoz. Ezt több lépésen keresztül fogjuk megmutatni. Először is igazoljuk, hogy a felemelt húrok hossza tart az eredeti húrhosszhoz.

4.8. Állítás. *Legyenek $p = (x, f(x))$ és $q = (y, f(y))$ M-beli pontok, felemeltjeiket jelölje p_n, illetve q_n. Ekkor*

$$\|p_n, q_n\|_s \to \|p, q\|_s, \qquad \text{ha } n \to \infty$$

Bizonyítás: Ha az n indexet elég nagyra választjuk, akkor $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ $\forall x \in K$. Ebből következik a következő, pontok magasságeltéréséről szóló egyenlőtlenség:

$$|f(x) - f(y)| - 2\varepsilon < |f_n(x) - f_n(y)| < |f(x) - f(y)| + 2\varepsilon$$

Euklideszi gyakorlatunkból könnyen következtethetnénk helytelenül: ha a függőleges elmozdulás különbsége $< 2\varepsilon$, akkor a háromszögegyenlőtlenség miatt a húrhosszak is legfeljebb ennyivel térnek el. Szépséghibája a dolognak, hogy a befoglaló téren nem áll a háromszögegyenlőtlenség, sőt, egészen kicsi függőleges elmozdulások is eredményezhetnek akármilyen nagy húrrövidüléseket. Ezen némi többletszámolással segítünk:

$$\|p_n, q_n\|_s^2 = \|x - y\|^2 - |f_n(x) - f_n(y)|^2 > \|x - y\|^2 - |(f(x) - f(y) + 2\varepsilon)|^2 =$$

$$\|x - y\|^2 - |f(x) - f(y)|^2 + 4\varepsilon|f_n(x) - f_n(y)| + 4\varepsilon^2 = \|p, q\|_s^2 + 4\varepsilon|f_n(x) - f_n(y)| + 4\varepsilon^2$$

.

Ebből már következik, hogy $\|p_n, q_n\|_s^2 \longrightarrow \|p, q\|_s^2$ (például a $\delta = max\{\sqrt{\varepsilon}/4, \frac{\varepsilon}{8|f_n(x) - f_n(y)|}\}$ megfelelő választás), amivel az állítást beláttuk. ■

4.9. Következmény. *Ha adott egy M-beli γ töröttvonal, akkor felemeltjeinek hossza tart a töröttvonal hosszához.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a γ töröttvonal k darab húrból áll. Minden egyes húrhoz válasszunk egy olyan n_i indexet, hogy $n > n_i$ az eltérés az eredeti és a felemelt húr között legfeljebb ε/k legyen. Ha $N = max\{n_i\}$, akkor tetszőleges $m > N$ esetén γ m-edik felemeltje legfeljebb ε-nyit tér el a γ töröttvonal hosszától.

4.10. Következmény. *Legyen az M-beli p és q pontok távolsága d. Ekkor*

$$\limsup_{n \to \infty} d_n(p_n, q_n) < d.$$

Bizonyítás: Tudjuk, hogy M-ben találunk olyan γ töröttvonalat, mely hossza legfeljebb $d+\varepsilon/2$. Ehhez a töröttvonalhoz van olyan n_0 index, hogy $n > n_0$ esetén $L_n(\gamma_n) < L(\gamma) + \varepsilon/2$. Ekkor viszont $n > n_0$ esetén γ felemeltjének hossza $< d+\varepsilon$. ■

Ennél többet szeretnénk igazolni. Azt akarjuk, hogy a következményben egyenlőség és limesz szerepeljen. Első ötletünk a következő lehet: végezzük az egész közelítést fordítva. Tehát nem az M felületen rögzítünk egy γ töröttvonalat, és annak hosszát közelítjük a γ_n felemeltek hosszával, hanem a közelítő felületeken veszünk kellően rövid töröttvonalakat, és vizsgáljuk levetítettjeinek hosszát.

Kézenfekvő gondolatnak tűnik, hogy ha n-t elég nagyra választjuk, akkor a hosszt közelítő γ_n töröttvonal levetítettjének hossza biztosan közel van γ_n hosszához. Ez azonban nem adódik ilyen egyszerűen. Ugyanis a távolságot közelítő töröttvonalak egyre több szakaszból állhatnak. Bár húrjaikhoz külön-külön találhatunk olyan indexet, hogy a húr és levetítettjének hossza csak akármilyen kicsit térjen el egymástól, ha a húrok száma egyre nő, nehéz garantálnunk univerzális küszöb létezését.

Más eszközökhöz nyúlunk, hogy belássuk a következő tételt:

4.11. Tétel. *Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöb, hogy tetszőleges $n > n_0$ esetén $d_n(p_n, q_n) > d(p,q) - \varepsilon$, tehát az eddigiek fényében*

$$\lim_{n\to\infty} d_n(p_n, q_n) = d(p,q).$$

A tétel igazolásához elég megmutatnunk, hogy ha n-t elég nagyra választjuk, akkor tetszőleges p_nq_n közti, t_n hosszúságú töröttvonalhoz található $t_n - \varepsilon$ hosszúságú M-beli, pq közti töröttvonalat. Szükségünk lesz a továbbiakban a következő fogalomra:

4.12. Definíció. *Egy $\mathbb{R}^{n+1}_1$-beli térszerű töröttvonalat konvexnek nevezünk, ha a húrok (előjelesen vett) meredekségei monoton növő sorozatot alkotnak.*

Megjegyzés: Beszélnünk kell a definíció kapcsán arról, hogy mit értsünk előjeles meredekségeken. Menjünk végig a töröttvonal pontjain, ez a húrok sorrendjét is meghatározza. Egy húr meredekségének előjele legyen negatív, ha első végpontja magasabban van, mint a második (azaz az első végpont utolsó koordinátája nagyobb a második végpont utolsó koordinátájánál). Jegyezzük meg, hogy a meredekségek előjele függ attól, hogy a töröttvonalon melyik irányban mentünk végig. A monotonitás viszont független a kezdőpont választásától, tehát a definíció jó.

4.13. Állítás. *Ha adott egy M konvex térszerű felület x és y pontja, akkor a $d(x,y)$ távolság tetszőlegesen közelíthető konvex töröttvonalak hosszával.*

Ehhez lássunk egy lemmát:

4.14. Lemma. *Ha adott az M felületen egy három pontból álló töröttvonal, mely nem konvex, akkor a töröttvonal két végpontját összekötő húr rövidebb, mint a töröttvonal hossza.*

Bizonyítás: Ehhez azt kell meggondolni, hogy a három pont térszerű síkot határoz meg, ennek bizonyítását nem részletezzük (azt kell belátni, hogy a sík a középső pontba állított fénykúpon kívül esik, ez könnyen igazolható). ■

Az állítás bizonyítása: Azt fogjuk belátni, hogy tetszőleges töröttvonalhoz találunk nála rövidebb konvexet. Ezt a töröttvonalban szereplő húrok száma szerinti indukcióval tesszük.

$n = 2$: Ha két húrból álló töröttvonalunk nem konvex, akkor alkalmazhatjuk az előző lemmát, cseréljük le a töröttvonalat a végpontokat összekötő húrra (ez konvex, és rövidebb).

Tegyük fel, hogy van egy n húrból álló nemkonvex töröttvonalunk. Keressünk egy olyan csatlakozó húrpárt, mely elrontja a konvexitást, és cseréljük ki az előző lemma szerint a szabad végpontokat összekötő szakaszra. Ezzel a töröttvonalat rövidítettük, a benne levő húrok számát eggyel csökkentettük. Az új töröttvonalra alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, amivel az állítást igazoltuk ■.

Ezek szerint elég a továbbiakban konvex töröttvonalakkal foglalkoznunk.

4.15. Tétel. *Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan n_0 küszöbindex, hogy ha $n > n_0$, γ_n pedig egy konvex M_n-beli t_n hosszúságú konvex töröttvonal p_n és q_n közt, akkor létezik olyan M-beli pq töröttvonal, melynek hossza $< t_n + \varepsilon$*

Jegyezzük meg, hogy tételünk bizonyításával a 4.11. tételt is igazoljuk.

Bizonyítás: Minden γ_n töröttvonalhoz külön-külön legyártunk egy olyan M-beli konvex töröttvonalat, amely csak kicsit tér el γ_n hosszától. Az eljárást bemutatjuk komoly egyszerűsítő feltevések mellett.

1. lehetőség: Ha γ_n végpontjai éppen p és q (azaz rajta vannak M-en), valamint γ_n minden pontja az M felület fölött található. Az új töröttvonal előállítása folyamán két műveletet alkalmazunk, a *Lehúzás*-t, illetve *Kiegyenesítés*-t.

- **Lehúzás:** A töröttvonalak megfelelő csúcsait függőlegesen lefelé (azaz az $(n+1)$-edik koordinátairányban) fogjuk mozgatni egészen addig, míg azok M-re nem kerülnek. Ezt a következő módon tesszük:

  Először is bontsuk fel a töröttvonalat résztöröttvonalak egymásutánjára (időnként a résztöröttvonalra a rész szót is használjuk az egyszerűség kedvéért). Két egymást követő húr akkor kerüljön egy résztöröttvonalba, ha meredekségük egyezik. Egy-egy résztöröttvonalat mindig együttesen mozgatunk.

  A felbontás elvégzése után indukciót végzünk a résztöröttvonalak száma szerint. Ha csak egy résztöröttvonalunk van, akkor továbblépünk a *Kiegyenesítés* műveletére.

  Ha több résztöröttvonalunk van, akkor vegyünk egy olyan x töréspontot, mely két részt választ el. Ezután ezt a pontot, és vele együtt mind a két hozzá kapcsolódó résztöröttvonal csúcsait függőlegesen lefelé mozgatjuk. Kivétel ezalól a két résztöröttvonal másik két végpontját, ezeket fixáljuk. A lefelé mozgatást úgy végezzük, hogy az egyes résztöröttvonalakban a meredekségek egyenlőek maradjanak egymással (erre azért van szükség, hogy töröttvonalunk továbbra is konvex maradjon). A 3.6

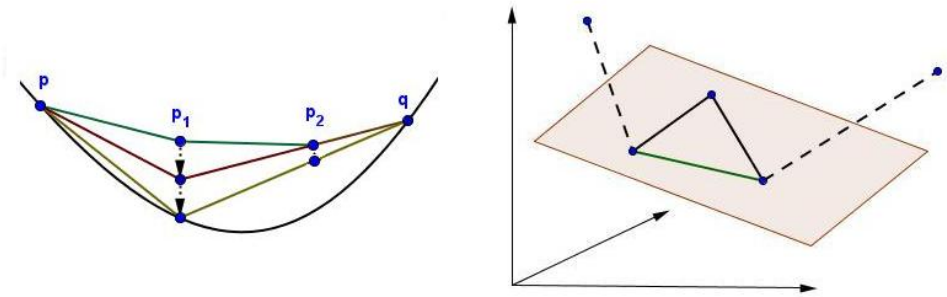
állítás segítségével könnyen belátható, hogy ilyen mozgatással a töröttvonal hossza monoton csökken.

A függőleges mozgatást két esetben állítjuk meg. Egyrészt akkor, amikor elromlana a konvexitás, azaz az egyik részben szereplő meredekségek egyenlőek lesznek a szomszéd részben szereplő meredekségekkel. Ilyenkor a két rész unióját képezzük, és folytatjuk a műveletet, most már az új résztöröttvonalakkal.

Másrészt akkor, ha valamely töréspont rákerül M-re. Ilyenkor ennél a töréspontnál kettéosztjuk a töröttvonalat, és annak mindkét felén külön-külön folytatjuk indukcióval a *Lehúzás* műveletét. A művelet véges sok lépésben befejeződik.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a sorozatos lehúzások végeredménye nem M-beli törötvonal, ami nekünk célunk. Ennek kiküszöbölésére szolgál a következő művelet:

- **Kiegyenesítés:** E művelet folyamán az egyes résztöröttvonalakat helyettesítjük egyetlen szakasszal. Pontosabban fogalmazva vesszük egy résztöröttvonal két végpontja által meghatározott M-beli húrt, majd a résztöröttvonalat erre cseréljük. Megintcsak meggondolható, hogy ezekkel a helyettesítésekkel a töröttvonal rövidül (a végpontok közti magasságeltérések változatlanok, viszont a térszerű irányokban rövidítettünk).



7. ábra. A *Lehúzás* és a *Kiegyenesítés* művelete

A két művelet elvégzése után olyan M-beli töröttvonalat kaptunk, mely rövidebb az eredetinél. Ezzel az állítást az egyszerűsített feltételek mellett beláttuk.

2. lehetőség: Ha γ_n tetszőleges elhelyezkedésű. Ekkor először is toljuk el függőlegesen az egész közelítő felületet addig, amíg a töröttvonalnak egyetlen pontja sem marad az M felület alatt, legalább egy pontja viszont rajta lesz. Ha a közelítő felület függőleges távolsága az eredetitől $\varepsilon/2$ (egyenletes konvergencia folytán elérhető), akkor az eltolt közelítő felület pontjai szintén csak ε-nyira vannak a levetített M-beli megfelelőiktől.

Az M-beli töröttvonalat most kicsit másképp állítjuk elő. Vegyük először is a közelítő felületek p_n illetve q_n pontjaiba állított zárt negatív fénykúpokat. Ezek az M felületből két

kompakt halmazt metszenek ki, K-t és L-t, amelyek tartalmazzák a p illetve q pontokat. Ha n-et elég nagyra választjuk, akkor elérhetjük, hogy K illetve L benne feküdjenek p illetve q $\varepsilon/3$ sugarú környezetében az M-beli metrikára nézve.

Feltehetjük továbbá, hogy a γ_n töröttvonalnak van olyan p' illetve q' osztópontja, amelyeknek M-re eső vetülete kívül esik K-n illetve L-n, de közelebb van p-hez, illetve q-hoz, mint $\varepsilon/2$. Ha ugyanis nem lennének ilyen osztópontok, osszunk ketté töröttvonalbeli szakaszokat.

Ezek után elkezdjük végrehajtani a γ_n töröttvonalon a *Lehúzás* műveletét, de csak azokon a töréspontokon, amelyek p' és q' közé esnek, illetve ahol a töröttvonal meredeksége megváltozik.

A *Lehúzás* művelete véges sok lépésben véget ér, és végeredményül olyan konvex térszerű törötvonalat kapunk, amelyben p' és q', valamint a köztük lévő összes résztöröttvonal végpontjai rákerültek az M felületre. Világos, hogy K-ra illetve L-re azért volt szükség, hogy az egyes szakaszok végig térszerűek maradjanak.

Annak elérésére, hogy a töröttvonal p' és q' közé eső része M beli töröttvonal legyen, végezzük el a *Kiegyenesítés* műveletét ezen a részen. A korábbiakhoz hasonlóan igaz, hogy mind a *Lehúzás* mind a *Kiegyenesítés* műveletekkel a töröttvonal hosszát csökkentettük.

Egy dolgunk maradt: cseréljük ki a kapott töröttvonal p_n és p' közti részét a pp' húrra, illetve a q' és q_n közti részt a $q'q$ húrra. Ezáltal a csere által a töröttvonal hossza maximum $2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$-nal növekszik.

