Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar – matematika és fizika tanár szak
Valószínűségelméleti és Stasztika Tanszék

# Időfüggő véletlen jelenségek modellezése

Szente Judit
2009

Konzulens:
Dr. Márkus László
egyetemi docens
Valószínűségelméleti és Stasztika Tanszék

# Tartalomjegyzék

**Bevezetés** **2**

**1. Didaktikai szempontok** **4**

1.1. A cél megválasztása . . . . . 4
1.2. A kognitív célrendszer . . . . . 6
1.3. A modellezés jelensége . . . . . 9
1.4. Reprezentáció . . . . . 12
1.5. A relativisztikus matematikaoktatás . . . . . 14
1.6. Problémamegoldás . . . . . 16
1.7. A modellalkotás jelensége a matematika didaktika alapelveinek tükrében . . . . . 18
1.8. A realisztikus matematikaoktatás és a didaktikai alapelvek 23
1.9. Értékelés . . . . . 25
1.10. Összefoglalás . . . . . 27

**2. Időváltozójú véletlen jelenségek modellezése** **29**

2.1. Szükséges előismeretek . . . . . 29
2.2. Az idősorok fogalmának bevezetése . . . . . 31
2.3. Idősorok tulajdonságai . . . . . 33
2.3.1. Stacionaritás . . . . . 33
2.3.2. Ergodicitás és markovitás . . . . . 37
2.4. Idősorelemzés . . . . . 40
2.4.1. Autoregresszió . . . . . 40
2.4.2. Az AR(2) és AR(p) folyamatok . . . . . 43
2.4.3. A mozgóátlag-folyamatoktól a GARCH-ig . . . . 45

**3. Tőzsdeindex-modellezés** **52**

**4. Leegyszerűsített kereskedelem** **63**

**5. Összefoglalás** **68**

**Irodalomjegyzék** **82**

# Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretném megköszönni Dr. Márkus Lászlónak az ösztönző támogatást és végtelen türelmet, amellyel mindvégig segítette munkámat e témakör feldolgozása és a szakdolgozat elkészítése során. Konzulensem alapvetően nyitott hozzáállással és segítő szándékkal fogadta megkeresésemet, amelynek eredményeként olyan matematikai fogalmakkal ismerkedhettem meg, amelyekről nemigen hallottam volna az általános egyetemi tanárképzés keretein belül.

Hovatovább köszönettel tartozom Tóbiás Áronnak, aki emberileg minden lehetséges módon támogatott a szakdolgozat elkészítésében: a szakdolgozati téma megválasztásától, egészen a szerkesztések elkészítéséig. Köszönöm továbbá családomnak és barátaimnak, akik igyekeztek megfelelő munkakörnyezetet teremteni számomra.

# Bevezetés

Amikor középiskolás korú fiatalok megnyilatkozásait kísérjük figyelemmel, gyakran azt tapasztalhatjuk, hogy számukra a legmeghatározóbb élmények többségükben az iskola falain belül történnek. Életkori sajátosságaikból adódóan elsősorban érdeklődési területeiket kortárs kapcsolataik határozzák meg, gyakran egy-egy felnőtt ismerős, esetleg szimpatikus tanár is nagy hatással lehet figyelmük terelésében, érdeklődési területeik kiválasztásában. Jellemzően azt tapasztaltam a környezetemben lévő diákokkal beszélgetve, hogy számukra az élet alapvetően két elszeparált, egymással kapcsolatba aligha hozható részből áll: az egyik azon dolgok, események összessége, amelyek az iskola falain belül történnek, a másik oldalon léteznek az „érdekes" jelenségek, azok, amelyeket a valódi életben tapasztalnak, amelyekről a médiában hallhatnak, láthatnak, amelyeket ismerőseik mesélnek nekik. Ez az elkülönülés nem csak térben, hanem időben is értendő; sokszor találkozhatunk azzal a képpel, hogy az érettségi után kezdődik majd el számukra az igazán érdekes élet, akkor találkozhatnak az igazán fontos tennivalókkal, akkor válhatnak az őket körülvevő társadalom aktív részeseivé.

Véleményem szerint sokan szeretnék ezt a jelenséget megérteni amikor is megoldást keresnek arra, hogyan lehetne az iskola nevelési és oktatási funkcióiban a diákokat is érdekeltté tenni. A közös munka egyik alapja, hogy közös célokat találjunk, s ennek megfelelően közösen válasszuk meg a metodikát is. Mivel a diákoktól nem várható el, hogy maguk találják meg a számukra legmegfelelőbb tanítási-tanulási módszereket, nekünk kell tudnunk számos különböző lehetőséget felkínálni, amivel egyben egy választási lehetőséget is biztosítanánk nem csak szá-

mukra, de a magunk számára is.

Dolgozatomban speciálisan a matematikai statisztika témakör egy olyan alkalmazását szeretném bemutatni, amely bár mondanivalójában a jelenlegi középiskolai tananyagon túlra is kitekint, mégis rengeteg olyan lehetőséget rejt magában, amelyek kihasználásával a tantárgyat talán közelebb hozhatjuk a diákok érdeklődési területeihez. Ezzel egyidőben a matematikai modellalkotás jelenségének egy oktatási lehetőségét is be szeretném mutatni. A dolgozat elején megpróbálom körülírni a fentiekben előkészített oktatási célokat, majd ehhez módszereket, alkalmazásokat keresnék. Ezt követően a matematikai didaktika ide tartozó alapvető elméleteit sorban véve, azok tükrében elemezném a modellalkotás tanításának előnyeit és hátrányait. A dolgozat további részében bemutatok egy igen érdekes alkalmazási területet is.

A témaválasztást az indokolja, hogy a hétköznapi életünk során alkalmazott stratégiák meglepően nagy hányada statisztikai alapú, gondolunk itt akár a kvantitatív fizikai kísérletekre, a társadalomtudományi felmérésekre, a közgazdasági, banki s pénzügyi mutatók értelmezésére. Azt gondolom, többek között a statisztika témaköre is ideális annak bemutatására, miként csökkenthető az a távolság, ami az „élet” s a „tananyag” között húzódik a fiatalok többségének fejében.

# 1. fejezet

# Didaktikai szempontok

## 1.1. A cél megválasztása

Mikor nevelési, tanulási célokat tűzünk ki a diákok elé, mindenképpen figyelembe kell vennünk a célcsoport igényeit, a társadalom által támasztott követelményeket, az oktatási hagyományokat, az ide vonatkozó törvényeket, rendeleteket, az oktatási keret (tanóra, szakkör, magántanítás) nyújtotta lehetőségeket és követelményrendszert. Nem áll módomban részletes elemzés alá bocsátani választásaimat, csupán megjelölném a továbbiakban, milyen matematikai didaktikai koncepciók mentén haladok, mikor a statisztika egyes alkalmazási területeit próbálom bemutatni. Természetesen nem adhatok egy olyan általánosan használható programot – egy ilyen program körülírása nem is célom –, amely minden esetben alkalmazható, hiszen nem is gondolhatjuk, hogy létezik oktatási „recept". Csupán azt a szemléletet próbálom bemutatni, amely alapján történő oktatás során a tanulás s az alkalmazások elsajátítása a tananyag feldolgozásának aktív részesévé teszi a diákokat. Megpróbálom kézzelfoghatóvá tenni a mai matematikai alkalmazások módszereit, ezzel bemutatva, mivel foglalkozhatnak többek között az alkalmazott matematikusok.

A komolyabb matematikai hátteret igénylő problémamegoldást természetesen szakköri keretek között képzelem el, hiszen a programozást és elemző munkát igénylő feladatok kitartást, emiatt pedig erős moti-

váltságot, magas érdeklődési szintet igényelnek. Azt gondolom, a diákok motiváltsága megnő, amennyiben mindennapos problémák megoldását tűzzük ki számukra célként – szemben a mesterséges, elidegenítő gyakorlópéldákkal. Nem tartom azt sem kizártnak, hogy az érdeklődés megszerzése érdekében akár velük közösen válasszuk meg ezen célokat egy projektmunka keretében.

Először vizsgáljuk meg a tanulási célok megválasztásának kérdését általánosabban![1] A H. von Helting által megnevezett általános tanulási célokat vizsgálva kigyűjtöttem azon, a matematikatanuláshoz közvetlenül kötődő célokat, amelyek konkrétan az általunk bemutatandó statisztikai alkalmazási terület oktatásnak lehetséges célkitűzései lehetnének.

1. A világ változásának, változtathatóságának felismerése és megtapasztalása, a változtathatóság tudatosodása. A saját környezet alakításának képessége.

2. Kooperáció, kommunikációs technikák fejlesztése, mások véleményének figyelembe vétele, tolerancia, önmeghatározás, önismeret fejlesztése, kritikai hozzáállás.

3. Saját érdeklődés azonosítása és észrevétele. A szakma társadalmi szükségességének felismerése, ösztönzés szakmai gyakorlatra. A tudományok alapelveinek és eljárásainak ismerete, megértése, a technika tehermentesítő funkciójának megtapasztalása. Természetfeletti és racionális-oksági magyarázatok kölcsönös kiegészítése.

4. Könyvtárak, lexikonok, szótárak, írásos és elektronikus adatbázisok, tömegkommunikáció használata. Információgyűjtés, tájékozódás, gépelés, programozás alapszintű használata, ismerete. Társadalmi tehermegosztás megtapasztalása, termelés-fogyasztás kapcsolatrendszer megismerése. Idegen nyelv (nyelvek), idegen kultúrák felfedezése.

[1] Ebben a szakaszban és a következőkben a külön nem jelölt források feldolgozása során Ambrus (1995) művére hagyatkozom.

## 1.2. A kognitív célrendszer

A továbbiakban tekinthetjük a matematikatanítás kognitív célrendszerét, melyet Varga Tamás és Zech dolgozott fel. Ezek közül kiemelném az analízis és szintézis tartalmakat mint a modellalkotásban megjelenő gondolkodási struktúrák jellemző elemeit.

A tanítási folyamat során először a megértést és megismerést követően formális eljárásokat sajátíttatunk el. A diákok számos gyakorlófeladat kidolgozásával rutinossá válnak azok megoldásában, és ekkor a magasabb megértési szinten lévő analitikus, elemző gondolkodást igénylő feladatokat is örömmel oldják meg (például hibakeresést). Érdemes a gyakorlófeladatok megválasztásának problémájánál kicsit hosszabban elidőzni, végiggondolni, miként tűzzük ki ezeket, hogy motiválóak és érdekesek legyenek a diákok számára is, akik többnyire nem kapnak betekintést a didaktika ilyesféle kauzalitási szintjeibe.

Az egyik út véleményem szerint a közös munka felépítésének megbeszélése, egyeztetése a diákokkal. A nagy osztálylétszám és a bevett gyakorlatok miatt erre aligha kerül sor. Az „Élő matematika" projekt szerint a valódi megoldás az ilyesfajta problémákra, ha mindvégig, a bevezető órától kezdődően életszerű feladatokat tűzünk ki a tananyag tanítása során, melyek természetükben megmutatják, miért szükséges az adott matematikai apparátus elsajátítása. Természetesen a feladatok konkrét megválasztása rengeteg kérdést vet fel, különös tekintettel annak végiggondolását, hogy az adott életkorban mennyire komplex problémakört elemezhetünk, milyen, nem kizárólag matematikai alapismeretek várhatóek el az adott diákoktól. Az elemző gondolkodást igénylő, magasabb tudásszintet igénylő feladatok kitűzésekor különféle alkalmazási területeket vonhatunk össze, feladatainkban elrejtve a begyakorolt rutinpéldákat (akár más matematikai területek feladatainak megoldásában is), legyenek azok valóságközeli, szöveges vagy más jellegű feladatok. Amennyiben lehetséges, érdemes olyan, más tantárgyakkal összekapcsolódó, valóságosnak tűnő problémákat keresni, amelyek megoldása során

egyik feladat maga az elsajátított módszer alkalmazhatóságának felismerése. Ekkor már eljárásokat is alkotnak diákjaink, terveket kombinálnak ki, alternatív megoldásokat találnak és hasonlítanak össze, elemzik megoldásaik sikerességét, célszerűségét, egyszerűségét.

Az ilyen jellegű munkafolyamat megtanulása lehetne a végső célunk a statisztika oktatásának területén is. Ehhez szerencsénkre rengeteg alkalmazási terület áll rendelkezésünkre, akár a tőzsdei vagy csillagászati adatok feldolgozásáról legyen szó. Zech az említett kognitív célokat alapvetően két megközelítésben tárgyalja: a tanulói aktivitás és az oktatási folyamat szervezése szempontjából.

1. Lehetőséget kell biztosítani a tanulók alkotói tevékenységének.
2. Lehetőséget kell adni a tanulóknak a racionális indoklás gyakorlására.
3. A tapasztalatszerzést segíteni és biztosítani kell a matematika alkalmazási területeit illetően is.
4. Teret kell adni a formális készségek elsajátításának.

A fenti kritériumokhoz kiválóan illeszkedik témakörünk, a valós időben zajló folyamatok modellezése, hiszen olyan komplex problémák feldolgozását tűzzük ki feladatul, amelyekhez mind kreatívan, mind formális, begyakoroltatott módszerekkel lehet közeledni. Ennek jelentősége óriási, hiszen nem kizárólag egyetlen gondolkodási forma alkalmazható, így a diákok nagyobb részének biztosíthat sikerélményt a feladatmegoldás. A „valóságközeli” élmény is biztosított, hiszen feladataink a minket körülvevő, megtapasztalható világból érkeznek, mi csupán megpróbáljuk megvizsgálni, értelmezni a „véletlen természetét”.

Ráadásként elmondhatjuk, hogy a tudományos gondolkodás mai paradigmáját követnénk, miszerint a világunkat bizonyos szempontból nem determinisztikus, hanem valószínűségi elgondolások alapján ismerhetjük meg. A mai kutatások meghatározó hányada statisztikai alapokon dolgozik, gondoljunk itt a kvantitiatív mennyiségekkel dolgozó tudományokra,

legyen az természettudomány, társadalomtudomány, orvostudomány. A diákok így nem csak azzal a jelenséggel találkozhatnak, hogy a világ megértésben a statisztika hasznukra lehet, hanem hogy a mai tudományos gondolkodás paradigmáinak megfelelően tudnak a világról véleményt alkotni. Nem késleltetjük a tudományos élettel való találkozásukat, hanem mintegy segítőként haladunk velük azon felismerés irányába, hogy a mai tudós társadalom álláspontja szerint az életünket nem kizárólag determinisztikus törvények és események hatrozzák meg. Ez a tudás pedig egy komplexebb, szemléletében gazdagabb filozófiával ajándékoz meg mindannyiunkat.

Érdekesnek találom meghallgatni Arthur T. Benjamin amerikai matematikus véleményét, aki szerint az amerikai matematikaoktatás első számú problémája, hogy statisztika helyett az analízis elemei kapják a legnagyobb hangsúlyt a középiskolai tananyagban. Erről szóló rövid beszédét érdemes megtekinteni a http://www.ted.com internetes oldalon, elolvasva a nézők kommentárjait: többségében mindenki ugyanazt tapasztalta, hogy a középiskolában elsajátított készségek nem fedezik azt a szükségletet, amivel az egyetemet, főiskolát lendületesen és zökkenőmentesen el lehetne kezdeni. Tapasztalatom szerint ez a jelenség nem kizárólag az Egyesült Államok oktatására lehet jellemző.

A világban való biztos tájékozódást elősegíteni emellett többek között a megfelelő és minőségi információk felkutatásának és megszerzésének begyakoroltatásával tehetjük. A biztos tájékozódás alapvető formái ma már az elektronikus adatbázisok, internetes oldalak segítségével valósulnak meg. Az interneten található információk többségükben ellenőrizetlenül kerülnek a világhálóra, emiatt szükséges, hogy kritikusan szemléljük a rajta található adatokat, híreket, beszámolókat.

Amikor például tőzsdei információkat keresünk vagy a napfoltok viselkedését vizsgáljuk, elkerülhetetlenül belefutunk tudományosan nem alátámasztott, komolytalan, félrevezető információkba. Elemző, adatgyűjtést szorgalmazó feladatok megoldása során begyakoroltathatjuk a

(matematikailag) releváns adatok és információk összegyűjtésének módjait, miközben szövegértési kompetenciákat erősíthetünk. Ezt követően a megfelelő adatok birtokában tervet kell készíteni, hogy mit is akarunk kezdeni ezekkel az információkkal. Érdekes és értelmes matematikai kérdések felvetésével, megválaszolásával, megválaszolhatóságának kérdésességével találkozhatnak ekkor a diákok. A kérdések kiválasztása után következik a megoldás megtervezése, a megoldáshoz szükséges (matematikai és tárgyi) eszközök felismerése és használatuknak begyakorlása. Konkrét esetben a feladatmegoldás közben nyelvi és számítástechnikai készségeket, képességeket is maximálisan kihasználjuk, fejlesztjük. A megoldás megvalósítása után a kapott eredményeket diszkutálni, értelmezni kell, esetleg újra át- és megfogalmazni, interpretálni a többieknek, több különböző eredmény születése esetén ezeket összehasonlítani és megvitatni.

