Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Steller Gábor

Parkettázások a végtelen sakktáblán

diplomamunka

Témavezető:

Juhász Péter,

Budapest, 2010.

Tartalomjegyzék

Bevezető **5**

Köszönetnyilvánítás **7**

1. Alapfogalmak **8**

1.1. Távolság, egybevágóság 8

1.2. Parkettázhatóság 11

2. Parkettázás és színezés **13**

2.1. Az L-triominó és a lyukas téglalapok 13

2.2. Lyukak és színezések 22

2.3. A végtelen sakktábla parkettázásai 26

2.4. További problémák 36

3. Kétszemélyes parkettázó játékok a végtelen sakktáblán **40**

3.1. A játék leírása 40

3.2. Nyerő stratégia létezése 43

3.3. Néhány általános tulajdonság 47

3.4. A parkettázó játék téglalapokra 54

3.5. A $T = L$ eset és néhány nyitott kérdés 58

4. Parkettázási problémák tanítása felfedeztetéssel 64

4.1. Matematikatanítás felfedeztetéssel 65

4.2. Dominók a sakktáblán 67

4.3. Színezés és lehetetlenség 76

4.4. Néhány további parkettázási feladat 79

Irodalomjegyzék 85

Gács András emlékének

Bevezető

Számos közismert matematikafeladat szól a sakktábla, vagy annak egy részének dominókkal, triominókkal vagy más alakzatokkal történő parkettázásáról. Diplomamunkám ezek továbbgondolásaként néhány újszerű problémát fogalmaz meg, amelyek jelentős része az ún. végtelen sakktábla, azaz a teljes síkot lefedő végtelen négyzetháló parkettázásával kapcsolatos. Az itt bemutatásra kerülő gondolatmenetek számos motívuma (pl. színezések, invariáns tulajdonságok) a középiskolai oktatásban, illetve a matematikai tehetséggondozó munkában is tanítható, felhasználható.

A diplomamunka első fejezete a későbbiekben használt alapvető fogalmakat és jelöléseket vezeti be. Ezt követi a három fő tartalmi egység, mindegyikük önálló fejezetként.

Az első egységben néhány ismert problémából kiindulva főként az vizsgálom, hogy lehetséges-e a végtelen sakktáblán néhány, egymástól távol elhelyett „lyukkal" (egységnégyzettel), elrontani egy adott alakzattal való parkettázhatóságot. Többek közt bebizonyítom, hogy amíg L-triominóval még viszonylag közeli lyukak tetszőleges elhelyezése esetén is mindig lehetséges a végtelen sakktábla parkettázása, addig dominókat használva ugyanez nem teljesül: egymástól tetszőlegesen nagy távolságra megadhatunk egységnégy-

zeteket úgy, hogy a maradék rész ne legyen parkettázható. A felépítés során azt a folyamatot is igyekszem bemutatni, ahogyan egy-egy probléma megoldása után logikusan felmerülő kérdéseimet, sejtéseimet megfogalmaztam, újabb és újabb érdekes állításokat keresve.

A középső tartalmi részben egy olyan kétszemélyes végtelen játékot – illetve ilyenekből álló játékcsaládot – definiálok, melynek szabályait az előző fejezet eredményei alapján alkottam meg. A játék lényege, hogy a két játékos felváltva helyez egy-egy parkettát a végtelen sakktáblára (bizonyos megkötésekkel), egyikük célja a teljes parkettázás, a másiké ennek megakadályozása. Belátom, hogy valamennyi ilyen játékban van valamelyik félnek nyerő stratégiája. A fő kérdés ezután az, hogy hol húzódik a határ az egyik, illetve másik játékos számára kedvező játékváltozatok között. Néhány konkrét eset elemzése mellett igyekszem általános eredményeket is bemutatni.

A dolgozat harmadik része bizonyos parkettázási problémák didaktikai szempontú elemzését tartalmazza. Röviden bemutatom az ún. felfedeztető matematikatanítást, mint oktatási stratégiát, majd ennek szempontrendszerét felhasználva egy összefüggő feladatsor lehetséges feldolgozását tárgyalom. A fejezetben egyebek közt kitérek a tanulóknak nyújtható segítségek, a diákok által feltett kérdések, illetve a feladataink megfogalmazásának jelentőségére.

A diplomamunka elkészítése során támaszkodtam az Irodalomjegyzékben is szereplő – főként angol nyelvű – szakirodalomra, valamint a tanítási fejezet esetében nem csekély mértékben saját tapasztalataimra, melyeket különböző tehetséggondozó táborokban, szakkörökön és normál tanítási órákon – részben diákként, részben pedagógusként – szereztem.

Köszönetnyilvánítás

A diplomamunka elkészítésében nyújtott segítségéért köszönettel tartozom néhai témavezetőmnek, dr. Gács Andrásnak (1969–2009), akinek tragikusan korai halála miatt közös munkánk váratlanul félbeszakadt. Egyik beszélgetésünk adta az ötletet a dolgozatban részletesen tárgyalt parkettázó játékok megalkotásához. Szomorúsággal tölt el a tudat, hogy az eredményeket és az elkészült munkát ő már nem ismerhette meg.

Hálás köszönet illeti Juhász Pétert, aki a számomra kritikus időszakban azonnal elvállalta a szakdolgozat témavezetését, és attól kezdve értékes tanácsaival, észrevételeivel segítette annak elkészülését. Köszönet illeti őt azért is, mert az évek során rengeteget tanultam tőle – többek között – a felfedeztető matematikatanítás módszereiről, gyakorlatáról.

Szeretném megköszönni Pósa Lajosnak, hogy diákként és segítőként is részt vehettem tehetséggondozó táboraiban. Az ő hosszú évek alatt összegyűjtött tapasztalata, ismeretanyaga, amelyet megosztott velem, dolgozatom felfedeztető tanításról szóló fejezetének megkérdőjelezhetetlen alapját adja.

Végül köszönettel tartozom az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskolájának, ottani kollégáimnak és tanítványaimnak az ott szerzett tapasztalatokért és tanári személyiségem formálásáért.

1. fejezet

Alapfogalmak

1.1. Távolság, egybevágóság

A végtelen sakktáblára (amelyet a rövidség kedvéért gyakran csak *sík*nak fogunk nevezni) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-ként gondolunk, így minden mező két egész számmal, a koordinátáival jellemezhető. A könnyebb érthetőség miatt a koordinátarendszer vektorai helyett időnként használni fogom a földrajzi irányokat (pl. délkelet, DK), melyeket úgy kell érteni, hogy az y tengely pozitív irányát tekintjük északinak. A síkbeli alakzatok $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ részhalmazai lesznek. A mezők közötti távolság az a minimális lépésszám lesz, ahány lépésben a király a sakktáblán el tud jutni az egyik mezőről a másikra. Ez éppen a mezők megfelelő koordinátái különbségeinek maximuma.

1.1.1. Definíció. *Az $X(a, b)$, $Y(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pontok távolságán a*

$$d(X, Y) = \max(|a - c|, |b - d|)$$

számot értjük.

Az alakzatok távolságát az egymáshoz legközelebb eső mezőik távolságaként határozzuk meg.

1.1.2. Definíció. *Az $A, B \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nemüres alakzatok távolságán a*

$$d(A, B) = \min\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

számot értjük. Az üres halmaz bármely alakzattól vett távolságát ∞-nek tekintjük.

1.1.3. Definíció. *Az A alakzat átmérője a mezői között fellépő legnagyobb távolság:*

$$d(A) := \max\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

1.1.4. Definíció. *Egy x mező r sugarú környezetén a*

$$B(x; r) := \{z \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid d(x, z) < r\}$$

halmazt értjük. Ez éppen egy $(2r - 1) \times (2r - 1)$-es négyzet.

Amikor egy A alakzattal parkettázunk, azon általában azt értjük, hogy a vele (euklideszi értelemben) egybevágó alakzatokkal fedünk le egy másik alakzatot. Emiatt gyakran van szükségünk az összes A-val egybevágó alakzat halmazára.

1.1.5. Definíció. *Egy A alakzat osztályának nevezzük és $\langle A \rangle$-val jelöljük az A-val euklideszi távolság szerint egybevágó alakzatok halmazát.*

Időnként többféle alakzat használatát is megengedjük a parkettázáshoz, ezért bevezetünk egy jelölést több alakzat osztályainak uniójára is, hiszen ilyenkor ebből a halmazból válogathatunk elemeket.

1.1.6. Definíció. *Legyen H alakzatok halmaza. Ekkor a H által generált elemkészletnek nevezzük a*

$$\langle H \rangle := \bigcup_{A \in H} \langle A \rangle$$

halmazt.

Észrevehető, hogy $\langle \{A\} \rangle = \langle A \rangle$, ennek mintájára az elemeik felsorolásával megadott halmazok esetében a generált elemkészlet jelölésében elhagyjuk a kapcsos zárójeleket: $\langle \{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \rangle$ helyett $\langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle$-t írunk a továbbiakban.

Az alábbiakban néhány fontos elemkészletet definiálunk:

1.1.7. Definíció. *A legfontosabb elemkészletek:*

- $E := \langle \{(0;0)\} \rangle$

  az egységnégyzetek halmaza.

- $R_{a,b} := \langle \{(x,y) \mid 0 \leq x < a,\ 0 \leq y < b\} \rangle$

  az $a \times b$-s téglalapok halmaza.

- $R := \bigcup \{R_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}^+\}$

  az összes téglalap.

- $L = L_3 := \langle \{(0;0), (0;1), (1;0)\} \rangle$

  az L-triominók halmaza.

- $T_4 := \langle \{(0;0), (1;0), (1;1), (2;0)\} \rangle$

  a T-tetrominók halmaza.

- $U := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$

  az összes alakzat halmaza.

1.2. Parkettázhatóság

1.2.1. Definíció. *Az A alakzat* ***parkettázható*** *a H halmaz elemeivel (röviden H-parkettázható), ha megadható olyan $B \subseteq H$ halmaz, hogy B elemei páronként diszjunktak, és egyesítésük kiadja A-t.*

1.2.2. Jelölés. *A H halmaz elemeivel parkettázható alakzatok halmazát $\mathcal{P}[H]$-val jelöljük.*

Vegyük észre, hogy az $A = \emptyset$ halmaz tetszőleges H halmaz elemeivel parkettázható. Egységnégyzetekkel pedig bármilyen alakzatot tudunk parkettázni.

Bevezetünk egy jelölést az adott számú H-beli alakzattal parkettázható alakzatok halmazára is.

1.2.3. Jelölés. *Legyen k egy természetes szám, vagy a ∞ szimbólum. Ekkor jelölje $\mathcal{P}^k[H]$ azon A alakzatok halmazát, melyekre megadható olyan $B \subseteq H$, $|B| = k$ halmaz, hogy B elemei páronként diszjunktak, és $\bigcup B = A$.*

Speciálisan tetszőleges H-ra $\mathcal{P}^0[H] = \{\emptyset\}$, és $\mathcal{P}^1[H] = H$.

A parkettázhatóságnak nyilván szükséges feltétele, hogy a parkettázandó alakzat mérete többszöröse legyen parkettáink méretének, illetve ha a többféle parkettát használunk, akkor a méretek legnagyobb közös osztójának. Ezt fogalmazza meg az alábbi állítás:

1.2.4. Állítás. *Tegyük fel, hogy a H halmaz minden X elemére teljesül, hogy X végtelen, vagy $|X|$ osztható d-vel. Ekkor, ha $A \in \mathcal{P}[H]$, akkor A végtelen vagy d osztója $|A|$-nak.*

Tegyük fel, hogy egy A alakzatot kiparkettáztunk a H halmaz elemeivel. Ha az elemkészletünk az összes, a felhasznált elemekkel egybevágó elemet is tartalmazza, akkor nyilván az összes A-val egybevágó alakzat is parkettázható ezzel az elemkészlettel, hiszen az egybevágóság a parkettázást is átviszi. Ezzel a következő állítást láttuk be:

1.2.5. Állítás. *Ha $A \in \mathcal{P}[H]$, akkor $\langle A \rangle \subseteq \mathcal{P}[\langle H \rangle]$.*

Egy nagyobb alakzat adott elemekkel történő parkettázhatóságának igazolásához gyakran felhasználjuk, hogy néhány kisebb alakzatot már ki tudtunk rakni az adott elemekkel. A már kirakott alakzatokat is tekinthetjük egy-egy újabb parkettának. Az alakzatok halmazai közötti parkettázhatósági reláció tehát tranzitív.

1.2.6. Állítás. *Legyenek X, Y, Z alakzatokat tartalmazó halmazok. Ekkor ha $X \subseteq \mathcal{P}[Y]$ és $Y \subseteq \mathcal{P}[Z]$, akkor $X \subseteq \mathcal{P}[Z]$.*

2. fejezet

Parkettázás és színezés

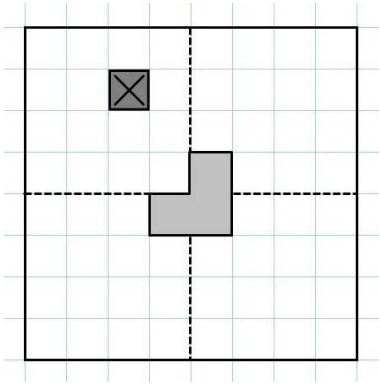
2.1. Az L-triominó és a lyukas téglalapok

A **poliominók** (a végtelen sakktábla olyan alakzatai, amelyek összefüggőek abban az értelemben, hogy bármely két mező között van út egymáshoz csatlakozó élszomszédos mezőkből) fogalmát Solomon Golomb vezette be. [1] Tőle származik az alábbi (viszonylag közismert) tétel is [2]:

2.1.1. Tétel. *Ha egy $2^n \times 2^n$-es négyzet egy tetszőleges mezőjét elhagyjuk, akkor a maradék parkettázható L-triominókkal.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval. Az $n = 0$ esetben az egyetlen mező elhagyásával az üres halmaz marad vissza, amely (bármivel, így L-triominókkal is) parkettázható. Tegyük fel, hogy valamely n-re már beláttuk az állítást. Egy $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-es négyzet 4 db $2^n \times 2^n$-esre vágható fel, amelyek egyikében van az elhagyott mező. Helyezzünk le egy L-triominót úgy, hogy a másik három négyzetből egy-egy mezőt fedjen le. A 2.1. ábra az $n = 2$ esetet szemlélteti,

ehhez teljesen hasonlóan járhatunk el az általános esetben.



2.1. ábra. Golomb tételének bizonyítása ($n = 2$)

Ekkor mind a 4 négyzetből 1-1 mező hiányzik, így ezek az indukciós feltevés szerint parkettázhatók L-triominókkal. Mivel a teljes $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-es négyzet az 1 darab L-triominó, és a 4 darab hiányos négyzet diszjunkt uniója, ezért ő maga is parkettázható. Vagyis az állítás $n + 1$-re is igaz, ezzel a tételt beláttuk. ■

Adódik a kérdés, hogy vajon milyen más alakzatokra mondható ki hasonló állítás. Ha L-triominókkal parkettázunk, akkor nagyon sokféle alakzat létezik, amelyeknek bármely mezőjét elhagyva a maradék parkettázható. Ennek a tulajdonságnak külön nevet is adunk.

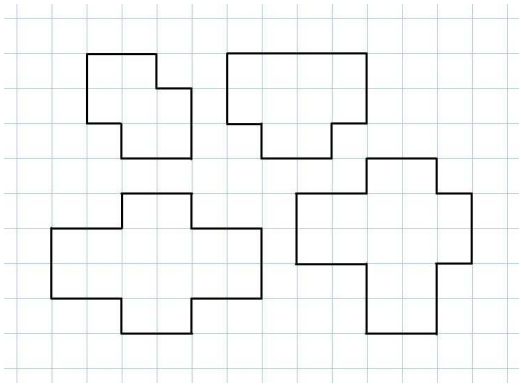
2.1.2. Definíció. *Az A nem üres alakzat* $\mathbf{L_1}$***-tulajdonságú****, ha bármely mezőjét elhagyva a maradék parkettázható L-triominókkal, azaz ha*

$$\forall X \in E,\ X \subseteq A\ :\ A \setminus X \in \mathcal{P}[L].$$

Már meglévő L_1-tulajdonságú alakzatokból könnyű újabbakat készíteni.

2.1.3. Állítás. *Ha A és B L_1-tulajdonságú alakzatokra $A \cap B \in E$, akkor $A \cup B$ is L_1-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Hagyjunk el egy x mezőt $A \cup B$-ből. Ha $x \in A$, akkor az A-ból megmaradt részt kiparkettázhatjuk, és $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$, $A \cap B \in E$ miatt $B \setminus A$ is parkettázható. Hasonlóan, ha $x \in B$, akkor előbb B-t, majd $A \setminus B$-t parkettázhatjuk. ■



2.2. ábra. L_1-tulajdonságú alakzatok

A 2.2. ábra néhány példát mutat L_1-tulajdonságú alakzatokra. Ezek közül a felső kettő megkapható 2×2-es négyzetek összeillesztésével az előbbi állítás szerint, az alsó kettő viszont nyilvánvalóan nem. Így itt az L_1-tulajdonság megléte csak a különböző esetek vizsgálatával bizonyítható. Ez arra utal, hogy nagyon sokféle L_1-tulajdonságú alakzat létezik, ezek teljes leírása igen nehéznek tűnik.

Az L_1-tulajdonságú téglalapok halmaza viszont pontosan meghatározható:

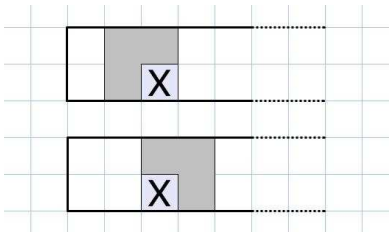
2.1.4. Tétel. *Az L_1-tulajdonságú téglalapok pontosan az alábbiak:*

- 2×2
- $(3k+1) \times (3l+1)$, *ahol* $k \geq 1$, $l \geq 1$

- $(3k+2) \times (3l+2)$, *ahol* $k \geq 2$, $l \geq 2$.

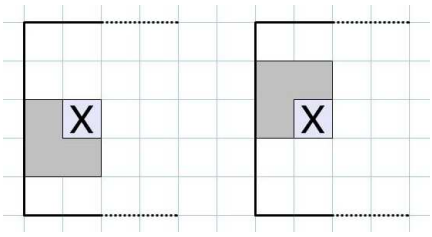
Bizonyítás. Nyilván csak olyan téglalap lehet L_1-tulajdonságú, amelynek a területe 3-mal osztva 1 maradékot ad. Ebből következően vagy mindkét oldal hossza $3k+1$, vagy mindkét oldal hossza $3k+2$ alakú.