Utolsó lépésünkkel olyan M-beli töröttvonalat kaptunk, amelynek hossza legfeljebb ε-nal tér el az eredeti töröttvonal hosszától, amivel az állítást beláttuk. ■

4.4. Görbület és konvexitás

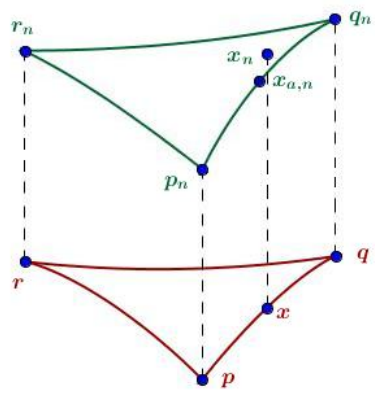
Ebben a fejezetben bizonyítom szakdolgozatom fő állítását:

4.16. Tétel. *Tetszőleges $\mathbb{R}_1^{n+1}$-beli M konvex, térszerű hiperfelület $CAT(0)$ tulajdonságú.*

Bizonyítás: A bizonyításhoz az előző fejezetekben létrehozott M_n közelítő felületeket fogjuk felhasználni, ezekről ugyanis korábban láttuk, hogy $CAT(0)$ tulajdonságúak. További feladatunk a határátmenet pontos kivitelezése.

Legyen adott egy $\triangle(p,q,r) \in M$, valamint pq oldalának egy tetszőleges x pontját. A 3.31. állítás szerint tételünket igazoljuk, ha belátjuk a $d(r,x) \leq d(r^*,x^*)$ egyenlőtlenséget, ahol a *-gal indexelt pontok az euklideszi összehasonlítási háromszög megfelelő pontjai. Legyen a továbbiakban $d(p,x) = a$.

Vegyük a $\triangle(p,q,r)$ és az x pont n-edik felemeltjét. Sajnos semmi nem garantálja hogy x_n illeszkedjen a p_nq_n szakaszra, ezért szükségünk lesz egy további pontra: legyen $x_{a,n}$ a $[p_nq_n]$ geodetikus szakasz azon pontja, amely p_n-től a távolságra van. Jegyezzük meg, hogy ilyen pont csak akkor létezik, ha $d(p_n,q_n) \geq a$, de elég nagy n esetén ez biztosan teljesül.



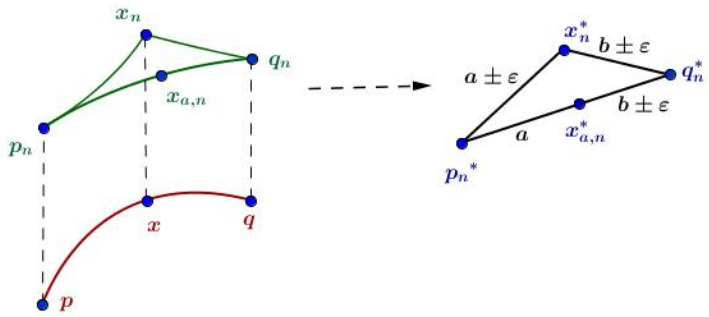
8. ábra. A háromszög felemelése

Mivel a közelítő terek $CAT(0)$ tulajdonságúak, ezért

$$d(r_n, x_{a,n}) \leq d(r_n^*, x_{a,n}^*).$$

Sőt azt is tudjuk, hogy az M_n-beli $\triangle(p_n, q_n, r_n)$ háromszögek euklideszi összehasonlítási háromszögeinek sorozata konvergál (oldalhosszban, szögben, összes megfelelő adatában) az M-beli $\triangle(pqr)$ háromszög összehasonlítási háromszögéhöz, tehát $d(r_n^* x_{a,n}^*) \longrightarrow d(r^*, x^*)$, ha $n \to \infty$. Ha ezt összevetjük előző egyenlőtlenségünkkel, láthatjuk, hogy mindössze annyit kell belátnunk, hogy $d(r_n, x_{a,n}) \to d(r, x)$, ha $n \to \infty$. Ehhez szükségünk van az alábbi lemmára:

4.17. Lemma. *A $[pq]$ geodetikus szakasz tetszőleges x pontjára igaz, hogy $d(x_n, x_{a,n}) \to 0$, ha $n \to \infty$.*



9. ábra. A felemeléskor keletkezett segédpontok és az összehasonlítási háromszög

Bizonyítás: Válasszuk az n indexet úgy, hogy $|d(p,q) - d(p_n, q_n)| < \varepsilon$ legyen, valamint $|d(p_n, x_n) - a| < \varepsilon$, és $|d(x_n, q_n) - b| < \varepsilon$ is teljesüljön. Ebben az esetben a $\triangle(p_n, q_n, x_n)$-ben a $p_n x_n$, $x_n q_n$ oldalak összege mindössze 3ε-nyival térhet el a $p_n q_n$ oldal hosszától.

Vegyük e háromszög euklideszi összehasonlítási háromszögét. A $CAT(0)$ tulajdonság miatt $d(x_n, x_{a,n}) \leq d(x_n^*, x_{a,n}^*)$. Ha $n \to \infty$, az összehasonlítási háromszögek egy olyan elfajuló háromszöghöz tartanak, melyben $\lim x_n^* = \lim x_{a,n}^*$. Ebből az CAT-egyenlőtlenség miatt következik, hogy $d(x_n, x_{a,n}) \to 0$, ha $n \to \infty$. ■

A tétel bizonyítása: Egyedüli feladatunk maradt azt belátni, hogy $d(r_n, x_{a,n}) \to d(r, x)$, ha $n \to \infty$. Ehhez használjuk a következőt:

$$d(r_n, x_n) - d(x_n, x_{a,n}) \leq d(r_n, x_{a,n}) \leq d(r_n, x_n) + d(x_n, x_{a,n}).$$

Ha $n \to \infty$, akkor az előző lemma miatt $d(x_n, x_{a,n}) \to 0$. A távolságok konvergenciája miatt azt is tudjuk, hogy $d(r_n, x_n) \to d(r, x)$. Határátmenetet alkalmazva a fenti egyenlőtlenségláncra, azt kapjuk, hogy $d(r_n, x_{a,n}) \to d(r, x)$. Ezzel korábbi megjegyzésünk szerint igazoltuk tételünket. ■

5. Konvexitási feladatok a középiskolában

Bevezetés

Középiskolában gyakran találkozunk a konvexitás fogalmával. Népszerű a „definíciója”, miszerint: El lehet-e bújni az alakzatban avagy sem? Ám, mint olyan sok középiskolai fogalmon, nem látszódik, hogy bármilyen komolyabb haszna lenne, illetve hogy túlmutatna önmagán.

Akik viszont tanultak akárcsak egy kevés fölsőbb matematikát, tapasztalhatták, mennyire sűrűn botlunk bele ebbe a fogalomba akár az analízisben, akár geometriai algoritmusok kapcsán, akár konvex geometriában, vagy éppen a kombinatorikus geometriában. A felsorolt területek legtöbbje pedig olyan, amelynek van középiskolában is tanítható szelete. Természetesen ez kívül esik törzsanyagon.

A következő fejezetekben kisérletet teszek olyan feladatcsokrok összeállítására, amelyek a konvexitás fogalmát dolgozzák fel egy erős középiskolának megfelelő szinten. A feladatok megoldása folyamán gyakran fogok használni vektorokat, valamint a teljes indukció elvét, találunk (középiskolás szemnek) eléggé összetett gondolatmeneteket, így alkalmazásukat leginkább a gimnázium utolsó két évfolyamára, fakultációra, vagy szakköri feldolgozásra tartom alkalmasnak. Lesznek persze olyan egyszerűbb feladatok is, melyek viszonylag kevés eszközt igényelnek, így alaptantervi csoportban is előkerülhetnek a törzsanyag szinesítéseként.

5.1. Konvex sokszögek analitikus leírása

Első fejezetünkben könnyen kezelhető konvex halmazok analitikus leírásával foglalkozunk. E fejezet során végig feltételezzük, hogy alakzataink (megfelelő dimenziós) derékszögű koordinátarendszerbe ágyazottak. Kezdjük meg vizsgálatainkat!

Az egy dimenziós korlátos konvex halmazok a szakaszok. Hogy egy szakasz belső pontjaiba mutató vektorok hogyan írhatók le a végpontokba mutató vektorok segítségével, fakultatív tananyag, kiszámolása jó gyakorlat a koordinátageometria bevezetésekor. A következő feladatokkal azt vizsgáljuk, hogyan alakul a háromszögek, sokszögek belső pontjainak leírása a csúcsok segítségével. Fejezetünk végén eredményeinket általánosítjuk tetraéderekre.

A feladatok kitűzése előtt mindenképpen beszélgessünk diákjainkkal arról, hogy vizsgálatainkat miért érdemes éppen a háromszögekkel kezdeni, miért van kitüntetett szerepe a síkbeli konvex halmazok között.

5.1.1. Feladat. *Adott a síkon egy ABC nemelfajuló háromszög, csúcsaiba mutató helyvektorokat jelölje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

a) Legyen P az AB szakasz felezőpontja. Írjuk fel $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ segítségével a PC szakasz felezőpontjába mutató $\vec{q}$ vektort!

b) Legyen P az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja. Írjuk fel most a PC szakasz C-hez közelebbi harmadolópontjába mutató $\vec{q}$ vektort!

c) Legyen P az AC szakasz A-hoz közelebbi negyedelőpontja. Írjuk fel most a PB szakasz felezőpontjába mutató $\vec{q}$ vektort!

d) Legyen P az AB szakasz $(t,\ 1-t)$ arányú osztópontja $0 \leq t \leq 1$. Írjuk fel a PC szakasz felezőpontjába mutató $\vec{q}$ vektort!

e)Legyen P az AB szakasz $t,\ 1-t$ arányú osztópontja $0 \leq t \leq 1$. Írjuk fel a PC szakasz $(s, 1-s)$ arányú osztópontjába mutató $\vec{q}$ vektort $0 \leq s \leq 1$!

Mit vehetünk észre az együtthatókról?

Megoldás: A feladat megoldása rutinszámolás, nem részletezzük, az eredmények a következők:

a) $\vec{q} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

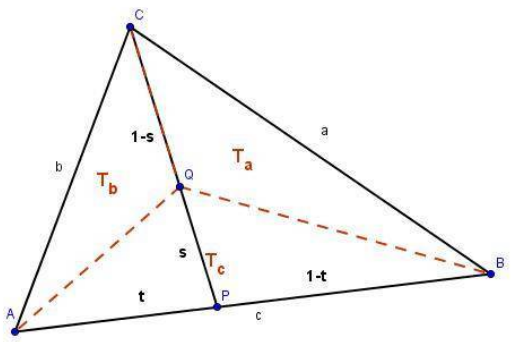
b) $\vec{q} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$.

c)$\vec{q} = \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

d) $\vec{q} = (1-t) \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + t \cdot \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

e)$\vec{q} = (1-t)(1-s)\vec{a} + t(1-s)\vec{b} + s\vec{c}$.

Az első négy esetben jól látható, az utolsó, általános esetben kiemelés után kiszámítható, hogy az együtthatók összege 1.



10. ábra. Háromszög belső potja és a háromszög csúcsai

5.1.2. Feladat. *Továbbra is adott az ABC nemelfajuló háromszög, csúcsaiba mutató helyvektorok $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Válasszunk ki a háromszöglap egy tetszőleges Q belső pontját. Adjunk az előző feladatban látotthoz hasonló módszert a $\vec{q}$ vektor felírására az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok segítségével, ahol $\vec{q}$ a Q pontba mutató helyvektor!*

Megoldás: Vetítsük a Q pontot a háromszög egy tetszőleges csúcsából, például C-ből a szemközti oldalra, legyen a vetület P. A $\vec{p}$ vektort felírhatjuk az $\vec{a}, \vec{b}$ vektorok segítségével, mint az AB szakasz osztópontját: $\vec{p} = t \cdot \vec{a} + (1-t) \cdot \vec{b}$. Ezután már $\vec{q}$-t könnyedén felírhatjuk a $\vec{p}, \vec{c}$ vektorok segítségével: $\vec{p} = s \cdot \vec{p} + (1-s) \cdot \vec{c} = s(t \cdot \vec{a} + (1-t) \cdot \vec{b}) + (1-s) \cdot \vec{c}$, amivel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések:

- Jogos kérdés, hogy mennyivel jobb módszer ez vektorok felbontására, mint a törzsnyagban szereplő lineáris kombináció (az ráadásul csak két vektort használt). Meg kell világítanunk, hogy ez nem jobb vagy rosszabb, másik módszer, melynek előnyeit később látni is fogjuk. Mindenesetre jó jel, hogy ebben a felbontásban az együtthatók összege mindig egy 1 marad.

- Egy szemléletbeli észrevétel. Fontos hangsúlyoznunk, hogy amikor levetítjük a Q pontot az AB oldalra, akkor nem biztos, hogy találunk egy pontos osztási arányt, pl. $5:6$. Ha mérünk, akkor is csak közelítő mérést végezhetünk. Viszont tudjuk, hogy létezik ilyen arány, amely segítségével a pont felírható.

- Felmerül a kérdés, hogy nem juthatunk-e más eredményre, ha másik csúcsból vetítjük a Q pontot? Erre a kérdésre a 5.2. tétel fog elegáns választ adni.

- Érdemes megbeszélni, hogy mi történik a háromszög határvonalain, hogyan írhatók fel az oldalak pontjai. Világos, hogy ekkor csak szakasz osztópontját kell képeznünk, azaz a háromból az egyik együttható 0 lesz. Emiatt az összefüggés ugyanúgy érvényes.

Az első két feladattal odáig jutottunk, hogy a háromszöglapunk összes Q pontjának helyvektorát fel tudjuk írni $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ alakban, ahol $\alpha+\beta+\gamma=1, \quad \alpha,\beta,\gamma\geq 0$.

Felvetődik a fordított irányú kérdés: ha veszünk egy ilyen alakú vektorösszeget, akkor az biztosan a háromszöglap egy pontjába mutat-e? A válasz természetesen igenlő. Kiszámítása nem annyira izgalmas, meggondolása csupán algebrai okoskodás:

Alakítsuk kifejezésünket a következő módon:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=(1-\gamma)(\frac{\alpha}{1-\gamma}\vec{a}+\frac{\beta}{1-\gamma}\vec{b})+\gamma\vec{c}=(1-\gamma)(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{a}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{b})+\gamma\vec{c}.$$

Látható, hogy a zárójelben lévő vektorkombináció az AB szakasz egy P osztópontjába mutat, a zárójelen kívül pedig a PC szakasz $(\gamma,1-\gamma)$ arányú osztópontját képezzük, ami így a háromszöglapon belül (esetleg a határvonalon) helyezkedik el.

E gondolatmenet valószínüleg túl formális egy középiskolás szemnek. Vizsgáljunk meg előbb néhány konkrét esetet, és azután próbálkozzunk az általános eset tárgyalásával. A kérdés felvetése mindenesetre nagyon fontos, mert igen jó példa egy állítás megfordításának megfogalmazására.