Az ilyen munkák oktatásszervezési formája sokféle lehet: projektmunka, páros munka vagy akár egyéni munka; házidolgozat készítése vagy szakköri tevékenység.

## 1.3. A modellezés jelensége

Amiről még nem esett szó, pedig igazán fontos szempontja a témaválasztásnak, az a modellezésben rejlő lehetőségek sokrétűsége[2]. Kiindulási pontunk, hogy a minket körülvevő világról kérdéseket fogalmazunk meg, melyekre a statisztikus szemszögéből próbálunk meg válaszolni. Ezt követi egy tudatos, tervszerű megfigyelés, informciógyűjtés. Majd kérdéseinket ismét átgondoljuk, átfogalmazzuk, hogy valóban megválaszolhatóak legyenek (matematikai) eszközeinkkel. A megoldásig vezető utat – esetleg utakat – közösen megtalálva kezdődik az adatokkal végzett munka. Amikor a folyamat végén eredményekre jutunk, azokat felülvizsgálva állapítjuk meg, mennyiben válaszolnak eredményeink a feltett kérdéseinkre. Végezetül pedig interpretálható formába öntjük korábbi

[2]A témával kapcsolatosan a LEMA projekt szakszerű és sokszínű felvilágosítást nyújt.

tevékenységünket, hogy megvitatható legyen a többiek munkájának tükrében.

Mind az érintett kompetencia területek, mind a matematikai módszerek tekintetében a modellezés maximálisan komplex és sokszínű feladatokkal, feladatmegoldásokkal szolgálhat. Winter ugyan egészben véve a tananyagválasztással kapcsolatosan fogalmaz meg kérdéseket, mégis érdemes ezen kérdések alapján is meggondolni a modellalkotás lehetőségeit a matematikaoktatásban.

1. Milyen mértékben alkalmas az anyag a tanulók aktuális képességének megfelelő matematikai gondolkodásmódok reprezentálására?

2. Milyen mértékben felel meg az anyag lehetőleg minél több általános tanulási célnak?

3. Milyen jelentősége van az anyagnak a szakmai előkészítés szempontjából?

4. Milyen hatással van az össztartalomra az adott téma?

5. Hogyan érinti más tantárgyak tartalmát az illető téma?

Az első kérdést illetően azzal a válasszal kell beérnünk, hogy a témakör és a problémaválasztás megválasztja a megoldáshoz, feldolgozáshoz szükséges képességeket és eszközöket. A tanár egyéni felelőssége, hogy jól válasszon.

A második kérdésre a választ az Európai Tanács által jóváhagyott[3] fejlesztendő alapkompetencia-területek, s az általunk alkalmazottnak vélt kompetenciák összehasonlításával adjuk meg. A közös területek: anyanyelvi kommunikáció (gondoljunk az eredmények interpretálására, a kérdésfeltevés igényességére, a közös munkában szükséges igényes és pontos kommunikációra), idegen nyelvi kommunikáció (adatgyűjtés, tájékozódás a világról), matematikai, természettudományos és technológiai kompetenciák, digitális kompetencia (a számítógépet egy új szerepben

[3]Az egész életen át tartó tanuláshoz szükséges kulcskompetenciák

ismerhetik meg a fiatalok: a szövegszerkesztésen, „szörfözésen”, beszélgetésen, játékokon túl komoly számolási feladatok ellátásra is alkalmas eszközzé válik a „gép”), a tanulás tanulása (új tanulási, problémamegoldási módszerek elsajátítása), vállalkozói kompetenciák.

A harmadik kérdésre már a korábbiakban válaszoltunk, gondoljunk a mai tudós társadalom statisztikus-elemző vizsgálatainak tanórákon való megjelenésére. A mai tudományos élet nézőpontjából kiindulva teszünk fel és válaszolunk meg kérdéseket, hasonló módszereket és eljárásokat alkalmazva, mint ahogyan azt az egyetemeken dolgozó kutatók, vagy magán- és állami cégeknél elhelyezkedett matematikusok teszik. A negyedik kérdésre nem tudunk általánosan válaszolni, hiszen nincs számunkra kijelölt konkrét tartalom.

A tőzsdeindex elemzés, amely a dolgozat további részében bemutatásra kerül, tulajdonképpen elmélyíti és összefoglalja az addig elsajátított valószínűségi és statisztikai fogalmakat, részben pedig közgazdasági ismeretekkel is szolgál. A feladatmegoldás játékossága, összetettsége, esetleg projektbe helyezése rugalmasságot kíván meg mind a tanár, mind az iskola részéről, hiszen többnyire nem a hagyományos frontális oktatási koncepció érvényesül, amennyiben egy, akár órákon keresztül is húzódó, kreatív problémamegoldást tűzünk ki feladatul csoportunk számára. Emellett viszont, ha körbetekintünk, azt tapasztalhatjuk, hogy a mai divatos didaktikai nézőpontok a frontális munka mellett a szorgalmazzák a csoportos, kreatív, aktív tanulói tevékenységet magukba foglaló interaktív tevékenységek elterjedését.

A NAT-ban az utóbbi időben kiemelt hangsúlyt kapott a statisztikai témakör, az érettségi feladatsorok is rendszeresen szerepeltetnek egyszerű statisztikai példákat. A témakör előnye, hogy könnyen összevonható más tantárgyak tartalmával, s ezzel talán az ötödik kérdésre is választ találtunk. Tekintsünk akár egy történelmi forrást vagy egy biokémiai kísérlet adatainak feldolgozát, gazdagabb ismeretet nyújthat, amennyiben magunk is utánajárhatunk a tankönyvek állításainak, s magunk elemez-

zük ki a populációra, gazdaságra, hadseregre, sejtekre, reakciókra stb. vonatkozó adatokat. A továbbiakban vizsgáljuk meg a modellezésben rejlő lehetőségeket Bruner tanuláselmélete szempontjából!

## 1.4. Reprezentáció

Bruner szerint a tanításnak minden tantárgy esetén az adott tudomány fundamentális elveire kell épülnie. Azt állítom, ennek eleget is teszünk, hiszen statisztikus szemléletről van szó, s a modellekkel operáló elemző módszerek az alkalmazott tudományok alapvető eszközei. Másodszorra pedig kijelenti, hogy minden tantárgy alapvető elvei minden fiatal számára (a már meglévő gondolkodási eszköztár alapján és az elérhető reprezenátciós módok segítségével) egyszerűen, megfelelő formában megtaníthatók. A fenti állításoknak szempontunkból kiemelkedő szerepük van, hiszen a nyugati kultúrában egyre inkább felmerül kérdésként (esetleg hiányként) a szükséges a statisztikai szemléletmód elsajátítása, ami meghatározó feltétele lehet annak, hogy felnőtt életünk során ne jelentsen kihívást a világ tudományos, pénzügyi és politikai eseményeinek értelmezése, figyelemmel követése. A spiralitás elvét (az először intuitív tudást folyamatosan újra- és újratárgyaljuk a megfelelő életkori sajátságoknak megfelelően, más-más következtetési láncolatokat kialakítva) kiegészítendő fogalmazza meg a következő követelményeket a tanítással kapcsolatosan:

– minden fogalmat korán kell bevezetni,
– a tudomány mai állása legyen a tanítás alapja,
– a tanárok mindenki számára érthető formában közöljék a tananyagot.

A második pontot már többször is részletesen megvizsgáltuk, amivel tehát még foglalkoznunk kell, az az érthetővé tétel kínos kérdése. Itt hivatkoznék a spiralitás elvére, olyan tekintetben, hogy nem feltétlenül probléma, ha a fiatalok kezdetben csak intuitív képet alkotnak az általuk

használt fogalmakról, s ekképp alkalmazzák azokat[4].

Nem az a célunk, hogy középiskolásokat egyetemi szintű tananyaggal rettentsünk el a matematikától. Éppen ellenkezőleg, a leegyszerűsített matematikai alkalmazásokkal látszólag bonyolult problémákat oldatunk meg velük, komplex gondolkodásra ösztönözzük őket, elemző és kreatív tevékenységekre, melyek mindenképpen sikerélményt okoznak, növelik önbizalmukat, így vállalkozó kedvet és magabiztosságot adnak. Mivel a feladatok a valós életből származnak, a világban való bátrabb tájékozódás is várható eredménye megoldásuknak.

Ugyancsak Bruner vizsgálta a különböző reprezentációs módok alkalmazásait és a közöttük lévő kapcsolatokat. A róla elnevezett reprezentációs elmélet egyik következménye, hogy az anyanyelvünk mindhárom (materiális, ikonikus és szimbolikus) reprezentációs sík ellenőrző és korrigáló eszköze. Használata az évfolyam növekedésével inkább a szaknyelv irányába térül el, de gyakoriak maradnak a spontán megfogalmazások felsőbb osztályokban is. Ezt a nyelvi síkot kiegészíti a számítógépek által kínált formalizált, programozói nyelvek. Mikor egy időváltozójú folyamatot kívánunk modellezni, majd a modellünk alapján állításokat megfogalmazni a viselkedéséről, kiemelkedő szerepe van a helyes nyelvhasználatnak, mind szintaktikai, mind szemantikai értelemben. Programozási feladatok megoldásával és az interneten elérhető idegen nyelvű oldalak böngészésével pedig még inkább előtérbe helyezzük a nyelvismeret és nyelvhasználat fejlesztését.

A reprezentációs síkok közül azonban nem csupán a nyelvi síkokat használhatjuk. A Lompscher által meghatározott értelmi műveletek síkjai (tárgyi tevékenység, közvetlen szemlélet, közvetett szemlélet, nyelvi-fogalmi megismerés) között mozogva esetünkben nem egyértelműen a nyelvi sík felé haladunk, hiszen éppen az a célunk, hogy ne csak beszéljünk róla, hanem hajtsuk is végre a műveleteket, ezáltal váljék kézzelfoghatóvá a matematikai statisztika működése. Tehát, ha úgy tetszik,

[4] A világhírű, magyar származású Neumann Jánosnak tulajdonítják a következő idézetet: „A matematikában az ember nem megérti a dolgokat, hanem megszokja.”

visszatérünk az alapokhoz, a végrehajtható műveletekhez, melyek elvezetnek minket majd a nyelvi-fogalmi szakaszban történő operáláshoz. Mivel a felsőbb évfolyamok diákjai értelmi szintjének megfelelően már nem szükségesek a tárgyi tevékenységek, operációk a közvetlen megértéshez, a felsőbb évfolyamokon oktatók gyakran hanyagolják a szemléltetőeszközöket. Mivel egy új módszerrel, a statisztikai modellalkotással szeretnénk megismertetni a diákokat, nem tartom feleslegesnek a szemléltetést, sőt a nehéz fogalmak intuitív szinten történő elsajátítását nagymértékben segíthetjük (esetünkben például a grafikonokon bemutatott példákkal). Egy új, műveletek sorozatát felsorakoztató módszer elsajátításánál nagy segítséget jelenthetnek a módszerünket bemutató folyamatábrák készítése, esetleg készíttettése[5].

## 1.5. A relativisztikus matematikaoktatás

A Freudenthal képviselte irányzat közel áll ahhoz az elképzeléshez, amelyet az előző szakaszban kifejtettünk. Az irányzat alapvető célja a matematikához való pozítív hozzáállás kialakítása azáltal, hogy tudatosítjuk a matematika mindennapi életben betöltött szerepét. A jellemzően passzív befogadással szemben az aktív, alkotói tevékenységeket helyezi előtérbe. Alapvetően elvek közvetítésével és matematikai problémák megoldásával képzeli el az oktatást ahelyett, hogy egy-egy konkrét módszert mintafeladatokon és mesterségesen konstruált példákon alkalmazzunk. Az irányzat nem csak a matematika tudományoktól való elszigeteltségét szeretné feloldani, hanem a modern, informatikai technológiától nagymértékben függő, felnőtt élet kihívásaira is szeretne felkészíteni, azaz az elemző és problémamegoldó készséget kívánja fejleszteni a mechanikus feladatmegoldási módszerek helyett.

Gondoljunk arra, hogy a médiában grafikonokkal, statisztikai adatokkal, valószínűségekkel elemeznek szinte minden politikai, gazdasági

[5] A tanulási folyamatok ezen aspektusával a kognitív tudományok, pontosabban az analógia foglalkozik.

eseményt. Az egyéni pénzügyek kezelése, a hivatalos iratok megértése alapvetően matematikai gondolkodásmódot követelnek meg. A világban való biztos tájékozódás és felelősségteljes döntések meghozatalának elengedhetetlen feltétele, hogy ügyeink intézésére önállóan is képesek legyünk, legyen szó egy hitel felvételéről vagy az adóbevallás tömbjének kitöltéséről. Ezen társadalmi és gazdasági célok mellett természetesen a matematikaoktatás tudományos célja is megmarad: felkészítjük diákjainkat a matematika mint tudomány megismerésére, a biztos alapokat pedig az elsajátított elvek sokszínű alkalmazási területeken való gyakoroltatásával kívánjuk lefektetni.

Kiemelkedően fontosnak tartom, hogy valós jelenségekkel foglalkozzunk ezen tantárgy kapcsán is. Az ezekben rejlő matematikai struktúrát felfedeztetjük a tanulókkal, majd segítjük őket a matematikai elmélet megalkotásában; nem irányítjuk közvetlenül munkájukat, de nem is állunk meg a puszta bemutatásnál. Célunk, hogy ilyen formán megpróbáljuk maximálisan megadni a tapasztalás gazdagságát, és azt a sikerélményt, ami a világ bizonyos apró szeletének megértésekor a felfedezőt éri. Hiszen mikor egy modellen dolgozunk, már maga a modell megalkotásának a sikere – a számítógép programjának az utasítások hatására történő működése, és ezáltal a kívánt konstrukció megjelenése – élményt okoz. Gondoljuk egy nem feltétlenül gazdasági pályára készülő diákra, aki az általa kiválasztott tőzsdeindexet elemzi, az elemzési módszereknek utánaolvas szaklapokban, az interneten keresgél, majd egy egyszerű programozási feladat segítségével egy olyan modellt konstruál, mely befektetési stratégiák összehasonlítását teszi számára lehetővé. Egy ilyen élmény után máshogy tekint majd az újságok címlapján lévő gazdasági mutatókra, emlékei és tapasztalatai hatására információvá válnak számára a grafikonok és százalékok, hiszen megérti mondanivalójukat, tudja valamilyen élményhez kapcsolni emlékeit, és így nehezebben felejti el azokat az ismereteket, amelyek az információk értelmezéséhez szükségesek. Ilyen módon szeretnénk elérni, hogy ne keltsen félelmet a

matematikát alapvetően nem szeretők körében sem a világ matematikai oldala. Amiről azt gondoljuk, ismerjük, talán kevésbé kelt félelmet a későbbiekben.

## 1.6. Problémamegoldás

Ambrus (1995) egyetemi jegyzete számos definícióval írja körül, mit is nevezünk problémának, illetve problémamegoldási folyamatnak a matematikaoktatásban. Ezen definíciók a következő tulajdonságokkal jellemzik a probléma jelenségét:

– cselekvést követel meg;
– a tanulónak nem áll rendelkezésére kész minta a megoldást illetően;
– vagy a megoldáshoz szükséges eszközök ismeretlenek, vagy a már ismert eszközök megfelelő kombinációja, vagy nincs egyértelmű cél megfogalmazva;
– több ismert szabály (nem nyilvánvaló) kombinált alkalmazására van szükség;
– szubjektív kategória;
– a feladatokkal szemben nem csupán reproduktív gondolkodást kívánnak (Dörner).

Maga a problémamegoldás Pólya György szerint a gondolkodással egymást fedő jelenségpárt alkotnak, míg Bruder egy sajátságos tulajdonságokkal bíró, speciális szellemi tevékenységként elemzi. Claus a problémamegoldás képességének tíz alapfeltételét fogalmazta meg, melyek közül a következőket emelném ki:

– ismeretszerzés felfedeztető tanulás révén;
– divergens gondolkodásra való ösztönzés;
– nyitott problémák állítása;
– tanulói problémafelvetésre való törekvés;
– konstruktív magatartás kialakítása a hibákkal szemben;
– intuitív indoklások, sejtések ösztönzése.