A $2 \times (3k+2)$ esetben, ha $k \geq 2$, hagyjuk el a 3. oszlop alsó mezőjét. Ekkor bárhogyan illesztünk egy L-triominót ugyanezen oszlop felső mezőjére, a bal szélen egy 2×1-es vagy 2×2-es nem parkettázható tartomány keletkezik.



2.3. ábra. A $2 \times (3k+1)$-es téglalapok nem L_1-tulajdonságúak

Az $5 \times (3k+2)$ esetben hagyjuk el a 2. oszlop középső mezőjét. Ekkor bárhogy illesztünk egy L-triominót az 1. oszlop középső mezőjére, a bal alsó vagy a bal felső sarokra már nem tudunk L-triominót tenni.

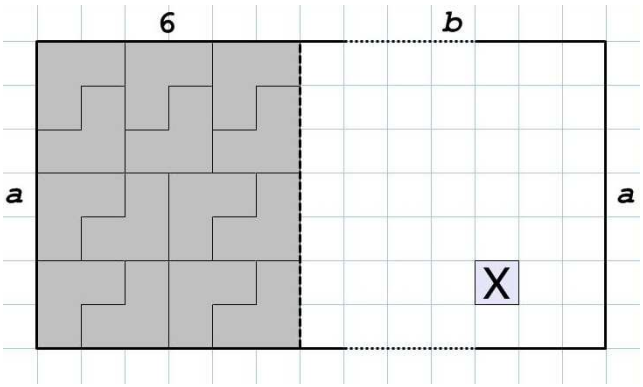


2.4. ábra. Az $5 \times (3k+2)$-es téglalapok nem L_1-tulajdonságúak

A fennmaradó téglalapok L_1-tulajdonságának belátásához először bebizonyítjuk az alábbi lemmát:

2.1.5. Lemma. *Ha egy $a \times b$-s téglalap ($a \geq 4$, $b \geq 7$) L_1-tulajdonságú, akkor az $a \times (b+6)$-os téglalap is L_1-tulajdonságú.*

Lemma bizonyítása. Mivel $a > 1$, ezért a előáll 2-esek és 3-asok összegeként. Emiatt egy $a \times 6$-os téglalap felosztható 2×6-os és 3×6-os téglalapokra, melyek külön-külön parkettázhatók L-triominókkal. Így minden $a \times 6$-os téglalap is parkettázható. Ha most egy $a \times (b+6)$-os téglalapból elhagyunk egy mezőt, az vagy a bal, vagy a jobb szélső $a \times b$-s téglalapba esik. Ezek a szélső téglalapok a feltételek szerint L_1-tulajdonságúak, a fennmaradó rész pedig $a \times 6$-os, így parkettázható. Következésképpen az $a \times 6$-os téglalap is L_1-tulajdonságú. □

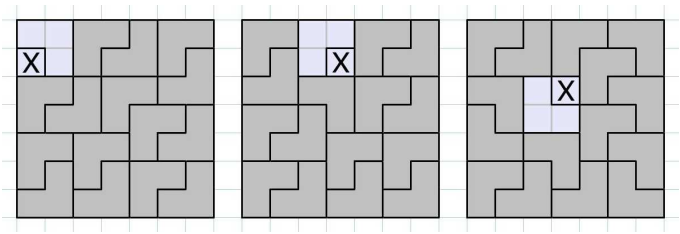


2.5. ábra. Elég nagy L_1-tulajdonságú téglalapok egyik oldalát 6-tal növelve is L_1-tulajdonságú téglalapot kapunk

A 4×4-es téglalap L_1-tulajdonsága következik a 2.1.1. tételből. Ha egy 4×7 téglalapból elhagyunk egy mezőt, akkor az vagy a bal, vagy a jobb szélső 4×4-es részbe esik. Ez a szélső tartomány L_1-tulajdonságú, a fennmaradó 3×4-es rész pedig parkettázható L-triominókkal, így a teljes maradék rész parkettázható. Hasonlóan, ha egy 4×10-es téglalapból elhagyunk egy mezőt,

akkor az vagy a bal, vagy a jobb szélső 4×7-es részbe esik. Ez a szélső tartomány L_1-tulajdonságú, a fennmaradó 3×4-es rész pedig parkettázható L-triominókkal, így a teljes maradék rész parkettázható.

Vizsgáljuk most a 7×7-es négyzetet. Bárhol is van az elhagyott mező, az kiegészíthető egy L-triominóval egy 2×2-es négyzetté úgy, hogy (esetleges forgatással és tükrözéssel) a 2.6. ábrán látható 3 eset valamelyikét kapjuk, ahol a fennmaradó részek parkettázása is látható. Végül tekintsünk egy 7×10-



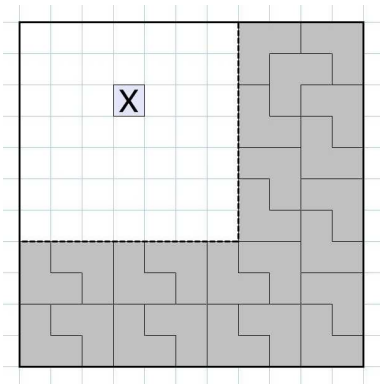
2.6. ábra. A 7×7-es négyzet parkettázása a lyuk helyzetétől függően

es téglalapot. Ha ebből elhagyunk egy mezőt, az vagy a felső, vagy az alsó 4×10-es részbe esik. Láttuk, hogy ez L_1-tulajdonságú, a fennmaradó 3×10-es rész pedig L-triominókkal parkettázható, így a 7×10-es téglalap is L_1-tulajdonságú.

A 4×7 és 4×10-esek L_1-tulajdonságából teljes indukcióval és a 2.1.5. lemma alkalmazásával megkapjuk a $4 \times (3l + 1)$-es téglalapok L_1-tulajdonságát. Ugyanígy a 7×7 és 7×10-esek L_1-tulajdonságából következik az összes $7 \times (3l + 1)$-es téglalapé. Végül a $4 \times (3l + 1)$ és $7 \times (3l + 1)$-esekéből ismét csak a 2.1.5. lemma többszöri alkalmazásával megkapjuk, hogy $k \geq 1$, $l \geq 1$ esetén a $(3k + 1) \times (3l + 1)$-es téglalap is L_1-tulajdonságú.

Hasonló gondolatmenet alkalmazható a $(3k+2) \times (3l+2)$ esetben. Ekkor a 2×2-es és a 8×8-as L_1-tulajdonsága következik a 2.1.1. tételből. A 8×11-es

esetben a lyuk vagy a bal vagy a jobb szélső 8×8-asban van, és a maradék 8×3-as téglalap parkettázható. Innen a 2.1.5. lemma felhasználásával megkapjuk a $8 \times (3l + 2)$-esek L_1-tulajdonságát. A 11×11-es esetben a lyuk valamelyik sarokhoz tartozó 7×7-es részbe esik, amely L_1-tulajdonságú, a fennmaradó L alakú sáv pedig parkettázható (ld. 2.7.ábra). Így a 11×8-as



2.7. ábra. 11×11-es négyzet széleinek parkettázása

és a 11×11-es is L_1-tulajdonságú, amiből adódóan minden $11 \times (3l + 2)$-es is. Végül a $8 \times (3l+2)$-es és a $11 \times (3l+2)$-es miatt (ismét csak 2.1.5. lemma) $k \geq 2$, $l \geq 2$ esetén valamennyi $(3k+2) \times (3l+2)$-es téglalap is L_1-tulajdonságú, ezzel a 2.1.4. tételt beláttuk. ■

A fentiekben tárgyalt probléma megtalálható Donald E. Martin [3] könyvében. Felmerül azonban a kérdés, hogy mi a helyzet, ha a téglalapokon nem egy, hanem több lyukat is szeretnénk ütni úgy, hogy ezek tetszőleges elhelyezkedése esetén a maradék parkettázható legyen. Ha azonban egy téglalap egyik csúcsa közelében a sarokmező 2 szomszédját távolítjuk el, akkor a maradék biztosan nem lesz lefedhető L-triominókkal (sőt semmilyen más, az egységnégyzettől különböző poliominóval sem).

Ugyanakkor ha előírjuk, hogy a lyukak nem lehetnek egymás mellett, újabb érdekes problémát kapunk.

2.1.6. Definíció. *Legyen A egy tetszőleges nem üres alakzat, $X \subseteq A$ pedig m darab, egymással csúcsban sem érintkező (azaz egymástól legalább 2 távolságra lévő) egységnégyzet uniója. Ha ilyen X létezik, és minden ilyen X-re $A \setminus X$ parkettázható L-triominókkal, akkor az A alakzatot* $\mathbf{L_m}$***-tulajdonságúnak*** *nevezzük.*

A fenti definíció összhangban van az L_1-tulajdonság definíciójával, $m = 0$-ra pedig éppen az A alakzat L-triominókkal való parkettázhatóságát kapjuk. Utóbbival kapcsolatban a következő tétel ismeretes (bizonyítást ld. [3]) :

2.1.7. Tétel. *A $k \times n$-es téglalapok pontosan akkor L_0-tulajdonságúak, ha az alábbi feltételek teljesülnek:*

- $k, n > 1$
- $3 \mid kn$
- *ha kn páratlan, akkor $k, n > 3$.*

Ami az $m > 1$ eseteket illeti, a következőket mondhatjuk:

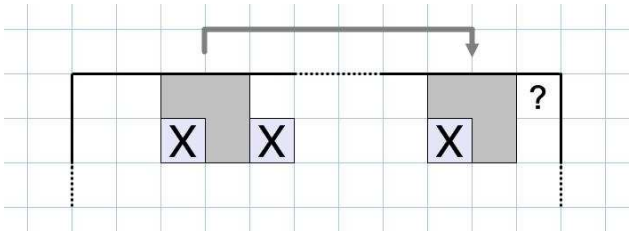
2.1.8. Állítás. *A $2 \times 2m$-es téglalapok L_m-tulajdonságúak.*

Bizonyítás. Felosztva a téglalapot n darab 2×2-es négyzetre, minden kis négyzetben pontosan egy lyuknak kell lennie, amely mellé egy-egy L-triominót helyezve megkapjuk a kívánt parkettázást. ■

2.1.9. Állítás. *Ha egy $k \times n$-es téglalap L_m-tulajdonságú, akkor*

- $kn \equiv m \mod 3$
- *ha van páratlan hosszú oldal, akkor az legalább $2m + 5$ hosszúságú.*

Bizonyítás. Az első állítás nyilvánvaló, hiszen minden L-triominóval parkettázható véges alakzat mezőinek száma osztható 3-mal. A második állítást igazolásához tegyük fel, hogy $n \leq 2m + 3$ páratlan. Legyenek az X halmaz elemei a 2. sor 3., 5., ..., $2m + 1$. mezői, esetleg néhány továbbival kiegészítve a 3. sortól lefelé. Vizsgáljuk a lyukak felett lévő mezőkre illeszthető L-triominókat. A 3. oszlop 1. mezőjére csak egyfélét tehetünk anélkül, hogy a bal felső sarokmezőt bezárnánk. Emiatt viszont az 5. oszlop 1. mezőjének lefedése is egyértelmű, így a 7., ..., $2m + 1$. oszlop 1. mezőjének lefedése is. Ez viszont lefedhetetlenné teszi a jobb felső sarokmezőt. ■



2.8. ábra. L_m-tulajdonságú téglalap páratlan oldala nem lehet $2m + 5$-nél rövidebb

Számos eset vizsgálatával, és az L_1-tulajdonságú téglalapok felhasználásával igazolható, hogy nem a 2×4-es az egyetlen példa L_2-tulajdonságra.

2.1.10. Állítás. *A 8×10-es téglalapok L_2-tulajdonságúak.*

Valószínűleg általában sem csak a fent megadott triviális példa létezik.

2.1.11. Sejtés. *Minden m-re létezik a $2 \times 2m$-eseken kívül is L_m-tulajdonságú téglalap.*

Sőt, még talán az is igaz, hogy minden elég nagy, megfelelő területű téglalap L_m-tulajdonságú.

2.1.12. Sejtés. *Minden m-re léteznek olyan K és N egészek, hogy minden $k \geq K$, $n \geq N$ esetén ha $kn \equiv m \mod 3$, akkor a $k \times n$-es téglalapok L_m-tulajdonságúak.*

2.2. Lyukak és színezések

Cseréljük most ki az L-triominót más alakzatra, és nézzük meg, hogy tehetünk-e így hasonló állításokat. Mivel az egységnégyzettel minden alakzat parkettázható, így triviálisan bármely alakzatból akárhogyan elhagyva mezőket (nem is kell megszorítás a távolságra), a maradék mindig parkettázható egységnégyzetekkel. Érdekesebb a helyzet az 1×2-es dominóval, ahol azonban az eredmény éppen ellentétes:

2.2.1. Állítás. *Bármely, legalább 2 mezőből álló véges alakzatból elhagyható 1 mező úgy, hogy a maradék ne legyen parkettázható 1×2-es dominókkal.*

Bizonyítás. Színezzük ki alakzatunkat a sakktábla-színezés szerint. Hagyjunk el egy tetszőleges fehér mezőt. Ha a maradék nem fedhető le 1×2-es dominókkal, készen vagyunk. Ha lefedhető, akkor köztük ugyanannyi fekete és fehér mező van, hiszen minden dominó egyet-egyet fed le belőlük. Tegyük vissza az eredetileg elhagyott mezőt, és vegyünk el helyette egy fekete színűt.

Ekkor a maradékban biztosan nem egyenlő számú fekete és fehér mező van, tehát nem parkettázható. ■

A fenti bizonyítás a dominó sakktábla-színezésre vonatkozó invariánstulajdonságán alapult, vagyis hogy mindig pontosan 1 fekete és 1 fehér mezőt fed le. Az állítás így általánosítható minden olyan alakzatra, sőt alakzatok halmazára is, amely rendelkezik valamilyen hasonló színezéses tulajdonsággal.

2.2.2. Definíció. *Legyen S_1 és S_2 a végtelen sakktábla, azaz $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ két nem üres, diszjunkt részhalmaza. Tegyük fel, hogy egy H alakzatokat tartalmazó halmazra teljesül, hogy bármely H-beli alakzat pontosan ugyanannyi S_1 és S_2-beli mezőt fed le, azaz*

$$\forall B \in H \ : \ |B \cap S_1| = |B \cap S_2|.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy (S_1, S_2) ***invariáns színezés*** *H-hoz.*

Egyetlen rögzített $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ alakzat esetén nincs értelme az invariáns színezést vizsgálni, így az „(S_1, S_2) invariáns színezés az A alakzathoz” kifejezést arra fogjuk használni, amikor a színezés a $H = \langle A \rangle$ halmazhoz invariáns.

Nyilvánvaló, hogy ha H-hoz (S_1, S_2) invariáns színezés, akkor az H-val parkettázható alakzatok is mind ugyanannyi S_1-beli mezőt tartalmaznak, mint S_2-belit.

2.2.3. Állítás. *Legyen H síkbeli alakzatok halmaza, amelyhez létezik (S_1, S_2) invariáns színezés. Ekkor bármely $B \in \mathcal{P}[H]$ véges alakzatra teljesül, hogy*

$$|B \cap S_1| = |B \cap S_2|.$$

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha egy alakzathoz van invariáns színezés, akkor nem fogunk találni hozzá olyan alakzatot, amelyet bárhogyan lyukasztva parkettázhatnánk az eredetivel.

2.2.4. Tétel. *Legyen H síkbeli alakzatok halmaza. Tegyük fel, hogy létezik (S_1, S_2) színezés, amely invariáns H-hoz. Ekkor bármely legalább 2 mezőből álló X véges alakzatból elhagyható egy mező úgy, hogy a maradék ne legyen parkettázható H-val.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő egy X-szel egybevágó Y-ra belátni az állítást. Legyen $Y \in \langle X \rangle$ olyan, hogy $Y \cap S_1 \neq \emptyset$. Vegyünk egy z mezőt $Y \cap S_1$-ből, ekkor ha $Y \setminus \{z\} \notin \mathcal{P}[H]$, akkor készen vagyunk. Ha viszont $Y \setminus \{z\} \in \mathcal{P}[H]$, akkor

$$|(Y \setminus \{z\}) \cap S_1| \;=\; |(Y \setminus \{z\}) \cap S_2|,$$

jelölje ezt a közös értéket s. Válasszunk most egy z' mezőt Y-ból, amely azonban nem S_1-beli. Ilyen mezőnek léteznie kell, ugyanis ha Y minden mezője S_1-beli lenne, akkor

$$|Y \setminus \{z\}| = |(Y \setminus \{z\}) \cap S_1| \neq |(Y \setminus \{z\}) \cap S_2| = 0$$

teljesülne, ami ellentmondás. Így viszont

$$|(Y \setminus \{z'\}) \cap S_1| > |(Y \setminus \{z\}) \cap S_1| = s,$$

mivel z' nem S_1-beli, z viszont igen. Ugyanakkor

$$|(Y \setminus \{z'\}) \cap S_2| \leq |(Y \setminus \{z\}) \cap S_2| = s,$$

mivel z nem S_2-beli. Összevetve

$$\begin{aligned} |(Y \setminus \{z'\}) \cap S_1| \;&>\; s \;\geq\; |(Y \setminus \{z'\}) \cap S_2|, \text{ tehát} \\ |(Y \setminus \{z'\}) \cap S_1| \;&\neq\; |(Y \setminus \{z'\}) \cap S_2|. \end{aligned}$$

Így $(Y \setminus \{z'\})$ nem parkettázható H-val, amivel az állítást beláttuk. ■

2.2.5. Következmény. *Az L-triominóhoz nem adható meg invariáns színezés.*

Mivel az egységnégyzet kivételével valamennyi téglalaphoz van invariáns színezés, a 2.2.4. tétel kizárja, hogy ezek bármelyikével az L-triominós állításokhoz hasonlót kapjunk. A legkisebb poliominó az L-triominó után, amelyhez könnyen végiggondolhatóan nincs invariáns színezés, a T-tetrominó. Ez egy példát szolgáltat arra, hogy 2.2.2. definícióban szereplőnél gyengébb invariáns tulajdonság is elég a tetszőleges elhagyott mező melletti parkettázhatóság lehetetlenségéhez.