Eddigi tapasztalatainkat egy állításban összegezzük:

5.1. Állítás. *Adott a síkon egy ABC nemelfajuló háromszög, csúcsainak helyvektorai $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. A zárt háromszöglaphoz pontosan azok a pontok tartoznak, melyek felírhatók $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ alakban, ahol $\alpha+\beta+\gamma=1$ és $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$.*

Kérdés: Pontosan mely pontok tartoznak a *nyílt* háromszöglaphoz?

A következő feladatban érdekes összefüggést kapunk az együtthatókra vonatkozóan. A feladatot érdemes ötleteléssel felvezetni, például így: Amikor a szakaszon az osztópontba

mutató vektort írtuk fel, a pont két részre bontotta a szakaszt, és az együtthatókban ennek a két résznek az aránya szerepelt. Most három kiinduló pontunk van, a háromszög három csúcsa. Mivel állhat kapcsolatban az itt kapott három együttható? Ha ez nem volna elég, további segítség: ahogy egy belső pont felbontja a szakaszt, felbontja-e valahogy a háromszöget is?

5.1.3. Feladat. *Vizsgáld meg, hogy az 5.1.1. feladatban hányszorosai lesznek az $ABQ\triangle, BCQ\triangle$, $CAQ\triangle$ háromszögek területei az eredeti háromszög területének! Mit tapasztalsz?*

Megoldás Azt fogjuk látni, hogy eredményként épp az 5.1.1. feladatban látott együtthatókat kapjuk. Épp emiatt most megelégszünk az általános e) eset igazolásával. Szakköri feldolgozáskor fontosnak tartom néhány konkrét példa megbeszélését (pl. a) b)) is, mert a megoldási módszer a konkrét esetben sokkal jobban adja magát, sokkal jobban látszik. Az általános, e) eset megoldási vázlatában a 10. ábra jelöléseit követjük (T az eredeti háromszög területe).

$T_{ABQ\triangle} = s \cdot T_{ABC\triangle}$, ugyanis a két háromszög AB oldala közös, az erre az oldalra emelt magasság viszont az $ABQ\triangle$-ben s-szerese az eredeti m_c magasságnak a párhuzamos szelők tétele folytán.

$T_{BCQ\triangle} = (1-t)(1-s) \cdot T_{ABC\triangle}$. Ezt két lépésben igazoljuk. $T_{BCP\triangle} = (1-t) \cdot T_{ABC\triangle}$, az előző a gondolatmenet miatt, most a két háromszög BC oldala közös. Hasonlóan $T_{BCQ\triangle} = (1-s) \cdot T_{QBC\triangle} = (1-t)(1-s) \cdot T_{ABC\triangle}$.

Ugyanígy $T_{ACQ\triangle} = t(1-s) \cdot T_{ABC\triangle}$, hisz $T_{ACQ\triangle} = (1-s) \cdot T_{APC\triangle} = t(1-s) \cdot T_{ABC\triangle}$.

A 10. ábra jelöléseit használva $T_a = (1-s)(1-t)T$, $T_b = (1-s)tT$, $T_c = s$, valóban az 5.1.1. feladatbeli együtthatókat kaptuk szorzóként. Eddigi tapasztalatainkat a jelölések megtartásával egy tételben összegezzük:

5.2. Tétel. *Ha A, B, C egy nemelfajuló háromszög csúcsai és Q a háromszöglap egy pontja, akkor a megfelelő helyvektorokra igaz az összefüggés:*

$$\vec{q} = \frac{T_a}{T}\vec{a} + \frac{T_b}{T}\vec{b} + \frac{T_c}{T}\vec{c}:$$

Ha van tehát egy háromszöglapunk, akkor a csúcsaiba mutató helyvektorok segítségével fel tudjuk írni a háromszöglap belső pontjaiba mutató helyvektorokat.

Lépjünk kicsit tovább. Vizsgáljunk most konvex sokszögeket. Ezek analitikus szempontból szintén viszonylag könnyen kezelhetőek, hiszen leírhatóak, mint véges sok pont konvex burka.

5.1.4. Feladat. *Adott a síkon egy konvex sokszög, csúcsai $P_1, ..., P_n$, a megfelelő helyvektorokat jelölje $p_1, ..., p_n$. Hogyan tudnánk felírni a sokszöglap pontjaiba mutató vektorokat a csúcsokba mutató helyvektorok segítségével?*

Megoldás: Vezessük vissza a feladatot! Osszuk fel a sokszöget (diszjunkt) háromszögekre, például adott csúcsból induló átlók segítségével. Ha adott egy Q pont, biztosan benne van valamelyik háromszögben, Q-t pedig már felírhatjuk, mint az őt tartalmazó háromszög belső pontját: $\vec{q} = \alpha\vec{p_i} + \beta\vec{p_j} + \gamma\vec{p_k}$, ahol $i, j, k \in \{1, ..., n\}$.

Megjegyzések:

1. Fontos megbeszélnünk, hogy ez a felírás már korántsem egyértelmű, hisz nagyon sokféleképpen háromszögelhetünk egy sokszöget (hogy hányféle képpen, arról egy későbbi fejezetben esik szó). Érdemes erre konkrét példát nézni. Írjuk fel például egy négyzet középvonalának negyedelőpontjába mutató helyvektort kétféleképpen.

2. Feltehetjük a kérdést (pl. házi feladatnak), hogy mi van akkor, ha több csúcsvektort összegzünk olyan együtthatókkal, melyek összege 1. Sokszöglapbeli pontot kapunk ekkor is?

A továbbiakban azt szeretnénk megvizsgálni, hogy mit vihetünk át eddigi eredményeink közül magasabb dimenzióra (középiskolában értelemszerűen 3-ra). Ennek feldolgozására szolgálnak a következő feladatok, melyek megoldását nem írjuk le, hisz teljesen analóg a korábbiakkal.

5.1.5. Feladat. *Az 5.1.1. feladat ABC háromszögéhez vegyünk hozzá a térben egy vele nem egysíkú D pontot!*

a) Fejezzük ki a QD szakasz felezőpontjába mutató s vektort az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektorok segítségével (Q az 5.1.1/a feladatban szereplő pont)!

b) Fejezzük ki most a QD szakasz harmadolópontjába mutató s vektort (Q az 5.1.1/b feladatban szereplő pont)!

c) Fejezzük ki most a QD szakasz harmadolópontjába mutató s vektort!

d) Fejezzük ki a QD szakasz felezőpontjába mutató vektort!

e) Fejezzük ki a QD szakaszt (u, 1-u) arányban osztó pontba mutató vektort $0 \leq u \leq 1$! Mit tapasztalsz az együtthatókkal kapcsolatban?

5.1.6. Feladat. *** Hogy tudnád általánosítani a területekről szóló összefüggést (5.2. tétel)? Próbáld felírni, mennyi a négy kis tetraéder térfogata az előző feladat egyes alpontjaiban!*

5.2. Konvex szögek, háromszögelések, sokszögfelbontások

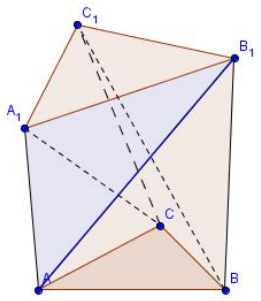
Középiskolában tanított állítás, hogy egy n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$. Bizonyításának lényeges lépése, hogy bontsuk fel a sokszöget átlói segítségével háromszögekre. Általában természetesnek vesszük, hogy ilyen felbontás mindig létezik, ám konkáv esetben ennek alaposan utána kell gondolni. Felbontáson itt azt értjük, hogy a háromszögek csúcsai az eredeti sokszög csúcsai, a háromszöglapoknak nincs közös belső pontjuk, és uniójuk a teljes sokszög.

5.2.1. Feladat. *Adjunk módszert, amellyel tetszőleges konkáv sokszögnek megtaláljuk egy átlóját!*

*Megjegyzés:*A kérdés látszólag nagyon egyszerű, ám nagyon fontos a felvetése. Olyan gondolkodási pont ez, amelyen könnyű átszaladni, ám a válasz egyáltalán nem magától értetődő. Szerencsés esetben kapunk olyan kísérleteket felbontásra, amelyek nem alkalmasak átló megtalálására.

Megoldás: Több módszer lehetséges, egyet mutatunk. Vegyük ki a sokszögnek egy konvex csúcsát azaz olyat, amelynél lévő belső szög kisebb, mint 180°, jelölje a csúcsot A. (Ilyen van, bármelyik olyan csúcs megfelelő, amelyik csúcsa a sokszög konvex burkának is.) Legyen A két szomszédja a B és C csúcs. Ha a BC átló a sokszögön belül halad, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor kezdjük el mozgatni a BC szakaszt önmagára merőlegesen az A csúcs felé. Csúsztassuk egészen addig, míg el nem érjük az utolsó D sokszögcsúcsot. A sokszögnek AD biztosan átlója.

Az átló megtalálásával az eredeti sokszögünket két kisebbre bontottuk. Azokon folytatva az eljárást, megkaphatjuk az eredeti sokszög egy háromszögelését.



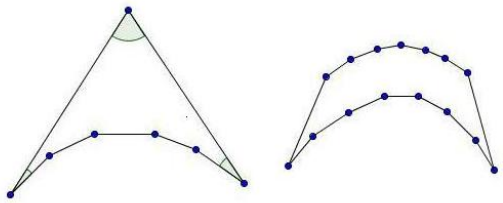
11. ábra. A Schönhardt-poliéder

Hogy a háromszögelhetőség létezése mennyire nem magától értetődő, jól mutatja, hogy egy tetszőleges három dimenziós poliéder egyáltalán nem biztos, hogy tetraéderekre bontható, ilyen például a Schönhardt-poliéder. Konstrukciója nem is olyan bonyolult: Vegyünk egy háromszög alapú hasábot, és a felső háromszöget forgassuk el úgy, hogy az oldallapokban törésvonalak, új, konkáv élek keletkezzenek. A Schönhardt-poliéder élváza a 11. ábrán látható.

Kérdés: Miért nem lehet a Schönhardt-poliédert tetraéderekre bontani?

Az előző feladat megoldása során használtuk, hogy a sokszögnek van konvex csúcsa. Hogy mennyi van biztosan, erről szól a következő feladat:

5.2.2. Feladat. *a) Rajzolj olyan hatszöget (hétszöget), amelynek 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, (7) konvex csúcsa van. Melyek megvalósíthatóak? b) Mennyi lehet egy n-szög konvex csúcsainak száma?*



12. ábra. Sokszög 3, illetve 3 és n közti tetszőleges számú konvex szöggel

Megoldás: Némi próbálkozás után azt tapasztaljuk, hogy egy n-szögnek legalább 3 konvex csúcsa biztosan van, viszont 3 és n között akármennyi lehet a konvex csúcsok száma. Először nézzük az első észrevétel indoklását. Ha a sokszögnek csak két konvex csúcsa lenne, akkor a maradék $n-2$ csúcsnál lévő szög mind nagyobb lenne 180°-nál. Ekkor viszont a belső szögek összege nagyobb lenne, mint $(n-2)\cdot 180°$, ami ellentmondás.

Hogy miért lehet a konvex csúcsok száma 3 és n közt tetszőleges, azt a 12. ábra szemlélteti. Veszünk két ívet, az egyiken helyezkednek el a konvex, a másikon a konkáv csúcsok, az ívek pontszámait pedig megfelelően választjuk.

Eljutottunk odáig, hogy tetszőleges sokszöget tudunk háromszögelni. Ha vesszük egy n oldalú konvex sokszöget, és azt háromszögeljük egy rögzített csúcsból kiinduló átlókkal, az eredeti sokszöget $n-2$ háromszögre bontottuk. Igaz-e ez tetszőleges háromszögelésre?

5.2.3. Feladat. *Igaz-e, hogy egy tetszőleges n-oldalú sokszög tetszőleges háromszögelése mindig $n-2$ háromszögre bontja a sokszöget?*

Megjegyzés: A feladat eredménye szükséges annak igazolásához, hogy egy konkáv n-szög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$.

Megoldás: Csúcsszám szerinti indukciót végzünk. Az $n=3$ esetben nincs mit háromszögelnünk, a négyszög pedig mindenképpen 2 háromszögre bomlik.

Nézzük az általános esetet. Vegyük egy háromszögelés egy átlóját. Ez két sokszögre bontja az eredetit, például egy i-oldalúra és egy $n-i+2$-oldalúra, ahol $i \geq 3$ (a két oldalszám összege $n+2$, mert az átló végpontjait kétszer számoljuk). Az i oldalú sokszög az indukciós feltevés miatt mindenképp $i-2$ háromszögre bomlik, a másik $n-i$-re. Így a háromszögek száma $i-2+n-i=n-2$. Ezzel az állítást beláttuk.

Feltehetjük ezek után a kérdést, hogy hányféleképpen háromszögelhető egy sokszög. A feladat pontosítását és megválaszolását azonban nehézsége miatt a fejezet végére hagyjuk. Folytassuk kérdésfeltevésünket kicsit más irányban.

5.2.4. Feladat. *Adott egy konvex sokszög, behúzzuk az összes lehetséges átlót. Hány metszéspontot kapunk, ha nincs olyan belső pontja a sokszögnek, melyen három átló halad át?*

1. Megoldás: Első kézenfekvő gondolat, hogy felírjuk, egy átlón hány metszéspont található, és ezt megszorozzuk az átlók számával. Sajnos azonban rögtön látszik,hogy nem

minden átlón ugyanannyi metszéspont helyezkedik el. Keressünk más csoportosítást! Számoljuk össze, hogy az egy csúcsból kiinduló átlókon összesen hány metszéspont található, jelöljük ezt a számot P_n-nel.

Vegyünk egy kitüntetett P csúcsot, és egy olyan belőle kiinduló átlót (e), amely egy háromszöget vág le a sokszögből. Az átló egyik oldalán 1, a másikon $n-3$ csúcs található. Ezek $1\cdot(n-3)$ átlót határoznak meg, emiatt az e átlón fekvő metszéspontok száma szintén ennyi. Tovább haladva a sorban vegyük azt a P-ből kiinduló átlót, amely egy négyszöget vág le a sokszögből. Ennek egyik oldalán 2, a másikon $n-4$ pont található, így az általa meghatározott metszéspontok száma $2\cdot(n-4)$. Folytassuk ezt egészen addig míg el nem érjük az utolsó átlót (ez újból háromszöget vág le a sokszögből), ezen szintén $n-3$ metszéspont lesz. Összegezve a metszéspontok számát, a következőt kapjuk:

$$P_n = 1\cdot(n-3)+2\cdot(n-4)+\ldots+(n-3)\cdot 1 = 1\cdot(n-3)+2\cdot(n-4)+\ldots+(n-3)\cdot(n-(n-1) =$$

$$= n\cdot(1+2+\ldots+(n-3)) - (1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+(n-3)(n-1)$$

.