A probléma-megoldási folyamatokat többek között Pólya György modellezte, majd a meglévő modellt egészítették ki a továbbiakban. Alapvetően négy fázisra bontja a problémamegoldást: első a feladat megértése, második a tervkészítés, majd végrehajtjuk a tervünket, és végül felülvizsgáljuk a megoldást. Felszólításokkal és rávezető kérdésekkel írja le ezt a négy fázist, kiemelkedő segítséget nyújtva ezzel a tanároknak.

Természetesen a valóságban sosem egy lineáris folyamatról beszélünk. Valójában minden alkalommal egy (akár intuitív) hipotézist állítunk fel gondolatban, majd ezt teszteljük műveleteink során. Amennyiben a hipotézisünk helytálló, az ellenőrzési-felülvizsgálati szakaszban újra végiggondoljuk az egész megoldási folyamatot, így minden esetben legalább egyszer visszatérünk a kiindulási ponthoz, újra végrehajtva műveleteinket. Amennyiben hipotézisünk nem helytálló, azt elvetjük, esetleg átalakítjuk, kiegészítjük és újra visszalépünk a folyamat elejére, hogy az átalakított hipotézist is leteszteljük. Látható tehát, hogy egy ciklikus, dinamikus folyamatban dolgozunk.

A problémamegoldás hatékonyságának egyik legmeghatározóbb eleme azonban nem matematikai. Fontos, hogy megfelelő környezetet alakítsunk ki diákjaink számára, hogy magabiztosan tudjanak divergens, kreatív módon gondolkodni. Ismernünk kell a magukról, a környezetükről, a tananyagról, és magáról a matematikáról alkotott véleményüket.Bátorítanunk kell őket intuitív állítások megfogalmazására, hipotézisek megalkotására, ugyanis alapvetően nyitott feladatok megoldásáról beszélünk, melyek célja hiányosan vagy egyáltalán nincs megfogalmazva, így a megszokottnál is több önbizalomra lehet szükség az ezekkel való operáláshoz.

Érdekes belegondolnunk, hogy ilyen feladatmegoldások során arra a kimenetelre is számítanunk kell, hogy a problémát nem tudtuk megoldani, hogy bizonoys kérdésekre nem tudunk válaszolni, sőt azt sem tudjuk eldönteni, lehetséges-e választ adni, és nem csak a rendelkezésre

álló matematikai apparátus teszi ezt lehetetlenné[6]. Bruder külön szempontrendszerben tárgyalja a problémamegoldás sikerességének feltételeit, melyek szerinte a következők: kölcsönös bizalmon, barátságosságon, érdeklődésen alapuló légkör, a fejlettségi szint figyelembe vétele, illetve az a hozzáállás, amelyből fakadóan nem kizárólag visszakövetel a tanár. A módszerek, stratégiák elsajátíttatását (konkrét példákon is), a megfelelő feladatok alkalmazását és a problémamegoldás szakaszainak elsajátíttatását biztosítsa a tanár, a feladatok pedig mindvégig legyenek világosan és érthetően megfogalmazva, kapcsolódjanak a megfelelő életkorú tanulók tapasztalataihoz, végezetül pedig a tanulói sikereket ne csak észrevételezzük, hanem támogassuk is a fiatalokat a sikerélmény megélésében és feldolgozásában.

Alapvetően három stratégiát találhatunk a problémamegoldást illetően. Igyekeznünk kell nyitottnak maradni a célirányos és fordított irányú okoskodás mellett a szisztematikus próbálkozás stratégiája irányába. Mivel nyitott feladatokról van szó, elképzelhető, hogy kizárólag ezzel a stratégiával juthatunk el a célig. (Természetesen jelen esetben ez főként a kérdésfeltevéstől függ, mely optimális esetben nem feltétlenül a tanár kizárólagos feladata, de mindenképpen az irányítása alatt zajlik.) Célszerű minél több megoldási módszert megvizsgálni egy adott feladat, probléma tekintetében, ugyanis ezáltal tudatosulnak a módszerek közötti különbségek és a bennük rejlő ötletek.

## 1.7. A modellalkotás jelensége a matematika didaktika alapelveinek tükrében

A már oly sokat emlegetett spiralitás elve tulajdonképpen azt fogalmazza meg, hogy a különböző életkorokban célszerű a különböző témákat

[6]Szerény tapasztalattal rendelkezve és természetesen csak egy igen szűk keresztmetszetet megfigyelve, de számomra igen érdekes tapasztalat volt iskolalátogatásaim során, hogy a problémák megoldhatóságának és megoldásainak ilyen szintű megkérdőjelezése a Belvárosi Tanoda Alapítványi Gimnázium és Szakközépiskolában látogatott matematikaórákon merült fel rendszeresen, illetve a budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumban tapasztaltam még hasonlót, természetesen tökéletesen más színvonalú matematikai problémák megoldása során.

újra, az adott korosztálynak megfelelő szinten újratárgyalni. A problémamegoldás egyik eszköze a modellalkotás és a probléma modellen keresztüli megoldása. Amennyiben azt kívánjuk, hogy a diákok kreatív módon tudjanak alkalmazni ilyen módszereket, szükséges, hogy ne kizárólag a statisztika témakör kapcsán találkozzanak az ilyen jellegű megoldásokkal. (Maga a témakör a valószínűség-számítástól elkülönülve jellemzően nyolcadik évfolyamon kerül elő elsőként.)

Az előismeretekhez való kapcsolódás elve alapján elvárható, hogy a téma kapcsolódjon a korábbi témákhoz, esetleg egyazon téma alacsonyabb szintjeihez. Ennek megfelelően célszerű a később bemutatásra kerülő matematikai fejezetet olyankor tanítanunk, amikor már mind a szükséges metodikát, mind a statisztika alapjait már elsajátíttattuk. A rendelkezésünkre álló kerettanterv, illetve az ezek alapján elkészült népszerű tankönyvcsaládok tanítási ritmusát követve könnyen eleget tehetünk ezen elvárásnak.

A folytathatóság elve kimondja, hogy szükséges, hogy az adott tananyagra építhető tudás álljon rendelkezésre, azaz később is lehessen építkezni az elsajátíttatott tudásra, készségekre. Ennek eleget tesz a statisztikai modellalkotás, hiszen nem csak a mindennapi döntések során, hanem a felsőfokú tanulmányok végzése közben is alkalmazható készségekre tesznek szert a diákok. Mivel nem csak matematikai, hanem digitális, idegen nyelvi kommunikációra vonatkozó, vállalkozási kompetenciákat is fejlesztünk, mindenképpen bízhatunk benne, hogy az így megszerzett tapasztalatok a fiatalok számára kedvezők lesznek.

Az előre tekintő tanulás elve arra buzdít minket, hogy egy adott téma tanulását lehetőleg ne toljuk el magasabb osztályokba, hanem amennyiben lehetséges a téma zárt feldolgozása, akkor azt egyszerűbb formában, korábban tegyük meg. Azaz nem szükséges elzárni a tanulókat a kreatív matematikai kihívásoktól egy adott téma (esetünkben a statisztika) kapcsán, hanem bizonyos leegyszerűsített problémák megoldatására minél előbb buzdítsuk őket, amennyiben az adott téma magasabb szintű,

alapos elsajátítását segítjük ezzel.

Az egyszerűsítés és elementarizáció elve a következő követendő szempont, amely szerint meg kell könnyítenünk a tanulók munkáját olyan módon, hogy számukra egyszerűbb bemutatási módokat alkalmazunk a matematikai lényeg megtartásával. Ennek kiemelkedően fontos szerepe van például definíciók tanulásakor.

A következő, a spiralitás elvével megegyező súlyú elv a szemléletesség elve. Szemléletessé tenni a matematika tanulását nem csak képi ábrázolást és modellezést jelent, hanem azt is, hogy megfelelően sok kapcsolódási ponttal és megfelelően kevés valóban új elemmel rendelkezzen a megoldandó új probléma. Az ilyen szituációkban ugyanis sémákat, módszereket alkalmaztathatunk, viszont emellett heurisztikus megoldásokkal, egyéni és kreatív ötletekkel is találkozhatunk. Esetünkben, mikor a matematika alakítható és kézzelfogható oldalát szeretnénk megmutatni a tanulóknak, kiemelten fontos, hogy maximálisan kihasználjuk a rendelkezésünkre álló szemléltető eszközöket. így magabiztosabban próbálkozhatnak probléma-megoldási módszereik tökéletesítésével. Az új fogalomak tanítása kapcsán különösen fontos ez az elv, hiszen biztosítanunk kell speciális és ellenpéldákat egyaránt, néha pedig konkretizálnunk kell, hogy egy-egy elvontabb fogalmat valóban elsajátíthassunk.

Következik az úgynevezett operatív elv. Ez azt mondja ki, hogy a műveletek (gondolatbeli és valóságos) elvégzésének képessége, a megfelelő műveletek kiválasztása és alkalmazása kiemelkedő fontosságú az intelligencia fejlődésében. A pusztán megfigyelő szerep nem mindig elegendő a tanulók fejlődése szempontjából. Fontos tudatosítanunk a vizsgált jelenségek és az azokon végzendő lehetséges operációk azon tulajdonságait, amelyek a műveletek megválasztását indokolják; fontos továbbá tudatosítanunk a műveletek és objektumok, illetve maguk a műveletek közötti hierarchiákat, kapcsolatokat. Azaz szükséges minél gyakrabban megkérdőjelezni az elvégzett és elvégzendő műveleteink helyességét, ezzel is tudatossá tenni nemcsak az adott művelet, hanem magának az

önellenőrzésnek a szerepét is a feladatmegoldások során.

Az integráció elve azon a feltételezésen alapul, hogy amennyiben az ismereteket és a közöttük fennálló kapcsolatok rendszerét szervezetten oktatjuk, akkor későbbi használatuk és előhívásuk eredményesebb lehet. Két nagyobb elv alapszik ezen az elgondoláson, mégpedig az összefüggésekben való tanulás elve és az integráló ismétlés elve. Jellemzően az előbbi az új tananyagok tanításakor játszik nagy szerepet, míg az utóbbi az ismétlő-gyakorló órákon.

A következő elv a stabilizáció elve, mely felhívja a figyelmet, hogy az adott koncepció kognitív struktúrákba való beépítésének egyik szükséges feltétele, hogy többször és számos, különböző kontextusban is találkozzon a tanuló ezek alkalmazásával. Ennek fázisai a gyakorlás, az elmélyítés, az alkalmazás, a rendszerezés és az ismétlés. Ezek a megerősítési technikák stabilizálják és tartósítják az ismereteket és műveleteket. Elsősorban az alkalmazási területet emelném ki ebben esetben; e fázis hangsúlyozásával a célom, hogy ismételten felhívjam a figyelmet arra, hogy a modellalkotás statisztikai alkalmazásait valós példákon keresztül célszerű bemutatni. Ennek megjelenítése akár az irányított felfedezés módszerével, akár kétfázisú oktatásban is elképzelhető (a magyarázást lemásolás és begyakoroltatás követi), bár az első jobban illeszkedik azon célokhoz, hogy a diákok megmaradjanak magabiztos, érdeklődő, a világ felé nyitottan és érdeklődéssel forduló, vállalkozó szellemű személyiségeknek.

Végül a tudatosság elvét tárgyalom. Annak ellenőrzése, hogy egy tananyagot valóban megértettek és elsajátítottak a tanulók, nagyon sok kérdést és problémát vet fel (lásd értékelés). A gyakorlat az, hogy megpróbálunk meggyőződni arról, hogy a diákok a megfelelő szituációkban önállóan is végre tudják hajtani az elsajátított műveleteket, különböző területek problémáit meg tudják oldani, válaszolni tudnak a lényeget érintő kérdésekre. Egy következő szint, hogy akár megtanítani, megmagyarázni is képesek gyengébben szereplő társaiknak a megoldásaikat, megoldási

módszerük megválasztását és végrehajtásának helyességét. Erre azonban nincs minden esetben lehetőségünk, hiszen szervezésben és időben igencsak megterhelő ennek irányítása. Az anyag visszakérdezésekor próbálkozhatunk hasonló szituációt teremteni, hogy elemi, magyarázó stílusban lehessen újra végiggondolni a módszer lépéseit.[7] Például amikor egy papíron levezetett gondolatmenetet beprogramozunk a számítógépbe, pontosan erre kényszerülünk rá. Nem gondolom, hogy szorosabb kapcsolatba lenne vagy akár kellene hozni a feladat leprogramozását és a szóbeli magyarázatot, hiszen tisztában vagyok azzal, hogy a visszakérdezés, a kételkedés, a hallgató divergens hozzáállása, esetleges holisztikus gondolkodásmódja nagy mértékben befolyásolják a magyarázó meggyőzési módszereit és érvelési rendszerét. Azonban a végiggondoltatás elemet visszakérdezhetjük egy bizonyos szinten, amennyiben az ismeretek és módszerek nemcsak alkalmazásra kerülnek, hanem ezt egy hosszabb, a módszereket végigelemző lépés előzi meg, a tervezési fázisba beépítve. Mikor az adathalmaz és a szükséges matematikai eszközök már rendelkezésünkre állnak, már feltettük kérdéseinket és megválasztottuk eszközeinket, még mindig csak a megoldáshoz vezető út legelején vagyunk. Mikor elkezdjük a modellt felépíteni, beírni az azt megjelenítő programot a számítógépbe, minden lépést alaposan végig kell gondolnunk, hiszen a számítógépes programozási felületek maximálisan pontosan hajtják végre az általunk kijelölt műveleteket. Mikor a modell készen van, és annak eredményeit elemezzük a valódi adatokkal összevetve, véleményeinket és eredményeinket meg kell magyaráznunk, alá kell támasztanunk, össze kell hasonlítanunk, meg kell vitatnunk, ez pedig megint csak az anyag megértéséhez visz minket közelebb, hiszen elképzelhető, hogy egymást kijavítva és túllicitálva kerül a tananyag az igazi elsajátításra.

Hogy mindezt előidézhessük, a tanár szerepét háttérbe szorítandó, nem feltétlenül a frontális munka a legelőnyösebb. Tekintsük példaként esetünket, mikor is a számítástechnika segítségével képzeljük el a prob-

[7] Gondoljunk például a műveleti tulajdonságok folyamatos átismételtetésére a hatványozás azonosságainak tanításakor!

lémamegoldást, mégpedig modellek programozásával. Mivel a számítógépek többsége az iskolákban internethez, de mindenképpen valamilyen hálózathoz, levelezőrendszerhez van csatlakoztatva, célszerű párosával ültetni diákjainkat egy géphez, hogy az órák nagyobbik része ne a levelek olvasásával és beszélgetések lebonyolításával teljék. Azaz legalább párban kellene dolgozniuk, ha nem is nagyobb csoportban. Ekkor a programok megírása, begépelése, a prezentációk megszerkesztése részelemeire bomlik, és valódi csoportmunkáról beszélhetünk. Az egy időben különkülön megírt részeket később összevágva megkapjuk a teljes programot (mozaikmódszer). Természetesen ez magas fokú szervezést és tervezést igényel, melynek a tanár útmutatásával kell történnie. A diákok ekkor részben egymásra utaltan dolgoznak, munkájuk mindenképpen egy nagyobb csoport érdekét szolgálja. Az egyéni ötletek alkalmazása mellett viszont összhangot is kell teremteniük, például a változók azonos elnevezésében, a folyamatot modellező elemek lépésszámában stb.[8]

## 1.8. A realisztikus matematikaoktatás és a didaktikai alapelvek

A realisztikus matematikaoktatás öt didaktikai alapelvet emel ki az előző szakaszban tárgyaltak közül. Tekintsük röviden át ezeket a fentiek mintegy összefoglalásaként!

1. Az elmélet megalkotása mindig valamilyen konkrét szituációból kiindulva történik. Ennek a kontextusnak a megválasztása alapvető fontosságú, hiszen a tananyaghoz tartozó elméleteket és struktúrákat kell tükröznie, továbbá szükséges, hogy a matematika mint tudomány alkalmazási területeinek és elméleti hálójának kapcsolatát mutassa be. A figyelmet a kezdeti, megismerési szakaszban mindvégig a kialakítandó fogalom, elmélet irányába kell terelni. Ezek a

[8] A szoftverfejlesztés például a vállalatok többségénél alapvetően ilyen munkafolyamatok során zajlik.

kontextusok kiindulópontok és alkalmazási területei is a tanult új elméletnek.

2. Egy magasabb szinten formális, szisztematikus gondolkodás jellemző. Ennek elérésében a vizuális modellek, szemléltetőeszközök, sémák, szimbólumok szerepeltetése játszik szerepet. Az intuitív fogalmakra építkezve elhagyhatjuk a kontextustól függő szintet, és áttérhetünk a reflektív, formális szintre. Ezt nevezzük horizontális matematizációnak. Vertikális matematizáció az a folyamat, amikor a szisztematikus, strukturált, formális ismereteket építjük.