2.2.6. Tétel. *Nincs olyan alakzat az egységnégyzet kivételével, amelyből tetszőleges mezőt elhagyva a maradék lefedhető T-tetrominókkal.*

Bizonyítás. Tekintsük a szokásos sakktábla-színezést. Minden egyes T-tetrominó páratlan sok fekete és páratlan sok fehér mezőt fed le. Ez azt jelenti, hogy bármely $\mathcal{P}[T_4]$-beli alakzat fekete és fehér mezőinek száma azonos paritású.

Tegyük fel, hogy létezik a feltételek szerinti A alakzat, ahol $|A| = 4k + 1$ és $k \geq 1$. Ekkor ez nyilvánvalóan tartalmaz mindkét színből mezőt, és tetszőleges mezőjét elhagyva azonos paritással kell fekete és fehér mezőknek

maradnia. Így A-ban a fekete és fehér mezők paritása eltérő. Ha k páratlan, akkor hagyjunk el egy olyan mezőt, amelyből páratlan sok van. Így a maradék részben mindkét színből páros sok lesz, amit nem lehet k darab, azaz páratlan sok tetrominóval parkettázni. Hasonlóan, ha k páros, akkor hagyjunk el egy olyan mezőt, amiből páros sok van. A fennmaradó páratlan sok fekete és páratlan sok fehér mezőt nem parkettázhatja páros sok T-tetrominó. Ez ellentmondás, tehát a feltételek szerinti A alakzat nem létezhet. ■

Mindenesetre továbbra is nyitott a kérdés, hogy van-e még az L-triominóhoz hasonló tulajdonságú alakzat.

2.2.7. Kérdés. *Van-e olyan B alakzat, amelyhez található az egységnégyzetektől különböző A alakzat, hogy tetszőleges $x \in A$ mezőre*

$$A \setminus \{x\} \in \mathcal{P}[B] \quad ?$$

2.3. A végtelen sakktábla parkettázásai

Ebben a szakaszban a korábbi problémák olyan változataival foglalkozunk, ahol a parkettázandó terület végtelen, gyakran a teljes sík. A 2.1.6. definíció végtelen alakzatokra is értelmes, azonban ennél tovább is mehetünk, és m darab lyuk helyett rögtön végtelen sokat is megengedhetünk. Itt is érdemes azonban feltenni, hogy ezek nem lehetnek szomszédosak, hiszen 4 csúcsban érintkező lyukkal rögtön leválaszthatnánk egy egységnégyzetet a síkból.

2.3.1. Definíció. *Legyen A egy végtelen alakzat, $X \subseteq A$ pedig olyan, hogy bármely két mezőjének távolsága legalább 2. Ha minden ilyen X részhalmazra*

$A \setminus X$ parkettázható L-triominókkal, akkor az A alakzatot **$\mathbf{L}_\infty$-tulajdonságúnak** *nevezzük.*

2.3.2. Állítás. *Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alakzatok diszjunktak és L_∞-tulajdonságúak, akkor $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ is L_∞-tulajdonságú.*

A következő tétel kimondja, hogy a végtelen sakktábla L_∞-tulajdonságú.

2.3.3. Tétel. *Legyen $X \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olyan, hogy bármely két különböző X-beli pont távolsága legalább 2. Ekkor $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus X$ parkettázható L-triominókkal.*

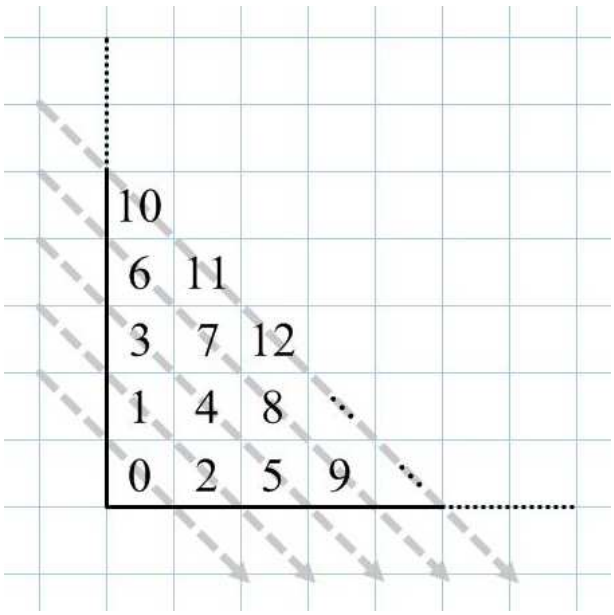
BIZONYÍTÁS. Az állítást a teljes sík helyett az $N = \{(a, b) \mid a \geq 0, b \geq 0\}$ negyedsíkra látjuk be, ami elég, hiszen a sík előáll a 4 egybevágó diszjunkt negyedsík uniójaként. Egy algoritmust fogunk megadni, amely végigmegy a negyedsík mezőin, és minden még nem lefedett mezőre lehelyez egy L-triominót.

A negyedsík mezőit az ÉNy-DK irányú átlók mentén haladva megsorszámozzuk (lásd ábra). Így az (a, b) mező sorszáma éppen

$$s(a, b) := \frac{(a + b)(a + b + 1)}{2} + a$$

lesz (lásd a 2.9. ábrát).

Az **átlós L-triominó algoritmus** a következő: az n-edik lépésben az $s(a, b) = n$ sorszámú mezővel foglalkozunk. Ha ez X-beli, akkor ebben a lépésben nem kell tenni semmit. Ha nem X-beli, akkor vizsgáljuk a rá illeszkedő L-triominók közül azokat, amelyeknél mindhárom mező sorszáma legalább n. Legfeljebb 4 ilyen létezhet, ezek között tekintsük a 2.10. ábrán is látható sorrendet:



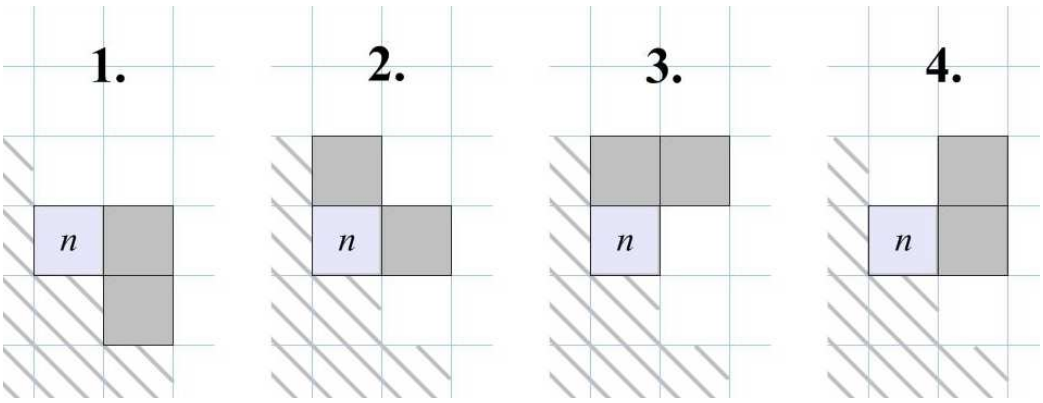
2.9. ábra. A negyedsík mezőinek sorszámozása

	Koordináták	Sorszámok
1.	$\{(a,b),(a+1,b-1),(a+1,b)\}$	$(n,\ n{+}1,\ n{+}a{+}b{+}2)$
2.	$\{(a,b),(a,b+1),(a+1,b)\}$	$(n,\ n{+}a{+}b{+}1,\ n{+}a+b+2)$
3.	$\{(a,b),(a,b+1),(a+1,b+1)\}$	$(n,\ n{+}a{+}b{+}1,\ n{+}2a{+}2b{+}4)$
4.	$\{(a,b),(a+1,b),(a+1,b+1)\}$	$(n,\ n{+}a{+}b{+}2,\ n{+}2a{+}2b{+}4)$

Észrevehető, hogy a sorszámokat tekintve ez éppen a számhármasok lexikografikus sorrendje. Vegyük a fenti sorrendben leghamarabb szereplő olyan triominót, amelynek a másik két mezője még szabad, azaz nem X-beli és nem fedi korábban lerakott triominó. Ezt a triominót helyezzük le, majd lépjünk a következő sorszámú mezőre.

Be kell látnunk, hogy minden lépésben, ha nem X-beli mezőn vagyunk, akkor tudunk L-triominót választani. Észrevehető, hogy ha az

$$n+a+b+1,\ n+a+b+2,\ n+2a+2b+4$$



2.10. ábra. Az átlós L-triominó algoritmus preferencia-sorrendje az n-edik lépésben

sorszámú mezők közül bármely kettő szabadon van az n-edik lépésben, akkor a 2.10. ábrán a 2–4. triominók valamelyike biztosan lehelyezhető. Nevezzük tetszőleges n esetén a fenti 3 sorszámmal megjelölt mezőt az n-edik mező **előteré**nek. A 3 mező közül legfeljebb 1 lehet X-beli, így elég belátni, hogy a korábban lehelyezett triominók nem fedhetik a fenti mezők egyikét sem.

2.3.4. Lemma. *Az átlós L-triominó algoritmus csak olyan L-triominókat helyez le, amelyek nem nyúlnak bele még nem lefedett mezők előterébe.*

LEMMA BIZONYÍTÁSA. Ha az algoritmus az n-edik lépésben a 2.10. ábra 1. triominóját választja, akkor az n-nél nagyobb sorszámúak közül egyedül az $(n+1)$-edik mező előtere érintett, ám őt magát is lefedi a triominó, így az állítás nyilvánvalóan teljesül. Ha az algoritmus a 2. triominót választja, akkor az $(n+a+b+2)$-edik mező szerepel az $(n+1)$-edik mező előterében. De az $(n+1)$-edik mező ekkor nem lehet szabad, ugyanis ekkor az eljárás az 1. triominót választotta volna. A 3. típusú triominó esetén az $(n+2a+2b+4)$-edik mező szerepel az $(n+a+b+2)$-edik mező előterében. De az $(n+a+b+2)$-

edik mező ekkor nem lehet szabad, ugyanis ekkor az eljárás az 1. vagy a 2. triominót választotta volna. Végül a 4. típusú triominó választásakor az $(n+a+b+2)$-edik mező szerepel az $(n+1)$-edik mező előterében, valamint az $(n+2a+2b+4)$-edik mező szerepel az $(n+a+b+1)$-edik mező előterében. Ám az $(n+1)$-edik mező nem lehet szabad, mert ekkor az algoritmus az 1. triominót választotta volna, és az $(n+a+b+1)$-edik mező sem lehet szabad, hiszen különben eljárásunk a 2. triominót választotta volna. □

Kezdetben nyilván minden mező előteréből legfeljebb 1 mező foglalt (X elemei), és a lemma szerint az algoritmus a szabadon lévő mezők esetében ezen nem is változtat. Ebből következően mindig lehelyezhető a legkisebb sorszámú szabad mezőre egy L-triominó, ezzel a átlós L-triominó algoritmus helyességét és így a 2.3.3. tételt beláttuk. ■

2.3.5. Megjegyzés. *Az algoritmus az negyedsíknak csak az alábbi három tulajdonságát használja ki:*

1. *Van olyan ÉNy-DK irányú átló, amelytől délre már nincs mezője a parkettázandó alakzatnak.*

2. *Minden ÉNy-DK irányú átló csak véges sok parkettázandó mezőt tartalmaz.*

3. *Ha egy mező benne van a parkettázandó halmazban, akkor az előtere is.*

Így minden ilyen tulajdonságú alaphalmazra is működik ugyanez az eljárás (nyilván annak sincs jelentősége, hogy melyik átlós irány a kiemelt). Követ-

kezésképpen az ilyen alakzatokkal egybevágó bármilyen alakzat, valamint ezek uniója is L_∞-tulajdonságú.

Vajon az L-triominó helyett más alakzatot is vehetünk? Nyilván az, hogy a lyukak (vagyis az X halmaz mezői) viszonylag közel lehetnek egymáshoz, eléggé lecsökkenti az esélyét annak, hogy más alakzathoz is találjunk jó parkettázó algoritmust (vagy akár csak bebizonyítsuk, hogy lehetséges a parkettázás). De mi a helyzet, ha nagyobb távolságot követelünk meg a lyukak között? Azt gondolhatnánk, hogy ha pl. bármely két lyuk távolsága legalább 100, akkor egy kis alakzattal, például egy 1×2-es dominóval parkettázva sosem akadunk el. Ez azonban nem így van: az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy az invariáns színezéssel rendelkező alakzatokkal való parkettázhatóságot akármilyen távoli lyukakkal el tudjuk rontani. Előbb azonban igazolunk egy hasznos segédtételt:

2.3.6. Lemma. *Tetszőleges $Z \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ véges halmazból kiválasztható egy Z' részhalmaz úgy, hogy bármely két különböző Z'-beli mező távolsága legalább r, és*

$$|Z'| \geq \frac{|Z|}{(2r-1)^2}.$$

LEMMA BIZONYÍTÁSA. Tegyük fel, hogy $Z' \subseteq Z$ olyan, hogy bármely két különböző távolsága legalább r és Z' az ilyen részhalmazok között maximális elemszámú. Ekkor bármely $Z \setminus Z'$-beli mező már r-nél közelebb van Z' valamely mezőjéhez. Ez azt jelenti, hogy a Z'-től legfeljebb $r-1$ távolságra

lévő pontok halmaza lefedi Z-t, azaz

$$\begin{aligned} Z &\subseteq \{x \mid d(Z', \{x\}) \leq r-1\} = \bigcup_{y \in Z'} \{x \mid d(x,y) \leq r-1\} \\ |Z| &\leq \left| \bigcup_{y \in Z'} \{x \mid d(x,y) \leq r-1\} \right| \leq |Z'| \cdot (2r-1)^2, \end{aligned}$$

hiszen egy adott y mezőtől legfeljebb $r-1$ távolságra mezők egy $(2r-1) \times (2r-1)$-es négyzetet alkotnak. A fenti egyenlőtlenségből

$$\frac{|Z|}{(2r-1)^2} \leq |Z'|,$$

ezt kellett belátnunk. □

Lássuk most a parkettázás lehetetlenségét megmutató fő tételt. Az állításban a parketták nem feltétlenül egybevágóak, csak annyit kötünk ki, hogy legyen közös invariáns színezésük, és ne legyen tetszőleges nagy átmérőjű közöttük. Mivel adott átmérővel csak véges sokféle alakzat létezik, az utóbbi feltételből következik, hogy a H parketta-halmaz csak véges sok különböző egybevágósági osztályba tartozó alakzatot tartalmazhat.

2.3.7. Tétel. *Legyen H egy síkbeli alakzatokat tartalmazó halmaz, R pozitív egész. Tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

- *Létezik (S_1, S_2) invariáns színezés H-hoz.*
- *A H-beli alakzatok átmérőinek halmaza felülről korlátos:*
  $\exists D \in \mathbb{N}$, hogy $\forall B \in H$ esetén $d(B) \leq D$.

Ekkor megadható olyan $X \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ véges halmaz, hogy bármely két különböző X-beli mező távolsága legalább R, és $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus X$ nem parkettázható H-val.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel indirekt, hogy a H halmazra teljesülnek a feltételek az (S_1, S_2) színezéssel és D maximális átmérővel, de bármely X-re – ahol a különböző X-beli mezők távolsága legalább R – $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus X$ parkettázható H-val. Nézzük ekkor egy tetszőleges x mezőt, és körülötte egy $B(x, r)$ környezetet. Legyen

$$\begin{aligned} a &:= |B(x,r) \cap S_1| \\ b &:= |B(x,r) \cap S_2| \end{aligned}$$

ekkor a 2.3.6. lemma szerint $B(x, r) \cap S_1$-ből kiválasztható egy X_1 részhalmaz úgy, hogy legalább $\frac{a}{(2R-1)^2}$ darab, egymástól legalább R távolságra lévő mezőt tartalmaz. Hasonlóan, $B(x, r) \cap S_2$-ből kiválasztható egy legalább $\frac{b}{(2R-1)^2}$ darab mezőt tartalmazó X_2 halmaz, melyben bármely két mező távolsága legalább R.

Az indirekt feltevés szerint $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus X_1 \in \mathcal{P}[H]$, vegyünk egy parkettázást és tekintsük azon parketták unióját, amelyek belemetszenek $B(x, r)$-be. Jelöljük ezt a halmazt P_1-gyel. Mivel az P_1-beli parketták legfeljebb D átmérőjűek, és van $B(x, r)$-beli mezőjük, ezért bármely mezőjük $r + D$-nél közelebb van x-hez, azaz $P_1 \subseteq B(x, r+D)$. Hasonlóan vehetjük $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus X_2$ egy parkettázását, és ebből azokat a parkettákat, melyeknek van közös mezőjük $B(x, r)$-rel. Ezek unióját P_2-vel jelölve a fentihez hasonlóan levezethető, hogy $P_2 \subseteq B(x, r+D)$.

Mivel $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[H]$, így a 2.2.3. állítás szerint

$$|P_1 \cap S_1| = |P_1 \cap S_2| \geq |B(x,r) \cap S_2| = b$$

és

$$|P_2 \cap S_2| = |P_2 \cap S_1| \geq |B(x,r) \cap S_1| = a$$

Ekkor viszont

$$|B(x, r+D) \cap S_1| \geq |P_1 \cap S_1| + |X_1| \geq b + \frac{a}{(2R-1)^2}$$

és

$$|B(x, r+D) \cap S_2| \geq |P_2 \cap S_2| + |X_2| \geq a + \frac{b}{(2R-1)^2},$$

amit összegezve

$$|B(x, r+D) \cap (S_1 \cup S_2)| \geq b + \frac{a}{(2Rs-1)^2} + a + \frac{b}{(2R-1)^2} = \\ = (a+b)\left(1 + \frac{1}{(2R-1)^2}\right).$$

Legyen $S = S_1 \cup S_2$. Így a következő egyenlőtlenséget kapjuk tetszőleges x és R esetén:

$$|B(x, r+D) \cap S| \geq |B(x, r) \cap S| \cdot \left(1 + \frac{1}{(2s-1)^2}\right).$$

Legyen most $x \in S$ és $r = 1$. Ekkor $|B(x, 1) \cap S| = |\{x\}| = 1$, és a fenti egyenlőtlenséget egymás után n-szer alkalmazva:

$$|B(x, 1 + n \cdot D) \cap S| \geq \left(1 + \frac{1}{(2R-1)^2}\right)^n,$$

ugyanakkor

$$|B(x, 1 + n \cdot D) \cap S| \leq |B(x, 1 + n \cdot D)| = (2nD+1)^2.$$

A fentiek alapján minden n-re teljesülnie kéne a

$$\left(1 + \frac{1}{(2R-1)^2}\right)^n \leq (2nD+1)^2$$

egyenlőtlenségnek, de itt a bal oldalon egy 1-nél nagyobb szám n-edik hatványa, míg a jobb oldalon n egy polinomja szerepel. Emiatt elég nagy n-re a

bal oldali kifejezés értéke nagyobb lesz. Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat. ■

A fenti gondolatmenet segítségével adott H és R esetén meg is konstruálhatjuk az X halmazt. Korábban említettük azt a konkrét esetet, amikor $H = R_{1,2}$ az 1×2-es dominók halmaza, és $R = 100$. Ekkor a maximális átmérő $D = 1$ és szokásos sakktábla-színezés megfelel invariáns színezésnek. Így elég olyan n-et találni, amelyre az

$$\left(1 + \frac{1}{(2R-1)^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{199^2}\right)^n \leq (2n+1)^2 = (2nD+1)^2$$

egyenlőtlenség nem teljesül. Numerikus módszerekkel meghatározható, hogy $n = 2000000$ választással már az exponenciális függvény értéke a nagyobb. Ez azt jelenti, hogy ha egy x fekete színű mező $B(x, 1 + (n-1)D) = B(x, 2000000)$ környezetéből (azaz egy 3999999×3999999-es négyzetből) elhagyunk annyi fekete mezőt, amennyit csak lehetséges úgy, hogy egymástól legalább 100 távolságra legyenek, akkor a fennmaradó rész már nem parkettázható 1×2-es dominókkal.