Az első tag éppen $n\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ a számtani sorozat összegképlete miatt. Próbáljuk valahogy a második kifejezést is zárt alakra hozni.

$$\sum_{i=1}^{n-3} i(i+2) = \sum_{i=1}^{n-3} i^2 + \sum_{i=1}^{n-3} 2i = \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} + (n-2)(n-3).$$

A számolásban a négyzetszámok összegének képletét, és a számtani sorozat összegképletét használtuk. Helyettesítsünk be:

$$P_n = n\frac{(n-2)(n-3)}{2} - \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} + (n-2)(n-3) = \frac{(n-2)(n-3)}{6}(3n-6-2n-5) =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

Ez tehát az egy csúcsból kiinduló összes átló összes metszéspontjának száma. Hogy az összes metszéspontot megkapjuk, ezt az értéket megszorozzuk n-nel, hisz az összes csúcsból kiinduló összes átlót számba kell vennünk, és elosztjuk 4-gyel, mivel minden metszéspontot 4-szer számoltunk (mind a négy végpontnál egyszer). Tehát az átlók metszéspontjainak száma:

$$M_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \binom{n}{4}$$

Második megoldás: A kapott formul meglepően szép a sok számoláshoz képest. Sőt, a végeredmény azt is sugallja, hogy a metszéspontok száma valahogyan négy pont lehetséges kiválasztásaival áll kapcsolatban. Valóban, négy csúcspont egyértelműen meghatároz egy olyan átlópárt, melyeknek van metszéspontja. Ezzel a pontnégyesek és az átlómetszéspontok kölcsönösen megfeleltethetőek egymásnak, ami igazolja az előző eredményt.

Megjegyzés: A feladat két megoldása jó példa arra, hogy a probléma egy ügyes észrevétellel két sorban elintézhető, de az eredmény kellő számolási rutinnal különösebb ötlet nélkül is kiszámolható. Mi több, a kiszámolt végeredmény sugallja a szellemes második megoldást is.

Szerves folytatása az előző feladatnak a következő probléma:

5.2.5. Feladat. *Egy konvex sokszög összes átlói közül semelyik három nem megy át egy belső ponton. Hány részre bontjuk a sokszögtartományt az összes átló behúzásával? Vizsgáld meg a kérdést ötszögre, hatszögre, hétszögre! (*Segítség: *Ha behúzol egy új átlót, hány új tartomány keletkezik?)*

Megoldás: Kiinduló állapotunk egy tartomány, amelyet az első átló behúzása két részre oszt. Ha a későbbiekben új átlót húzunk be, az minden olyan tartományt kettévág, amelybe belemetsz. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha egy új átlónak k metszéspontja van a korábbi átlókkal, akkor behúzásával $k+1$ új síkrész keletkezik. Ez azonban azt jelenti, hogy az összes síkrész száma 1 (kiindulási állapot), plusz az átlók száma, plusz az átlók metszéspontjainak száma. Így a korábbiak fényében adódik, hogy az összes átló a konvex tartományt $1+\frac{n(n-3)}{2}+\binom{n}{4}$ részre osztja.

Láthatjuk, hogy a megoldás gondolatmenete ugyanaz, mint azé a kérdésé, hogy n síkbeli egyenes, illetve kör hány részre oszthatja a síkot. Jó bemelegítőül szolgálhat e két feladat ez utóbbinak megoldásához.

Érdemes elgondolkodnunk azon, hogy mit mondhatunk az előző két feladatra, ha a sokszögünk nem konvex. Pontosítsuk a kérdést: *Vegyük egy tetszőleges sokszögnek az összes olyan átlóját, amely a tartományon belül halad. Mit mondhatunk ekkor a keletkező metszéspontok és tartományok számáról?*

Első észrevételünk, hogy könnyen gyárthatunk olyan sokszöget, melyben nincsenek belül haladó metsző átlók, és a keletkező tartományok száma $n-2$. Ilyen tulajdonságú az a sokszög, amelyiknek csak három konvex csúcsa van (ld.12. ábra). Viszont $n-2$ tartomány mindenképp keletkezik, hiszen tetszőleges sokszög háromszögelhető. A keletkező tartományok számának minimuma illetve maximuma közti eltérés tehát nagyon gyorsan nő, pl. n=10-re a minimum 9, maximuma viszont 246.

Kis n értékekre egyszerű "rajzolgatással" tekinthetjük át, hogy hányféle lehet a széles határok közt a végeredmény (pl. ötszög, hatszög).

5.2.6. Feladat. *Adott egy konvex n-szög. Ha behúzzuk az összes átlót, a sokszögtartomány felbomlik háromszögekre, négyszögekre, k-szögekre. Mi k maximális értéke? Viszgáld meg a problémát $n=5$-re, $n=6$-ra! Fogalmazz meg sejtést, majd próbáld igazolni!*

Megoldás: A felbontásban maximum n-szög szerepelhet. Vegyünk ugyanis egy tetszőleges sokszöget a felbontásból, ez biztosan konvex. Ennek egy oldala az eredeti sokszögnek átlója. Tudjuk, hogy az eredeti sokszög minden csúcsából maximum két olyan átló indulhat,

mely az új sokszögünknek oldala (konvexitás miatt). Mivel minden átlónak két végpontja van ezért a sokszög oldalainak száma maximum $\frac{2n}{2} = n$.

A fejezetet sokszögek háromszögelésének vizsgálatával kezdtük. Nevezetes probléma, hogy hány különböző háromszögelése lehet egy sokszögnek. Ennek megoldása átlépi a középiskola határait (ha nem is eszközeiben, de összetettségében). Az eredmény leírását viszont fontosnak tartjuk.

5.3. Állítás. *Egy konvex n-szög háromszögeléseinek száma*

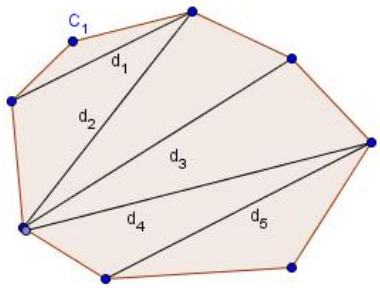
$$H_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

Ha a feladatokat szakkörön dolgozzuk fel, bíztathatjuk diákjainkat, hogy nézzenek utána, mik a Catalan-számok. Milyen, látszólag független problémákra szolgálnak megoldásul. Kutakodásuk kiselőadás témájául is szolgálhat.

Az előző kérdés egyszerűsített verziója a következő:

5.2.7. Feladat. *Hány olyan háromszögelés létezik, amelyben minden háromszögnek van közös oldala az eredeti sokszöggel (*Segítség*: Hány olyan háromszög lehet egy ilyen háromszögelésben, amelynek van két közös oldala az eredeti sokszöggel)?*

Megoldás: Ha elkezdünk rajzolni, hamar láthatjuk, hogy a segítségben kérdezett háromszögek száma mindig kettő. Megfelelő mennyiségű rajz elkészítése metódust is ad arra is, hogy hogyan kell egy ilyen háromszögelést rajzolni.



13. ábra. Oldalhoz illeszkedő háromszögelés

Válasszunk ki egy C_1 csúcsot, és kössük össze a szomszédait egy d_1 átlóval. Ez az átló oldala egy további háromszönek, melynek kell, hogy legyen közös oldala a sokszöggel. Ennek a háromszögnek a harmadik, d_2-vel jelölt oldala tehát a d_1 egyik végpontját köti össze a d_1 másik végpontjának szomszédjával. Gondolatmenetünk miatt a d_2 átló megválasztására kétféle választási lehetőségünk van. Folytatva a sort, az új átló, d_3 választása szintén két lehetőség, ugyanúgy, mint d_4-é, ... , d_{n-3}-é. Az első, C_1 csúcsot n-féleképpen jelölhetem ki, ami azt jelenti, hogy összesen $n \cdot 2^{n-4}$ féleképpen választhatjuk ki a kiindulási csúcsot,

valamint a $d_1, d_2, \ldots, d_{n-3}$ átlósorozatot. Minden megfelelő háromszögelést kétszer számoltam (egy háromszögelést legyárthatok a fordított irányban is),így az előző eredményt el kell oszt anom 2-vel. A kapott megoldás tehát

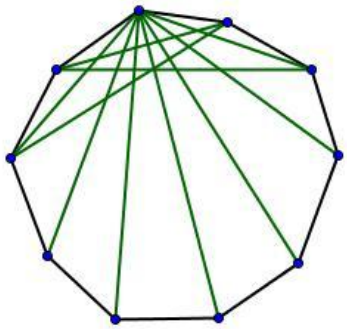
$$n \cdot 2^{n-5}.$$

Vizsgáltuk már konvex sokszög átlóinak metszéspontjait. Egy ezzel kapcsolatos új kérdéssel zárjuk a fejezetet.

5.2.8. Feladat. *a) Hány olyan átlót tudunk berajzolni egy konvex ötszögbe, hatszögbe, hétszögbe, nyolcszögbe, hogy azok közül bármely kettőnek legyen közös pontja (metszéspont, vagy végpont)?*

b) Mit mondhatunk konvex n-szögről? Adj példát a maximumra, és próbáld igazolni, hogy többet semmiképp nem lehet behúzni!

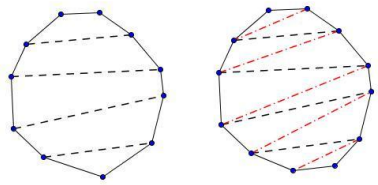
Megoldás: Könnyű találni n olyan átlót, hogy azok mindegyikének van közös pontja: behúzzuk egy tetszőleges pontból kiinduló $n-3$ átlót, és hozzáveszünk további hármat a 14. ábrán látható módon. Azt kell igazolni, hogy ennél többet nem lehet.



14. ábra. Páronként metsző n db átló egy konvex n-szögben

Először vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor n páratlan. Keressük átlóknak olyan osztályozását, melyben semelyik két, azonos osztályba tartozó átlónak nincs metszéspontja. Egy ilyen osztályt szemléltetünk a a 15. ábrán, a többit ennek elforgatásával kapjuk. Az átlóosztályok száma ekkor n, és azt is tudjuk, hogy minden átló beletartozik az n osztály valamelyikébe. Ha azt akarom, hogy minden átlónak legyen metszéspontja, egy átlóosztályból csak egy választhatok ki. Emiatt maximum n db páronként metsző átlót helyezhetünk el egy n-oldalú sokszögben, ennyit viszont meg tudtunk adni.

Ha n páros, akkor is ugyanezt a módszert alkalmazzuk, csak kétfajta osztályt különböztetünk meg, melyeket a 15. ábrán pirossal és feketével jelölünk. Különbség köztük, hogy míg az egyik osztály levág háromszöget a sokszögből, a másik nem. Az osztályok száma $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, és azt is tudjuk, hogy bármelyik átló valamelyik osztályba sorolható. Ezzel a feladatot megoldottuk.

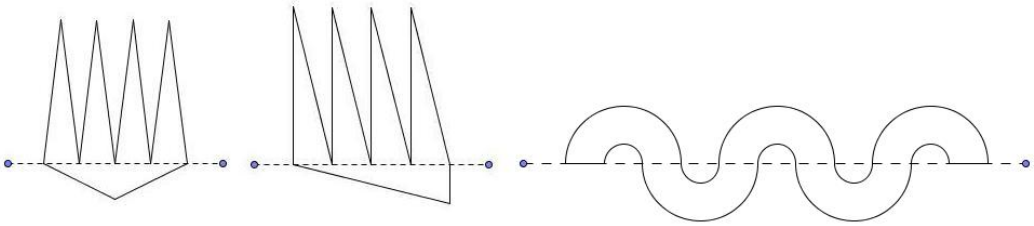


15. ábra. Átlóosztályok páratlan és páros esetben

5.3. Alakzatok felbontása, és konvexitás

Egy halmazt konvexnek nevezünk, ha a halmaz bármely két pontját összekötő szakaszt teljes egészében tartalmazza. Ez azt is jelenti, hogy ha egy egyenes mentén kettévágunk egy konvex halmazt, az maximum két részre esik szét. Konkáv halmazokra ez korántsem igaz mindig, erről szól a következő két feladat (jegyezzük meg, hogy van olyan konkáv halmaz, amely bármely vágásnál szintén maximum két részre esik szét, egy körgyűrű például ilyen).

5.3.1. Feladat. *Egy család öt főből áll. Édesanya olyan tortát akar nekik sütni, amelyet egy egyenes vágással öt egyenlő részre szeletelhető. a) Milyen formát találjon ki a torának? b) Vendégek érkeznek a családhoz, így édesanya összesen n embernek szeretne olyan tortát sütni, amely egy egyenes vágással n egyenlő nagyságú részre bontható. Milyen formát válasszon édesanya ebben az esetben?*



16. ábra. Lehetséges tortaformák felülnézetei

Megoldás: Nagyon sokféle megoldása van a feladatnak, egyet vázolunk, amelyben a tortát $n+1$ egyenlő területű részre tudunk felosztani egy vágással. A tortaforma felülnézete a következő legyen: vegyünk egy egyenlő szárú háromszöget, melynek alapja 1 egység, hozzá tartozó magassága $1/n$. Alapját n részre osztjuk, és mindegyik kis szakasz fölé olyan egyenlő szárú háromszöget állítunk, melynek magassága 1 (lásd a 16. ábrát). Ezt a tortát a közös alapok mentén elvágva $n+1$ háromszöget kapunk, melyek területe $\frac{1\cdot 1/n}{2}$.

5.3.2. Feladat. *A gyerekek elkezdtek veszekedni, hogy kié legyen az alapul szolgáló, kitüntetett szelet. Milyen alakúra süsse legközelebb édesanya a tortát, ha tanulva az eddigiekből azt szeretné, hogy a szeletek ne csak egyforma területűek, hanem egybevágóak is legyenek?*

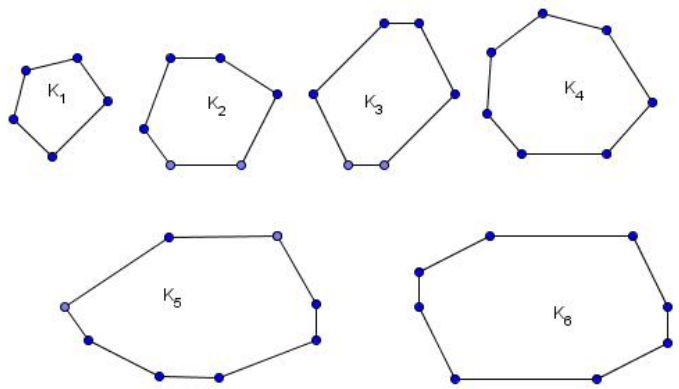
Megoldások: 1. Módosítsuk az előbbieket a következőképp: Legyen az alapul szolgáló háromszög derékszögű, melynek egyik befogója 1, másik, $1/n$. Osszuk fel a hosszabik befogót n egyenlő részre. A kis szakaszok fölé most az eredetivel egybevágó háromszögeket tudunk emelni az ábra szerint.

2. Megfelelő számú fél-körgyűrűt illesztünk egymás mellé az ábra szerint.

A továbbiakban konvex sokszögek különböző felbonthatóságát vizsgáljuk.

5.3.3. Feladat. *A 17. ábrán különböző sokszögek láthatók, melyeket fel szeretnénk bontani véges sok paralelogrammára. Melyikeket sikerül, melyikeket nem? Próbálj feltételt megfogalmazni a felbonthatóságra. Sejtésedet igazold!*

Ebben a feladatban a sokszög felbontásán azt értjük, hogy olyan paralelogrammákkal fedjük a sokszöget, melyek legfeljebb éleikben érintkeznek, és a paralelogrammák nem nyúlnak túl az eredeti sokszögön.