3. A tanulók saját konstrukciójának fontossága is egy elv, melynek aligha kell hangsúlyozni témámhoz való kapcsolódását. Az elv annak szükségességét mondja ki, hogy a valóságból vett problémákat a saját maguk által kifejlesztett megoldások révén dolgozzák fel a fiatalok, és egyéni stratégiákat alakíthassanak ki ezekben a szituációkban.

4. A szociális kontextust is már említettük, mikor az érintett alapkompetenciákról szóltunk; most ismét tekintsük át röviden, miként szerepel a szociális kontextus tekintetében modelloktatási elképzelésünk. A munkafolyamaton végighaladva azt tapasztalhatjuk, hogy a kérdések feltevésétől a megoldási terv elkészítésén át, egészen az eredmények megbeszéléség, minden lépésnél a világ, a társadalom jelenségeit próbáljuk magyarázni, és az őket körülvevő emberek tanácsadó, kérdező, segítő, esetleg konkuráló magatartásával találkozunk, így a szociokulturális környezet szerepe lényegesen fontosabbá válik annál, mint ahogy az egy frontális oktatási forma esetében tapasztalható lenne.

5. Az összefüggések, kapcsolatok intuitív felismerése, valamint a nagyobb összefüggések tudatos felismertetése elhagyhatatlan feltétele a matematikaoktatásnak. Az előzetes ismeretrendszerbe való beilleszkedést igyekeznünk kell minél harmonikusabbá tenni.

## 1.9. Értékelés

Értékelés tekintetében érdemes a modellalkotásra mint egy többnyire nyílt végű problémamegoldásra tekinteni. Értékelését már a feladat legelején tudatosítanunk kell a tanulókban, figyelnünk kell az elvárások pontos és világos megfogalmazására és elfogadtatására. Fontos, hogy a diákok érezzék, hogy mit is várunk személyesen tőlük, valamint hogy mennyire fontos személyiségei mindannyian a problémamegoldás folyamatának. Leginkább a projektmódszerrel vethető össze ezen metódus értékelhetősége, ugyanis a modellalkotáshoz hasonlóan ez is egy olyan aktív tanulási folyamat, mely kreativitást, tervezést, odaadást, célirányos cselekvések sorozatát, együttműködést igényel. Az epochális oktatás és projektmódszer napjainkban rohamosan terjed a középiskolai oktatásban is, emiatt gondolom, hogy a (matematikai) modellalkotás hosszabb és mélyebb tárgyalása nem elképzelhetetlen iskolai keretek között.

A projektorientált oktatás célkitűzéseivel nagy mértékben összhangban van a modellalkotás jelensége is, gondolván itt a minket körülvevő környezet jelenségei és az általuk nyújtott problémák iránti érzékenység fejlesztésére, a különböző tantárgyakban szerzett és megszerzendő ismeretek és készségek összhangban történő alkalmazására, a tanulói érdeklődés és tevékenységek középpontba helyezésére. Az a célunk, hogy ne kérdőjeleződjék meg a matematikatanulás szükségessége, hanem közös célunk legyen egy tananyag elsajátítása, hiszen a világ megismeréséhez vihet minket közelebb. A tanulók a projektek megalkotása során autonóm személyiségként működnek egy demokratikus környezetben, melynek célja a szociális-társadalmi kompetenciák fejlesztése mellett a matematika feladatmegoldó, jelenségeket megmagyarázó, „eszköz” funkciójának és tudományos természetének megismerése, megtapasztalása.

A projektmunkák egyik kritikus pontja az értékelés. Az értékelést ugyanis közösen célszerű elvégezni, egy előzetesen, a diákokkal együtt kialakított szempontrendszer alapján. Az önértékelésnek mint értékelési formának elengedhetetlennek kellene lennie az iskolai értékelés során.

Természetesen másként zajlik le az értékelés egy nagyobb és egy kisebb projekt esetén. Minél több időt szánunk az adott téma feldolgozására, minél komplexebbek az elvégzendő feladatok, annál körültekintőbben kell meghatároznunk az értékelés feltételeit. A munkafolyamat közben mindvégig törekednünk kell arra, hogy pontosan tudjuk – és tudják a tanulók is –, hogy aktuálisan kinek mi a feladata, és az aznap végzett munkája milyen módon kerül értékelésre.

Magyarországon felsőbb évfolyamokon elsősorban érdemjeggyel értékelünk, azaz egy öt szélességű skála segítségével értékeljük az adott témakörben nyújtott teljesítményt és tudást. Fontosnak tartom a tanulás közben kialakult légkör sajátságainak figyelembe vételét, például az ellenőrzési szituációkban való teljesítményrontást, az életkorbeli sajátságok megjelenését, a kooperációs képességeket, a munka során tapasztalt tanulói attitűdöt, az eszközhasználat mértékét és minőségét, az eltérő munkatempót, matematikai érdeklődés különbözőségét. Ezek nem könnyebbé, sokkal inkább összetettebbé teszik az értékelést. Véleményem szerint a szóbeli értékelés elengedhetetlen oktatási-nevelési eszköz a tanár számára minden esetben; csoportos és páros munkáknál, illetve projektmódszer alkalmazásánál pedig egyenesen elkerülhetetlen.

Az értékelés alapelveit De Lange foglalta össze. Az általa megadott öt pont közül egyet emelnék ki: az értékelésnek azt a célt kell szolgálnia, hogy tanulóink megmutathassák, mit tudnak, nem pedig a tudásbeli hiányosságukat kívánjuk kiemelni. Ahogyan esetünkben is, egy nyitott probléma felvetése például ezt a koncepciót szolgálja. A modellalkotás ugyanis egy alapvetően divergens produkció, értékelési formával kiegészítve. Ez a problémamegoldás minőségileg magasabb szintet jelent a reprodukció, rekonstrukció és transzfer tevékenységekhez képest. Az ilyen szintű feladatokat a matematikai didaktika is magasabb nehézségi fokozatú feladatoknak nevezi. Mint ilyennel, a tárgyi tudáson kívül megfigyelhetjük a tanuló matematikai gondolkodási és következtetési mechanizmusát, kommunikációs és társas viselkedési formáit, a

kritikus hozzáállás megjelenését, valamint az interpretáció és reflexió során újra elvégzendő műveletekből a tudásszintre, a csoportmunkában képviselt stílusra következtethetünk. A kreativitás hangsúlyos értékként jelenhet meg ilyen szituációkban, emiatt nem rejtőzni, hanem felszínre kerülni igyekszik. Esetünkben fontos lehet továbbá az információs és digitális kompetencia megjelenése. Az előbbi felsorolás kellő bizonyíték arra, hogy az értékelésnek sokrétűnek kell lennie, elrugaszkodva a hagyományos ötfokozatú értékelés lehetőségétől.

## 1.10. Összefoglalás

A matematika sokszínűségét, mindennapi életünkkel való kapcsolatát olyan módon is bemutathatnánk a diákoknak, hogy nemcsak témaválasztásában, de megoldási módszereiben is a mai modern gondolkodást reprezentáló feladatokat, problémákat tűzünk ki a tanulók számára. A problémát megfelelő általánosítások során, a felesleges – vagy esetleg a kérdésfeltevést lehetetlenné tévő – információk kiszűrésével matematikai kérdésfelvetések célpontjává tehetjük. A problémát megoldva, a különböző megoldásokat értelmezve és összevetve a probléma újabb megbeszélése, majd prezentációja következik. A folyamat során rengeteg kompetenciaterületet érintünk, melyek együttes, harmonikus fejlesztése lenne az oktatás célja. A közös, sikeres munka megfelelő tanári attitűdöt és munkaformát követel meg.

A fiatalok önmegvalósításának és munkájuk segítésének a személyközpontú szemlélet és a demokratikus, barátságos, nyílt környezet kedvez, ahol kreatívan és saját tempójukban dolgozhatnak társaikkal közösen. Azzal, hogy a probléma megoldása során a ciklikus gondolkodásra, az önellenőrzésre és a probléma nyitott jellegére folyamatosan felhívjuk a figyelmet, segíthetjük a tudatos gondolkodás fejlődését, az önismeretet. Célkitűzéseink és értékelésünk legyen világos és egyértelmű a tanulók számára is. Legyünk az értékelés folyamán határozottak és körültekintőek, az egyes munkafolyamatokra és az eltérő munkastílusra való tekin-

tettel egyaránt.

# 2. fejezet

# Időváltozójú véletlen jelenségek modellezése

## 2.1. Szükséges előismeretek

Minden esetben, amikor változásokat szorgalmazunk és új elemekkel szeretnénk korábbi rendszerünket bővíteni, elkerülhetetlen, hogy figyelembe vegyük a fennálló rendszer tulajdonságait és a benne zajló aktuális változásokat. Az ilyesfajta átmenetek többnyire nem zökkenőmentesek, mégis törekedhetünk arra, hogy harmonikusan illeszkedjenek elképzeléseink a meglévő (oktatási) programokba. Ezen filozófia mentén haladva a statisztikai modellezéshez szükséges és feltételezhető elősmereteket az ismertebb tankönyvcsaládok (Sokszínű Matematika – Mozaik, Műszaki Könyvkiadó, Hajnal Imre tankönyvei), az AKG Kiadó harmadik évfolyamos matematika munkafüzete, illetve a SuliNova Közoktatásfejlesztési és Pedagógus-továbbképzési Kht. Matematikai Kompetenciaterület – Szakmai koncepció és oktatási programcsomagja alapján gyűjtöttem össze.

1. A középiskola megkezdésekor várhatóan a következő statisztikai ismeretekkel rendelkeznek a diákok:
   (a) kérdőívek, grafikonok, diagramok elemzése;
   (b) a valószínűségszámítás alapjai.
2. A kilencedik évfolyamon szerzett szükséges ismeretek:

(a) a halmazelmélet alapjai;

(b) a statisztika definíciója;

(c) minősítéses-méréses, rendezhető-nem rendezhető, diszkrét-folytonos ismérvek;

(d) osztályközös és relatív gyakoriság;

(e) diagramkészítés;

(f) statisztikai mutatók (módusz, medián, kvartilis, átlag, szóródás).

3. A tizedik évfolyamon szerzett szükséges ismeretek:

   (a) valószínűség fogalma, becslése, és kiszámítása;

   (b) esemény, kísérlet, gyakoriság fogalmainak mélyebb ismerete.

4. A tizenegyedik évfolyamon szerzett szükséges ismeretek:

   (a) eloszlások vizsgálata (binomiális eloszlás);

   (b) műveletek eseményekkel, feltételes valószínűségek;

   (c) statisztikai mintavétel (visszatevéses és visszatevés nélküli).

5. A tizenkettedik évfolyamon szerezett szükséges ismeretek:

   (a) a számítógép alkalmazása véletlen jelenségek megfigyelésére és elemzésére;

   (b) a leíró statisztika gyakorlati szerepe és alkalmazása.

A korábbiakból az is kitűnik, hogy a felmerülő témakör a tizenkettedik évfolyam tananyagában, illetve annak kiegészítéseként szerepelhetne a középiskolákban. Mindezek mellett a némi függvényismeret, különösen a logaritmus függvény, illetve a differenciálszámítás alapjai szükségesek.

## 2.2. Az idősorok fogalmának bevezetése

Eljutottunk a dolgozat azon pontjához, amikor is belekezdhetünk azon definíciók, állítások, tételek tárgyalásába, amelyek matematikai háttérként szolgálhatnak egy időváltozójú jelenség statisztikai modellezése során. Elsőként általánosan közlöm az alapvető ismereteket, majd egy probléma elemzésén keresztül be is mutatnám ezek alkalmazását.

Mikor kísérleteket, megfigyeléseket végzünk, azok eredményeit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ felhasználva alkotunk elméletet a kísérleti tapasztalatokról, illetve magáról a megfigyelt jelenségről. Ezeket az eredményeket tekinthetjük egy, még ismeretlen valszínűségi törvény valószínűségi változóinak. A kísérletezés, megfigyelés célja az, hogy a kapott eredményeket felhasználva következtetések sorozatán keresztül állításokat fogalmazhassunk meg erről a bizonyos ismeretlen törvényről. A felállított elméletet a legtöbb esetben egy (esetleg több) paraméterrel jellemezhetjük. Amikor a megfigyelés eredményeiből az ismeretlen törvényszerűséget kutatjuk, többnyire valójában az ismeretlen paramétert keressük. $X$ legyen a mindenkori aktuális megfigyelésünk eredménye, amely egy bizonyos paraméterrel jellemezhető törvényszerűséghez tartozik.

**2.2.1. definíció.** Sztochasztikus folyamatoknak *nevezzük a megfigyelt rendszer (társadalom, gazdaság, gép) időben egymást követő állapotainak (valamilyen szempont szerinti) valószínűségi változókkal történő leírását. Az időt mint paramétert diszkrét értékekkel és folytonosan is kezelhetjük, a feladatnak és a megfigyelési módszernek megfelelően. Ilyen módon diszkrét, illetve folytonos sztochasztikus folyamatokról beszélhetünk.*

Mivel matematikai eszközeink a diszkrét sztochasztikus folyamatok leírására korlátoznak minket, a következőkben kizárólag ilyenekkel foglalkozik a dolgozat az erre történő utalás nélkül is.

**2.2.2. definíció.** Statisztikus modellnek *nevezzük a megfigyelhető eredmények halmazának ($\Phi$), a valószínűségi változót leíró törvénynek ($P_\theta$)*

*és a véges dimenziójú paramétertér egy elemének ($\theta \in \Theta$) hármasát. Amennyiben a paramétertér véges dimenziójú, úgy* parametrikus, *ellenkező esetben* nemparametrikus *modellről beszélünk.*

**2.2.1. példa.** *$n$ elemű mintát kapunk, amennyiben egy jelenséget $n$-szer egymás után megfigyelünk azon célból, hogy $\nu$ mennyiség nagyságát meghatározzuk. Tegyük fel, hogy a mért eredményeinkre $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jellemző, hogy $X_i = \eta + \varepsilon_i$, ahol $\varepsilon_i$ az $i$-edik megfigyeléshez tartozó bizonytalanság (mérés esetén mérési hiba), amelyre ezen esetben szintén valószínűségi változóként tekintünk. Tegyük fel azt is továbbá, hogy a bizonytalanság nem szisztematikus, azaz nem a megfigyelés során adódó tévesztésből (mérés esetén például rossz beállításból) fakad. Ekkor leggyakrabban $\varepsilon_i$-ket független, azonos eloszlású valószínűségi változóknak tekinthetjük, mely eloszlás várható értéke zérus. Legtöbbször azt feltételezzük, hogy az eloszlás $N(0, \sigma^2)$, ahol $\sigma^2$ ismeretlen. Ekkor pedig a statisztikai modellünk elemei a következők lesznek: $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ megfigyelt eredményeinket vizsgáljuk, ahol $X_i \sim N(\eta, \sigma^2)$ adja a megfigyelési eredmények eloszlási törvényét (normális eloszlás). A paramétertér ezen esetben a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ Descartes-szorzat.*

Az érdekesség kedvéért definiálhatjuk a statisztika matematikai fogalmát is.

**2.2.3. definíció.** Statisztikának *nevezzük azokat a függvényeket, amelyek értelmezési tartományát megfigyelési értékeink bizonyos halmaza(i) alkotják.*

Mindezeket definiálva felmerül a kérdés, melyik statisztikának van adott esetben értelme a számunkra. Ebből a szempontból érdemes végiggondolnunk, hogy a felállított statisztikai modellekben szereplő statisztikák függnek-e (s ha igen, természetesen az is érdekel minket, hogy hogyan) az ismeretlen $\theta$ paramétertől.[1]

[1] Előfordulhat, hogy megfigyelési eredményeinkre alapozva különböző törvényszerűségeket vélünk felfedezni, így egyszerre több *hipotézissel* rendelkezünk az adott jelenség bizonyos tulajdonságának

A következőkben áttérünk a valós történések-jelenségek, azaz időtől függő események vizsgálatára. Hétköznapi életünk meghatározó paramétere az idő, így statisztikai példánkban is az időt mint paramétert kezeljük. Ez azt jelenti, hogy amikor egy bizonyos jelenség egy paraméterét (nagyságát, változását, változásának sebességét stb.) vizsgálom, a leíró függvények paramétereként minden esetben az időt fogom választani. Ilyen esetben a feladat, tehát az adott megfigyelésre, problémára vonatkozó kérdés is a történések időbeni leírását célozza meg[2]. Ez igen gyakori paraméterválasztás, tekintve, hogy az emberi élet mindennapjait meghatározó paraméter többségében szintén az idő...