Mivel az egységnégyzet kivételével minden téglalaphoz megadható invariáns színezés, így $H = R_{a,b}$-re $ab \neq 1$ esetén teljesülnek a 2.3.7. tétel feltételei.

2.3.8. Következmény. *Legyenek a, b pozitív egészek, $ab \neq 1$. Ekkor tetszőleges R pozitív egész esetén megadható egy olyan $X \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ véges halmaz, hogy bármely két különböző X-beli pont távolsága legalább R, és $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus X$ nem parkettázható $a \times b$-s téglalapokkal.*

2.3.9. Megjegyzés. *A 2.3.7. tétel általánosítható tetszőleges véges dimenziós térre. Ugyanis M dimenziós tér esetén a gondolatmenetben csak annyi*

változik, hogy a 2.3.6. lemma $\frac{1}{(2r-1)^2}$*-es együtthatója helyébe* $\frac{1}{(2r-1)^M}$ *lép, és a* $B(x, 1 + n \cdot D)$ *környezet* $(2nD + 1)^M$ *mezőből fog állni. Azonban az ebből adódó*

$$\left(1 + \frac{1}{(2R-1)^M}\right)^n \leq (2nD + 1)^M$$

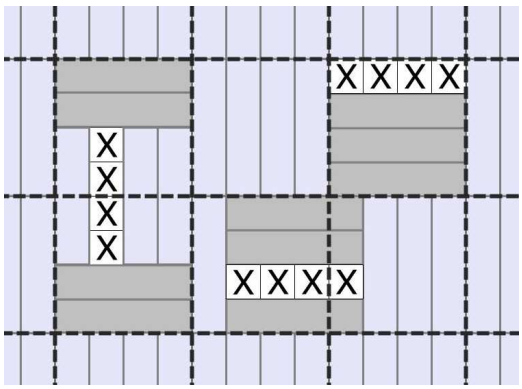
összefüggés továbbra is csak véges sok n*-re teljesülhet.*

2.4. További problémák

Ha egy-egy mező elhagyása helyett olyan lyukakat készítünk, amelyek ugyanazzal a színezéssel invariáns tulajdonságúak, mint a parkettázó alakzat, akkor már lehet esélyünk a végtelen sakktábla maradék mezőit parkettázni, feltéve, hogy elég nagy hely marad a lyukak között. Az alábbiakban erre mutatunk példát.

2.4.1. Tétel. *Adott a végtelen sakktáblán tetszőleges számú (akár végtelen sok)* $1 \times n$*-es dominó úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább* n*. Ekkor a fennmaradó rész parkettázható* $1 \times n$*-es dominókkal.*

BIZONYÍTÁS. Osszuk fel a síkot $n \times n$-es négyzetekre. Az előzetesen adott $1 \times n$-es dominók mindegyike legfeljebb 2 ilyen négyzetből foglalhat el mezőket. Másrészt, mivel távolságuk legalább n, így egy $n \times n$-es négyzetnek legfeljebb egyetlen $1 \times n$-es dominóval lehet metszete. Ha egy $n \times n$-es négyzetbe nem lóg bele előzetesen lerakott dominó, akkor az nyilvánvaló módon parkettázható n darab dominóval. Hasonlóan, ha egy négyzet teljes egészében tartalmaz előre lerakott dominót, akkor a maradék része további $n - 1$ dominóval parkettázható. Végül ha egy dominó két négyzetbe is belelóg, akkor

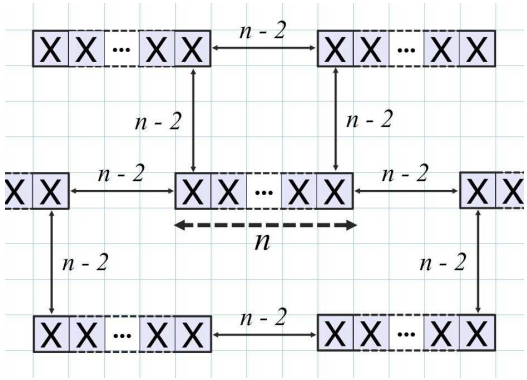


2.11. ábra. Előre megadott 1×4-es téglalapok kiegészítése az általa érintett 4×4-es négyzetek parkettázásává

pedig a két négyzetből együttesen fennmaradó rész parkettázható. A 2.11. ábra $n = 4$-re mutatja a parkettázást mindhárom esetben. ■

Itt a távolság-korlátozás nem enyhíthető:

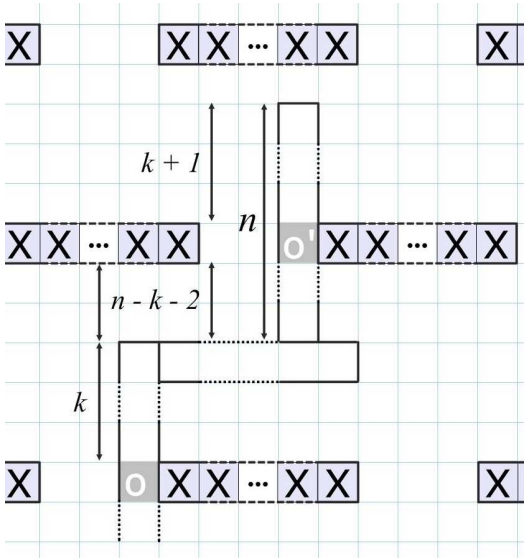
2.4.2. Tétel. *A végtelen sakktáblán megadható véges sok $1 \times n$-es dominó úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább $n - 1$ és a fennmaradó rész nem parkettázható további $1 \times n$-es dominókkal.*



2.12. ábra. Konstrukció a 2.4.2. tételhez

Bizonyítás. Az $n = 2$ eset nyilvánvaló, hiszen ekkor pl. körbezárható egy 1×1-es négyzet. Ha $n \geq 1$, helyezzünk el dominókat a 2.12. ábrán lát-

ható mintát folytatva. Látható, hogy bármely két dominó távolsága legalább $n-1$. Megmutatjuk, hogy ha elég nagy (de véges) területre helyezzük le így a dominókat, akkor a fennmaradó rész nem lesz parkettázható további ugyanilyenekkel.



2.13. ábra. A konstrukció helyességének bizonyítása

Nézzük a 2.13. ábrán o-val megjelölt mezőt. Erre fekvő helyzetű dominó nem illeszthető, így álló helyzetű dominónak kell őt lefednie. Tegyük fel, hogy ez a dominó k sorral magasabban végződik. Mivel az o-val jelölt mező alatt csak $n-2$ mező van szabadon, így $k \geq 1$. Ekkor ennek a dominónak a legfelső mezőjétől jobbra lévő mezőre nem illeszthető álló dominó, tehát csak fekvő fedheti le. Nézzük most az o'-vel jelölt mezőt. Ez hasonló helyzetű o-hoz, rá is csak álló dominó tehető. Viszont az előbbi fekvő dominó miatt o' alatt csak $n-k-2$ mező szabad, így az o'-re illeszkedő álló dominó legalább $k+1$ sorral o' felett végződik.

Ha ezt a gondolatmenetet o helyett most o'-vel megismételjük, akkor azt kapjuk, hogy van egy o'' mező, amelyet lefedő álló dominó legalább $k+2$ sorral o'' felett végződik. Ezt ismételve az $n-2$-edik alkalommal ellentmondást kapunk, mert $n-1$ sorral a megfelelő mező felett már nem végződhet a dominó. Ezzel beláttuk, hogy a kimaradó rész (elég egy $n^2 \times n^2$-es tartományt vizsgálni) nem fedhető le $1 \times n$-es dominókkal. ■

A 2.4.1. tételnek egy véges változata is megfogalmazható:

2.4.3. Tétel. *Adott az $an \times bn$-es sakktáblán néhány $1 \times n$-es dominó úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább n. Ekkor a fennmaradó rész parkettázható $1 \times n$-es dominókkal.*

Bizonyítás. Az $an \times bn$-es sakktábla is felosztható $n \times n$-es négyzetekre. Ezekre alkalmazható a 2.4.1. tétel bizonyításában bemutatott parkettázás. ■

Könnyen végiggondolható, hogy szükséges az a feltétel, miszerint mindkét oldalhossz osztható n-nel.

3. fejezet

Kétszemélyes parkettázó játékok a végtelen sakktáblán

3.1. A játék leírása

Az előző fejezetben olyan problémákat vizsgáltunk, amelyekben egy-egy lyukas tartományt kellett megadott alakzatokkal parkettázni. A „lyukak” előre megadott alakzatok (leggyakrabban egységnégyzetek) voltak, amelyek egymástól vett minimális távolságát előírtuk. Észrevehető azonban, hogy pl. a 2.3.3. tétel bizonyításában bemutatott átlós L-triominó algoritmus valójában nem használja ki, hogy előre ismerjük az összes lyuk helyzetét: mindig csak a soron következő mező egy kis környezetében (amelyet a mező előterének neveztünk) vizsgálta, hogy mely mezők vannak már lefedve, és ez alapján választott egy újabb L-triominót. Így a 2.3.3. tételben szereplő X halmazt nem is kell előre megválasztani, akár bővíteni is lehet újabb mezőkkel (persze a távolság-korlátozás betartásával), miközben a sík egy részét már parkettáz-

tuk.

Ezt a gondolatot általánosítva elképzelhetünk egy kétszemélyes játékot, melyben az egyik játékos (nevezzük Támadónak) célja a végtelen sakktábla parkettázása, a másik játékosé (nevezzük Védekezőnek) pedig ennek megakadályozása. A két játékos felváltva lép, egy lépés egy-egy alakzat lehelyezését jelenti. Mindkét fél számára külön-külön előírjuk, hogy mely alakzatok közül választhatnak. Ezen felül Védekező számára előírjuk, hogy az általa lerakott alakzatoknak milyen minimális távolságot kell tartani a saját, illetve az ellenfele által korábban lehelyezett alakzatoktól.

A fentiek formális megfogalmazásához először röviden bemutatjuk a kétszemélyes, teljes információs, megszámlálhatóan végtelen játékok egy lehetséges leírását (bővebben lásd pl. [4]-ben). Legyen A egy tetszőleges nem üres halmaz, a játék alaphalmaza. A két játékos felváltva választ egy-egy elemet az alaphalmazból: a kezdő először a_0-t, majd a második a_1-et, majd a kezdő a_2-t, a második a_3-at stb. A játék teljes információs volta azt jelenti, hogy minden pillanatban mindkét játékos számára minden korábbi lépés ismert. Minden játékmenetet egy-egy $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ sorozat ír le, jelöljük az összes ilyen sorozat halmazát A^ω-val. A szabályos véges lépéssorozatok S halmazáról a következőt tesszük fel: minden játékhelyzetből, ahová szabályos lépésekkel jutottunk, a soron következő játékos tud szabályosan lépni. Ez egyenértékű azzal, hogy minden $s_1 \in S$ sorozat valamely másik $s_2 \in S$ sorozatnak valódi kezdőszelete, és minden S-beli sorozat minden kezdőszelete is S-beli. Jelölje $[S] \subset A^\omega$ az olyan végtelen sorozatokat, amelyek minden kezdőszelete S-beli, ezek a szabályos játékmenetek. Egy játék megadásához minden szabályos já-

tékmenetre meg kell adnunk, hogy ott melyik játékos a győztes: legyen az $N \subset [S]$ győzelmi halmaz azon végtelen sorozatok halmaza, amelyek lejátszása esetén a kezdő nyer. Egy A alaphalmazon S szabályhalmazzal és N győzelmi halmazzal játszott játékot $\mathcal{G}(S, N)$-nel jelölünk.

A parkettázó játékok esetében az A alaphalmaz a végtelen sakktábla alakzatainak $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}))$ halmaza lesz. A játékot 4 paraméterrel határozzuk meg: T a Támadó (kezdő), V a Védekező által használható alakzatok halmaza, t és v egész számok pedig a Védekezőre vonatkozó távolság-megszorításokat határozzák meg. A játékosok felváltva helyeznek le egy-egy alakzatot a végtelen sakktáblára. A Támadó egy lépése pontosan akkor szabályos, ha az általa választott alakzat T-beli és minden korábban (bármelyik játékos által) kijátszott alakzattól diszjunkt (azaz 0-nál nagyobb távolságra van tőlük). A Védekező egy lépése pontosan akkor szabályos, ha az általa választott alakzat V-beli és minden korábbi Támadó által kijátszott alakzattól legalább t, minden korábbi Védekező által kijátszott alakzattól legalább v távolságra van. Mivel biztosítani szeretnénk, hogy minden helyzetből legyen szabályos lépés, megengedjük mindkét játékos számára a passzolást. Ez egyenértékű azzal, hogy mindkét játékos választhatja az üres halmazt is a T, illetve V-beli szokásos alakzatai helyett. Végül, ha a játék során kijátszott alakzatok lefedik a teljes síkot, akkor Támadó nyert, különben pedig Védekező.

A fentiek alapján formálisan a következő definíció adható:

3.1.1. Definíció. *Legyenek T és V síkbeli alakzatok halmazai, t és v pedig pozitív egészek. A végtelen sakktáblán játszott (T, V, t, v) paraméterű parket-*

tázó játékon az alábbi tulajdonságokkal rendelkező $\mathcal{G}(S,N)$ játékot értjük:

$$A = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}))$$

$$S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i, \quad \textit{ahol}$$

$$S_0 = \{\langle\rangle\}$$

$$S_1 = \{\langle a_0\rangle \mid a_0 \in T\}$$

$$S_{2n} = \left\{ \langle a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}\rangle \;\middle|\; \langle a_0, \ldots a_{2n-2}\rangle \in S_{2n-1} \;\wedge\; a_{2n-1} \in V \;\wedge\; d\left(a_{2n-1}, \bigcup_{i=0}^{(n-2)/2} a_{2i}\right) \geq t \;\wedge\; d\left(a_{2n-1}, \bigcup_{i=1}^{(n-2)/2} a_{2i-1}\right) \geq v \right\}$$

$$S_{2n+1} = \left\{ \langle a_0, a_1, \ldots, a_{2n}\rangle \;\middle|\; \langle a_0, \ldots a_{2n-1}\rangle \in S_{2n} \;\wedge\; a_{2n} \in T \;\wedge\; d\left(a_{2n}, \bigcup_{i=0}^{2n-1} a_i\right) > 0 \right\}$$

$$N = [S] \bigcap \left\{ \langle a_0, a_1, \ldots\rangle \in A^\omega \;\middle|\; \bigcup_{i=0}^{\infty} a_i = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \right\}.$$

A fenti definíció akkor is értelmes lenne, ha a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ síkot kicserélnénk az M dimenziós végtelen sakktáblára valamely $M \in \mathbb{N}$-re. Sőt, valójában bármilyen (X,d) metrikus tér esetén értelmes definíciót kapunk, ha a $T\cup V$-beli alakzatok távolsága értelmezhető.

3.2. Nyerő stratégia létezése

Egy $\mathcal{G}(S,N)$ játékban a $\sigma \subseteq S$ stratégia a kezdő játékos számára, ha véges lépéssorozatok olyan nemüres halmaza, amely rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

1. Ha $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{2n} \rangle \in \sigma$, akkor minden

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1} \rangle \in S$$

esetén $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1} \rangle \in \sigma$.

2. Ha $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1} \rangle \in \sigma$, akkor egyértelműen létezik olyan

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_{2n} \rangle \in S,$$

hogy $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{2n} \rangle \in \sigma$.

Vagyis a kezdő egy stratégiája a második játékos tetszőleges szabályos lépése esetén egyértelműen előírja, hogy a kezdőnek mit kell tennie a következő lépésben. A második játékosra vonatkozó stratégia fogalmát is hasonlóan definiálhatjuk.

A σ kezdő-stratégia nyerő, ha minden olyan

$$\langle a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots \rangle$$

játékmenet, amelynek kezdőszeletei σ-beliek, N-beli, azaz nyerő a kezdő számára. Hasonlóan értelmezhetőek a második játékos számára nyerő stratégiák. Ha egy játékban valamelyik játékosnak nyerő stratégiája van, akkor a játékot determináltnak nevezzük.

Tekintsük A^ω-n a következő metrikát: a p és q sorozatok távolsága legyen $1/(n+1)$, ha p-nek és q-nak pontosan az első n eleme egyezik meg. Ekkor a H halmaz pontosan akkor nyílt, ha minden h eleméhez megadható annak egy véges kezdőszelete, hogy H az összes olyan sorozatot tartalmazza, amelyek ugyanezzel a szelettel kezdődnek. $B \subset A^\omega$ Borel halmaz, ha előállítható nyílt

halmazokból megszámlálható sok unió, metszet és komplementer-képzés segítségével. Játékaink determináltsága Donald A. Martin alábbi tételének [5] felhasználásával bizonyítható:

3.2.1. Tétel (Borel determináltság). *Ha N Borel halmaz A^ω-ban, akkor a $G(S, N)$ játékban valamelyik játékosnak nyerő stratégiája van.*

Így elegendő belátnunk, hogy a parkettázó játékokban a paraméterektől függetlenül N mindig Borel halmaz.