17. ábra.

Megoldás: K_3 és K_6 sokszögek könnyen felbonthatóak, viszont a többi nem. A következő észrevételeket tehetjük: A páratlan oldalú sokszögek sohasem bonthatóak fel paralelogrammára, a páros oldalszámúak közül pedig csak azok, melyekben minden oldalhoz tartozik egy vele párhuzamos és egyenlő oldalpár. Két dolgot szeretnénk indokolni:

1. *Ha egy konvex sokszögnek páratlan számú oldala van, akkor nem bontható fel véges sok paralelogrammára.*

2. *Egy páros oldalú konvex sokszög pontosan akkor bontható fel paralelogrammákra, ha minden oldalához találunk egy vele párhuzamos, és egyenlő hosszúságú oldalpárt.*

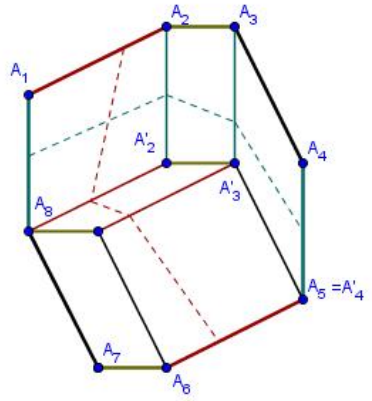
1. Indirekt gondolkodunk. Tegyük fel, hogy sikerült felbontanunk praralelogrammákra a páratlan oldalszámú sokszöget. Legyen AB olyan oldal, melynek nincs vele párhuzamos párja. Ilyen biztosan van, hiszen az oldalak száma páratlan, így nem oszthatóak párokba (három párhuzamos oldal pedig nem lehet a sokszögben, hiszen konvex).Legyen az AB-hez

illeszkedő paralelogramma másik két csúcsa A_1, B_1. Ehhez szintén illeszkedik paralelogramma, melynek másik két csúcsa legyen A_2, B_2. Folytatva a sort kapunk egy paralelogrammasorozatot. Ebben $A_1B_1 \| A_iB_i$ $\forall i$. Valamikor az A_iB_i sorozat egy oldalban végződik, ami szükségképpen párhuzamos és egyenlő az AB oldallal, ami ellentmondás.

2. Világos hogy ha van olyan oldal, amelynek nincs vele párhuzamos és egyenlő párja, akkor az előző gondolatmenet miatt nem lehet a sokszöget felosztani. Annyit kell tehát igazolnunk, hogy ha az oldalak párokba oszthatók, akkor a sokszög fel is bontható véges sok paralelogrammára.

Jelölje a csúcsokat $A_1, \dots A_{2n}$. Könnyen meggondolhatjuk, hogy az $A_{2n}A_1$ oldallal az A_nA_{n+1} párhuzamos és egyenlő.

Induljunk ki az A_1A_2 oldalból. Húzzunk vele párhuzamos szakaszt az A_{2n} csúcsból a sokszög belsejébe, legyen ennek másik végpontja A'_2. Az $A_1A_2A'_2A_{2n}$ legyen az első paralelogrammánk (lásd a 18. ábrát). Húzzunk most egy olyan szakaszt A'_2-ből, mely párhuzamos és egyenlő az A_2A_3 oldallal, legyen másik végpontja A'_3 (erre a szakaszra két lehetőség van, azt húzzuk, amelyik nem metsz bele az előző paralelogrammába). Így kapjuk az$A_2A_3A'_3A'_2$ előzőhöz illeszkedő paralelogrammát. Folytassuk ezt az eljárást. Végig az előzőhöz illeszkedő paralelogrammákat kapunk, és $A_iA'_i \| A_1A_{2n}$ valamint $A_iA'_i = A_1A_{2n}$ $\forall i$. Amikor azonban az A_{n-1}, A_n, A'_{n-1} csúcsokat akarjuk paralelogrammává kiegészítenünk, a negyedik csúcs éppen A_{n+1} lesz, párhuzamosság és egyenlőség miatt.



18. ábra. A nyolcszög egy felbontása

Ha az eddig kapott paralelogrammákat levágjuk a sokszögből, kettővel kisebb oldalszámú sokszöget kapunk, melyekre szintén teljesül a feltétel. Az eljárást addig ismételgetjük, amíg végül egy paralelogramma marad, amivel a feladatot megoldottuk.

5.3.4. Feladat. *Számoljuk össze, hogy összesen hány paralelogrammára bontottuk így a $2n$-szöget!*

Megoldás: Az első levágott paralelogramma-sorozat $n-1$ elemből állt, a második $n-2$-ből, stb. Eszerint az összes paralelogrammák száma

$$1+2+3+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$$

5.3.5. Feladat. *Elképzelhető-e olyan paralelogramma-felbontás, amelyik kevesebb paralelogrammából áll?*

Megoldás: Az egymáshoz kapcsolódó paralelogrammák oldalaiból összeáll egy párhuzamos oldal-sorozat. Kössük össze ezeket egy szaggatott vonallal, ahogy a 18. ábrán is látszik, így kapunk n töröttvonalat. Bármely kettő metszi egymást, és mindegyik metszéspont egy-egy felbontásbeli paralelogramma belső pontja. Mivel minden metszéspont másik paralelogrammához tartozik, a paralelogrammák száma legalább $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

A feladat megoldása adja a következő feladat ötletét.

5.3.6. Feladat. *Vegyünk egy szabályos nyolcszöget. Osszuk fel paralelogrammákra többféleképpen. Mit mondhatunk a kapott négyszögekkel kapcsolatban?*

Megoldás: Azt tapasztalhatjuk, hogy mindig lesz két téglalalap a paralelogrammák közt. Hogy miért? Vegyük a nyolcszög egy oldalát, valamint egy rá merőlegeset. Rajzoljuk be mindkettőből az előző feladatban mutatott töröttvonalat. Ezek metszéspontja biztosan egy téglalap belső pontja. Mivel a szabályos nyolcszögben két-két ilyen oldalpár van, biztosan van két téglalap a paralelogrammák közt (világos, hogy a két kapott tégalalap különböző).

5.3.7. Feladat. *Általánosítsuk az előző feladat eredményét*

Megoldás: Csak azt kell ehhez megvizsgálni, hogy mikor hány merőleges oldalpár van. Ebből adódik az eredmény:

5.4. Állítás. *Ha egy szabályos $4n$-szöget paralelogrammákra osztunk, a felosztásban biztosan szerepel n darab téglalap.*

5.4. Helly tétele

5.4.1. Intervallumrendszerek

Ebben az alfejezetben az egyenes konvex halmazait, és velük kapcsolatos kérdéseket vizsgálunk meg. Eközben megismerkedünk Helly tételének egydimenziós változatával. A fejezet folyamán találkozunk algoritmikus gondolkodást igénylő feladatokkal is. Kezdjük egy bemelegítő feladattal:

5.4.1. Feladat. *Milyen konvex halmazokat ismerünk az egyenesen?*

Megoldás: A nyílt, zárt, félig nyílt - félig zárt intervallumokat, a félegyeneseket (nyílt-zárt végű), és a teljes egyenest.

5.4.2. Feladat. *Adottak az $I_1, I_2, \ldots, I_n$ véges intervallumok a számegyenesen. Lássuk be, hogy ha bármely kettőnek van közös pontja, akkor az összesnek is van közös pontja!*

Megoldás: Legyen az intervallumok közül I_m az, amelynek legkisebb a jobboldali végpontja (azaz I_M a leghamarabb befejeződő intervallum), I_M pedig az, amelynek legnagyobb a baloldali végpontja (legkésőbb kezdődő). Ennek a két intervallumnak a feltétel szerint van közös pontja. Ez a közös pont pontja minden intervallumnak, hisz nagyobb az összes bal, és kisebb az összes jobb végpontnál.

A megoldás menetével egyben módszert is kaptunk annak eldöntésére, hogy ha van véges sok véges intervallumunk, van-e az összesnek közös pontja. Állítsuk ugyanis sorba a bal, illetve jobb végpontokat. Ha I_m-nek és I_M-nek van közös pontja, akkor kész vagyunk, ha nincs, akkor értelemszerűen nem lehet az összesnek sem. A következő állítás nem hordoz lényeges újdonságot, viszont ebben a formában speciális, egy dimenziós esete Helly tételének.

5.5. Állítás. *Igazold: ha adott az egyenesen véges sok konvex halmaz, és bármelyik kettőnek van közös pontja, akkor az összesnek is van.*

Bizonyítás: Csak azt kell meggondolnunk, hogy ha az előző feladat véges intervallumaihoz félegyeneseket illetve egyenest veszünk, a gondolatmenet érvényes marad, de ez triviális.

Ennek a feladatnak gyakorlati alkalmazása a következő:

5.4.3. Feladat. *Egy vendégségben a vendégek közül mindenki találkozott mindenkivel. Nem volt olyan vendég, aki visszajött volna, miután elment. Mutassuk meg, hogy volt olyan időpont, amikor az összes vendég egyszerre volt jelen.*

Nézzük, mi történik a feltételek gyengítése esetén:

5.4.4. Feladat. *Van tetszőleges számú intervallumunk az egyenesen, (akár végtelen sok). Igaz marad-e biztosan, hogy ha bármely kettőnek van közös pontja, akkor az összesnek is?*

Megoldás: A feladatra a válasz nemleges. Egy lehetséges ellenpélda a $(0; 1/n)$ alakú intervallumok halmaza, ahol $n \in \mathbb{N}$, de ugyanúgy megfelelő az $(i; \infty)$ alakú intervallumok halmaza is. Érdemes megjegyeznünk, hogy mindkét esetben nemhogy bármely háromnak, de bármely véges soknak is van közös pontja.

5.4.5. Feladat. *a) Egy munkahely alkalmazottai különböző, fix időpontokban, és időtartamban járnak dolgozni. A főnök szeretne mindenkit ellenőrizni, hogy valóban megjelent-e aznap a munkahelyen. Azonban szeretne minél kevesebbszer körbejárni. Milyen stratégiát ajánlhatunk a főnöknek (csak arra kiváncsi, hogy megjelent-e aznap minden egyes alkalmazott, arra nem, hogy munkaideje teljes hosszában)?*

b) Fogalmazd át a feladatot intervallumok nyelvére!

Megoldás: Először a b) részt oldjuk meg a könnyebb kezelhetőség kedvéért. Egy lehetséges megfogalmazás: Adottak $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$ intervallumok. Keressünk minél kevesebb olyan pontot, hogy azok lefogják az összes intervallumot (azaz minden intervallumnak legyen a ponthalmazban pontja).

Módszerünk:

- Megkeressük a legkisebb jobb végpontot. Legyen ez a pont a ponthalmaz első eleme, P_1.
- Azokat az intervallumokat, melyre P_1 illeszkedik, elhagyjuk, hisz azokat már lefedtük P_1-gyel.
- A maradék intervallumok közt megint megkeressük a legkisebb jobb végpontot, P_2, és elhagyjuk azokat , amelyekre P_2 illeszkedik.
- Az eljárást addig folytatjuk, amíg nem marad intervallum.

Világos, hogy így lefedtük az összes intervallumot a $P_1, \ldots P_k$ ponthalmazzal. A kérdés az, hogy elég lehet-e ennél kevesebb pont. Vegyük azokat az intervallumokat, amelyeknek P_i végpontja. Ezek mind diszjunktak, tehát lefogásukhoz k pont szükséges. Ez azt jelenti hogy az intervallumrendszer lefogásához is legalább k pont kell. Ezzel a feladatot megoldottuk.

5.4.2. Előkészítő feladatok

Következő célunk, hogy elmélyítsük és alkalmazzuk az előző alfejezet eredményeit, valamint lássunk olyan feladatokat, amelyek a „Ha bármely k halmaznak van közös pontja, akkor az összesnek is van ...” sémára épülnek.

5.4.6. Feladat. *Igaz marad-e az 5.5. állításhoz hasonlóan, a következő: Ha adott a síkon véges sok konvex halmaz úgy, hogy közülük bármely kettőnek van közös pontja, akkor az összes halmaznak is van közös pontja?*

Megoldás: Erre a kérdésre nagyon könnyű ellenpéldát találni, ilyen például egy háromszög három oldala.

5.4.7. Feladat. *Adott a síkon véges számú konvex halmaz, bármely kettőnek van metszéspontja. Van-e biztosan olyan egyenes, amely mindegyik halmazba belemetsz? (*Segítség: *Vetítsünk!)*

Megoldás: Vegyünk fel egy segédegyenest a síkon. Vetítsük le rá a konvex halmazokat erre az egyenesre merőleges vetítéssel. Ekkor minden konvex halmaz képe egy intervallum (esetleg félegyenes, vagy egyenes). A kapott intervallumoknak van közös pontja az 5.5. tétel miatt. Ha ebben a közös pontban merőlegest állítunk a segédegyenesre, olyan egyenest kapunk, amely minden halmazba belemetsz.

5.4.8. Feladat. *Adott a síkon véges számú konvex halmaz, bármely kettőnek van metszéspontja. Van-e tetszőleges irányú egyenes, amely mindegyik halmazba belemetsz?*

Megoldás: Vegyünk fel az adott irányra merőlegesen a segédegyenest. Az előző feladat gondolatmenetét követve megfelelő irányú egyenest kapunk.

Most találtunk a halmazokhoz adott irányú, mindegyiket metsző egyenest. Vajon létezik adott ponton átmenő, mindegyiket metsző egyenes is? E kérdés megválaszolásához még kicsit dolgoznunk kell.

5.4.9. Feladat. *Vizsgáljuk meg az 5.4.2. feladatot körökre, körívekre!*

Adott egy körvonal, és véges sok köríve. Igaz-e, hogy ha bármely kettő ívnek van közös pontja, akkor az összesnek is van közös pontja. Ha nincs, mondj olyan feltételt, amely teljesülésekor már biztosan lesz az összesnek közös pontja.

Megoldás: Az állítás feltétel nélkül nem igaz, vegyünk például három 120°-os zárt ívet, amelyek egymáshoz végpontjaikkal csatlakoznak. Kitérő: ez úgy is megfoglamazható, hogy ha van három biztonsági őr, akik három nyolc órás műszakban őrködnek egymás után, fix sorrendben, akkor mindegyikőjük találkozik mindenkivel, de egyszerre nincsenek mind ott.