**2.2.4. definíció.** *Valószínűségi változók egy* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *halmazát* idősornak *nevezzük, amennyiben az* $1, 2, \ldots, n$ *indexek időpontokként értelmezhetők.*

## 2.3. Idősorok tulajdonságai

### 2.3.1. Stacionaritás

Ahhoz, hogy a vizsgált jelenség változását mint folyamatot értelmezzük, érdemes megvizsgálnunk, hogyan függ a múltbéli eseményektől a jelen megfigyelés kimenetele, esetleg tudunk-e a múlt alapján a jövőre vonatkozó állításokat megfogalmazni. Ehhez azonban tisztában kell lennünk a várható érték és a szórás definíciójával, illetve a kovariancia fogalmával.

**2.3.1. definíció.** *A* $t$*. időpontbeli megfigyelés* várható értéke:[3]

$$E(X_t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x_t f_t(x_t) dx_t.$$

*Jele:* $E(X_t) = \mu$.

leírását illetően. Az ilyen szituációk kezelése a statisztika egy másik, igen érdekes fejezetéhez tartozik: az úgynevezett *hipotézisvizsgálathoz*. Terjedelmi korlátok miatt a dolgozat nem diszkutálja részletesen ezen módszereket.

[2]Ellenpéldaként tekintsünk például egy síkbeli valószínűségi eloszlást.

[3]A várható érték akkor létezik, ha a definícióban szereplő integrál abszolút konvergens.

**2.3.2. definíció.** *A $t$. időpontbeli $X_t$ megfigyelés* szórásnégyzete *(jele: $\sigma^2$) pedig*

$$D^2(X_t) \equiv E\{[X_t - E(X_t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x_t - E(X_t)]^2 f_t(x_t) dx_t.$$

**2.3.3. definíció.** *Az $X_t$ és $X_s$ valószínűségi változók* kovarianciáján *a*

$$cov(X_t, X_s) \equiv E\{[X_t - E(X_t)][X_s - E(X_s)]\}$$

*kifejezést értjük.*

Amikor a valószínűségi események időbeli lefolyását vizsgáljuk (főként egymástól függetlenül bekövetkező jelenségek vizsgálata esetén jellemző) kiindulási pontként azt feltételezzük, hogy a valószínűségi változónk egy úgy nevezett zaj viselkedésének tesz eleget. A zaj ebben az esetben azt jelenti, hogy $X_t$ eloszlása egy adott, számunkra ismeretlen paraméterekkel rendelkező normális eloszlással van kapcsolatban.

**2.3.1. példa.** *Tekintsük a független, azonos eloszlású $\varepsilon_i$ valószínűségi változókat, amennyiben $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Vegyünk $N$ számú ilyen $\varepsilon_i$ sorozatot, s tekintsük mindegyik $t$. időpontbeli tagját. Ekkor a $\{\varepsilon_t^{(1)}, \varepsilon_t^{(2)}, \ldots, \varepsilon_t^{(N)}\}$ sorozatra úgy is tekinthetünk, mint egy valószínűségi esemény $N$ számú bekövetkezésére. Mint ilyennek, létezik* sűrűsége, *jelen esetben pedig ez a sűrűségfüggvény az*

$$f(y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2\sigma^2}\right).$$

Bővítsük ki következő lépésként a kovariancia definícióját a teljes idősorra.

**2.3.4. definíció.** *Egy idősor kovariancáját* autokovariancia függvénynek *hívjuk: $\widetilde{R}(t, s) \equiv cov(X_t, X_s)$.*

**2.3.5. definíció.** *Az idősor* autokorreláció függvényének *nevezzük az*

$$\widetilde{r}(t, s) \equiv \frac{cov(X_t, X_s)}{D(X_t)D(X_s)}$$

*függvényt.*[4]

Így a különböző időpontokban bekövetkezett események közötti korrelációt mint a teljes idősorra jellemző tulajdonságot vizsgálhatjuk.

**2.3.6. definíció.** Stacionárius idősornak *hívjuk az olyan idősorokat, amelyek autokovariancia függvényére teljesül, hogy*

$$E(X_t) = \textit{konstans, továbbá, hogy } \widetilde{R}(t,s) = R(t-s),$$

*azaz* $\widetilde{R}$ *eltolásinvariáns, tehát csak* $t-s$ *függvénye.*

**2.3.7. definíció.** *Az* $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ *idősort* $k$-ad rendben stacionáriusnak *nevezzük, amennyiben legfeljebb* $k$*-ad rendű vegyes momentumai eltolásinvariánsak.*[5]

**2.3.8. definíció.** *Az* $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ *idősort* erősen stacionáriusnak *nevezzük, amennyiben véges dimenziós eloszlásai eltolásinvariánsak:*

$$\forall n, k, t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{N} : (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \sim (X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \ldots, X_{t_n+k}),$$

*azaz a közös eloszlás csak a megfigyelések között eltelt időintervallum nagyságának függvénye.*

Láthatjuk, hogy a fenti besorolás alapján erősen stacionárius idősornak nevezzük azokat az idősorokat, amelyek minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $k$-ad rendben stacionáriusnak mutatkoznak. A másodrendben stacionárius idősorokat gyengén stacionáriusnak hívjuk.

**2.3.2. példa.** *Következő példáinkban kizárólag stacionárius idősorokat tekintünk, emiatt az áttekinthetőség érdekében az autokovariancia és autokorreláció függvényeket (a stacionaritás definícióját felhasználva) egyváltozós függvényként írjuk fel:*

$$\widetilde{R}(t,s) = R(t-s), \textit{ illetve } \widetilde{r}(t,s) = r(t-s).$$

[4] Az autokorreláció függvény definíciója természetesen csak akkor értelmezhető, amennyiben mindkét valószínűségi változó szórása nemzérus.

[5] A $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ idősor $k$-ad rendű vegyes momentumán az idősorból tetszőlegesen kiválasztott $k$ darab elem szorzatának várható értékét értjük.

1. Független értékű zajnak *nevezzük az $\varepsilon(t)$ folyamatot, ha $E[\varepsilon(t)] = 0$ és az $\varepsilon(t)$-k azonos eloszlású, független valószínűségi változók.*[6] *A független értékű zaj erősen stacionárius, hiszen nem csak állandó eloszlású, de a függetlenség miatt tetszőleges $k$ esetén $k$-ad rendben stacionárius. Autokovariancia függvénye a függetlenség és a zérus várható érték felhasználásával: $R(0) = \sigma^2$ és minden pozitív egész $t$-re:*

$$\begin{aligned} R(t) &= cov(X_s, X_{s-t}) = E\{[X_s - E(X_s)][(X_{s-t} - E(X_{s-t})]\} \\ &= E(X_s X_{s-t}) - E(X_s) \cdot E(X_{s-t}) \\ &= E(X_s)E(X_{s-t}) - E(X_s)E(X_{s-t}) = 0. \end{aligned}$$

*Autokorreláció függvénye pedig: $r(0) = 1$ és minden pozitív egész $t$-re:*

$$r(t) = \frac{cov(X_s, X_{s-t})}{\sigma_{X_s}\sigma_{X_{s-t}}} = 0.$$

2. Fehér zajnak *nevezzük az $\varepsilon(t)$ folyamatot, amennyiben $E[\varepsilon(t)] = 0$ és az $\varepsilon(t)$-k azonos eloszlásúak és korrelálatlanok. A fehér zaj másodrendben, azaz gyengén stacionárius. Autokovariancia függvénye: $R(0) = \sigma^2$ és minden pozitív egész $t$-re $R(t) = 0$. Autokorreláció függvénye pedig: $r(0) = 1$ és minden pozitív egész $t$-re $r(t) = 0$.*

**2.3.9. definíció.** *Egy $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ folyamatot* lényegileg stacionáriusnak *nevezünk, amennyiben $E(X_t) =$ konstans, és $D^2(X_t - X_s) = \gamma(t - s)$, azaz a szórásnégyzet csak az időkülönbség függvénye.*

**2.3.3. példa.** *1. A Brown mozgás lényegileg stacionárius, hiszen $E(X_t) = 0$ és $D^2(X_t - X_s) = |t - s|$*

*2. A stacionárius folyamat lényegileg stacionárius is, hiszen $D^2(X_t - X_s) = D^2(X_{t-s} - X_0) = \gamma(t - s)$*

**2.3.1. állítás.** *Stacionárius folyamatok esetén $X_t$ szórásnégyzete konstans.*

[6] Ezen tulajdonság gyakori jelölése – *i.i.d.* – az angol „independent and identically distributed” kifejezésből származik.

**2.3.1. bizonyítás.** *$X_t$ legyen stacionárius. Ekkor*

$$D^2(X_t) = cov(X_t, X_t) \equiv \widetilde{R}(t,t) = R(t-t) = R(0), \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

■

### 2.3.2. Ergodicitás és markovitás

Az adott idősor vizsgálatakor nem csak az a kérdés merülhet fel, hogy az egyes időközönként kiszemelt elemek milyen korrelációban lehetnek egymással, hanem érdekes lehet megvizsgálni azt is, hogy a megfigyelések halmazának részhalmazai mutatnak-e valamilyen szisztematikus viselkedést. Mint annyiszor a statisztikai tanumányok során, most is érdemes a megfigyelések részhalmazainak átlagát vizsgálni. Ezen esetben viszont időbeli átlagról beszélhetünk. A vizsgált folyamat megvalósulásának egy $T$ hosszúságú (időtartamú) $y_1, y_2, \ldots, y_T$ szakaszán számolt átlag: $\overline{y} \equiv (1/T)\sum_{t=1}^{T} y_t$.

**2.3.10. definíció.** *1. Azt mondjuk , hogy a stacionárius idősor* ergodikus az átlagra nézve, *amennyiben $T \to \infty$ esetén $\overline{y} \to E(y_t)$.*

*2. Hasonlóan definiálhatjuk, amikor egy stacionárius folyamat* ergodikus a második momentumaira nézve, *ha:*

$$\frac{1}{T-j}\sum_{t=j+1}^{T}(Y_t-\mu)(Y_{t-j}-\mu) \to E[(Y_t-\mu)(Y_{t-j}-\mu)].$$

Az autokovariancia függvényre nézve ez azt jelenti, hogy e függvény nagy $t$ esetén meglehetősen nagy sebességgel zérushoz fog tartani. Érdemes megjegyezni, hogy a stacionaritás és az ergodicitás általam nem tárgyalt feltételei nagyon hasonlóak lehetnek egyes esetekben.

**2.3.4. példa.** *1. Amennyiben $\varepsilon(t)$-kre nem csupán az teljesül, hogy $E(\varepsilon_t) = 0$ és $E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0$ minden $t \neq s$ esetén [azaz $\varepsilon(t)$ nemcsak*

*fehér zaj], hanem $\varepsilon_t$ és $\varepsilon_s$ függetlenek is $t \neq s$ esetén [azaz $\varepsilon(t)$ független fehér zaj], ráadásul $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, akkor a folyamatot* Gauss fehér zajnak nevezzük. *Ilyen folyamatok esetén az átlagra nézve vett ergodicitás elégséges feltétel az összes momentumra nézve.*

2. *Tegyük fel, hogy a folyamat, amelyet vizsgálunk, az előbb tárgyalt Gauss fehér zajból és egy zérus várható értékű normális eloszlás i-edik megvalósulásainak átlagából tevődik össze: $Y_t^i = \mu^i + \varepsilon_t$ ahol tehát $\mu^i = \sum_k y_k^i$ ahol $y^i \sim N(0, \lambda^2)$, továbbá $\varepsilon_t$ Gauss fehér zaj. Ez a folyamat például stacionárius, de nem ergodikus:*

$$\begin{aligned}
&\mu_t = E(\mu^i) + E(\varepsilon_t) = 0, \\
&E[(Y_0 - \mu^i)(Y_t - \mu^i)] = E[(\mu^i + \varepsilon_t)^2] = \lambda^2 + \sigma^2 \text{ és} \\
&E[(Y_j - \mu^i)(Y_{t-j} - \mu^i)] = \lambda^2 \text{ minden nemnulla } j\text{-re.}
\end{aligned}$$

A következőkben az orosz matematikus, Andrej Markov[7] nevéhez fűződő statisztikai fogalmakkal ismerkedünk meg. Az időben zajló folyamatok statisztikai vizsgálata esetén mindenképpen találkozunk nevével.

Felmerül a kérdés, mennyiben különbözik annak az idősornak a vizsgálata, amely például egy beteg testrészben található fertőzött sejtek számának időbeli fejlődését jellemzi, azzal szemben, amikor egy tucat érmével a percenkénti fejdobások számát írjuk le. Míg a második esetben a vizsgált rendszer az adott állapotba az őt megelőző állapottól függetlenül került, addig a betegség terjedése esetén valamilyen kapcsolatot feltételezhetünk a jelenlegi állapot és az azt megelőzőek között. Egy fontos tulajdonság, az úgynevezett *markovitás* jellemzi azokat a rendszereket, amelyek $t$ időpontbeli állapota kizárólag az őt megelőző állapot valószínűségi függvényeként írható le.

**2.3.11. definíció.** Markov-láncnak *nevezzük azokat a sztochasztikus folyamatokat, amelyek következő állapota kizárólag annak függvénye, hogy a rendszer jelenleg milyen állapotában található. Az, hogy a rendszer*

[7] Az idősebbik Andrej Markovra gondolunk, fia szintén Andrej, ugyancsak matematikus volt; jellemzően a matematika más területein találkozhatunk munkáival.

*milyen állapotok során került ebbe a jelenlegi állapotba, nem befolyásolja a következőt. Amennyiben $i_0, i_1, \ldots, i_t$-nel jelöljük a múltbeli állapotokat, $j$-vel a jövőbeli állapotot, $x_0, x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}, \ldots$ pedig a vizsgált sztochasztikus folyamatot leíró valószínűségi változók, akkor a következő teljesül:*

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= P(x_{t+1} = j | x_t = i_n, x_{t-1} = i_{n-1}, x_{t-2} = i_{t-2}, \ldots, x_0 = i_0) \\ &= P(x_{t+1} = j | x_t = i_n). \end{aligned}$$

Amíg egy fertőzés természtéről sokat elárulhat terjedésének folyamata, addig a pénzfeldobások során adódó fejek száma nem sokat árul el a következő dobás kimeneteleinek valószínűségéiről. Amikor termodinamikai rendszerek állapotait vizsgáljuk, jellemzően a rendszer következő időpontbeli állapota kizárólag a jelenlegi állapot és az elkövetkező állapotváltozás függvénye, azt a kérdést pedig nem tesszük fel, hogy hogyan jutott rendszerünk ezen állapotba.

Arról viszont nem beszéltünk, hogy ezek a

$$P_{ij}(t) = P(x_{t+1} = j | x_t = i_n),$$

úgynevezett átmenet-valószínűségek[8] az időben változhatnak is.

**2.3.12. definíció.** *1.* Homogén *Markov-láncnak nevezzük azokat a Markov-láncokat, amelyek esetén a $P_{ij}(t) = P(x_{t+1} = j | x_t = i_n)$ valószínűség nem függ az időtől. Ellenkező esetben a Markov-láncot* inhomogénnek *nevezzük.*

*2. Amennyiben $P_{ij}(t) > 0$, azt mondjuk, hogy $i$ állapotból a $j$ állapot* elérhető.

*3. Ha $i$ elérhető $j$ állapotból és $j$ is elérhető az $i$ állapotból, akkor $i$ és $j$ állapotok* kommunikálnak egymással.

Egy, a dolgozatban nem bizonyított tétel kimondja, hogy amennyiben egy Markov láncban minden állapot minden állapottal kommunikál,

[8] Átmenet, mint az állapotok egymás utáni megvalósulása

akkor a Markov-lánc ergodikus és viszont.

**2.3.13. definíció.** *Tegyük fel, hogy egy Markov-láncban az $i$ állapot elérésének egy adott $t$ időpontban pozitív a valószínűsége. Ezt követően az $i$ állapotban pozitív valószínűséggel $t+k_1, t+k_2, \ldots, t+k_m$ időpontokban tartózkodhat. Ekkor azt mondjuk, hogy a Markov lánc $i$ állapota* periodikus*, és periódusa a $t+k_1, t+k_2, \ldots, t+k_m$ számok legnagyobb közös osztója.* Aperiodikusnak *mondjuk azt az állapotot, amelyre ez a legnagyobb közös osztó* 1*. Az olyan ergodikus Markov-láncot, amlynek minden állapota aperiodikus,* reguláris *Markov-láncnak nevezzük.*

A markovitás mint tulajdonság, fontos kritériuma egy folyamat jellemzésének, emiatt is tértünk ki erre bővebben. Rengeteg mindenről azonban nem esett szó e téma kapcsán, amelyek ugyancsak alapvető tulajdonságai, tételei a statisztika ezen fejezetének, de nem tartoznak szorosan a témánkhoz, emiatt említésüktől jelenleg el kell tekintenünk.