3.2.2. Tétel. *Tetszőleges parkettázó játékban valamelyik játékosnak nyerő stratégiája van.*

Bizonyítás. Mivel

$$N = [S] \bigcap \left\{ \langle a_0, a_1, \ldots \rangle \in A^\omega \;\middle|\; \bigcup_{i=0}^{\infty} a_i = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \right\},$$

ezért elég a metszet két tagjáról külön-külön belátni, hogy Borel halmaz.

Elsőként megmutatjuk, hogy $[S]$ zárt. Legyen $x \in A^\omega \setminus [S]$. Ekkor x nem minden kezdőszelete S-beli, mondjuk az első n eleme által alkotott kezdőszelet nem az. Ekkor viszont az összes, x-től legfeljebb $1/(n+1)$ lévő sorozat sem lehet $[S]$-beli, hiszen az első n elemük azonos. Tehát $A^\omega \setminus [S]$ tartalmazza x egy környezetét, azaz $A^\omega \setminus [S]$ nyílt, így $[S]$ zárt. (Eddig nem használtuk ki, hogy parkettázó játékról beszélünk, az eddigiek a szabályrendszerekre vonatkozó általános feltételekből következtek.)

A metszet másik tagja azt fejezi ki, hogy a kijátszott alakzatok fedik a teljes végtelen sakktáblát. Számozzuk meg tetszőlegesen a végtelen sakktábla

mezőit, és legyen

$$N_j := \left\{ \langle a_0, a_1, \ldots \rangle \in A^\omega \;\middle|\; \bigcup_{i=0}^{\infty} a_i \text{ fedi a } j\text{-edik mezőt} \right\}$$

minden $j \in \mathbb{N}$-re. Ekkor az N_j-k nyílt halmazok, ugyanis ha egy x sorozat alakzatai lefedik a j-edik mezőt, akkor valamilyen n-re már az x első n tagja is lefedi a j-edik mezőt, ekkor viszont az x-től legfeljebb $1/(n+1)$ távolságra lévő sorozatok is lefedik a j-edik mezőt (hiszen az első n tag ugyanaz). Mivel

$$N = [S] \bigcap \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} N_j \right),$$

így N egy zárt halmaz és megszámlálható sok nyílt halmaz metszete, tehát N Borel halmaz. Így a Borel determináltság tételéből adódóan a parkettázó játékokban valamelyik játékosnak biztosan van nyerő stratégiája. ■

3.2.3. Megjegyzés. *A fenti bizonyítás csak annyit használ ki a játék tulajdonságaiból, hogy a kezdő játékos pontosan akkor nyer, ha a kijátszott alakzatok együttesen a (megszámlálható sok mezőből álló) teljes síkot parkettázzák. Vagyis a gondolatmenet más megszámlálható halmaz felett értelmezett (nem feltétlenül az általunk használt négy paraméter által meghatározott) játékokra is alkalmazható.*

A determináltság alapján a (T, V, t, v) paraméterű játékok két csoportra oszthatók:

3.2.4. Jelölés. *$\mathcal{T}$-vel, illetve $\mathcal{V}$-vel jelöljük azon (T, V, t, v) négyesek halmazát, amelyek esetén Támadónak, illetve Védekezőnek van nyerő stratégiája.*

Mint látni fogjuk, sok esetben azt érdemes vizsgálni, hogy egy adott (T, V) párhoz található-e egyáltalán olyan (t, v) pár, hogy (T, V, t, v) már $\mathcal{T}$-beli legyen.

3.3. Néhány általános tulajdonság

Vizsgáljuk meg, hogy a paraméterek változtatása hogyan befolyásolja a nyerő stratégiával rendelkező játékos kilétét. A készletek bővítése a megfelelő játékosnak kedvez, szűkítésük a másik félnek.

3.3.1. Állítás. *Legyen $T' \subseteq T \subseteq T''$ és $V' \subseteq V \subseteq V''$. Ekkor*

- *ha $(T, V, t, v) \in \mathcal{T}$, akkor $(T, V', t, v), (T'', V, t, v) \in \mathcal{T}$,*
- *ha viszont $(T, V, t, v) \in \mathcal{V}$, akkor $(T', V, t, v), (T, V'', t, v) \in \mathcal{V}$.*

A távolság-paraméterek növelése a Támadónak, csökkentése a Védekezőnek kedvez.

3.3.2. Állítás. *Legyen (T, V, t, v) tetszőleges paraméternégyes. Ekkor*

- *Ha $(T, V, t, v) \in \mathcal{T}$, $t \leq t'$ és $v \leq v''$, akkor $(T, V, t', v') \in \mathcal{T}$,*
- *ha viszont $(T, V, t, v) \in \mathcal{V}$, $t' \leq t$ és $v' \leq v$, akkor $(T, V, t', v') \in \mathcal{V}$.*

Mivel Védekező akár minden lépésben választhatja az üres halmazt is, a Támadó győzelmének nyilvánvaló szükséges feltétele, hogy az alakzataival parkettázható legyen a sík.

3.3.3. Állítás. *Ha $(T, V, t, v) \in \mathcal{T}$, akkor $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \in \mathcal{P}[T]$.*

Ha viszont T tartalmazza az összes egységnégyzetet, akkor Támadó számára adódik nyilvánvaló nyerő stratégia: tetszőleges módon sorba rendezzük a végtelen sakktábla mezőit, és minden lépésben lefedjük a legkisebb sorszámú, még szabad mezőt.

3.3.4. Következmény.

$$(E, U, 1, 1) \in \mathcal{T}.$$

Következő célunk az invariáns tulajdonsággal színezhető alakzatokkal foglalkozó 2.3.7. tétel parkettázó játékokra vonatkozó megfelelőjének kimondása és általánosítása. Itt arról volt szó, hogy a lyukakkal – bármilyen távoliak voltak – „elrontottuk" a színek egyensúlyát annyira, hogy a fennmaradó részt ne lehessen a színeket egyenlő mértékben tartalmazó parkettákkal kirakni. Érezhető, hogy ha T-hez van invariáns színezés, akkor $V = E$ esetén a Védekező hasonló módon el tudja rontani a parkettázhatóságot. Jó lenne azonban ezt minden olyan V-re is látni, ahol a V-beli elemekkel a végtelen sakktábla tetszőleges részén elrontható a színek egyensúlya.

Mivel a játékosok felváltva helyeznek le parkettákat, Védekezőnek a győzelemhez nem elég, hogy van olyan $X \in \mathcal{P}[V]$ halmaz (egymástól távoli parkettákból), hogy $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus X$ nem parkettázható T-vel. Ugyanis Támadó a saját parkettáival meg tudja akadályozni egy ilyen X halmaz kirakását. Ha viszont olyan X halmazt tudna készíteni a Védekező, hogy annak parkettái közül tetszőlegesen kiválasztva a felét, a kapott $Y \in \mathcal{P}[H]$ halmazra $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus Y$ biztosan nem lenne parkettázható, akkor egy ilyen Y halmaz kirakása már nem lenne megakadályozható (hiszen elég távoli parketták esetén Támadó minden parkettája csak egyetlen X-beli parketta elhelyezését tiltja

meg). Az alábbiakban belátjuk ilyen X halmaz létezését feltéve, hogy van invariáns színezés T-hez, a szóban forgó parketták mérete korlátos, és Védekező parkettái bárhol el tudják rontani a színek egyensúlyát (azaz elég nagy M-re a végtelen sakktábla minden $M \times M$-es tartományából kiválasztható egy megfelelő V-beli parketta). A bizonyítás során felhasználjuk, hogy a teljes végtelen sakktábla parkettázható T-vel, ami amúgy is szükséges feltétele a Támadó nyerő stratégiájának.

3.3.5. Tétel. *Legyenek adottak a T és V síkbeli alakzatokat tartalmazó halmazok, valamint egy R pozitív egész és $0 < c \leq 1$ pozitív valós szám a következő feltételekkel:*

- *Létezik (S_1, S_2) invariáns színezés T-hez.*
- *A T-beli és V-beli alakzatok átmérőinek halmaza felülről korlátos: $\exists D \in \mathbb{N}$, hogy $\forall B \in T \cup V$ esetén $d(B) \leq D$.*
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \in \mathcal{P}[T]$.
- *Van olyan M pozitív egész, hogy a végtelen sakktábla minden $M \times M$-es négyzetében van legalább egy olyan V-beli alakzat, amely nem egyenlő számban tartalmaz mezőket az S_1, S_2 színekből.*

Ekkor megadható egy $X \in \mathcal{P}^k[V]$ véges halmaz a következő tulajdonságokkal:

- *Bármely két különböző X-beli alakzat távolsága legalább R.*
- *X bármely $\lceil c \cdot k \rceil$ darab V-beli parketta uniójaként előálló Y részhalmazára $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus Y$ nem parkettázható T-vel.*

A bizonyítás alapgondolata a következő: a végtelen sakktábla egy tetszőleges tartománya lefedhető T-beli parkettákkal úgy, hogy azok legfeljebb átmérőnyi távolságra lógnak a tartományból. A kilógó részek területe a tartomány kerületével arányos, és a tartományban legfeljebb annyival lehet több az egyik színből a másiknál, mint a kilógó rész területe. Másrészt a tartományból annak területével arányos számban tudunk V-beli alakzatokat kiválasztani, melyek mindegyike több mezőt tartalmaz az első színből, mint a másodikból. Így ha a tartomány maradék része – esetleges kilógásokkal – lefedhető T-beli parkettákkal, akkor ebben a maradék részben legfeljebb a kilógó részek területével lehet kevesebb az első színből, ami ismét csak a kerülettel arányos. Ez alapján, ha a tartomány elég nagy, az első színből területtel arányos mértékben több mezőt fog tartalmazni, mint a másodikból. Tehát a tartományban az első szín javára mutatkozó különbség egyrészt legfeljebb a kerület konstansszorosa, másrészt legalább a terület konstansszorosa. A tartomány megfelelő választása esetén ez ellentmondást ad, tehát a maradék rész ekkor nem lehet T-vel parkettázható.

Nézzük ugyanezt a gondolatmenetet precízen.

Bizonyítás. Vegyünk egy N oldalú négyzetet a végtelen sakktáblán, jelöljük ezt Q_N-nel. Ebben a négyzetben felvehető $\lfloor N/(M+R) \rfloor^2$ darab $M \times M$-es négyzet, és benne 1-1 V-beli alakzat, mely nem egyenlő számban tartalmaz S_1 és S_2-beli mezőket úgy, hogy ezen alakzatok egymástól legalább R távolságra vannak. A negyedik feltétel miatt S_1 és S_2 közül legalább az egyik színhez lesz legalább

$$\frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{N}{M+R} \right\rfloor^2$$

darab alakzat, amely az adott színből többet tartalmaz, legyen mondjuk ez S_1. Az így kapott alakzatok számát jelöljük k-val, uniójukat X-szel. Ha ez megfelel a feltételeknek, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor van olyan

$$k' := \lceil c \cdot k \rceil$$

parkettából álló Y részhalmaza, hogy $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus Y \in \mathcal{P}[T]$. Ekkor vegyünk egy parkettázást, és az N oldalú négyzetünkbe belemetsző parketták unióját jelöljük P_1-gyel. A parketták átmérője legfeljebb D, így a P_1 parkettázás a négyzeten kívül egy legfeljebb D szélességű, $4DN + 4D^2$ mezőt tartalmazó sávból tartalmazhat mezőket. Mivel P_1-ben az S_1-be és S_2-be tartozó mezők száma egyenlő,

$$(|P_1 \cap Q_N \cap S_1| - |P_1 \cap Q_N \cap S_2|) + (|(P_1 \setminus Q_N) \cap S_1| - |(P_1 \setminus Q_N) \cap S_2|) = 0.$$

Mivel pedig X-ben legalább k'-vel több S_1-beli mező van, mint S_2-beli ezért

$$\begin{aligned}
|Q_N \cap S_1| - |Q_N \cap S_2| &= k' + (|P_1 \cap Q_N \cap S_1| - |P_1 \cap Q_N \cap S_2|) = \\
&= k' - (|(P_1 \setminus Q_N) \cap S_1| - |(P_1 \setminus Q_N) \cap S_2|) \geq \\
&\geq k' - |(P_1 \setminus Q_N)| \geq \\
&\geq k' - 4DN - 4D^2.
\end{aligned}$$

Másrészt viszont $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ parkettázható T-vel, egy ilyen parkettázásból a Q_N-be metsző parketták halmazát jelöljük P_2-vel. Ekkor P_2 is csak legfeljebb az említett $4DN + 4D^2$ mezővel lehet bővebb Q_N-nél, és egyenlő számban tartalmaz S_1 és S_2-beli mezőket, így

$$(|P_2 \cap Q_N \cap S_1| - |P_2 \cap Q_N \cap S_2|) + (|(P_2 \setminus Q_N) \cap S_1| - |(P_2 \setminus Q_N) \cap S_2|) = 0,$$

következésképpen

$$\begin{aligned}|Q_N \cap S_1| - |Q_N \cap S_2| &= |P_2 \cap Q_N \cap S_1| - |P_2 \cap Q_N \cap S_2| = \\ &= |(P_2 \setminus Q_N) \cap S_2| - |(P_2 \setminus Q_N) \cap S_1| \leq \\ &\leq -|(P_2 \setminus Q_N)| \leq \\ &\leq 4DN + 4D^2.\end{aligned}$$

A fentieket összevetve:

$$k' - 4DN - 4D^2 \leq |Q_N \cap S_1| - |Q_N \cap S_2| \leq 4DN + 4D^2,$$

tehát

$$k' \leq 8DN + 8D^2.$$

Mivel

$$k' = \lceil c \cdot k \rceil \geq c \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{N}{M+R} \right\rfloor^2,$$

így

$$8DN + 8D^2 \geq k' \geq c \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{N}{M+R} \right\rfloor^2 \geq \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{N^2}{(M+R)^2} - 1 \right),$$

átrendezve

$$8DN + 8D^2 + \frac{c}{2} \geq \frac{c}{2(M+R)^2} \cdot N^2.$$

Azonban elég nagy N-re a fenti egyenlőtlenség biztosan nem teljesül, így ez az eset ellentmondásra vezet. Tehát X-nek minden $Y \in \mathcal{P}^{\lceil ck \rceil}[V]$ részhalmazára $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus Y$ nem parkettázható T-vel, ezt akartuk belátni. ■

A fenti tételt a következő eredményt adja a parkettázó játékokkal kapcsolatban:

3.3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy T-re és V-re az alábbiak teljesülnek:*

- *Létezik* (S_1, S_2) *invariáns színezés* T*-hez.*
- *A* T*-beli és* V*-beli alakzatok átmérőinek halmaza felülről korlátos:* $\exists D \in \mathbb{N}$*, hogy* $\forall A \in T \cup V$ *esetén* $d(B) \leq D$*.*
- *Van olyan* M *pozitív egész, hogy a végtelen sakktábla minden* $M \times M$*-es négyzetében van legalább egy olyan* V*-beli alakzat, amely nem egyenlő számban tartalmaz mezőket az* S_1*,* S_2 *színekből.*

Ekkor tetszőleges t*,* v *pozitív egészek esetén* $(T, V, t, v) \in \mathcal{V}$*.*

Bizonyítás. Ha $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \notin \mathcal{P}[T]$, akkor a 3.3.3. állítás alapján $(T, V, t, v) \in \mathcal{V}$ nyilvánvaló. Ellenkező esetben teljesülnek a 3.3.5. tétel feltételei, így alkalmazhatjuk a tételt $R = D + 2\max(t, v)$ és $c = 1/2$-re, amivel kapunk egy X alakzat-halmazt. Ekkor tetszőleges T-beli alakzat legfeljebb 1 X-belihez lehet t-nél közelebb, ugyanis ha $X_1, X_2 \in X$, $A \in T$, akkor

$$R = D + 2\max(t, v) \leq d(X_1, X_2) \leq d(X_1, A) + d(A) + d(A, X_2) \leq$$
$$\leq d(X_1, A) + D + d(A, X_2),$$

ezért

$$2t \leq 2\max(t, v) \leq d(X_1, A) + d(X_2, A),$$

így nem lehet X_1 és X_2 is t-nél közelebb A-hoz. Az is nyilvánvaló, hogy az X-beli alakzatok távolsága legalább v.

Legyen Védekező stratégiája a következő: Támadó kezdő a_0 lépése után keresse X-nek egy olyan X' eltoltját, amely a_0-tól legalább t távolságra van, majd ezután válasszon ki minden lépésben egy X'-beli alakzatot, amely legalább t-re van a Támadó által lerakottaktól. Mivel minden T-beli alakzathoz

legfeljebb egy X'-beli van t-nél közelebb, Védekező így legalább $\lceil \frac{1}{2} \cdot |X| \rceil$ darab X'-beli alakzatot ki tud játszani. Mivel a 3.3.5. tétel szerint ekkor a maradék sík nem parkettázható T-vel, a továbbiakban $\emptyset$-et kijátszva Védekező biztosan nyer. ■

3.4. A parkettázó játék téglalapokra

Ebben a szakaszban olyan játékokat vizsgálunk, ahol Támadó és Védekező adott méretű téglalapok összességéből válogathat. Célunk annak vizsgálata, hogy milyen téglalap-párokra lehet elég nagy távolság-korlátokat választani úgy, hogy Támadónak nyerő stratégiája legyen. Ha ez lehetséges, akkor pedig megpróbálunk minél kisebb t, v korlátokat megadni.

3.4.1. Definíció. *A (T, V) pár a Támadónak kedvez, ha van olyan t és v, hogy $(T, V, t, v) \in \mathcal{T}$. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy (T, V) a Védekezőnek kedvez.*

Olyan a, b, c, d pozitív egészeket keresünk tehát, hogy az $(R_{a,b}, R_{c,d})$ pár a Támadónak kedvezzen.