Lehetséges feltétel: Ha van olyan pontja a körnek, amelyre nem illeszkedik egyáltalán ív, akkor biztosan van az összesnek közös pontja, ugyanis ekkor a kimaradó pontban a kört elvághatjuk, kiegyenesíthetjük, és alkalmazhatjuk az 5.4.2. feladatot. Egy másik, nem triviális feltételről szól a következő feladat:

5.4.10. Feladat. *Adott egy körvonal, és véges sok, 120°-nál kisebb szögű köríve, melyek közül bármely kettőnek van közös pontja. Igazoljuk, hogy ekkor az összesnek is van közös pontja.*

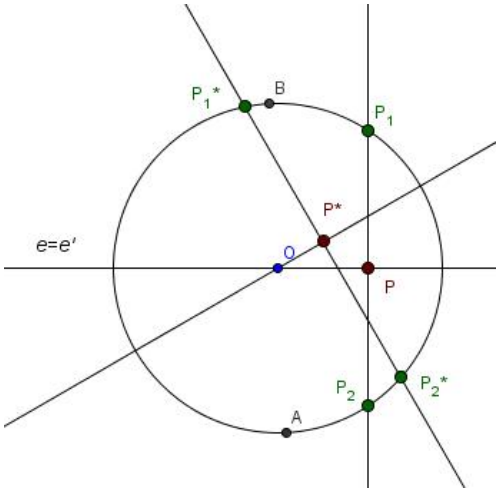
Megoldás: Tegyük fel hogy nincsen lefogó pontpár. Kezdjük el elhagyni az íveket a rendszerből addig, míg a maradék már lefogható lesz egy ponttal. Jelölje az utoljára elhagyott ívet I_k, és az új körívrendszer lefogó pontját P. Világos, hogy az új rendszer minden íve része egy P középpontú, 240°-os nyílt I körívnek, valamint az is, hogy I_k-nak és I-nek van közös pontja. Emiatt viszont I és I_k nem fedi le a teljes kört. Előző feladatbeli észrevételünk miatt viszont a csökkentett rendszert I_k-val kiegészítve is lefoghatjuk egy ponttal, ami ellentmondás.

5.4.11. Feladat. *Adott egy körvonal, és véges sok köríve. Két ponttal lefogható-e biztosan az összes?*

Megoldás: Sajnos most sem tudjuk kihajtogatni egy pont elhagyásával a kört, hiszen akkor intervallumok szakadhatnak ketté. Próbáljunk ismét merőleges vetítéshez folyamodni. Vegyük a körnek egy középponton átmenő segédegyenest és vetítsük le merőgelegesen az összes ívet erre az egyenesre. Az ívek képei megint intervallumok, bármelyik kettőnek van

közös pontja , emiatt az összesnek is létezik egy közös P pontja az 5.4.2. feladat miatt. Ezt a közös pontot a vetítéskor a kör két pontjából nyertük. Ez a két pont biztosan lefogja az összes ívet.

5.4.12. Feladat. *Létezik-e biztosan a lefogó pontpárok közt olyan, mely egy átmérő két végpontja?*



19. ábra. Lefogó pontpár

Megoldás: Változtassuk a segédegyenes helyzetét! Kezdjük el forgatni folytonosan az egyenest 180°-on át. Az egyenes minden állásához tartozik egy P^*, és hozzá egy lefogó pontpár (19. ábra). Világos, hogy mind P^*, mind a lefogó pontpár folytonosan mozog, 180°-nyi forgatás után pedig visszatérünk az eredeti egyenesbe. Jelöljük a végállapotban kapott P^* pontot P'-vel. Két lehetőségünk van:

1. P és P' ugyanazon az O középpontú félegyenesen van. Ekkor a folytonos mozgatás folyamán P^*-nak valamikor át kell haladnia O-n. Ehhez az álláshoz tartozó pontpár épp egy átmérő végpontja.

2. Ha O elválasztja P-t és P'-t. Ez azt jelenti, hogy az e-n vetületként kapott intervallumok mindegyike átmegy P-n is, és P'-n is, tehát O-n is. Ez viszont azt jelenti, hogy A és B lefogó pontpár.

5.4.13. Feladat. *Adott a síkon egy P pont, valamint véges számú konvex halmaz, melyek közül bármely kettőnek van metszéspontja. Van-e biztosan olyan egyenes, amely mindegyik halmazba belemetsz, és áthalad a P ponton? (*Segítség: *Alkalmazzuk az előző feladatot!)*

Megoldás: Azokat a halmazokat, melyeknek P belsejében van, elhagyhatjuk, hiszen ezekbe belemetsz bármelyik P-n átmenő egyenes. Vegyünk ezután a pont körül egy tetszőleges sugarú kört. Vetítsük a halmazokat sugár irányban a körvonalra. Ekkor köríveket

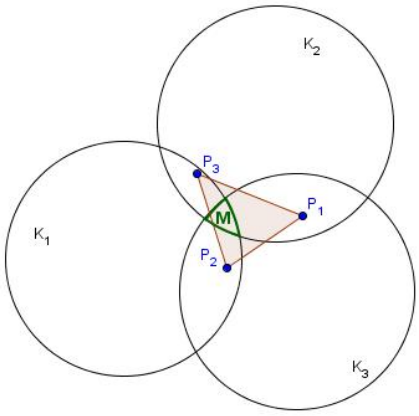
kapunk, melyek közül bármely kettőnek van közös pontja. Az előző feladat szerint létezik olyan lefogó pontpár, amelyek egy átmérőnek végpontjai. De ekkor az átmérőegyenes minden halmaza belemetsz.

5.4.3. Helly tétele a síkon

Az előző alfejezetben azt láttuk, hogy páronként metsző síkbeli halmazokhoz mindig létezik az összes halmazba belemetsző egyenes. Ebben a fejezetben azt fogjuk vizsgálni, hogy mikor található a halmazoknak közös pontja.

5.4.14. Feladat. *Adott négy zárt egységkörlap, bármely háromnak van közös pontja. Igaze, hogy ekkor mind a négynek is van közös pontja?*

Megoldás: Jelölje a négy körlapot K_1, K_2, K_3, K_4. Ha a négy kör közül kettő érintő helyzetű, akkor az érintési ponton át kell mennie az összes körnek, tehát feltehetjük, hogy a körök metsző helyzetűek. Ekkor K_1, K_2, K_3 metszete valódi tartomány, jelölje a tartományt M. A K_4 körnek bármelyik másik kettővel kell, hogy legyen közös pontja, melyekre a következő jelöléseket használjuk: $P_1 \in K_2 \cap K_3 \cap K_4, P_2 \in K_1 \cap K_3 \cap K_4, P_3 \in K_1 \cap K_2 \cap K_4$. Ha ezek közt a pontok közt van M-beli, akkor készen vagyunk. Tegyük föl, hogy a három pont egyike sem M-beli. Tudjuk, hogy K_4 konvex, emiatt a $P_1P_2P_3$ háromszög teljes egészében része. Az pedig könnyen látható, hogy ennek a háromszögnek mindenképpen van közös része M-mel.

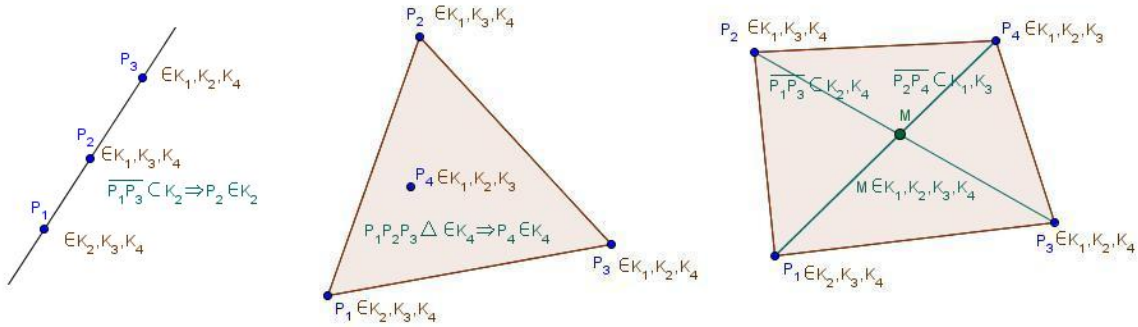


20. ábra. Metsző körök közös pontja

Vegyük észre, hogy a negyedik halmazról csak annyit haszáltunk ki, hogy konvex, és meggondolható az is, hogy tetszőleges sugarú körökre működik a bizonyítás. A feladatnak igazából annyi célja volt, hogy szoktasson azokhoz a fogásokhoz, amiket majd a későbbiekben használni fogunk. Most nekikezdünk a Helly-tétel igazolásának, részfeladatokon keresztül. Ezek megoldásait a bizonyítás közismertsége miatt csak ábrán szemléltetjük.

5.6. Állítás. *Adott a síkon négy konvex halmaz (K_1, K_2, K_3, K_4) úgy, hogy bármely háromnak létezik közös pontja. Igazoljuk, hogy ekkor az összesnek is van közös pontja.*

Bizonyítás: Legyen $P_1 \in K_2 \cap K_3 \cap K_4$, $P_2 \in K_1 \cap K_3 \cap K_4$, $P_3 \in K_1 \cap K_2 \cap K_4$, $P_4 \in K_1 \cap K_2 \cap K_3$. Ennek a négy pontnak különböző helyzeteit vizsgáljuk.



21. ábra. A részfeladatok megoldásai

1. eset. Ha van három pont egy egyenesen, például P_1, P_2, P_3, közülük P_2 helyezkedik el középen.

   Részfeladat: Készíts ábrát, és jelöld, hogy mely pontok mely halmazoknak elemei! Melyik pont van benne mind a négy halmazban, miért? *Segítség:* Használjuk ki, hogy a halmazok konvexek!

2. eset. Ha van egy olyan pont (pl. P_4), amelyik benne van a másik három által meghatározott háromszögben.

   Részfeladat: Készíts ábrát, és jelöld, hogy mely pontok mely halmazoknak elemei! Melyik pont van benne mind a négy halmazban, miért?

3. eset. Ha a négy pont egy konvex négyszöget határoz meg.

   Részfeladat: Készíts ábrát, és jelöld, hogy mely pontok mely halmazoknak elemei! Az átlók pontjai mely halmazoknak részei? Mely pont része mind a négy halmaznak, miért?

Ezek után már igazolhatjuk Helly tételét:

5.7. Tétel. *(Helly) Ha adott a síkon véges sok konvex halmaz úgy, hogy azok közül bármely háromnak van közös pontja, akkor az összesnek van.*

Bizonyítás: A halmazok számára vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk a tételt. Négy halmaz esetén a tétel épp az előző állítást adja, amit már beláttunk. Tegyük fel, hogy a tételt már beláttuk n halmazra, következik-e ebből, hogy igaz $n+1$-re is. Legyenek a halmazaink $K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}$. Vegyük a következő halmazrendszert: $K_1 \cap K_{n+1}, K_2 \cap K_{n+1}, \ldots, K_n \cap K_{n+1}$. Ez a halmazrendszer n elemből áll. Ha belátnánk, hogy bármely háromnak van közös pontja, akkor alkalmazható lenne az indukciós feltevés.

Részfeladat: Miért van az előbbi halmazrendszer bármely három elemének közös pontja?

Ehhez olyan pontot kell keresnünk, amely tetszőleges három halmaznak, és K_{n+1}-nek is eleme. Ilyen viszont biztosan van az 5.6. állítás szerint. Ezzel a tételt beláttuk. ■

Felmerül a kérdés, hogy a feltételek közül melyek szükségesek.

5.4.15. Feladat. *Igaz marad-e a tétel, ha végtelen sok konvex halmazt veszünk?*

Megoldás: Ezt a feladatot korábban már megoldottuk. Vegyük ugyanis az x tengely (i, ∞) alakú intervallumait, ahol $i \in \mathbb{N}$ (ha nincsenek a síkon koordinátatengelyek, akkor vegyünk föl egy tetszőlegeset). Hiába van bármennyinek közös pontja, az összesnek mégsincs.

Azt is láttuk korábban, hogy az sem segít rajtunk, ha korlátos halmazokat veszünk: a $(0, 1/n)$ alakú intervallumok is ellenpéldát szolgáltatnak. További feltétel teljesülése mellett igaz lesz a tétel végtelen számú halmazra is:

5.8. Állítás. *Ha adottak a síkon konvex, korlátos, zárt halmazok (akár végtelen sok) úgy, hogy bármely háromnak van közös pontja, akkor az összesnek is van.*

Nézzük most meg, mi történik, ha a konvexitást hagyjuk el.

5.4.16. Feladat. *Adjunk meg 4 halmazt a síkon úgy, hogy bármelyik háromnak van közös pontja, de az összesnek nincs!*

Megoldás: Vegyünk egy körvonalatt, annak négy „negyedelőpontját" (dél, 3 óra, 6 óra, 9 óra). Ezek meghatároznak négy zárt félkört. Ezek éppen jók lesznek.

Felmerül a kérdés, hogy nem lehetne e szigorúbb számbeli feltételek mellett elérni (pl. bármely négynek, vagy ötnek legyen közös pontja), hogy mégis igaz maradjon a tétel, azaz az összesnek legyen közös pontja.

5.4.17. Feladat. *Adjunk meg n olyan halmazt a síkon, hogy bármelyik $n-1$ nek létezzen közös pontja, de az összesnek mégsem.*

Megoldás: Az előző feladat ellenpéldáját általánosítjuk. Osszuk fel a körvonalat most n diszjunkt egyenlő részre. Olyan hosszú íveket veszünk, melyek kihagyják a kör $2/n$-ed részét. Világos, hogy ilyenből n db van. Könnyű meggondolni, hogy minden osztópont $n-1$ ívet fog le. Ebből már következik, hogy ez az n darab ív megfelel a feltételnek.

Az utóbbi két kérdésnek szerves folytatása egy olyan feladat, amely már halmazrendszerekről szól. A megoldás megmagyarázza azt is, hogy hogyan juthatunk el az előző konstrukcióhoz, amely önmagában elég légbőlkapottnak tűnhet.

5.4.18. Feladat. *** Mely n-re és k-ra tudunk megadni n síkbeli halmazt úgy, hogy bármely k-nak legyen közös pontja, de bármely $k+1$-nek már ne legyen?*

Megoldás: Bármilyen $n > k$ esetén. Vegyünk ugyanis $\binom{n}{k}$ pontot a síkon. Ez lesz a $\mathcal{H}$ alaphalmaz, amelynek megfelelő részhalmazait választjuk. A konstrukció: minden pont mellé írjunk k db különböző számot az $1, 2, \ldots n$ értékek közül, minden pont mellé másik k-ast.

Egy P_i pont tartozzon hozzá a K_j halmazhoz $(1 \geq i, j \geq n)$, ha j-t felírtuk P_i mellé. Így kapunk n darab halmazt. Egy pontra pontosan k halmaz illeszkedik, ezért $k+1$ halmaz metszete mindenképp üres. Másrészt bármely k halmaznak van közös pontja, mégpedig aza pont, amely mellé a választott k halmaz indexeit írtuk. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Vegyük észre azt is, hogy ha a pontokat egy kör kerületén helyezzük el egymástól egyenlő távolságra, épp az előző konstrukció egy módosítását kapjuk (ezt érdemes is végignézni a jobb érthetőség kedvéért).

Helly tételének utolsó nem vizsgált feltétele a síkbeliség.

5.4.19. Feladat. *Meg tudunk-e adni 4 konvex halmazt a térben úgy, hogy bármely háromnak van közös pontja, de az összesnek nincs?*

Megoldás: Egy tetraéder négy éle megfelelő példát szolgáltat.

Fejezetünk végén kimondjuk Helly tételét három dimenzióban:

5.9. Tétel. *(Helly) Ha adott a térben véges sok konvex halmaz úgy, hogy azok közül bármely négynek van közös pontja, akkor az összesnek van.*

Ennek bizonyítása lineáris algebrai eszközök nélkül nagyon körülményes (hasonló a síkbeli esethez), ezért nem térünk ki rá. Megnézzük viszont a Helly-tételkör néhány alkalmazását, ez lesz következő fejezetünk tárgya.