## 2.4. Idősorelemzés

A következő példák annak eldöntésében nyújtanak segítséget, hogy milyen jelenségeket célszerű keresnünk a vizsgált rendszer állapotai alkotta adatsor elemeivel dolgozva. A különböző autoregressziók, mozgóátlag-folyamatok, illetve GARCH-folyamatok rengeteg rendszer leírásához nyújtanak nap mint nap támpontot a folyamatelemzőknek. Hasonlóan a jellemző valószínűségsűrűség-függvényekhez, érdemes velük is megismerkedni, hogy összehasonlítást és támpontot nyújtsanak az elemzés és modellalkotás során. A következőkben $(\forall i \in \mathbb{N})$ $\{X_i\}$-n valószínűségi változók sorozatát értjük, ahol $i$ időparaméterként értelmezhető.

### 2.4.1. Autoregresszió

**2.4.1. definíció.** Elsőrendű autoregressziónak nevezzük [AR(1)] *azt a folyamatot, amelyre*

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_t$$

*ahol $\varepsilon_t$-k független értékű, azonos eloszlású valószínűségi változók, $\alpha$ tetszőleges konstans, $\sigma_\varepsilon^2$ pedig $\varepsilon$ szórásnégyzete.*

Általában $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ vagy korrelálatlan zaj, de lehet más is. (A gyakori, speciális esetekre újabb elnevezések léteznek.)

Vizsgáljuk meg, mit mondhatunk $X_t$-ről, amennyiben AR(1) folyamatot követ:

1. $X_t$ várható értéke: $E(X_t) = 0$.

2. $X_t$ szórásnégyzete: $D^2(X_t) = \alpha^2 D^2(X_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2 D^2(\varepsilon_t)$, ugyanis $X_{t-1}$ és $\varepsilon_t$ függetlenek.

3. Mit mondhatunk $X_t$ stacionaritásáról?

   (a) Amennyiben létezik stacionárius megoldás, akkor $D^2(X_t) = D^2(X_{t-1})$. Így $\sigma_X^2 = \alpha^2\sigma_X^2 + \sigma_\varepsilon^2$, továbbá $D^2(X_t)$ -t kifejezve:

   $$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}.$$

   Azaz amennyiben $|\alpha| \geqslant 1$, akkor nincs stacionárius megoldás.

   (b) A következő, erősebb állítást a rendelkezésünkre álló matematikai apparátus hiányosságai miatt nem bizonyítjuk.

   **2.4.1. állítás.** *Elsőrendű autoregresszió esetén akkor és csak akkor létezik stacionárius megoldás, ha $|\alpha| < 1$.*

4. $X_t$ autokovariancia függvénye:

   $$\begin{aligned} R(k) &= cov(X_t, X_{t+k}) = cov(X_t, \alpha X_{t+k-1} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_{t+k}) \\ &= \alpha \cdot cov(X_t, X_{t+k-1}) = \alpha R(k-1), \end{aligned}$$

   továbbá $R(0) = D^2(X_t) = \sigma_X^2$ és $R(1) = \alpha R(0)$ alapján egyszerű bizonyítással belátható, hogy

   $$R(k) = \sigma_X^2 \cdot \alpha^k = \frac{\alpha^k}{1-\alpha^2} \cdot \sigma_\varepsilon^2.$$

5. $X_t$ autokorreláció függvénye:

$$r(k) = \frac{R(k)}{R(0)} = \alpha^k.$$

6. Tegyük fel, hogy $|\alpha| < 1$. Iteráljuk az AR(1)-et definiáló egyenletet:

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t = \alpha(\alpha X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots \\ &= \alpha^{s+1} X_{t-s-1} + (\alpha^s \varepsilon_{t-s} + \dots + \alpha\varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Innen az

$$X_t - \sum_{u=0}^{s} \alpha^u \varepsilon_{t-u} = \alpha^{s+1} X_{t-s-1}$$

eredményt kifejezve számítsuk ki mindkét oldal négyzetének várható értékét:

$$E\left[\left(X_t - \sum_{u=0}^{s} \alpha^u \varepsilon_{t-u}\right)^2\right] = \alpha^{2s+2} E(X_{t-s-1}^2).$$

Mivel $|\alpha| < 1$, a bal oldalon található várható érték szinte biztosan zérushoz konvergál. Ehhez szükséges feltétel, hogy $\exists K \in \mathbb{R}$, mellyel $\forall t$-re $E(X_t^2) < K$, ami teljesül, amennyiben $X_t$ stacionárius. Ekkor a bal oldalon található különbség négyzetének várható értéke zérushoz konvergál, azaz amennyiben $s \to \infty$, akkor $\sum_{u=0}^{s} \alpha^u \varepsilon_{t-u} \to X_t$, tehát $X_t = \sum_{u=0}^{\infty} \alpha^u \varepsilon_{t-u}$

7. Amennyiben $|\alpha| < 1$ és $\varepsilon_t$ független, azonos eloszlású zaj, melyre $E(\varepsilon_t^2) < \infty$, akkor az AR(1) egyenleteknek létezik stacionárius megoldása

8. Az AR(1) Markov folyamat.[9]

Következzék egy példa nem Gauss fehér zajból generált AR(1)-re.

**2.4.1. példa.** *Legyen $\varepsilon_t$ olyan, hogy $\frac{1}{2}$ – $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszi fel a 0, illetve az $\frac{1}{2}$ értékeket. Az $X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + \varepsilon_t$ egyenlet stacionárius*

[9] Az utolsó két állítást nem bizonyítjuk.

*megoldása:*

$$\sum_{u=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{u}\varepsilon_{t-u}=2\sum_{u=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{u+1}\varepsilon_{t-u}$$

*A* $2\varepsilon_{t-u}$ *véletlen* $\{0,1\}$ *sorozat szorozva az* $\frac{1}{2}$ *hatványaival tetszőleges* $[0,1]$*-beli számot előállít, mégpedig egyenletes eloszlással (hiszen minden* $2\varepsilon_t$ *egyenlő valószínűséggel generálja az összes* $\{0,1\}$ *számsorozatot). A stacionárius eloszlás az uniform eloszlás lesz:* $U(0,1)$.

### 2.4.2. Az AR(2) és AR(p) folyamatok

**2.4.2. definíció.** Másodrendű autoregressziónak [AR(2)] *nevezzük a következő folyamatot:*

$$X_t=\alpha_1X_{t-1}+\alpha_2X_{t-2}+\sigma_\varepsilon\varepsilon_t.$$

Az AR(2) folyamatról jóval kevesebb szó esik a dolgozatban, ugyanis vizsgált kritériumaink nagy részének egyértelműen nem tesz eleget (például markovitás), bonyolultabb összefüggéseiben pedig a matematikai apparátus hiányából fakadóan nem tárgyaljuk. Érdemes azonban felírnunk autokovariancia és autokorreláció függvényét:

$$R(k)=\alpha_1R(k-1)+\alpha_2R(k-2),$$

illetve

$$r(k)=\alpha_1r(k-1)+\alpha_2r(k-2).$$

Végül vizsgáljuk meg, mint mondhatunk az általános, $p$ számú paramétert tartalmazó esetben.

**2.4.3. definíció.** $p$-ed rendű autoregressziónak nevezzük [AR($p$)] *azt a folyamatot, amelyre*

$$X_t=\alpha_1X_{t-1}+\alpha_2X_{t-2}+\cdots+\alpha_pX_{t-p}+\sigma_\varepsilon\varepsilon_t,$$

*ahol* $\varepsilon$ *fehér zaj.*

Megmutatható, hogy amennyiben az AR($p$) folyamat stacionárius, akkor erősen stacionárius is. Amennyiben pedig a folyamat az első $p$ lépésében nem stacionáriusan indul, úgy exponenciális sebességgel stacionarizálódik.

Írjuk fel másként is az autoregresszió egyenletét, mégpedig a visszaléptetés operátor ($B$) segítségével:

$$BX_t \equiv X_{t-1},$$
$$B^2 X_t = X_{t-2}.$$

Az egyenlet alakja pedig:

$$\left(\sum_{k=0}^{p} \widetilde{\alpha}_k B^k\right) X_t = \varepsilon_t.$$

Innen $X_t$-re rendezve kapjuk:

$$X_t = \left(\sum_{k=0}^{p} \widetilde{\alpha}_k B^k\right)^{-1} \varepsilon_t.$$

Stacionárius esetben a következőket mondhatjuk az autokovariancia függvényről:[10]

1. Tegyük fel, hogy $E(X_t) = 0$. Ekkor

$$R(0) = E(X_0^2) = E[X_0 \cdot (\alpha_1 X_{-1} + \ldots + \alpha_p X_{-p} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_0)].$$

Innen:

$$E(X_0 X_{-\tau}) = R(-\tau) = R(\tau),$$

valamint

$$E(X_0 \varepsilon_0) = \sigma_\varepsilon^2.$$

összefüggésekből adódik:

$$R(0) = \alpha_1 R(1) + \ldots + \alpha_p R(p) + \sigma_\varepsilon^2.$$

[10] Az alábbiakban $R(-\tau) = R(\tau)$.

2. Hasonlóan:

$$R(\tau) = E(X_0 X_\tau) = E[X_0 \cdot (\alpha_1 X_{\tau-1} + \cdots + \alpha_p X_{\tau-p} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_\tau)].$$

Jelenleg $E(X_0 \varepsilon_\tau) = 0$, ugyanis a zaj jövőjétől független a folyamat. Innen adódik

$$R(\tau) = \alpha_1 R(\tau - 1) + \ldots + \alpha_p R(\tau - p)$$

minden $\tau \geqslant 1$ egész esetén.

**2.4.4. definíció.** *Az*

$$\begin{aligned} R(0) &= \alpha_1 R(1) + \ldots + \alpha_p R(p) + \sigma_\varepsilon^2, \\ R(\tau) &= \alpha_1 R(\tau - 1) + \ldots + \alpha_p R(\tau - p), \quad \tau \geqslant 1 \end{aligned}$$

*egyenleteket* Yule-Walker egyenleteknek *hívjuk.*

Amennyiben az első $p$ autokovariancia adott, a többi rekurzióval kiszomítható. Hasonló mondható el az autokorreláció függvényre is:

$$r(\tau) = \alpha_1 r(\tau - 1) + \ldots + \alpha_p r(\tau - p)$$

$\tau \geqslant p$ esetén. Az AR($p$)-folyamat nem Markov.

### 2.4.3. A mozgóátlag-folyamatoktól a GARCH-ig

**2.4.5. definíció.** *Legyen $\varepsilon_t$ (Gauss) fehér zaj. Ekkor az*

$$X_t = \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

*folyamat* $q$-ad rendű mozgóátlag-folyamat.

A mozgóátlag-folyamat autokovariancia függvénye $E(\varepsilon_t) = 0$, $D^2(\varepsilon_t) = 1$ esetén:

$$\begin{aligned} R(\tau) = E(X_t X_{t+\tau}) &= \beta_0 E(\varepsilon_t X_{t+\tau}) + \beta_1 E(\varepsilon_{t-1} X_{t+\tau}) + \dots \\ &+ \beta_q E(\varepsilon_{t-q} X_{t+\tau}) = \beta_0 E(\varepsilon_t \beta_\tau \varepsilon_{t+\tau-\tau}) + 0 \\ &+ \beta_1 E[\varepsilon_{t-1} \beta_{\tau+1} \varepsilon_{t+\tau-(\tau+1)}] + 0 + \dots + \beta_{q-\tau} E(\varepsilon_{t-q+\tau} \beta_q \varepsilon_{t+\tau-q}) \\ &= \beta_0 \beta_\tau + \beta_1 \beta_{\tau+1} + \dots + \beta_{q-\tau} \beta_q, \end{aligned}$$

amennyiben $\tau \leqslant q$; az autokovariancia egyéb esetekben értelemszerűen zérus.

**2.4.6. definíció.** *Az*

$$R(\tau) = (\beta_0 \beta_\tau + \beta_1 \beta_{\tau+1} + \dots + \beta_{q-\tau} \beta_q) \cdot \mathbf{1}_{(\tau \leqslant q)}$$

*felbontást* Wold-felbontásnak *nevezzük.*

Néhány további megjegyzés a fentiek következményeként:

1. $R(\tau)$ nem függ $t$-től, így a folyamat másodrendben stacionárius. Fehér zaj esetén mindig gyengén stacionárius; független, azonos eloszlás esetén pedig erősen stacionárius.

2. Az autokorreláció függvénynek mindig pontosan az első $q$ tagja nem lesz zérus.

**2.4.1. tétel.** *Wold tétele (1954)*

1. *Ha egy $R(\tau)$ függvényre a Wold-felbontás teljesül, akkor létezik olyan MA(q) folyamat, amelynek autokovariancia függvénye $R(\tau)$, és együtthatói pontosan a Wold-felbontásban szereplő $\beta$ együtthatók.*

2. *Ha $X_t$ stacionárius Gauss-folyamat várható értékére és autokovariancia függvényére teljesül, hogy $E(X_t) = 0$ és $R(\tau) = 0$ amennyiben $\tau > q$, akkor $X_t$ MA(q) folyamat.*

Írjuk fel $X_t$-t karakterisztikus polinomja és a visszaléptető operátor segítségével. A polinom a következő: $Q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_q x^q$, tehát

$$X(t) = Q(B)\varepsilon_t.$$

Ezen felírás segítségével belátható, hogy $X(t)$-nek lehetséges az AR($\infty$) előállítása, azaz végtelen tagú autoregresszió segítségével előállítható.

A következőkben valamilyen módon az előzőekben tárgyalt tulajdonságokat kombináljuk, és így kapunk újabb folyamatokat.

**2.4.7. definíció.** ARMA$(p, q)$ folyamatoknak *nevezzük azt a folyamatot, amelyre:*

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k X_{t-k} = \sum_{m=0}^{q} \beta_m \varepsilon_{t-m}.$$

*A stacionárius megoldással rendelkező ARMA folyamatok MA($\infty$), illetve AR($\infty$) előállításairól az egyenlet bal, illetve jobb oldalának karakterisztikus polinomjai – azaz ezek gyökei – az irányadók.*

Bár nem mindig adódik, hogy stacionárius folyamattal dolgozhassunk, gyakran differenciálással mégis azt kaphatunk belőle.

**2.4.8. definíció.** $X_t$ ARIMA$(p, 1, q)$ folyamat*, amennyiben*

$$Y_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$$

*ARMA folyamat.*

Egyszeres differenciálással valamilyen lineáris trend tüntethető el.

**2.4.9. definíció.** $X_t$ ARIMA$(p, d, q)$ folyamat*, amennyiben d-szeres differenciáltja, azaz*

$$(1 - B)^d X_t$$

*ARMA(p,q) folyamat.*

Az egyszeres differenciáláshoz hasonlóan $d$-szeres differenciálással $d$-ed fokú trend tüntethető el.

**2.4.2. példa.** *Legyen $\{e_t\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, melyre $E(e_t) = 0$ és $E(e_t^4) < \infty$. Legyen $\varepsilon_t = e_t + \beta e_{t-1}e_{t-2}$. Azt állítjuk, hogy ekkor $\varepsilon_t$ fehér zaj, de nem független azonos eloszlású (i.i.d.).*

*Írjuk fel $\varepsilon_t$ várható értékét, szórásnégyzetét, illetve autokvariancia függvényét!*

$$E(\varepsilon_t) = E(e_t) + \beta E(e_{t-1})E(e_{t-2}) = 0,$$

$$D^2(\varepsilon_t) = D^2(e_t) + \beta^2 D^2(e_{t-1}e_{t-2}) = \sigma_e^2 + \beta^2\sigma_e^4 = R(0),$$

$$R(1) = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = E[(e_t + \beta e_{t-1}e_{t-2})(e_{t+1} + \beta e_t e_{t-1})] = 0,$$

*ugyanis mindegyik összeadandóban található egy, a többitől független elsőfokú és zérus várható értékű tag. Továbbá, hasonló meggondolások miatt, mint az előbbi esetben:*

$$R(2) = 0 + \beta E(e_{t-1}e_{t-2}^2) = 0.$$

*Ugyanígy $R(\tau) = 0$, amennyiben $\tau \geqslant 3$. Az $\{\varepsilon_t\}$ sorozat azonos eloszlású, tehát fehér zaj. Azonban nem független (és így nem i.i.d.), mert $E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t\varepsilon_{t+1}) \neq 0$:*

$$E[(e_{t-1}+\beta e_{t-2}e_{t-3})(e_t+\beta e_{t-1}e_{t-2})(e_{t+1}+\beta e_t e_{t-1})] = \beta E(e_t^2 e_{t-1}^2) = \beta\sigma_e^4.$$

*Azaz a harmadik vegyes momentum (és a harmadik kumuláns[11]) nem zérus.*

**2.4.10. definíció.** ARCH(1)[12] folyamatnak *nevezzük a következőképpen előálló idősort: legyen $\varepsilon_t$ standard normális, független, azonos eloszlású, Gauss fehér zaj: $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Legyen*

$$X_t = \sigma_t\varepsilon_t,$$

[11] Amennyiben létezik $g(t) = \log\{E[\exp(tX)]\}$ deriváltjai zérus helyettesítési értékkel szolgáltatják a kumulánsokat :

$$\kappa_1 = \mu = g'(0),$$
$$\kappa_2 = \sigma^2 = g''(0),$$

és így tovább.