3.4.2. Lemma. *Legyenek a és b pozitív egészek. Ha $(a, b) \neq 1$, akkor tetszőleges c, d-re $(R_{a,b}, R_{c,d})$ a Védekezőnek kedvez.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $D = (a, b)$, ekkor a végtelen sakktábla bármelyik sorának bármely szakaszát nézve az $R_{a,b}$-beli téglalapok D-vel osztható számú mezőt fednek le. Védekezőnek elég tehát két téglalapot lehelyezni úgy, hogy távolságuk legalább v legyen, de ne legyen D-vel osztható (valamint Támadó

első két téglalapjától legalább t távolságra legyenek). Ez nyilvánvalóan megtehető, a továbbiakban lépésekben passzolva Védekező nyer. ■

A színezéses tulajdonságok is kizárnak számos további esetet. Legyen minden $n \geq 2$ pozitív egészre $S_n := (S_{n,1}, S_{n,2})$ a következő színezés:

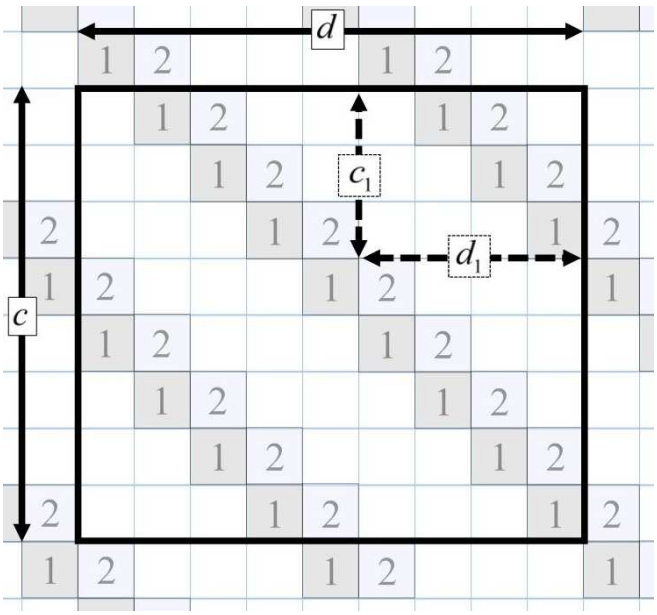
$$S_{n,1} = \{(x, y) \mid x + y \equiv 0 \mod n\}$$

$$S_{n,2} = \{(x, y) \mid x + y \equiv 1 \mod n\}.$$

Könnyen végiggondolható, hogy ha a és b valamelyike osztható n-nel, akkor S_n invariáns színezés lesz $R_{a,b}$-hez. Másrészt legyenek c és d maradékai n-nel osztva c_1 és d_1. Ha nem mindkettő nulla, akkor vegyünk egy $c_1 \times d_1$-es téglalapot, melynek leghosszabb ÉNy-DK irányú átlói közül a jobb szélső $S_{n,1}$-beli (lásd a 3.1. ábrát). Ekkor a téglalapban az ettől az átlótól jobbra lévő átló eggyel kevesebb elemszámú és $S_{n,2}$-beli, az összes többi mező pedig színezés nélküli (ugyanis $max(c, d) - 1$ darab azonos irányú átló van tőle balra és $min(c, d) - 1$ darab tőle jobbra). Ha ezt kiegészítjük egy $c \times d$-es téglalappá úgy, hogy jobbra és felfelé növeljük az oldalait, akkor a hozzácsatolt rész $1 \times n$-esekkel parkettázható, így ugyanannyi $S_{n,1}$ és $S_{n,2}$-beli mezőt tartalmaz.

Vagyis így kaptunk egy $c \times d$-s téglalapot, ahol eggyel több mező lesz $S_{n,1}$-beli, mint $S_{n,2}$-beli. Mivel az S_n színezés periodikus, elég nagy M-re minden $M \times M$-es négyzetben található ilyen téglalap. Ekkor alkalmazható a 3.3.6. tétel, így a következőt kapjuk:

3.4.3. Tétel. *Tetszőleges a és b pozitív egészek esetén, ha a vagy b valamelyike nem osztója c és d közül legalább egynek, akkor $(R_{a,b}, R_{c,d})$ a Védekezőnek kedvez.*



3.1. ábra. A $c \times d$-s téglalap elhelyezése, hogy S_n színeiből ne egyenlő számú mezőt tartalmazzon

Így már csak azokat az eseteket kell vizsgálni, ahol $(a, b) = 1$, a osztója c-nek vagy d-nek, és b is osztója c-nek vagy d-nek. Megmutatható, hogy ilyenkor már $(R_{a,b}, Rc, d)$ a Támadónak kedvez.

3.4.4. Tétel. *Legyenek a, b, c, d pozitív egészek. Ekkor $(R_{a,b}, R_{c,d})$ pontosan akkor kedvez a Támadónak, ha az alábbi feltételek teljesülnek:*

1. $(a, b) = 1$
2. $a \mid c$ *vagy* $a \mid d$
3. $b \mid c$ *vagy* $b \mid d$.

Ekkor $(R_{a,b}, R_{c,d}, 4cd, 4cd) \in \mathcal{T}$.

Bizonyítás. Osszuk fel a végtelen sakktáblát $2cd \times 2cd$-s négyzetekre. A távolság-megkötések miatt minden ilyen négyzetbe legfeljebb egy Védekező-

téglalap metszhet bele, és ha már egy Támadó-téglalap belemetsz, akkor a későbbiekben lerakott Védekező-téglalapok már nem metszhetnek bele. Megmutatjuk, hogy minden Védekező-téglalap körberakható Támadó-téglalapokkal úgy, hogy néhány $2cd \times 2cd$-s négyzet unióját kapjuk.

Nézzük először azt az esetet, amikor $ab \mid c$ (az $ab \mid d$ eset ezzel analóg). Ekkor minden $c \times d$-s Védekező-téglalaphoz vehetünk a $2cd \times 2cd$-s felosztásból 2×2 négyzetet úgy, hogy a $c \times d$-s téglalap az így kapott $4cd \times 4cd$ méretű tartomány minden oldalától legalább cd távolságra legyen. Osszuk fel a tartományt a d hosszúságú oldalak egyenesei mentén. Ha $n \geq cd$, akkor n előáll a és b lineáris kombinációjaként, így egy $n \times c$-s téglalap parkettázható $a \times b$-s téglalapokkal. Így a felosztott tartomány minden része parkettázható $a \times b$-s téglalapokkal.

Ha $a \mid c$ és $b \mid d$ (vagy fordítva), akkor egy $c \times d$-s téglalap $a \times b$-sekkel kiegészíthető egy $cd \times cd$ méretű négyzetté. Erre pedig $ab \mid cd$ miatt alkalmazható az előző eset gondolatmenete.

Támadó stratégiája tehát a következő: valamilyen sorrend szerint végigmegy a $2cd \times 2cd$-s négyzeteken. Ha az adott négyzet közelében (legfeljebb cd távolságra van Védekező-téglalap, akkor kiparkettázza a fentiek szerint a megfelelő $4cd \times 4cd$-s tartományt (ebbe Védekező már nem tud beleavatkozni). Ha nincs, akkor egyszerűen elkezdi kiparkettázni a $2cd \times 2cd$-s négyzetet. Ekkor a $t = 4cd$ távolság-megkötés miatt nem fordulhat elő, hogy a későbbiekben ehhez a négyzethez közel tenne téglalapot a Védekező. Ezt az eljárást követve a teljes végtelen sakktábla parkettázva lesz. ■

Speciálisan az $1 \times n$-es téglalapokra a 2.4.1. tétel gondolatmenetéhez hasonlóan a fentinél kisebb távolság-korlátot is adhatunk:

3.4.5. Állítás.

$$(R_{1,n}, R_{1,n}, n, n) \in \mathcal{T}.$$

Vélhetően ebben az esetben ez a legszigorúbb feltétel, ami mellett még a Támadó nyer. Általában is érdekes nyitott kérdés, hogy a távolság-paraméterek mennyire csökkenthetők tovább $4cd$-ről.

3.4.6. Kérdés. *Tegyük fel, hogy a 3.4.4. tétel három feltétele teljesül az a, b, c, d számokra. Mi az a minimális t, és hozzá a minimális v, hogy $(R_{a,b}, R_{c,d}, t, v) \in \mathcal{T}$?*

3.5. A $T = L$ eset és néhány nyitott kérdés

Játsszon most Támadó L-triominókkal, Védekező pedig egységnégyzetekkel. A 2.3.3. tétel megfelelője parkettázó játékra:

3.5.1. Tétel. *Az (L, E) pár a Támadónak kedvez, sőt*

$$(L, E, 1, 2) \in \mathcal{T}.$$

BIZONYÍTÁS. Támadó stratégiája a következő: négy egymást követő lépése közül minden negyedsíkban egyet-egyet lép, méghozzá a 2.3.3. tétel bizonyításában ismertetett átlós L-triominó algoritmus szerint, és ezt ismételgeti a végtelenségig. Ez az eljárás minden pillanatban és minden negyedsíkban ugyanazt az eredményt adja, mintha Védekező addig letett egységnégyzetei

már kezdetben is le lettek volna helyezve. Így az eljárás sosem akad el, végeredményben pedig mind a 4 síknegyed parkettázva lesz. ■

Amint az a következő tételből kiderül, $t = 1$ esetén $v = 2$ itt a minimális érték, amely mellett még a Támadó nyer.

3.5.2. Tétel.

$$(L, E, 1, 1) \in \mathcal{V}.$$

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk egy 100×100-as négyzetet a végtelen sakktáblán. Nevezzük a négyzet keretének a szélső soraiban és oszlopaiban lévő összesen 396 mezőt. Legyen Védekező első 396 lépése olyan, hogy a keret mezőinek valamelyikét fedi le, amíg el nem fogynak, után pedig passzol ($\emptyset$-et választja). Ekkor a négyzet belsejéből Támadó legfeljebb $396 \cdot 3 = 1188$ mezőt fedett le, így legalább $98^2 - 1188 = 8416$ még szabadon van. Innentől kezdve bármely L-triominó vagy teljes egészében a négyzet belsejében, vagy teljes egészében azon kívül van. Védekező egy további lépésben elérheti, hogy a belül lévő mezők száma ne legyen 3-mal osztható, így a négyzet belseje nem parkettázható L-triominókkal. Így ha a továbbiakban nem választ egységnégyzetet a négyzet belsejéből (például mindig passzol), a játékot Védekező nyeri. ■

3.5.3. Megjegyzés. *A fenti gondolatmenet alkalmazásával tetszőleges A alakzat esetén megkapjuk, hogy*

$$(\langle A \rangle, E, 1, 1) \in \mathcal{V},$$

ha a 100×100*-as négyzet helyett szükség esetén (A elemszámától és átmérőjétől függően) egy nagyobb* $N \times N$*-es négyzetet, illetve vastagabb keretet veszünk.*

A korábbi tételek alapján nyilvánvaló, hogy ha tetszőleges t és $v \geq 2$ esetén $(L, E, t, v) \in \mathcal{V}$. Így az (L, E) pár vizsgálatának teljességéhez már csak a $v = 1$ eset hiányzik.

3.5.4. Kérdés. *Van-e olyan* t *pozitív egész, hogy* $(L, E, t, 1) \in \mathcal{T}$ *?*

Úgy tűnik, hogy az (L, V) pár nagyon sokféle V-re a Támadónak kedvez. Sejtésünk szerint elég megkövetelni, hogy külön-külön egyetlen V-beli alakzat se tegye lehetetlenné a maradék sík parkettázását.

3.5.5. Sejtés. *Legyen* V *olyan, hogy bármely* $A \in V$ *esetén* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus A$ *parkettázható* L*-triominókkal. Ekkor* (L, V) *a Támadónak kedvez.*

Természetesen ha a fenti sejtés igaz, akkor érdekes azt is vizsgálni, hogy mit mondhatunk a távolság-paraméterek minimumáról. Még akár az is igaz lehet, hogy létezik olyan rögzített D érték, hogy a fenti feltételeknek megfelelő V-re $(L, V, D, D) \in \mathcal{T}$.

Érdekes lenne találni további alakzatokat, amelyek az L-triominóhoz hasonlóan viselkednek. Azaz olyan, egybevágó alakzatokat tartalmazó $\langle A \rangle$ osztályt keresünk, amelyre $(\langle A \rangle, E)$ a Támadónak kedvez. Az L-triominókból származtathatunk végtelen sok ilyet:

3.5.6. Tétel. *Tekintsük minden* n *pozitív egészre az*

$$L(n) := \{(0, 0), (0, n), (n, 0)\}$$

alakzatok $\langle L(n)\rangle$ *osztályát. Ekkor* $(\langle L(n)\rangle, E)$ *a Támadónak kedvez.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\sim_n$ a következő reláció $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-n: $(a,b) \sim_n (c,d)$ pontosan akkor, ha $n \mid a-b$ és $n \mid c-d$. Ekkor $\sim_n$ ekvivalenciareláció, és a végtelen sakktábla n^2 darab ekvivalenciaosztályra esik szét. Minden $\langle L(n)\rangle$-beli alakzat pontosan egy ekvivalenciaosztályból tartalmaz mezőket, és egy ekvivalenciaosztályon belül ezek éppen az L-triominóknak felelnek meg. Így az $(\langle L(n)\rangle, E, 1, n+1)$ paraméterű játék olyan, mintha n^2 darab $(L, E, 1, 2)$ paraméterű játék folyna párhuzamosan. Mivel ezekben Támadó nyerő stratégiája nem volt érzékeny arra, hogy Védekező milyen sorrendben hány egységnégyzetet helyezett már le, ezért Támadó megteheti, hogy sorra lép az n^2 játék mindegyikében, és ezt ciklikusan ismételgeti. Így mindegyik játékban nyerni fog, ami azt jelenti, hogy a $(\langle L(n)\rangle, E, 1, n+1)$ paraméterű játékot is megnyeri. ■

Ugyanakkor két mezőből álló alakzatok között nem találunk hasonlót:

3.5.7. Tétel. *Ha A két különböző egységnégyzet uniója, akkor* $(\langle A\rangle, E)$ *a Védekezőnek kedvez.*

BIZONYÍTÁS. Minden ilyen A-hoz megadunk egy olyan invariáns színezést, amely teljesíti a 3.3.6. tétel feltételeit. Legyen $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$, valamint $a = |x_1 - y_1|$, $b = |x_2 - y_2|$ és $n = (a, b)$. Tekintsük most a végtelen sakktáblát $n \times n$-es négyzetekből álló rácsként. Minden ilyen négyzet teljes egészében fekete vagy teljes egészében fehér lesz az alábbiak szerint: ha $\frac{a}{n}$ és $\frac{b}{n}$ is páratlan, akkor legyen a rács minden második sora fekete, a többi fehér.

Ha pedig $\frac{a}{n}$ és $\frac{b}{n}$ közül az egyik páros (mindkettő nem lehet, mert relatív prímek), akkor tekintsük a rács sakktábla-színezését. Ellenőrizhető, hogy ha S_1 a fekete és S_2 a fehér mezők halmaza, akkor (S_1, S_2) invariáns színezés $\langle A \rangle$-hoz, amelyre persze minden egységnégyzet különböző számú mezőt tartalmaz a két színből. Így a 3.3.6. tétel szerint minden (t, v) párra $(\langle A \rangle, E, t, v) \in \mathcal{V}$, azaz $(\langle A \rangle, E)$ a Védekezőnek kedvez. ■

A három mezőből álló poliominók közül az L-triominóra láttuk, hogy (L, E) a Támadónak kedvez, az 1×3-as téglalapra pedig például a 3.4.4. tételből tudjuk, hogy $(R_{1,3}, E)$ a Védekezőnek kedvez. A négy mezőből álló alakzatokat tekintve az ötféle tetrominó közül négyhez van invariáns színezés (nevezetesen a sakktábla-színezés ilyen), így ezekre $(\langle A \rangle, E)$ a Védekezőnek kedvez. Az egyetlen kivétel a T-tetrominó.

3.5.8. Sejtés. *(T_4, E) a Támadónak kedvez.*

Ha a fenti sejtés igaz, akkor jó eséllyel a 3.5.6. tételhez hasonló módon nem összefüggő, 4 elemű A_4 alakzatokat is konstruálhatnánk, amelyekre (A_4, E) a Támadónak kedvez.

Beláttam, de itt terjedelmi okokból nem bizonyítom az alábbi állítást:

3.5.9. Állítás. *Minden $n > 2$ esetén van olyan n mezőből álló P_n poliominó, amelyre nincs invariáns színezés és $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ parkettázható P_n-nel.*

Ez reményt ad arra, hogy a következő általános sejtés igaz legyen:

3.5.10. Sejtés. *Minden $n > 2$ esetén van olyan n mezőből álló összefüggő P_n poliominó, amelyre $(\langle P_n \rangle, E)$ a Támadónak kedvez.*

Még általánosabban, érdekes kérdés, hogy vajon az invariáns színezés hiánya és $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ parkettázhatósága elégséges feltétel-e ahhoz, hogy egy $(\langle A \rangle, E)$ pár a Támadónak kedvezzen.

3.5.11. Kérdés. *Van-e olyan A alakzat, hogy $\langle A \rangle$-hoz nincs invariáns színezés, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \in \mathcal{P}[\langle A \rangle]$ és $(\langle A \rangle, E)$ a Védekezőnek kedvez?*

4. fejezet

Parkettázási problémák tanítása felfedeztetéssel

A matematika tanításának egyik legfőbb célja a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése. Ez akkor valósítható meg hatékonyan, ha a tanulóknak lehetőségük van érdekes, kihívást jelentő, de korábbi ismereteik alapján jó eséllyel megoldható feladatokon aktívan gondolkozni. Ehhez egyfelől olyan oktatási stratégiát érdemes követni, amely a lehető legnagyobb mértékben teret ad az önálló gondolkozásnak, kérdésfeltevésnek és elméletépítésnek, másfelől szükség van érdekes problémák egy olyan jól felépített rendszerére, amely biztosítja, hogy a tanuló lépésről lépésre haladva eljusson az általunk kívánt célokhoz. A továbbiakban a felfedezéses tanulás (tanári szemszögből nézve: felfedeztetéses tanítás) stratégiájának a matematika oktatására vonatkozó egyik lehetséges megvalósítását ismertetem, majd bemutatom ennek néhány konkrét alkalmazását a parkettázás témaköréből vett feladatok segítségével.

4.1. Matematikatanítás felfedeztetéssel

A felfedezéses tanulás [6] koncepciója a konstruktivista tanuláselméleten, Jean Piaget, Jerome Bruner és mások munkásságán alapszik. Alapvető célkitűzése, hogy a tanuló aktívan vegyen részt a világ megismerésében, ne csupán az ismeretek passzív befogadója legyen. Biztosítani igyekszik, hogy a tanulók saját maguk konstruálják gondolati rendszereiket, tegyenek fel jó kérdéseket, majd ezekre próbáljanak önállóan választ találni, végül ezek alapján átfogó képet alkossanak maguknak az adott területről.