5.4.4. Korábbi feladatok általánosításai a tétel segítségével

Először korábbi eredményeinket próbáljuk általánosítani, majd további feladatokat adunk.

5.4.20. Feladat. *Általánosítsuk térbeli halmazokra a 5.4.7. feladat eredményét!*

Megoldás: Az említett feladat megoldása úgy indult, hogy levetítettük az összes halmazt egy egyenesre merőleges vetítéssel, és alkalmaztuk az 1-dimenziós Helly-tételt. Most két lehetőségünk van: vagy egyenesre vetítünk, vagy pedig síkra. Nézzük először az előbbit, majd az utóbbit:

1. Ha egyenesre vetítünk merőlegesen , akkor az egyenes egy pontjának ősképe a tér egy síkja, ezért az állítás a következő formában mondható ki:

   Adott véges sok konvex halmaz a térben úgy, hogy bármely kettőnek van közös pontja. Ekkor létezik olyan sík, amelynek minden halmazzal van közös pontja.

2. Ebben az esetben a síkbeli Helly-tételt kell alkalmaznunk, ezért változtatni kell a feltételeken, a sík egy pontjához viszont továbbra is a tér egy egyenese tartozik. Az állítás ebben az esetben így szól:

   Adott véges sok konvex halmaz a térben úgy, hogy bármely háromnak van közös pontja. Ekkor létezik olyan egyenes, amelynek minden halmazzal van közös pontja.

5.4.21. Feladat. *Hogyan általánosíthatóak a 5.4.8. feladat eredményei?*

Megoldás: Az előző feladat két megoldásához a következő két általánosítás tartozik:

1. *Adott véges sok konvex halmaz a térben úgy, hogy bármely kettőnek van közös pontja. Ekkor létezik tetszőleges normálvektorú sík, amelynek minden halmazzal van közös pontja!*

2. *Adott véges sok konvex halmaz a térben úgy, hogy bármely háromnak van közös pontja. Ekkor létezik tetszőleges irányú egyenes, amelynek minden halmazzal van közös pontja!*

5.5. Konvex halmazok a gömbön

Az 5.4.11. feladatban foglalkoztunk körrel, és íveivel (konvex halmazaival), és bizonyos feltétel esetén találtunk az ívekhez lefogó pontpárt is. Hogyan tudnánk ezt az eredményt általánosítani gömbök konvex halmazaira? Ehhez mindenekelőtt tisztázni kell, hogy mit nevezünk a gömbön konvex halmaznak.

Síkon egy halmazt konvexnak neveztünk, ha bármely két pontját összeekötő szakasz teljes egészében a halmaz része. Tudjuk, hogy a gömbön az egyeneseknek a főkörök feleltethetők meg, a szakaszoknak a főkörívek. Azt is tudjuk, hogy a gömb bármely két pontjához létezik őket összekötő főkörív. Ezután könnyű lenne azt mondani, hogy legyen egy gömbi halmaz konvex, ha bármely két pontját összekötő főkörív a halmazban van. Csakhogy az összekötő szakasszal probléma van. Ugyanis van belőle legalább kettő, átellenes pontok esetén végtelen sok. Mit is nevezzünk akkor konvex halmazoknak a gömbön?

5.10. Definíció. *A gömb egy halmaza konvex, ha bármely két pontját összekötő minimális hosszúságú főkörívek közül a halmaz valamelyiket tartalmazza.*

Mit is mond ez a definíció:

1. Ha van két nem átellenes pont, akkor tartalmazza a halmaz az őket összekötő rövidebb főkörívet.

2. A halmaz két átellenes pontjához létezik a halmazon belül haladó, a pontokat összekötő félfőkör.

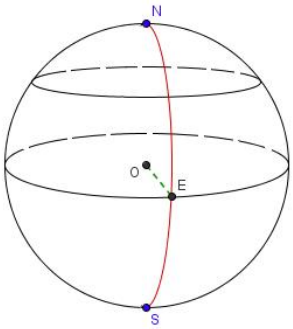
Lehetséges lenne 1. helyett azt is kimondani, hogy az összekötő főkörívek közül a halmaz tartalmazza valamelyiket, azonban a definíció a fent kimondott formában általánosítható tovább (geodetikus metrikus terekre, melyeket a dolgozatom első felében részletesen tárgyaltam). Szokatlan lehet viszont az a tény, hogy ha a gömbből kihagyjuk az északi pólust, akkor nemkonvex halmazt kapunk.

Megjegyzés: Látszólagos ellentmondás fedezhető fel szakdolgozatom másik része és e közt a definíció közt. Ugyanis ott konvexnek nevezem $\mathbb{R}^3$ egy felületét, ha tetszőleges pontjába támaszsíkot állítva, a felület teljes egészében a sík egyik oldalán helyezkedik el. Eszerint, ha a gömbből kihagyunk egy pontot, konvex felületet kapunk. Az ellentmondás azonban csak látszólagos. Az első meggközelítésben ugyanis a kilyukasztott gömbre, mint térbeli felületre tekintünk, nem pedig a gömb, mint alaphalmaz egy részhalmazára.

5.5.1. Feladat. *Próbáljuk általánosítani az 5.4.11. eredményét.*

Megoldás: Az említett feladatban egy kör íveihez találtunk lefogó pontpárt. A következőképpen okoskodtunk: merőlegesen vetítettük a kört, és íveit egy segédegyenesre, és azon alkalmaztuk az 1-dimenziós Helly-tételt. Itt viszont van egy kis bökkenő. Ha vesszük ugyanis a gömb egy konvex halmazát, és vetítjük azt egy síkra, egyáltalán nem biztos, hogy a síkon is konvex halmazt kapunk (pl. egy főkört vetítve egy rá nem merőleges síkra). Tehát a síkra vetítő gondolatmenet nem vihető át gömb konvex halmazaira.

Vetítsünk olyanra, amire tudunk. Válasszunk ki egy hosszúsági körnek a felét (pl. keleti hosszúság 0°, ld. az ábrán). Ez lesz a segédfélkörünk, vetítsük erre a gömb pontjait a szélességi körök mentén. Ekkor a gömbi konvex halmazok képei olyan ívek lesznek, melyeknek páronként van közös pontja, egy félkörbeli pont ősképe pedig egy szélességi kör lesz.



22. ábra. Segédfélfőkör a gömbön

A félkörre kiegyenesítés után alkalmazzuk az 1-dimenziós Helly-tételt, és így a következőt kapjuk:

Ha adott a gömbnek véges sok konvex halmaza úgy, hogy közülük bármely kettőnek van metszéspontja, akkor létezik olyan kör a gömbön, amelynek bármely halmazzal van közös pontja.

Az előző gondolatmenetben a segédfélkör helyzetét önkényesen választottuk meg. Ez veti fel a kérdést:

5.5.2. Feladat. *Létezik-e biztosan az előző halmazokhoz lefogó főkör?*

Megoldási vázlat: Kezdjük el forgatni a segédfélfőkört a felezőpontjába mutató OF sugár mentén. 180°-ot forgatva a lefogó kör valamikor átmegy a felezőponton, azaz főkörré válik.

Alfejezetünk egyik célja az volt, hogy a az 5.4.11. feladatot próbáljuk minél közvetlenebbül általánosítani, egy lehetőség a következő lehetne:

5.5.3. Feladat. **** Igaz-e a következő: ha adott a gömbnek véges sok konvex halmaza úgy, hogy közülük bármely háromnak van közös pontja, akkor létezik-e olyan pontpár, amely az összes konvex halmazt lefogja?*

Ennek a kérdésnek megválaszolása nehéz (nem is sikerült rá választ találnom). Nehézségét a következő mutatja: a síkbeli Helly-bizonyítás nem vihető át, az indukció nem működik. Igenlő válaszhoz tehát másképp kell próbálkozni. Ellenpéldául pedig találni kellene legalább 7 olyan konvex halmazt a gömbön (6 halmaz lefogható két ponttal), melyek közül bármely 3-nak van közös pontja, de nem létezik lefogó pontpár. Ez utóbbi sem tűnik egyszerű feladatnak.

5.5.1. A síkbeli Helly-tétel néhány további alkalmazása

Fejezetünk zárásaként összegyűjtünk néhány feladatot Helly tételének alkalmazására.

5.5.4. Feladat. *Ha adott a síknak négy félsíkja, S_1, S_2, S_3, S_4, melyek együttesen lefedik a síkot. Igazoljuk, hogy létezik közülük három, amely már szintén lefedi a teljes síkot. (*Segítség: *vizsgáljuk a kiegészítő félsíkokat!)*

Megoldás: Jelölje a kiegészítő félsíkokat $\overline{S_i}$. Tudjuk, hogy nem lehet mind a négynek közös pontja, mivel az eredeti félsíkok lefedik a teljes teret. Ez azt jelenti, hogy van három olyan félsík $\overline{S_i}$-k közt, melyeknek nincs közös pontja (pl, $\overline{S_1}, \overline{S_2}, \overline{S_3}$-nak). Ha ugyanis bármely háromnak lenne közös pontja, akkor az összesnek is lenne Helly tétele szerint. Ez viszont azt jelenti, hogy S_1, S_2 és S_3 lefedik az egész síkot.

5.5.5. Feladat. *Adott a síkban egy véges ponthalmaz úgy, hogy bármely három pontja lefedhető egy r sugarú zárt körlemezzel. Lássuk be, hogy ekkor van olyan r sugarú zárt körlemez, mely az összes pontot lefedi. (*Segítség: *Próbáljunk olyan halmazokat gyártani, amelyekre alkalmazni tudjuk Helly tételét.)*

Megoldás: Vegyünk fel a pontok köré r sugarú köröket. Ezek közül bármely háromnak van közös pontja a feladat feltétele szerint. Alkalmazva Helly tételét ezekre a körökre, azt

kapjuk, hogy az összes körlemeznek van közös pontja, jelöljön egy közös pontot O. Egy O körüli, r sugarú kör megfelelő lesz.

Megjegyzés: Igazából nem volt szükség arra, hogy a ponthalmaz véges legyen, hisz említettük, hogy korlátos és zárt halmazok esetén végtelen sokra is alkalmazható Helly tétele.

5.5.6. Feladat. *Egy országban tudjuk, hogy bármely két település közt maximum 250 km a távolság. Fel akarnak állítani egy radart, amely az ország minden települése fölötti légteret belátja. Mekkora hatótávolságú radart elég tervezni, és hová kell állítani?*

Megoldás: Az első, legegyszerűbb gondolat az, hogy állítsunk radart a főváros központjába, melynek hatósugara 250 km. Ez a radar nyilván minden város légterét látja. Érezhető azonban, hogy ennél kisebb sugarú radar is elegendő lesz, ha ügyesen választjuk meg a felállítási helyét. Nézzünk egy speciális esetet:

Részfeladat: *Hová állítsuk a radart, ha az országban csak három település van? Mekkora sugarú radar elegendő?*

Aki egy kicsit is megbarátkozott már a háromszög körülírt körének fogalmával, a radart annak középpontjába helyezné (világos, hogy minden más választás nagyobb hatósugarú radart igényelne).

A második kérdés megválaszolásához a körülírt kör sugarát kell megbecsülnünk. Fogalmazzuk meg pontosan a kérdést: *Ha egy ABC háromszög oldalai maximum 250 km-esek, mekkora lehet legfeljebb a háromszög körülírt körének sugara?*

Megoldás: Az $AOB\angle$, $BOC\angle$, $COA\angle$ szögek közül valamelyik maximum $120°$, legyen ez például $AOB\angle$, jelölje φ. Írjuk fel az AOB háromszögben a koszinusz-tételt:

$$AB^2 = r^2 + r^2 - 2rr \cdot \cos\varphi$$

Mivel $AB \geq 250$, ezért $250^2 \geq 2r^2(1 - \cos\varphi)$. Választásunk szerint $\varphi \leq 120°$, azaz $\cos\varphi \geq -1/2$. Ezt alkalmazva nyerjük:

$$250^2 \geq 3r^2$$

$$250/\sqrt{3} \geq r$$

Ennél nincs is jobb becslés, egy 250 km oldalú szabályos háromszög körülírt körének sugara éppen $250/\sqrt{3}$.

A részfeladat megoldásával azt is láttuk, hogy bármely három várost lefed egy $250/\sqrt{3}$ sugarú kör. Alkalmazzuk az előző eredményünket! Eszerint létezik az összes várost lefedő $250/\sqrt{3}$ sugarú kör, melynek megtalálására módszert is láttunk. Ezzel feladatunkat megoldottuk.

E gyakorlati alkalmazás közben beláttuk Jung tételét, melynek kimondásával zárjuk fejezetünket:

5.11. Tétel. ***Jung*** *Ha adott egy síkbeli ponthalmaz, melyben bármely két pont távolsága legfeljebb d, akkor a ponthalmaz elemei lefedhetőek egyetlen $d/\sqrt{3}$ sugarú körrel.*

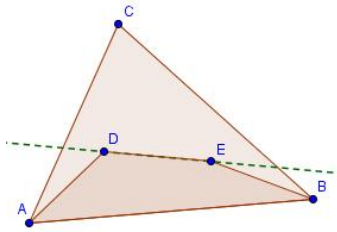
5.6. Néhány kombinatorikus geometriai feladat

Ebben a fejezetben egy magyar vonatkozású matematikatörténeti feladatot szeretnénk kibontani, az úgynevezett Happy End problémát.

A történet szerint a két háború közt ifjú matematikusok egy kis, később igen híressé vált csoportja (Klein Eszter, Erdős Pál, Szekeres György, Gallai Tibor és Turán Pál) szívesen foglalkoztak közösen különböző matematikai problémákkal. A következő kis feladatot Klein Eszter vetette fel, mely aztán egy egész tudományterület kiindulási pontjává vált. A problámának a Happy End nevet maga Erdős Pál adta, ugyanis Szekeres György és Klein Eszter később összeházasodtak, és Ausztráliában boldog matematikuséletet éltek.

5.6.1. Feladat. *Adott a síkon 5 pont, semelyik három nincs egy egyenesen. Mutassuk meg, hogy pontok közt mindig van négy, melyek konvex négyszög csúcsait alkotják.*

Megoldás: Ha az öt pont konvex ötszöget határoz meg, vagy egy olyan konvex négyszöget, melynek belsejében van az ötödik pont, akkor készen vagyunk. Az az eset maradt még, amikor az öt pont meghatároz egy háromszöget (ABC), melynek belsejében van a maradék két pont (pl. D, E). Ekkor a DE egyenes két részre bontja a síkot. Valamelyik részben a háromszögnek két csúcsa található. Ez a két csúcs D-vel és E-vel együtt konvex négyszöget határoz meg.



23. ábra. Konvex négyszög létezése

Növeljük meg a pontok számát, és számoljuk össze a konvex négyszögeket!