[12] „Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”, Engle (1982).

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2,$$

*ahol* $\alpha_0, \alpha_1 \geqslant 0$.

A definícióban szereplő első egyenletet négyzetre emelve behelyettesíthetjük a szórásnégyzet kifejezését a második egyenletből:

$$X_t^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)\varepsilon_t^2.$$

Ez az egyenlet azonban nem ekvivalens a fentivel, ugyanis így csak nemnegatív értékeket vehet fel $X_t$, míg eredeti formájában akár negatív is lehetett.

Feltessszük, hogy létezik stacionárius megoldás. Iteráljuk az egyenletet:

$$\begin{aligned} X_t^2 &= \alpha_0\varepsilon_t^2 + \alpha_1\alpha_0\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2 X_{t-2}^2\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2 \\ X_t^2 &= \alpha_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \varepsilon_t^2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{t-j}^2. \end{aligned}$$

Amennyiben az összegzés és a várható érték képzése felcserélhető, akkor innen

$$E(X_t^2) = \alpha_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j E(\varepsilon_t^2) \cdot \cdots \cdot E(\varepsilon_{t-j}^2) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

adódik. Ha az

$$X_t = \varepsilon_t \cdot \sqrt{\alpha_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_1^{k+1} \varepsilon_{t-1}^2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{t-k-1}^2\right)}$$

felírásában $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_1^{k+1} \varepsilon_{t-1}^2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{t-k-1}^2$ konvergál, akkor stacionárius folyamatot állít elő. Az $\eta_t \equiv \varepsilon_{t+k}$ zaj véges dimenziós eloszlásai megegyeznek, és $\eta_t$ ugyanúgy állítja elő a $(X_{t_1+k}, \ldots, X_{t_m+k})$ sorozatot, mint $\varepsilon_t$ $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$ sorozatot, azaz eloszlásaik megegyeznek.

**2.4.2. tétel.** *Ha* $|\alpha_1| < 1$, *akkor*

$$X_t = \varepsilon_t \cdot \sqrt{\alpha_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_1^{k+1} \varepsilon_{t-1}^2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{t-k-1}^2\right)}$$

*konvergál, és az ARCH(1) egyenlet véges szórású stacionárius megoldásait adja. Amennyiben a véges szórás nem követelmény, úgy* $\alpha_1 > 1$ *esetén is létezik stacionárius megoldás. (Nem bizonyítjuk.)*

A tétel következményei:

1. $E(X_t) = E(\varepsilon_t) \cdot E\left[\sqrt{\alpha_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_1^{k+1} \varepsilon_{t-1}^2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{t-k-1}^2\right)}\right] = 0;$
2. $D^2(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$,
3. $E(X_t X_{t+k}) = 0, \quad k \neq 0.$

Azaz az ARCH(1) korrelálatlan, stacionárius, zérus várható értékű, tehát fehér zaj.

Azonban az ARCH(1) folyamat különböző tagjai nem függetlenek:

$$E(X_t^2 | X_{t-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2) \cdot E(\varepsilon_t^2 | X_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2,$$

ugyanis $\varepsilon_t^2$ és $X_{t-1}$ függetlenek és $E(\varepsilon_t) = 1$. Mivel nem konstanst, hanem egy valószínűségi változót kaptunk eredményül, nem teljesül a függetlenség. Ebből következik, hogy az ARCH(1) nem Gauss eloszlású. Viszont az teljesül, hogy az ARCH(1) szimmetrikus eloszlású, amennyiben szimmetrikus eloszlásból generáltuk.

**2.4.2. állítás.** $\forall \alpha_1 \in (0,1)\ \exists \beta : E(X_t^{2\beta}) = \infty$. *(Nem bizonyítjuk.)*

**2.4.3. állítás.** $E(X_t^4) < \infty$ *pontosan akkor, ha* $3\alpha_1 < 1$. *(Nem bizonyítjuk.)*

**2.4.11. definíció.** Általános bilineáris modellnek *nevezzük a következőt:*

$$X_t + \sum_i a_i X_{t-i} = \varepsilon_t + \sum_j b_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{Q} c_{ij} X_{t-i} \varepsilon_{t-j},$$

*ahol $\{\varepsilon_t\}$ független, azonos eloszlású és zérus várható értékű változók sorozata.*

Az általános modellben a stacionaritás feltételeit Lin és Brockwell (1988) adták meg; e dolgozat bonyolultsága miatt nem tárgyalja ezeket.

**2.4.3. példa.** *BL(1,0,1,1) például a következőképpen fest:*

$$X_t - aX_{t-1} = bX_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t.$$

*Legyen $Y_t$ olyan, hogy $Y_t - Y_{t-1} = X_t$. Behelyettesítve $X_t$-t azt kapjuk, hogy $Y_t$ egy BL(2,0,2,1) folyamat:*

$$Y_t - (1+a)Y_{t-1} + aY_{t-2} = bY_{t-1}\varepsilon_{t-1} - bY_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t.$$

*Y(t) nem stacionárius folyamat. (Nem bizonyítjuk.)*

**2.4.12. definíció.** GARCH$(p,q)$[13] folyamatnak *nevezzük a következő egyenleteknek eleget tevő folyamatokat:*

$$X_t = \sigma_t\varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{t-j}^2$$

*ahol az $\varepsilon_t$-k függetlenek és azonos eloszlásúak, továbbá $E(\varepsilon_t^4) < \infty$ és $E(\varepsilon_t) = 0$.*

**2.4.3. tétel.** *Bollerslev (1986) Az imént definiált GARCH(p, q) másodrendben (azaz gyengén) stacionárius, amennyiben*

$$\sum_{i=0}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j < 1.$$

*Ekkor $X_t$ fehér zaj és $E(X_t) = 0$, azaz $R(\tau) = 0$ ha $\tau > 0$, továbbá $R(0) = D^2(X_t) < \infty$. (Nem bizonyítjuk.)*

[13] „Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”, Bollerslev (1986).

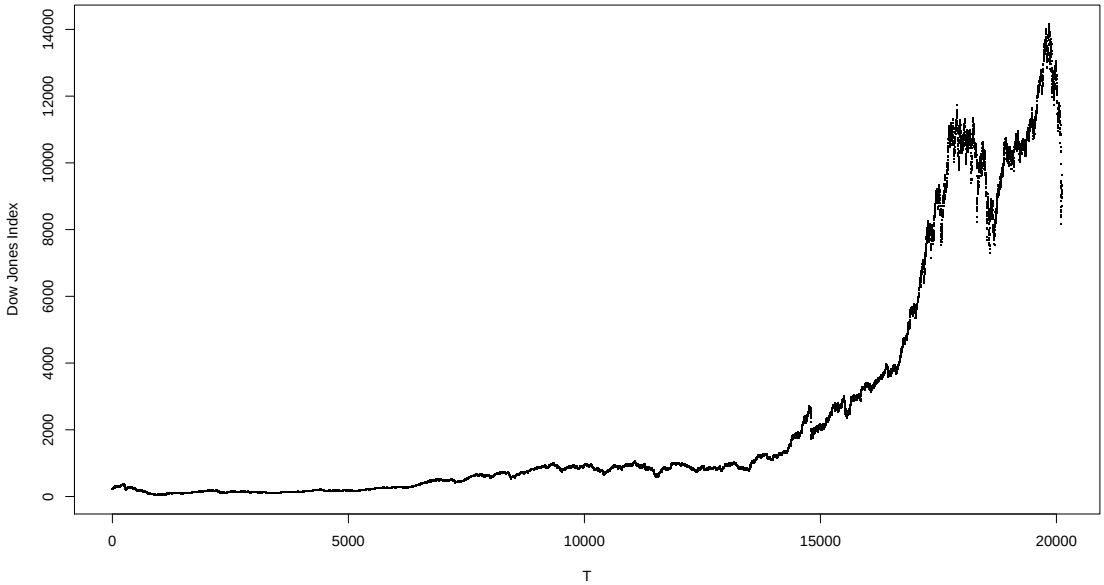
# 3. fejezet

# Tőzsdeindex-modellezés

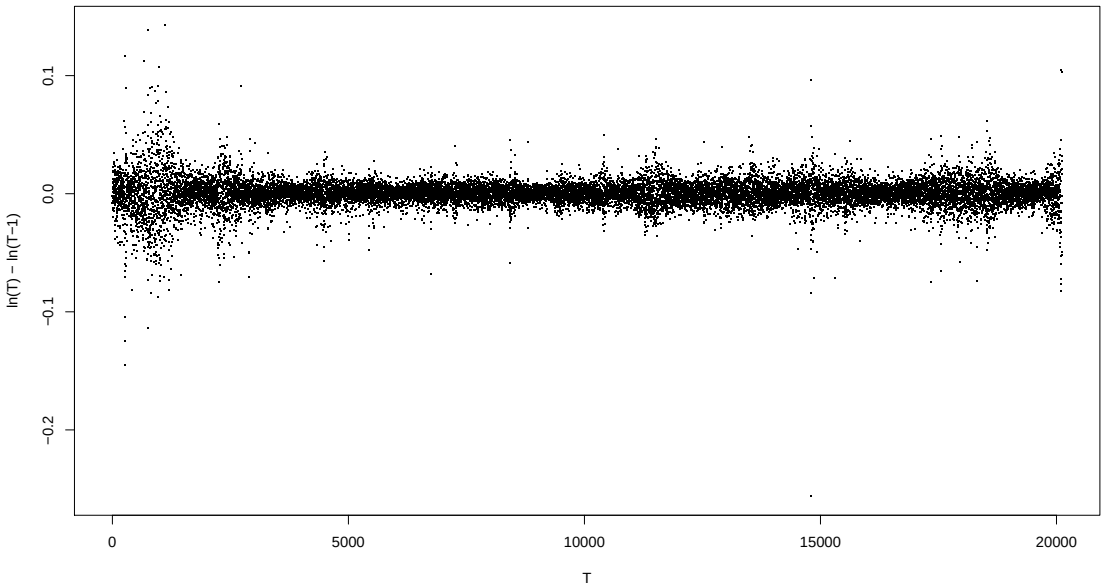
Egy matematikai program használatához alapvető programozási ismeretekre van szükség, amely, úgy gondolom, inkább előnye, mintsem hátránya alkalmazásának. Matematikai problémák informatikai alkalmazásokkal történő megoldása mindennapi esemény nemcsak egyetemeken, hanem az üzleti szférában is. Emiatt a diákoknak érdemes minél korábban találkozniuk olyan jelenségekkel, mint például az a tapasztalat, hogy a programok lefutása, a kalkulációk elvégzése bizony nem minden esetben másodpercek kérdése, hanem egy frappánsabb matematikai megoldás gyakran perceket, órákat, sőt napokat spórolhat meg a programozónak és a számítógépnek. A minták számának jelentősége a statisztikában ugyancsak egy tapasztalható jelenséggé válik, amint a modellünkhöz mintát keresünk, vagy éppen nagy elemszámú adathalmazokat kezelünk, esetleg mi készítünk el egy adatsort. Gyakran belefuthatunk megoldhatatlan problémákba is, melyek megoldhatatlanságával talán éppen akkor szembesülünk, amikor az azt reprezentáló programot írnánk meg. Egyszóval rengeteg tapasztalattal gazdagodhatunk matematikai programcsomagok tanórai-szakköri alkalmazásakor.

A munka megkezdéséhez internetes forrásból töltjük le a kívánt tőzsdeindex (esetünkben a Dow Jones) adatsorát. Mi a zárási adatokkal fogunk dolgozni. A szokásos eljárás az, hogy a nyers adatsor helyett ezek logaritmikus differenciáival számolunk, azaz az elemek logaritmusainak különbségét vesszük. Így valóban azt az adatsort látjuk, ami számunkra

érdekes: a változást (3.1. és 3.2. ábrák).




**3.1. ábra.**




**3.2. ábra.**

Ezt követően megpróbálkozunk azzal, hogy megtaláljuk a megfelelően illeszkedő folyamatot. A próbálkozás jelen esetben szó szerinti találgatást jelent, hiszen legtöbb esetben nem egy mesterségesen generált adatsorral van dolgunk, és nem találhatunk a valósághoz tökéletesen illeszkedő

modellt. Célunk az, hogy a modell viszonylag kevés paraméterrel rendelkezzen, a lehető legegyszerűbb legyen és belőle következtetéseket tudjunk levonni a valós adatsorra.

Kezdetben megnéztük az idősor hisztogramját, hátha információt nyerhetünk belőle a valószínűségi változók eloszlására (3.3. ábra).

**3.3. ábra.**

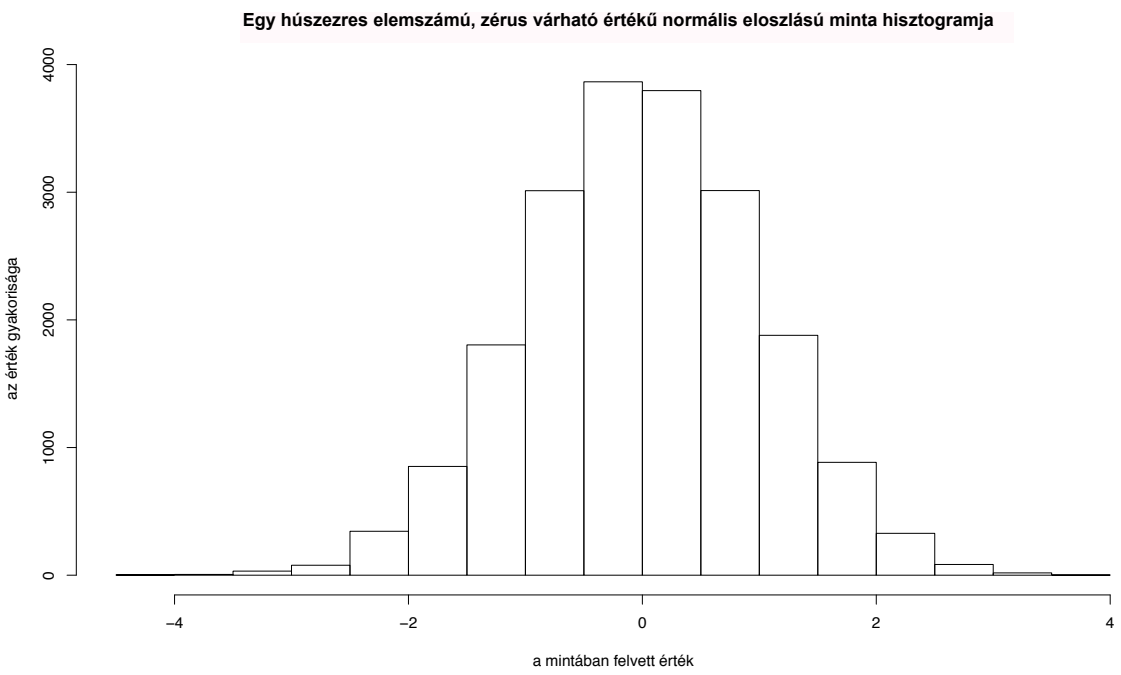
Annyit tudunk csak leolvasni a diagramról, hogy nem valószínű, hogy normális eloszlással van dolgunk. A hisztogram képe leginkább egy $t$-eloszlás hisztogramjához hasonlít (3.4. és 3.5. ábrák).

Ahhoz, hogy ismerjük a generáló eloszlás paramétereit, az idősor reziduálisaira[1] fogunk egy $t$-eloszlást illeszteni.