A felfedeztető matematikatanítás első számú hazai kidolgozója Varga Tamás volt, az ő munkásságának köszönhetően kezdett a felfedeztetés fokozatosan teret nyerni az oktatásban. Napjainkban főként Pósa Lajosnak köszönhetően számos tehetséggondozó táborban [7] élhetik át a gyerekek az önálló matematikai gondolkodás örömét.

A fejezet további részében leírt gondolatok, feladatok, didaktikai megjegyzések jelentős részben a Pósa-féle táborokban diákként, segítőként, majd foglalkozás-vezetőként szerzett saját tapasztalataimon alapulnak. További forrásként szolgált a MaMuT[1] nevet viselő, minden évben megrendezésre kerülő nyári tehetséggondozó tábor. Itt az országos matematikaversenyeken legjobb eredményt elért tanulók számára tartanak elismert pedagógusok felfedeztető stílusú foglalkozásokat.

A felfedeztető oktatás arra törekszik, hogy a tanuló matematikai tudása minél inkább saját gondolatain, ötletein, felfedezésein keresztül formálódjon. A magunk által alkotott gondolati képek könnyebben rögzülnek, mint a

[1] **Ma**tematikai **Mu**latságok **T**ábora

passzív befogadás útján szerzett ismeretek, így az önálló felfedezések stabilabb tudást is eredményeznek.

Ahhoz, hogy legyen mit felfedezni, olyan feladatokat kell kitűzni, amelyek nem valamely ismert módszer mechanikus alkalmazását kívánják, hanem mindig egy lépéssel tovább vezetnek, új ismeretek vagy a meglévő tudás elmélyítése felé. Alapvető annak biztosítása, hogy a gondolkodás örömteli tevékenység legyen, sikerélményt jelentsen. Ezért a feladatok nehézségét megfelelően kell megválasztani, illetve ki kell dolgozni alkalmas segítségeket, melyek átlendítik a gondolkodásban elakadt tanulókat a kisebb nehézségeken. A jó segítség lehet egy-egy könnyebb feladat, kérdés, bizonyos esetekben információközlés is, ám lehetőség szerint éppen csak a szükséges mértékben kell közelebb vinnie a megoldáshoz, minél nagyobb részt hagyva az önálló felfedezésnek. A motiváció sem elhanyagolható szempont: gondot kell fordítani a feladatok megfogalmazására, hogy azok minél vonzóbbak, érdekesebbek, szórakoztatóbbak legyenek. Ha egyszerre több, különböző témájú és hangulatú feladatot kínálunk fel gondolkozásra, akkor ezek közül mindenki választhat magának kedvére valót, és a munka a sokadik feladat megoldása után sem válik unalmassá.

A feladatok általában nem önmagukban képviselnek egy témát, hanem egymásra épülnek, összefüggő rendszert alkotnak. A rendszer azonos témájú, egymást folytató feladatokból álló gondolati szálakból épül fel. Ezeket – többek között a már említett motivációs okok miatt – érdemes egymással párhuzamosan futtatni, ahelyett, hogy egyetlen szűken körülhatárolt témával foglalkoznánk. A szálak időnként váratlan módon találkoznak: a matema-

tika művelése során a legszebb pillanatok egyike, amikor felfedezzük, hogy távolinak látszó dolgok között kapcsolat van. A tudományban ilyenek a nagy felfedezések – és ennek örömét a felfedeztető oktatásban minden diák átélheti.

A felfedeztetés fontos részét képezik a tanulók által feltett kérdések. Egy-egy probléma megoldása után időnként természetesen adódnak újabb kérdések (ezeket azonban lehetőség szerint a tanulóknak kell megfogalmazniuk), bizonyos témák pedig igen jó terepet adnak a kreatív, újszerű kérdések feltevésének.

A gondolkodás alapvetően önálló tevékenység, mégis lehet csoportban végezni. Pósa Lajos táboraiban a gyerekek 2–4 fős csoportokban, külön helyiségekben elkülönítve dolgoznak a feladatokon. Csoporton belül sem szabad azonban a megoldásokat egymással megosztani, csak az adott feladatot nem megoldók dolgozhatnak közösen, miután önállóan már gondolkodtak egy ideig. Az egyéni és csoportmunkának ez a keveréke (talán társas egyéni munkának nevezhetnénk) a legtöbb tanuló számára igen kellemes környezetet biztosít a felfedező tanulásra.

4.2. Dominók a sakktáblán

Lássuk most a felfedeztető matematikatanítás módszereit egy konkrét feladatsoron keresztül. Hetedik-nyolcadik osztályos tanulóknak javasolhatók a most következő feladatok, tanórára, szakkörre, táborba egyaránt.

4.2.1. Feladat. *Egy távoli kisvárosban egy 8 szobával rendelkező szálloda működik. A szobák egy folyosóról nyílnak sorban 1-től 8-ig számozva. A tulaj-*

donos akciót hirdet: a július 1. és 8. közötti időszakban kedvezményesen lehet szobát foglalni, de csak a következő feltételekkel:

- *két egymás melletti szobát lehet lefoglalni egyetlen napra,* ***vagy***
- *egyetlen szobát lehet lefoglalni két egymást követő napra.*

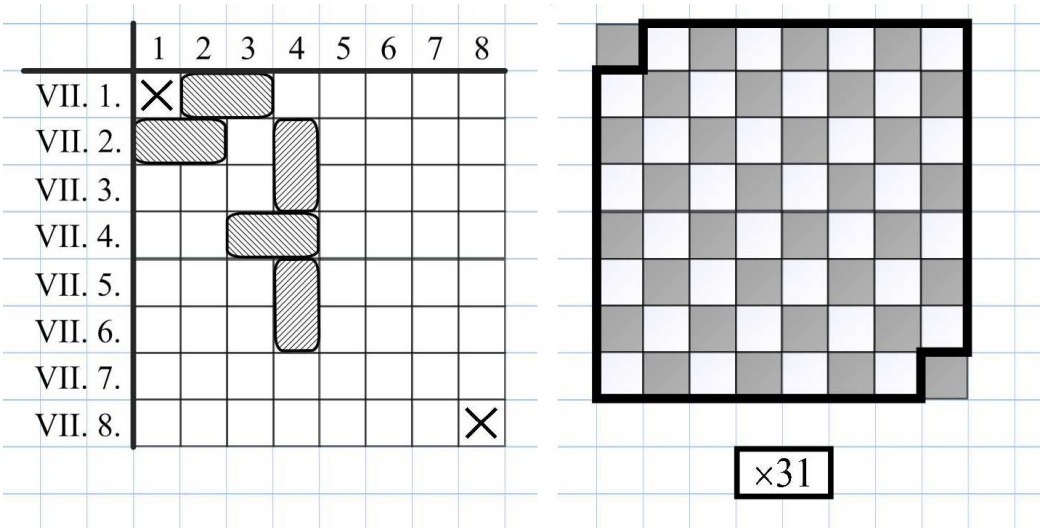
A polgármester már akción kívül lefoglalta az elsejére az 1. szobát és nyolcadikára a 8. szobát. Legfeljebb hány akciós szobafoglalás lehetséges a továbbiakban?

Ez egy meglehetősen közismert feladat álruhában. Az átfogalmazás egyik célja, hogy így azoknak is van min gondolkozni, akik az eredeti verziót ismerik, mert rá kell jönni, hogy ugyanarról van szó. Ez a lépés valójában nem más, mint egy jó matematikai reprezentáció megtalálása a feladatban vázolt „valós" helyzethez. Viszonylag kézenfekvő egy 8×8-as táblázatot készíteni a szobákhoz és a napokhoz, de erre talán nem mindenki jön rá magától. Itt egy alkalmas pont segítségadásra: ha csak annyit árulunk el, hogy egy ilyen táblázaton érdemes vizsgálódni, akkor anélkül segítettünk, hogy az érdemi részt érintettük volna. Érdemes ekkor a tanulókkal közösen átfogalmazni a feladatot (a foglalások bejelölését tekinthetjük dominók lehelyezésének), így megkapjuk az ismert változatot:

4.2.2. Feladat. *Egy* 8×8*-as sakktábla két átellenes sarokmezőjét elhagytuk. Igaz-e, hogy a maradék parkettázható 31 darab* 1×2*-es dominóval?*

A két feladat matematikai szempontból ugyanaz, ám a problémamegoldás szempontjából van egy lényeges különbség közöttük. Nevezetesen, hogy

amikor a „sakktábla” szót használjuk, akkor ehhez gondolati síkon erősen kötődik a sakktábla szokásos színezése, amely itt hatalmas segítséget jelent. Ha az átfogalmazás során nem térünk át sakktáblára, hanem egy színezés nélküli 8×8-as táblázaton vizsgálódunk, úgy a feladat jóval nehezebb (ld. a 4.1. ábrát).



4.1. ábra. Ugyanaz a feladat két változatban, az első mégis jóval nehezebb

A második változat további újdonsága, hogy itt már burkoltan elárultuk azt is, hogy 30 dominót/szobafoglalást könnyű elhelyezni, ezért csak az a kérdés, hogy ez a maximum, avagy 31-gyel is lehetséges-e ugyanez. A próbálkozások sikertelensége arra utal, hogy nem lehet. Ezen a ponton fontos, hogy a gyerekek tudjanak arról, hogy a matematikában (szemben más tudományokkal) a nagyon sok kísérlet sem bizonyító erejű. Másfelől viszont a kísérletezés, mint eszköz igen hatékony: a próbálkozások alapján megsejthető a válasz, így könnyebb elindulni a jó bizonyítás felé.

A megoldás kulcslépése annak felismerése, hogy a sakktábla megszokott színezésének itt jelentősége van. Egy végső segítség lehet a nem-megoldók számára, hogy a felhívjuk a figyelmüket a színezésre (például a táblára rajzolt sakktábla gondos kiszínezésével). Megkérdezhetjük, hogy hány fekete és fehér mező van a két sarokmező nélkül. Miután rájönnek, hogy 32-30 az eloszlás, szinte biztosan eszükbe jut, hogy minden dominó pontosan egy fekete és pontosan egy fehér mezőt fed le, így legfeljebb 30 dominó tehető le.

A diákok számára is érdemes világossá tenni, hogy bizonyos értelemben szerencsénk volt azzal, hogy mindannyian ismerjük a sakktábla szokásos színezését. Ha pl. a sakkot olyan táblán játszanák, ahol minden mező ugyanolyan színű , akkor a 4.2.2. feladat jóval nehezebb lenne: nem volna adott az eszköz a lehetetlenségi bizonyításunkhoz. Ekkor a kétféle megfogalmazás nehézségét tekintve is egyenértékű lenne.

A következő feladat éppen ezzel fog újat mutatni a korábbiakhoz képest:

4.2.3. Feladat. *Egy* 8×8*-as sakktábla egyik sarokmezőjét levágtuk. Igaz-e, hogy a maradék 63 mező parkettázható 21 darab* 1×3*-as dominóval*[2]*?*

Ezt a kérdést a fenti előzmények után akár a diákok is feltehetik. Pusztán az előző feladat alapján persze kicsi az esélye, hogy valaki megkérdezi, ám ezt elősegíthetjük például a következő módon: rajzoljunk fel egy 8×8-as táblát, majd távolítsuk el az egyik sarokmezőt. Ezután forduljunk a diákokhoz azzal, hogy mit lehetne most a maradék 63 mezővel kapcsolatban kérdezni. A felfe-

[2]A precíz szóhasználat *triominó*, *triminó* vagy *trominó* lenne. Nem okoz azonban félreértést, ha minden $1 \times n$-es téglalapot dominónak nevezünk, sőt gyerekek számára így érthetőbb a megfogalmazás.

deztető matematikatanításban fontos szempont, hogy a tanulókat beavassuk a kérdezés művészetébe. Ezt többek között az alábbiak indokolják:

- A tudományt legalább annyira a jó kérdések, mint a rájuk adott válaszok viszik előre.
- Jó kérdést feltenni kreatív feladat, alkotó tevékenység, önmegvalósítás.
- A saját magunk által feltett kérdésekhez pozitívabban viszonyulunk, szívesebben gondolkozunk rajtuk.

Egy kérdés sokféle okból lehet jó: lehet önmagában is szép vagy izgalmas, lehet logikus (de nem feltétlenül nyilvánvaló) folytatása az előzőeknek, és az is lehet, hogy csak a meglepő válasz miatt válik – utólag – érdekessé.

Visszatérve az előző helyzetre, könnyen előfordulhat, hogy valaki – akár teljesen komolytalanul – megkérdezi, hogy a maradék 63 mező lefedhető-e 1×2-es dominókkal. Ez a kérdés logikus folytatása az előzményeknek, jónak viszont annyira nem nevezhető (legfeljebb viccesnek), mivel triviális válasz van rá. (Nézőpont kérdése: előfordulhat, hogy valaki nem látja kapásból, hogy páratlan sok mezőt kellene lefedni kettesével, és ez lehetetlen. Ha ez nem pillanatnyi rövidzárlat, akkor viszont az illető számára túl nehéz problémákkal foglalkozunk: a színezési tulajdonság állandóságát a tapasztalatok alapján nehezebb átlátni, mint a paritás megmaradását.) Ebben az esetben a kérdést feltevő jó úton haladt, csak éppen a válasz tette érdektelenné a kérdést. Ennek kapcsán viszont tanulságként megfogalmazhatjuk, hogy miután megalkottunk egy kérdést, érdemes ellenőrizni, hogy nincs-e rá nyilvánvaló válasz.

A fenti kis kitérő, ha sor kerül rá, némileg tereli is a diákok gondolkodását a 4.2.3. feladatban szereplő kérdés megfogalmazása felé: láttuk, hogy olyan alakzattal kár próbálkozni, amely mezőinek száma nem osztója a 63-nak, logikus választás tehát az 1×3-as triominó. Valamivel kevésbé logikus (a 4.2.2. feladattal való kisebb hasonlóság, illetve a kevésbé kézenfekvő alakzat miatt) gondolat az L-triominó, azonban ez is érdekes feladatokra vezet (ld. a 2.1.1. tételt, illetve a ... feladatot).

Rátérve a 4.2.3. feladat megoldására, a diákok egy része valószínűleg parkettázással fog próbálkozni, bár az előzmények miatt gyaníthatják a lehetetlenséget. Miután több-kevesebb időt eltöltöttek ezzel, kialakul a sejtésük és elkezdenek a bizonyítással kísérletezni (egy idő után el is árulhatjuk, hogy a parkettázás lehetetlen). A sakktábla-színezés azonban most nem segít: magunknak kell egy olyan színezést konstruálni, ami reményeink szerint megmutatja a lehetetlenséget. Az áttörést jelentő ötlet az, hogy az 1×3-as dominók miatt *három* színt érdemes használni, méghozzá úgy, hogy minden dominó minden színből pontosan 1 mezőt fedjen le. Erre rájönni egy hetediknyolcadik osztályos diáknak egyáltalán nem könnyű: sokan próbálkoznak különböző fekete-fehér színezésekkel, melyek persze nem adnak lehetetlenséget. A nehézség oka az, hogy egyrészt ki kell lépni a fekete-fehér színezések világából, másrészt a jó 3-színezésről a sakktáblával ellentétben nem lehet emlékük: vélhetően soha nem láttak még semmit ilyen módon színezve. Itt tehát előállt az a helyzet, amit a 70. oldalon csak elméleti lehetőségként vázoltunk: a feladat megoldásához valami új, korábban nem ismert segédeszközt kell megalkotni. Ez nyilvánvalóan nehezebb, mint a birtokunkban lévő eszközöket

felhasználni.

Érdemes áttekinteni, hogyan adhatunk (ha szükséges) apró segítségeket a feladat megoldásához:

1. Elárulhatjuk, hogy a parkettázás lehetetlenségét kell belátni.
2. Elárulhatjuk, hogy ezúttal is színezés segítségével érdemes bizonyítani
3. Elárulhatjuk, hogy a sakktábla-színezés nem segít, új színezést kell készíteni
4. Elárulhatjuk, hogy 3 színt érdemes használni
5. Elkezdhetjük kiszínezni a tábla első néhány mezőjét, bíztatva a tanulót, hogy próbálja folytatni
6. Megmutatjuk a teljes színezést.

Nem szabad elfelejteni, hogy mindig csak kellő idő után és a szükséges legkisebb mértékben célszerű segíteni.

Érdekes módon a helyes színezés ismeretében, a megoldás kapujában is van egy hibalehetőség: csak bizonyos sarokmezőket levágva lesz egyenlőtlen a színeloszlás, másokra éppen 21 mező marad mindhárom színből (lásd a 4.2. ábrát).

A megoldás megbeszélése során egy nagyon tanulságos kitérő annak tisztázása, hogy mit is jelent az, hogy a módszerünk nem mutat ki lehetetlenséget. Következik-e ebből, hogy mégis lehetséges a parkettázás? Ebben a helyzetben viszonylag nyilvánvaló, hogy nem, hiszen a levágott sarkú sakktáblák egymásba forgathatók és a forgatás átviszi a parkettázást is. Tehát ha az

1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1

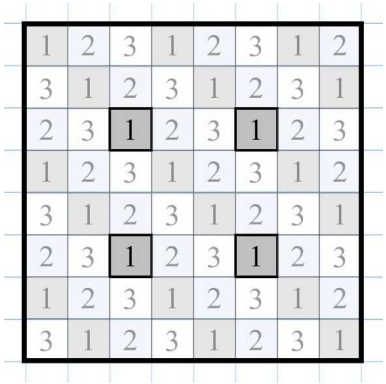
4.2. ábra. A 8×8-as tábla színezése 3 színnel. Ha a bal felső sarokmezőt vágjuk le, minden színből 21 mező marad. Ha viszont a jobb felsőt, akkor 22-20-21 lesz az eloszlás.

egyik sarokmező esetén nem lehet parkettázni, akkor semelyiknél sem. Itt tehát látható, hogy abból, hogy egy adott módszerrel nem sikerült bizonyítani, nem következik, hogy az állítás hamis lenne.