5.6.2. Feladat. *Adott a síkon n tetszőleges pont, semelyik három nem esik egy egyenesbe. Hány olyan konvex négyszöget tudunk megadni, melynek csúcsai az adott pontok közül valók?*

Megoldás: Az előző feladatban öt pontból tudtunk kiválasztani egy konvex négyszöget. Ezt próbáljuk meg most is alkalmazni. Osszuk fel az pontot $\lfloor n/5 \rfloor$ darab 5-ös csoportba. Tudjuk, hogy minden pontötösből kiválasztható egy konvex négyszög, így sikeresen kiválaszthatunk $\lfloor n/5 \rfloor$ db. konvex négyszöget.

Láthatjuk azonban, hogy módszerünk elég pazarló, hiszen csak a rögzített pontötösökből választottunk konvex négyszögeket. Olyanokat nem számoltunk, melyek csúcsai különböző ötösökbe esnek. Kezdjük újra a számolást! Válasszunk ki az összes lehetséges módon n pontunkból 5-t. Ez $\binom{n}{5}$ lehetőség. Minden ötösből kiválasztható egy konvex négyszög. A kérdés az, hogy maximum hányszor számoltunk egy négyszöget.

Egy konvex négyszög $n-4$ darab pontötöshöz tartozhat, hisz bármelyik maradék pontot hozzávehetjük a négyszögünkhöz. Ez azt jelenti, hogy a négyszögünk száma legfeljebb $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$. Eredményünket szebb alakra hozhatjuk:

$$\frac{1}{n-5}\binom{n}{5} = \frac{1}{n-4}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} = \frac{1}{5}\binom{n}{4}.$$

Megjegyzések:

- A mai napig nyitott kérdés, hogy mi a pontos alsó korlát a konvex négyszögek számára.
- Legutolsó eredményünk úgy is megfogalmazható, hogy egy adott síkbeli ponthalmaz pontnégyeseinek legalább az ötöde konvex helyzetű.

Érdekes kérdés, hogy hány konvex négyszöget tudunk kiválasztani, ha azt szeretnénk, hogy azok mind diszjunktak legyenek.

5.6.3. Feladat. *Adott a síkon $5n$ pont, semelyik három nem esik egy egyenesbe. Adjunk meg n olyan konvex négyszöget, melyeknek csúcsai az adott pontok közül valók, és egymással nincs közös pontjuk!*

Ügyesen kell a pontokat ötös csoportokra bontani. Egy lehetséges módszer a következő: vegyünk egy egyenest a ponthalmazon kívül, tehát úgy, hogy az egyenes ne válasszon el két halmazbeli pontot. Kezdjük el tolni az egyenest önmagára merőlegesen a pontok irányában. Elérjük az első pontot, majd a másodikat, stb. az ötödiket. Ebből az öt pontból válasszunk ki egy konvex négyszöget. Ha továbbtoljuk az egyenest, elérjük a hatodik, hetedik, stb. tizedik pontot. Ezek közül újabb konvex négyszöget választhatunk. Ennek a két négyszögnek biztosan nincsen közös pontja, mert két, egymástól diszjunkt párhuzamos sávban helyezkednek el. Folytatva az eljárást kaphatunk n darab páronként közös pont nélküli konvex négyszöget.

A gondolatmenetben van egy kis kiigazítani való. Lehetséges ugyanis, hogy az egyenes mozgatásakor egyszerre két pontot érünk el, ami problémát okozhat. Ezen azonban könnyen segíthetünk: Mivel a pontok száma véges, az általuk meghatározott irányok száma is véges (maximum $\binom{5n}{2}$ irány). Ha tehát ezektől különböző irányt választunk az egyenes mozgatására, egyszerre legfeljebb egy pontot érhetünk el. Ezzel a feladatot megoldottuk.

A fejezet elején azt láttuk, hogy öt általános helyzetű pont mindig meghatároz konvex négyszöget. Folytathatjuk a kérdések feltevését. Ha növeljük a pontok számát, meghatározze a ponthalmaz konvex ötszöget/hatszöget, stb? Ha igen, legkevesebb hány pont kell hozzá.

5.6.4. Feladat. **** Adott a síkon kilenc általános helyzetű pont. Mutassuk meg, hogy mindenképpen kiválasztható közülük öt, amelyek konvex ötszöget határoznak meg. Mutassuk meg, hogy nyolc általános helyzetű pontra ugyanez nem igaz.*

A feladat megoldása ugyan nem igényel többet a középiskolás eszközöknél, de sok apró esetet kell hozzá megvizsgálni, amitől most eltekintünk.

Fejezetünk nagy részében konvex négyszögeket kerestünk egy adott ponthalmazban. A konvex négyszögek vizsgálata a következő feladat szerint az egész ponthalmazról információt hordozhat.

5.6.5. Feladat. *Igazold a következőt: Egy sokszög pontosan akkor konvex, ha bármely négy csúcsa konvex négyszöget határoz meg.*

Megoldás: Világos hogy egy konvex sokszög bármely négy pontja is konvex helyzetű. Feladatunk marad a fordított irány igazolása.

Tegyük fel, hogy az S sokszög nem konvex. Ez azt jelenti, hogy van olyan C csúcsa, amely konvex burkán belülre esik. Háromszögelve a konvex burkot, C valamely háromszög belsejébe esik. A háromszög három csúcsa C-vel kiegészítve nem határoz meg konvex négyszöget, ami ellentmondás.

5.7. A képtárprobléma

Fejezetünk elején megemlékeztünk az alakzatok konvexitásának népszerű definíciójáról, mely szerint egy síkidom konvex, ha nem lehet benne elbújni, konkáv pedig akkor, ha el lehet benne bújni. Folytatva a gondolatot bevezethetnénk akár új elnevezéseket is: beszélhetnénk kicsit konkáv és nagyon konkáv alakzatokról aszerint, hogy nagyon el lehet-e bújni bennük, vagy éppenhogycsak. Ennek a gondolatkísérletnek egy adekvált megfogalmazása a címben említett híres probléma, melyfejezetünk tárgyát képezi. A probléma így szól:

Van egy múzeum, falai „egyenesek". Biztosítani akarjuk, hogy a múzeum minden pontját folyamatosan szemmel tartsa egy őr. Az őrök nem mozoghatnak, viszont megfordulhatnak. Hány őrre van legfeljebb szükségünk, ha a múzeumnak n fala van?

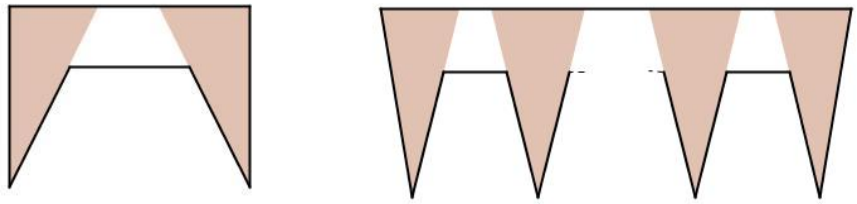
A továbbiakban feltesszük, hogy a termek hasáb alakúak, így sokszögeken vizsgálódunk (az alaprajzon).

Első észrevételünk, hogy ha a terem konvex, elég egyetlen őr. Ezzel a háromszög alaprajzú esetet megoldottuk. Ha a sokszög négyszög (akár konvex, akár konkáv), szintén elég egy őr.

5.7.1. Feladat. *Hány oldalú legalább az a sokszög, amelynek őrzésére legalább két őr szükséges? És amely őrzéséhez három őr szükséges?*

Megoldás: Egy ötszög „őrzéséhez" még elég egy ember (a Happy-end probléma kapcsán láthattuk, hogy helyezkedhet el 5 pont, bármely esetet könnyen ellenőrizhetjük). Hatszögből már találhatunk olyat, amelyhez két őr szükséges, egy lehetséges konstrukciót a 24.

ábrán láthatunk. Hogy miért szükséges két őr: A két satírozott háromszög őrzésére különkülön őrök szükségeltetnek. *Kérdés:* Hova állítsuk a két őrt az említett hatszögben, hogy az egészet belássák?



24. ábra. Konstrukció hatszögre és $3n$-szögre

Olyan kilencszöget, amely őrzéséhez három ember kell, szintén könnyű konstruálni (általánosítva ugyanezen az ábrán látható). Azt, hogy nyolcszög őrzésére mindig elég a két őr, később látjuk be, általánosabban.

Az $n = 6$ és $n = 9$ eseteket általánosítva tudunk rajzolni olyan $3n$-szöget, amelynek őrzésére n őr szükséges (ld. 24. ábra). Az ábrát kicsit módosítva kaphatunk olyan $3n + 1$-szöget is, illetve $3n + 2$-szöget is, melyekhez szintén n őr szükséges

Részfeladat: *Miért szükséges az ábrán látható $3n$-szög őrzésére n őr? Helyezzünk el n őrt úgy, hogy belássa a sokszöget! Hogy módosítsuk az ábrát a $(3n + 1)$-es és a $(3n + 2)$-es esetben?*

A következőkben azt fogjuk látni, hogy a konstrukcióban szereplő őrök száma a szükséges maximumot adja. Ezt külön tételként fogalmazzuk meg:

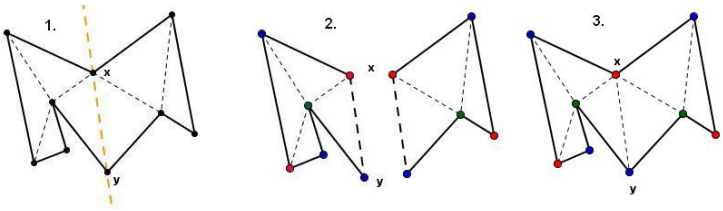
5.12. Tétel. *Bármely n falú múzeum őrzéséhez elég $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ őr.*

Részfeladat: *Belátja-e a múzeumot n olyan őr, akiket a csúcspontokba állítunk?*

Megoldás: Természetesen belátják. Háromszögeljük ugyanis a sokszöget. Bármely háromszög belátható a csúcspontjaiból. Ez pedig azt jelenti, hogy az n csúcsbeli őr is belátja a teljes sokszöget.

A megoldásból látszik, hogy az őröket „pazaroltuk”, hiszen egy pontot legalább három őr lát . A pazarlást elkerülhetnénk például úgy, ha minden háromszögnek csak az egyik csúcsán állna őr (kérdés persze, hogy ez megtehető-e, illetve hány őrt jelent legalább egy ilyen elrendezés). A vázolt takarékoskodáshoz egy ügyes trükköt hívunk segítségül. Rögzítsük előtte a sokszög egy háromszögelését.

5.7.2. Feladat. *Múzeumunk fokozottan értékes, ezért három biztonsági szolgálatot bérelünk fel, piros ruhásokat, kék ruhásokat és zöld ruhásokat. Az őröket a csúcspontokba akarjuk úgy felállítani, hogy egy háromszög három csúcsában három különböző ruhás ember legyen (így nemcsak a képeket, hanem egymást is szemmel tarthatják). Lehetséges-e ez mindig?*



25. ábra. Az őrök elhelyezésének három lépése

Próbáld ki először konkrét sokszögeken! Belátja-e bármely biztonsági szolgálat az egész múzeumot?

Megoldás: Második kérdésre könnyen válaszolhatunk, hiszen bármely háromszöget belátja mindhárom őrszolgálat, így ugyanez elmondható az egész sokszögre. Az első kérdés megválaszolásához teljes indukciót hívünk segítségül. Az $n = 3$ eset a háromszög esete, ami triviális. Tegyük fel, hogy $n - 1$-ig igaz az állítás. Nézzük az n-szög esetét.

Jelölje S az n-szögünket. Válasszunk ki egy olyan xy átlóját, mely szerepel a rögzített háromszögelésében. Az xy átló S-t két sokszögre (S_1, S_2) bontja (ld. 25. ábra). Ezek oldalszáma kisebb, mint n, ezért alkalmazhatjuk rájuk indukciós feltevést. Eszerint mind S_1-ben, mind S_2-ben elhelyezhetőek az őrszolgálatok tagjai a kívánt feltétellel. Sőt, elhelyezhetők úgy is, hogy x-ben piros, y-ban kék őr álljon (ha nem így lenne, cseréljük meg a szerepeket a részsokszögeken belül). Ekkor viszont az xy él mentén összeilleszthetjük S_1-t és S_2-t. Ezzel megkaptuk az őrök egy kívánt elhelyezését.

A tételt ezzel igazoltuk. Tudjuk ugyanis, hogy bármely őrszolgálat elegendő a sokszög megfigyeléséhez. Azonban n csúcsban 3 különböző őrszolgálat emberei vannak, így valamelyik szolgálat legfeljebb $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ őrt alkalmaz.

Megjegyzés:

- Az előző megoldás könnyebben elmondható, hogyha ismerjük a gráfok valahány színnel való színezhetőségének problémáját.
- A három színnel való színezhetőség eldöntése általában NP-teljes. Ebben a speciális esetben azonban egy polinomiális algoritmust láttunk a három-színezésre.

Befejezés

Az eddigiekből is kitűnik, hogy milyen sokszínű, sok témakört felölelő feladatsort készíthetünk a konvexitás fogalma köré. Szeretném felsorolni, hogy milyen további, konvexitáshoz kapcsolódó témákkal lehetne tovább bővíteni az anyagot.

- Külön fejezetben tárgyalhatnánkk a konvexitást, mint függvénytulajdonságot.
- Foglalkozhatnánk több fejezeten keresztül konvex poliéderekkel, az Euler-tétellel, poliéderek feldarabolhatóságával.

- Olyan csoportban, amelynek van némi jártassága algoritmusok terén, foglalkozhatnánk konvexitással kapcsolatos geometriai algoritmusokkal.

Irodalomjegyzék

[1] *Martin R. Brindson, André Haefliger: Metric spaces of non-positiv curvature*
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1999.

[2] *M. W. Davis, G. Moussong: Notes on nonpositively curved polyhedra*
Bolyai Society, Budapest 1998.

[3] *Barrett O'Neill: Semi-Riemannian Geometry*
Academic Press, New York, London 1983.

[4] *John A. Thorpe: Elementary Topics in differential geometry*
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1979.

[5] *Verhóczki László: Klasszikus differenciálgeometria*
http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/dgjegy11.pdf

[6] *Simon László, E. A. Baderko: Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*
Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[7] *Freud Róbert: Lineáris algebra*
ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004.

A tanári szakdolgozatban felhasznált irodalom:

[8] *Hajós György: Bevezetés a Geometriába*
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[9] *Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből*
Typotex Kiadó, Budapest, 2006.

[10] *Varecza Árpád, Rozgonyi Tibor: A tanárképző főiskolák matematika versenyei IV.*
Typotex Kiadó, Budapest, 2003.

[11] *Elekes György: Kombinatorika feladatok*
ELTE, Budapest, 2002.

[12] *Elekes György: Véges matematika*
ELTE, Budapest, 2002.

[13] *Reiman István: Geometria és határterületei*
Gondolat, Budapest, 1986.

[14] *Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából*
Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[15] *Lovász László: Kombinatorikai problémák és feladatok*
Typotex Kiadó, Budapest, 2008.

[16] *Martin Aigner, Günter M. Ziegler: Bizonyítások a könyvből*
Tipotex Kiadó, Budapest, 2004.

[17] *D.O. Skljarszkij, N.N. Csencov, I.M. Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 3.*
Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

[18] *Bárány Imre: Helly tételéről*
in: Középiskolai Matematikai Lapok 1981/II.