Adódik viszont egy természetes kérdés:

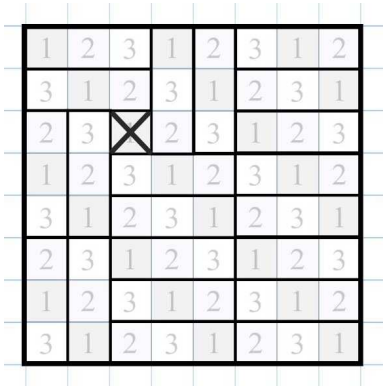
4.2.4. Feladat. *Melyek azok a mezők a 8×8-as sakktáblán, amelyeket ha elhagyunk, a maradék 63 mező parkettázható 21 darab 1×3-as dominóval?*

Láttuk, hogy a sarokmezők nem ilyenek. Ha a sakktáblán 22 db 1-es, 21 db 2-es és 21 db 3-as színű mező van, akkor az összes 2-es és 3-as színű mező kizárható. Sőt, ezek elforgatottjai, tükörképei is kizárhatók. Ez a gondolatmenet viszonylag könnyen adja magát a fenti előzmények után. Marad viszont 4 mező a sakktáblán, amelyekre sehogy se akar kijönni a lehetetlenség (4.3. ábra). Itt megint érdemes feltenni a kérdést: mondhatjuk-e pusztán ez alapján, hogy ezeket elhagyva lehetséges a parkettázás? A tanulóknak látni kell, hogy hasonlóan az előző esethez, itt sem mondhatjuk. Más kérdés, hogy



4.3. ábra. Négy mező, amelyeket minden tükrözés, forgatás 1-es színű mezőbe visz. Következik-e ebből, hogy lehetséges a maradékot parkettázni?

ebben az esetben tényleg lehetséges a parkettázás, ez némi próbálkozással kideríthető. Így levonható a következtetés: abból, hogy egy módszerrel nem tudunk belátni egy állítást, annak sem igaz, sem hamis volta nem következik (láttunk példát mindkét esetre).



4.4. ábra. Parkettázás a négy mező egyikét elhagyva. Forgatással a másik három mezőre is kapunk egy-egy parkettázást.

A feladatsor utolsó feladata már csak a korábban látott módszerek elmélyítését szolgálja:

4.2.5. Feladat. *Parkettázható-e egy* 10×10*-es sakktábla* 1×4*-es téglalapokkal?*

Az előzmények ismeretében a megfelelő színezés megtalálása már kevésbé nehéz. Ugyan itt is újfajta, négy színű színezést célszerű alkalmazni, de ez a korábbiakkal analóg. Ha a megoldás megbeszélése után lehetőséget adunk a diákoknak arra, hogy kapcsolódó kérdéseket fogalmazzanak meg, akkor jó eséllyel néhány konkrét számokkal meghatározott probléma után felvetődik a következő kérdés:

4.2.6. Kérdés. *Igaz-e, hogy egy téglalap alakú sakktábla pontosan akkor parkettázható adott hosszúságú dominókkal, ha a sakktábla valamelyik oldalhossza osztható a dominók hosszúságával?*

A fenti kérdés ügyes általánosítása 4.2.5-nek, és éppen az általánossága miatt nehezebb. A megoldás egyébiránt kiolvasható az 56. oldalon látható ábrából és ott közölt gondolatmenetből.

4.3. Színezés és lehetetlenség

Az előző szakaszban ismertetett feladatsor megismerteti a tanulókkal a színezést, mint a lehetetlenségi bizonyítások egy hasznos módszerét. Ez igen széles hatókörű eszköz: jelen dolgozatban használtuk például a 2.2.1., 2.2.4., 2.3.7., 3.3.5. és 3.3.6. tételek ill. állítások bizonyításához. Ezekben a bizonyításokban mindig csak két színre volt szükségünk: például az 55. oldalon definiált S_n színezés éppen az előző feladatokban használt színezésekből kapható úgy,

hogy csak 2 színt tartunk meg. Tulajdonképpen a 4.2.3. feladat megoldásához elég lett volna csak az 1-es színű mezőkre hivatkozni, de az előzmények alapján nem ez a természetes. Szemléletesebb, könnyebben felfedezhető és megjegyezhető ($1 \times n$-es dominó – n szín) a gondolatmenet úgy, hogy minden színt felhasználunk és minden mezőt kiszínezünk.

Az eddigi példák mindig valamilyen parkettázás lehetetlenségét bizonyítottuk. Nézzünk most néhány olyan feladatot, ahol szintén a színezés segít, de másképpen:

4.3.1. Feladat. *Egy $3 \times 3 \times 3$-as kocka középső kis kockájában él egy parányi bogár. Egy napon elhatározza, hogy végigrágja magát mind a 27 kiskockán úgy, hogy mindegyiken csak egyszer halad át. Meg tudja-e valósítani a tervét, ha egy kiskockából csak azzal lappal szomszédos kockába rághat magának alagutat?*

Néhány próbálkozás után a tanulók valószínűleg megsejtik, hogy nem lehet a feltételeknek megfelelő útvonalat tervezni. A kísérletezés során számtalan olyan utat találhatnak, amely 26 kockán végigmegy, de egy mindig kimarad. Szemfülesebbek észrevehetik, hogy az egyedül kimaradó kocka mindig valamelyik él közepén helyezkedik el. Ha ezeket egy rajzon bejelölik, a sakktábla szokásos színezésére emlékeztető térbeli ábrát kapnak, ami már sejteti a megoldás kulcslépését.

Célszerű ezt a feladatot a 4.2.2. feladat megoldásának ismeretében feladni, mert anélkül kifejezetten nehéz rájönni, hogy a sakktábla-színezés térbeli megfelelőjét (azaz azt a fekete-fehér színezést, ahol a lappal szomszédos kockák mindig ellenkező színűek) érdemes tekinteni. Sőt, ez azzal együtt sem

nyilvánvaló (egy síkbeli helyzetet kell átvinni a térbe), de az előző bekezdésben említett észrevétel segíthet.

A színezés megtalálása után a befejezés már nem nehéz, de több gondolati lépésből áll: a bogár felváltva fekete és fehér kockákba rágja át magát, ha a középső kocka mondjuk fehér, akkor 26 lépés után (azaz amikor már 27 kockában járt) 14 fehér és 13 fekete kockát érintett. De a nagy kocka 13 fehér és 14 fekete kis kockát tartalmaz, tehát nem lehet, hogy mindegyikben pontosan egyszer járt.

4.3.2. Feladat. *Egy* 5×5*-ös négyzetrács minden mezőjén áll egy katica. Sípszóra mindegyik átmászik egy oldallal szomszédos mezőre. Lehetséges-e, hogy ezután is minden mezőn pontosan egy katica tartózkodik?*

Néhány színezéses feladat, különösen a 4.3.1. után ez a feladat már nem lehet nehéz: a sakktábla-színezést tekintve a fekete mezőkön álló katicák fehérre, a fehér mezőkön állók feketére költöznek. Mivel 13 van az egyik és 12 a másik színből, nem lehetséges, hogy ugyanannyi katica legyen fekete színű mezőn, így nem lehet minden mezőn pontosan egy katica.

Tanulók is felvethetik, hogy mi van akkor, ha a katicák mozgását átlós irányúra változtatjuk:

4.3.3. Feladat. *Egy* 5×5*-ös négyzetrács minden mezőjén áll egy katica. Sípszóra mindegyik átmászik egy átlósan szomszédos mezőre. Lehetséges-e, hogy ezután is minden szomszédos mezőn pontosan egy katica tartózkodik?*

Így azonban még színezés nélkül is könnyen végiggondolható a lehetetlenség (a legfelső sor 1., 3. és 5. mezőjére csak az alatta lévő sor 2. és 4.

mezőjéről mászhat katica, így valamelyik biztosan üresen marad). Azonban a kérdésnek egy mélyebb változata is megfogalmazható (5×5 helyett rögtön általánosan) :

4.3.4. Feladat. *Egy* $(2n+1) \times (2n+1)$*-es négyzetrács minden mezőjén áll egy katica. Sípszóra mindegyik átmászik egy átlósan szomszédos mezőre. Legkevesebb hány mező marad ekkor üresen?*

Az oldalszomszédos esetben azért segített a sakktábla-színezés, mert mindig feketéről fehérre és fehérről feketére másztak a katicák. Tehát itt egy olyan színezés jönne jól, ami ugyanezt tudja az átlós mozgásra (ez a mondat alkalmas segítség lehet a feladattal nem boldoguló tanulóknak). Ilyen például az, amikor minden második sor fekete, a többi fehér. Innen látható, hogy legalább $(2n+1)$ mező mindig üresen marad, hátra van még annak megmutatása, hogy ez a minimum el is érhető. Ezt az egyébként lényeges konstrukciós lépést itt most nem részletezzük.

4.4. Néhány további parkettázási feladat

Az alábbiakban néhány olyan feladatot ismertetünk, melyek szorosan kötődnek a dolgozat előző fejezeteiben szereplő tételekhez, ugyanakkor alkalmasak középiskolai órán, szakkörön vagy tehetséggondozó táborban történő tárgyalásra.

4.4.1. Feladat. *Parkettázható-e egy* 10×10*-es négyzet* T*-tetrominókkal?*

Bár a T_4-hez nincs a 2.2.2. definíció értelmében vett invariáns színezés, a sakktábla-színezéssel kapcsolatban mégis van egy jól használható tulajdon-

sága: nevezetesen minden T-tetrominó páratlan számú fekete mezőt fed le. Ez végtelen tartományok parkettázhatóságáról nem sokat mond, használtuk azonban a 2.2.6. tételben, és itt is kapóra jön: egy 10×10-es négyzet fedéséhez 25 tetrominó kellene. Ezek mindegyike páratlan sok fekete mezőt tartalmaz, 25 páratlan szám összege páratlan, így összesen is páratlan sok fekete mezőt kellene lefedniük. A 10×10-es négyzetben azonban 50 fekete és 50 fehér mező van, így ilyen parkettázás nem létezhet.

A fenti megoldás két gyakran előforduló, lényeges gondolatot is összekapcsol: a színezést és a páros-páratlan vizsgálatot. Mindkét motívum jól használható olyan helyzetekben, ahol valamilyen invariáns tulajdonságra van szükségünk.

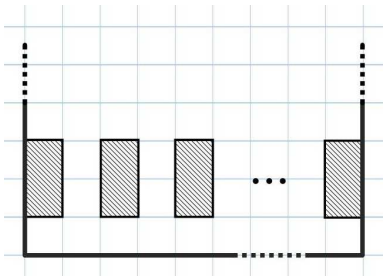
Az eddigi feladatokban a parkettázás mindig lehetetlen volt. Lássunk egy olyat, ahol éppen azt kell megmutatni, hogy az akadályok ellenére lehetséges:

4.4.2. Feladat. *Egy* 100×100*-as sakktáblán valaki elhelyezett néhány* 1×2*-es dominót úgy, hogy azok nem érintkeznek (még csúccsal sem). Bizonyítsuk be, hogy ezt a rendszert kiegészíthetjük további* 1×2*-es dominókkal a teljes sakktábla parkettázásává!*

Ez nem más, mint a 2.4.3. tétel konkrét számértékekkel. Azzal, hogy konkrét számokat adtunk meg, valójában nehezítettük a feladatot. A bizonyítás ugyanis arra épít, hogy a parkettázandó tartomány mindkét oldalhossza páros, ám a 100×100-ból semmi nem utal arra, hogy éppen ezt kell kihasználni (míg $2a \times 2b$-vel a feladatban látszana, hogy ennek jelentősége van). Itt tehát arra látunk példát, hogy az erősebb állítást (az általános tételt) könnyebb belátni (mert a feltételei jobban meghatározzák, hogy mire építhetjük a gon-

dolatmenetünket). Másfelől a konkretizálás kézzelfoghatóbbá és ezáltal vonzóbbá is teszi a feladatot. Ezeket a szempontokat általában is érdemes szem előtt tartani, amikor arról döntünk, hogy egy feladatot egy adott tanítási szituációban általánosan vagy konkrétan tűzzük-e ki.

Egy 100×100-as tábla túl nagy ahhoz, hogy „kézzel” akár csak néhány esetet kipróbáljunk rajta. Ilyenkor abba az irányba érdemes terelni a tanítványokat, hogy próbálják meg a hasonló, egyszerűbb feladatokat megoldani, azaz vizsgálják meg kisebb táblákra az állítást. Ha a sakktábla mindkét oldala páratlan hosszú, akkor nyilván nem parkettázható a dominóinkkal. Viszonylag könnyű egy általános ellenpéldát gyártani arra az esetre, amikor az egyik oldal páratlan (és a másik legalább 3), lásd a 4.5. ábrát.



4.5. ábra. Ellenpélda a parkettázhatóságra, amikor a vízszintes oldal páratlan. Már az alsó sor dominókkal való parkettázása sem lehetséges.

A fentiek alapján megsejthető, hogy ha a sakktábla mindkét oldala páros, akkor a parkettázás mindig elvégezhető. Az ilyen típusú állításokat gyakran teljes indukcióval érdemes bizonyítani, ez azonban itt tévútnak bizonyul: egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy miért következne az állítás a kisebb téglalapokról a nagyobbakra. Ehelyett a párosságot úgy lehet kihasználni, hogy a sakktáblánkat 2×2-es négyzetekre oszthatjuk fel. Erre az ötletre nehéz

rájönni, mert nincs előzménye, és látszólag ellene szól, hogy a dominók minden további nélkül átnyúlhatnak a négyzetek határain. Kicsit alaposabban vizsgálva a dolgokat azonban észrevehető, hogy minden lerakott dominó kiegészíthető 1 vagy 2 ilyen négyzet parkettázásává, innentől pedig a befejezés adja magát. A feladat megoldásához tehát ötletre és kellő alaposságra is szükség van, ezért tehetséges diákok számára is mindenképpen nehéznek minősül.

Végül tekintsük a 2.1.1. tételt, amely szintén egy parkettázás lehetséges voltát bizonyítja bizonyos feltételek mellett. Készítsünk belőle középiskolásoknak szóló feladatot! Néhány lehetséges változat:

4.4.3. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy* $2^n \times 2^n$*-es négyzetnek bármely mezőjét elhagyjuk, akkor a maradék parkettázható L-triominókkal!*

4.4.4. Feladat. *Igaz-e, hogy ha a* 8×8*-as sakktábla egy tetszőleges mezőjét elhagyjuk, akkor a maradék parkettázható L-triominókkal?*

4.4.5. Feladat. *Adott egy* 1024×1024*-es sakktábla. Keressünk minél több olyan mezőt, amelyet elhagyva a maradék parkettázható L-triominókkal!*

Az első változat a legkevésbé megfelelő, ha felfedeztető tanításban gondolkozunk. Rögtön közli az állítást általánosan, ami egyúttal sugallja is, hogy valamiféle rekurzív vagy teljes indukciós gondolatmenet lesz célravezető. Egyértelműen a 13. oldalon közölt bizonyítás felé terel. Bizonyos helyzetekben mégis ez lehet a megfelelő, például ha épp azt szeretnénk felismertetni, hogy bizonyos állításokról messziről látszik, hogy teljes indukcióval érdemes velük próbálkozni.

A második változat egy viszonylag természetes kérdésfeltevés, diákok is felvethetik például a 4.2.3. és a 4.2.4. feladatokhoz kapcsolódóan. Kellemes, hogy éppen a szokásos sakktábláról van szó, amely még nem túl nagy ahhoz, hogy néhány esetet ki lehessen próbálni. A próbálkozásra szükség is van, hiszen állítás helyett kérdést fogalmaztunk meg, a tanulókra bízva a helyes sejtés megtalálását. Érdemes minél több feladat esetében így tenni, ezáltal a hozzászoktatni a tanulókat ahhoz a helyzethez, amikor nem egyértelmű, hogy melyik irányba kell indulni. Így a kísérletezés szerepe felértékelődik. Másfelől, ha a kérdés nehéznek bizonyul, később még mindig segíthetünk a válasz elárulásával.

A harmadik megfogalmazás még nyitottabban fogalmazza meg a problémát. Ez a változat hasznos lehet olyankor, amikor enyhe versenyszituációt akarunk teremteni a tanulók között (ez lehet például csapatok közötti verseny is). Ki tud több olyan mezőt mondani, amelyet elhagyva a maradék parkettázható L-triominókkal? – az ilyen kérdésfeltevés produktív versenyhangulatot teremt. Előnye ennek a verziónak az is, hogy lehetséges részeredményeket elérni: azaz be lehet látni az összes mező egy részéről, hogy azok rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal anélkül, hogy ezt az összes mezőről látnánk. Így a feladat kimenetele a tanulók szempontjából nem csak kétféle (megoldottuk/nem oldottuk meg) lehet.

Az 1024 alapján sejthető, hogy itt az oldalhossz 2-hatvány voltának lesz szerepe, ezt például a második változatban a 8-as szám egész jól elfedte. Az, hogy ilyen nagyméretű tartományt kell parkettázniuk, mindenképpen valami rekurzív építkezés felé tereli a tanulókat. Észrevehetik például, hogy 4 L-trio-

minóból felépíthető a kétszeresére nagyított L-triominó, amelyekből pedig a 4-szeresére nagyított stb. Ez egyrészt elvezethet a 13. oldalon közölthöz hasonló, de ugyanazt másképpen megfogó bizonyításhoz, másrészt további érdekes kérdéseket indukálhat (Melyek azok az alakzatok/poliominók, amelyekkel önmaguk valamely felnagyított változata kiparkettázható?) Könnyen lehet, hogy olyan megoldásokat is találnak, amelyek teljesen más úton haladnak (ezeket viszont fáradságos lehet ellenőrizni).

Összefoglalva az eddigieket megállapítható, hogy ugyanazt a problémát sokféle módon kitűzhetjük. Az adott tanítási szituációban az itt említésre került szempontokat (mennyire legyen könnyű-nehéz, irányítsuk-e a tanulók gondolkodását egy adott módszer felé, legyen-e verseny jellege stb.) feltétlenül érdemes mérlegelni pedagógiai céljaink megvalósítása érdekében.

Irodalomjegyzék

[1] Solomon W. Golomb: *Checker Boards and Polyominoes*

The American Mathemathical Monthly, vol. 61, pp. 675-682

[2] Solomon W. Golomb: *Polyominoes: puzzles, Patterns, Problems, and Packings*

Princeton University Press, Princeton, NJ, second edition, 1994

[3] George E. Martin: *POLYOMINOES, A Guide to Puzzles and Problems in Tiling*

Mathematical Association of America, 1991

[4] Ross Bryant: *Borel Determinacy and Metamathematics*

University of North Texas, 2001

[5] Donald A. Martin: *Borel Determinacy*

The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 102, No. 2 (Sep., 1975), pp. 363-371

[6] J. S. Bruner: *The act of discovery*

Harvard Educational Review 31 (1): 21-32., 1961

[7] Pósa Lajos: *Matematikai táboraim*

Természet Világa, 132. évfolyam, 3. szám, 2001. március