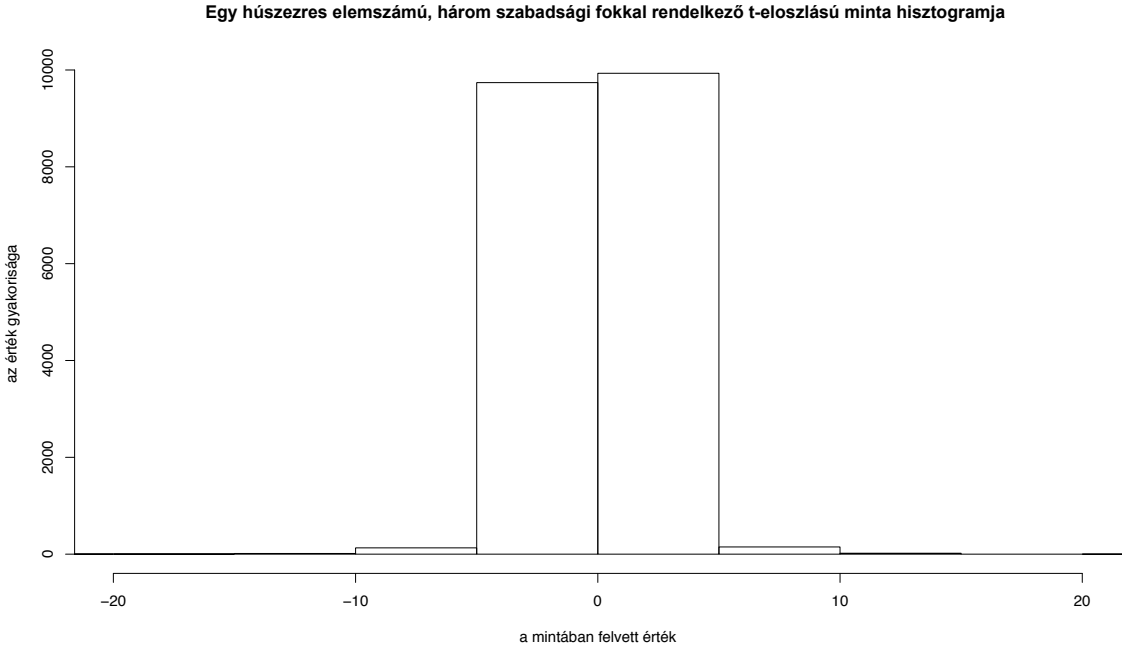
Következő lépésként meg fogjuk vizsgálni, hogy vajon milyen folyamat illeszkedik leginkább az idősorunkhoz. Az egyszerűség és a paraméterek számának alacsonyan tartása végett az autoregressziós modelltől kezdve haladunk. Nyilvánvaló, hogy értelmetlen egy 8-10 paramétert kínáló modellel dolgoznunk, hiszen a nagy paraméterszám nagy bizonytalansággal is jár.

Kezdetnek egy egyszerű autoregresszióval próbálkoztunk meg. Ezen esetben a program kiválasztja a számunkra szükséges paraméterek szá-

[1]Az egyes mintabeli elemek eltérése a modellbeli elemekhez képest.




**3.4. ábra.**




**3.5. ábra.**

mát is, figyelembe véve, hogy minél jobb illeszkedést[2] kapjunk az adatainkhoz képest. A parancsot végehajtva azt a választ kapjuk, hogy esetünkben egy 41-ed rendű autoregresszió lenne a legmegfelelőbb autoreg-

[2]Az illeszkedést szabályozó kritérium az úgynevezett AIC értéke, amely több szempontot is figyelembe véve számszerűsíti egy statisztikai modell jóságát.

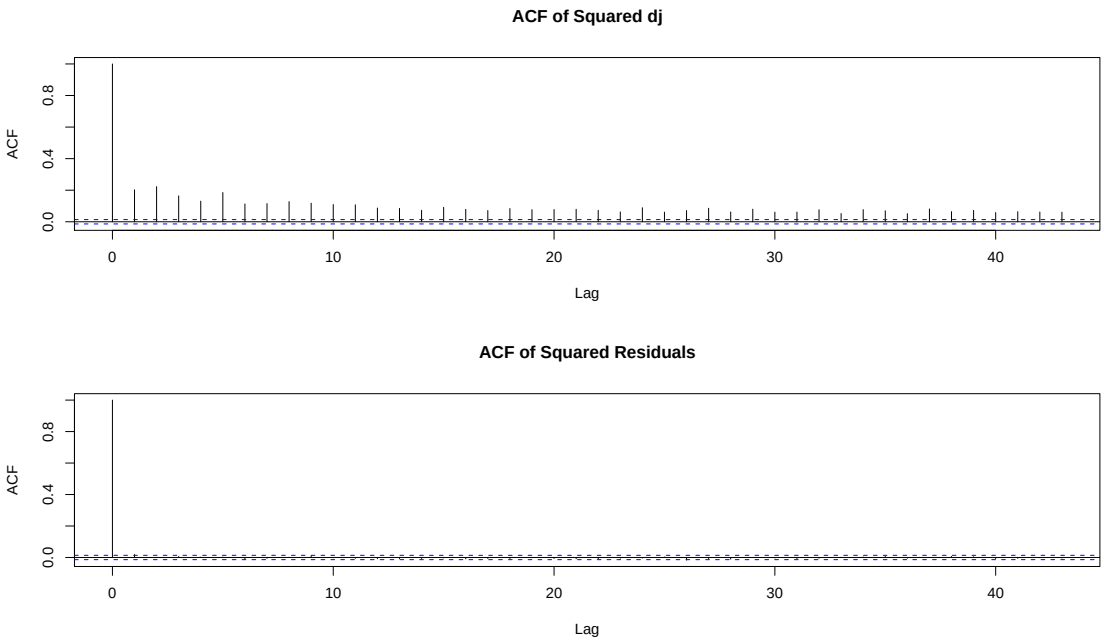
ressziós modell, még a szükséges együtthatókról is kapunk egy listát. Mit is kezdhetünk a fenti információval? Mivel célunk, hogy minél kevesebb paraméter – azaz együttható legyen – nem elégszünk meg ezzel a modellel.

Hasonlóan járunk el, amikor más-más jellegű idősorokat próbálunk felfedezni a mintánkban. Részletesen elsőként az ARMA modellt vizsgáljuk. Elsőként próbálkozzunk az ARMA(1,1) típussal; amennyiben ez nem felelne meg, később az ARMA(1,2), ARMA(2,1) és ARMA(2,2) modellekkel kísérletezünk, fokozatosan növelve a paraméterek számát. A modellek reziduálisainak korreláltsága dönt majd arról, hogy szükséges-e GARCH illesztéssel próbálkoznunk. (A paraméterek számának további növelése helyett.)

Ezekben az esetekben azt láthatjuk, hogy míg a reziduálisok autokorreláció függvénye megfelelő, addig a négyzetük nem tűnik el a magasabb rendekben. Ilyen esetekben szoktak megpróbálkozni egy GARCH illesztéssel. Általában egy GARCH(1,1) is elegendő. Mi vizsgáljuk meg az ARMA modellek esetéhez hasonlóan a GARCH(1,2) GARCH(2,1), és GARCH(2,2) modelleket is.

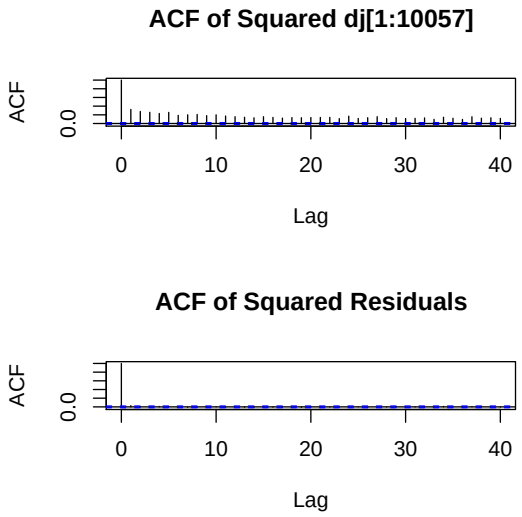
Az illesztéseket ismét elvégzi a számítógép helyettünk, mi csak a paraméterek számát adjuk meg kezdetnek. GARCH$(p, q)$ esetén a program megadja nekünk az együtthatókat, és kiírja, hogy talált-e konvergenciát vagy sem. Szerencsénkre már a GARCH(1,1) is megfelelőnek tűnik, hiszen relatív konvergenciát talál. Együtthatóit elmentjük, és megvizsgáljuk a reziduálisok viselkedését (3.6. ábra).

Kíváncsiságból megtekinthetjük, milyen eredményt ad a másik három illesztés. GARCH(1,2) esetén szingularitásba ütközünk; GARCH(2,1) esetén nem találunk konvergenciát. GARCH(2,2) esetén ismét szingularitási probléma jelentkezik és a kiértékelés nem ér a végére. Úgy döntöttünk tehát, hogy maradunk a GARCH(1,1) modell mellett. Ellenőrzésképpen kettévágva az adatsort, az első, illetve második felére is elvégeztük az illesztést, és azt tapasztaltuk, hogy a relatív konvergencia



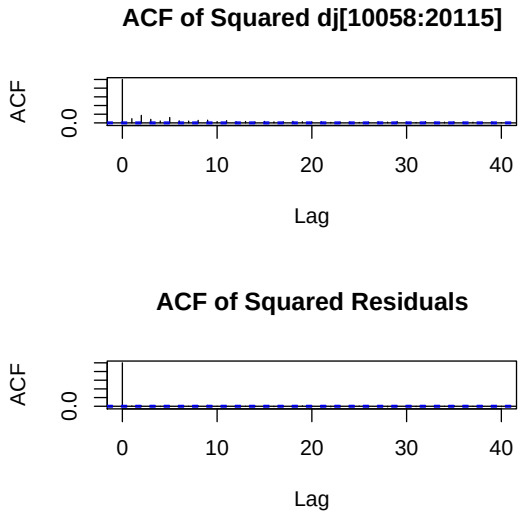

**3.6. ábra.**

ezekre is fenn áll GARCH(1,1) esetén (3.7. és 3.8. ábrák).




**3.7. ábra.**

Együtthatóink tehát $\alpha_1 = 8,43 \cdot 10^{-7}$, $\alpha_2 = 7,548 \cdot 10^{-2}$ és $\beta_1 = 9,191 \cdot 10^{-1}$ lesznek. Egy, már elégségesen illeszkedő modell birtokában nézzük ismét a reziduálisokat. Ezek eloszlására lennénk most kíváncsiak, hogy meghatározhassuk a generáló $t$-eloszlás paramétereit. Azt kapjuk, hogy a medián $m = 4,497 \cdot 10^{-2}$, a fél-interkvartilis $s = 8,236 \cdot 10^{-1}$, a szabadsági fokok száma pedig megközelítően $df = 6,3888$.ó

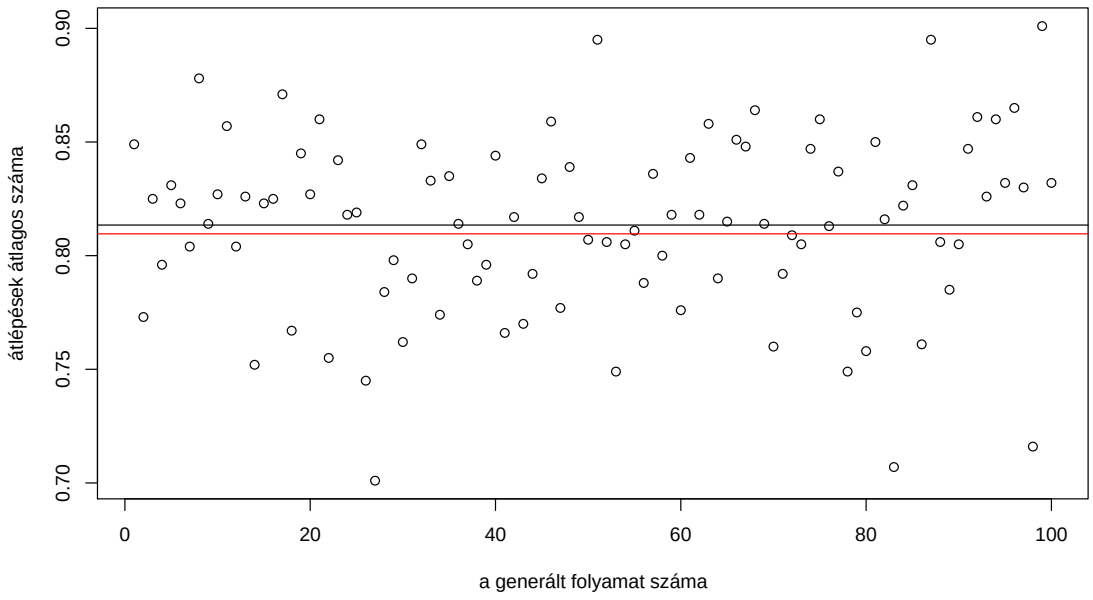



**3.8. ábra.**

Eljutottunk tehát ahhoz a ponthoz, amikor feltételezéseink vannak a generáló eloszlásra, illetve magára a folyamaton belüli összefüggésekre nézve. A modellt ekkor megpróbáltuk felépíteni. Először is generáltunk a fenti paraméterek segítségével egy $t$-eloszlású, egymillió elemmel rendelkező adathalmazt. Ezt követően írtunk egy pár soros programot, amely az így kapott együtthatók segítségével ezer különböző, ezer periódus hosszúságú GARCH(1,1) folyamatot rendez egy mátrixba. Az ily módon előálló $1000 \times 1000$ méretű mátrix minden egyes sora egy, a fenti paraméterekkel rendelkező GARCH(1,1) folyamatnak ezer lépéses megvalósulása. Ennek párjaként, a tényleges index későbbi visszaszámolása érdekében egy olyan mátrixot készítünk el, amelynek elemei az előzőek alapján számított, modellbeli tőzsdeindexeket tartalmazzák. Összességében ezzel a megoldással nem is egy, hanem ezer, általunk generált modell áll a rendelkezésünkre, hogy megértsük a mintában észlelt folymatok működését.

Ezek után megvizsgáltuk, hogy mennyiben hasonlít a mátrix egyes sorainak viselkedése az adatsorunk viselkedéséhez. Ehhez először is azt vizsgáltuk, mennyire jellemző, hogy az adatok átlépnek egy bizonyos szintet. A munka ezen részének a tanulsága az, hogy csupán sok, különböző küszöbbel történő próbálkozás által nyert tapasztalatok révén

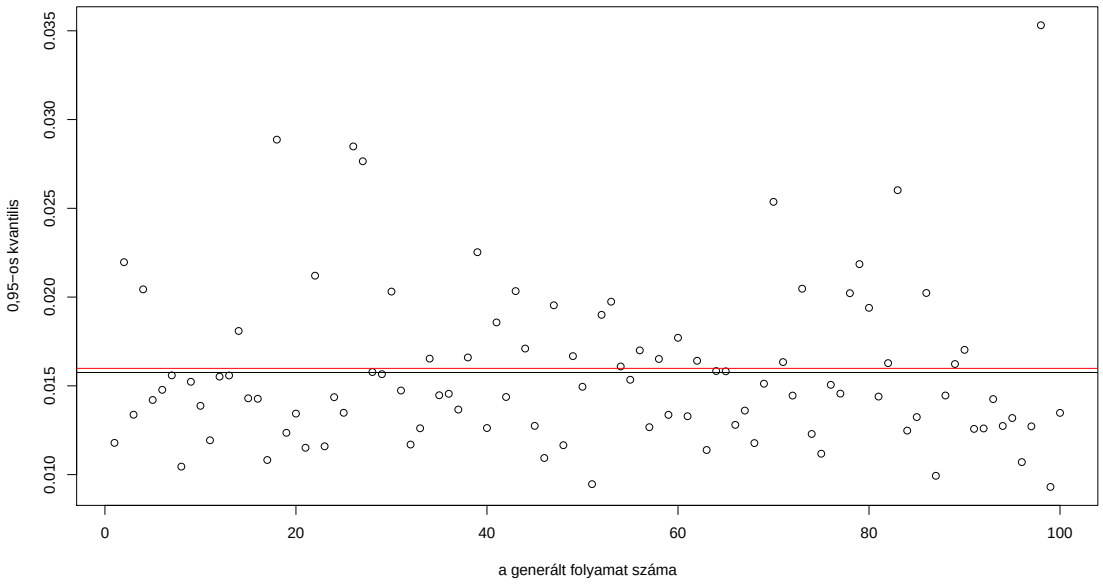
leszünk tisztában azzal, hogy az egyes megfigyelések milyen arányban lépik túl a különböző küszöbszinteket. Példaként elkészítettünk egy vektort, amelynek elemei azt mutatják, hogy a főmátrix egyes soraiban lévő – azaz egy-egy folyamaton belüli – elemek átlagosan hányszor lépik át ezt a küszöböt. Ezt követően a vektor elemeinek átlagát ábrázoltuk. Hasonlóan járunk el a minta tekintetében is: összeszámoljuk, hogy átlagosan hányszor lépi át az általunk aktuálisan kiválasztott 0,007-es küszöböt (piros színnel a 3.9. ábrán).




**3.9. ábra.**

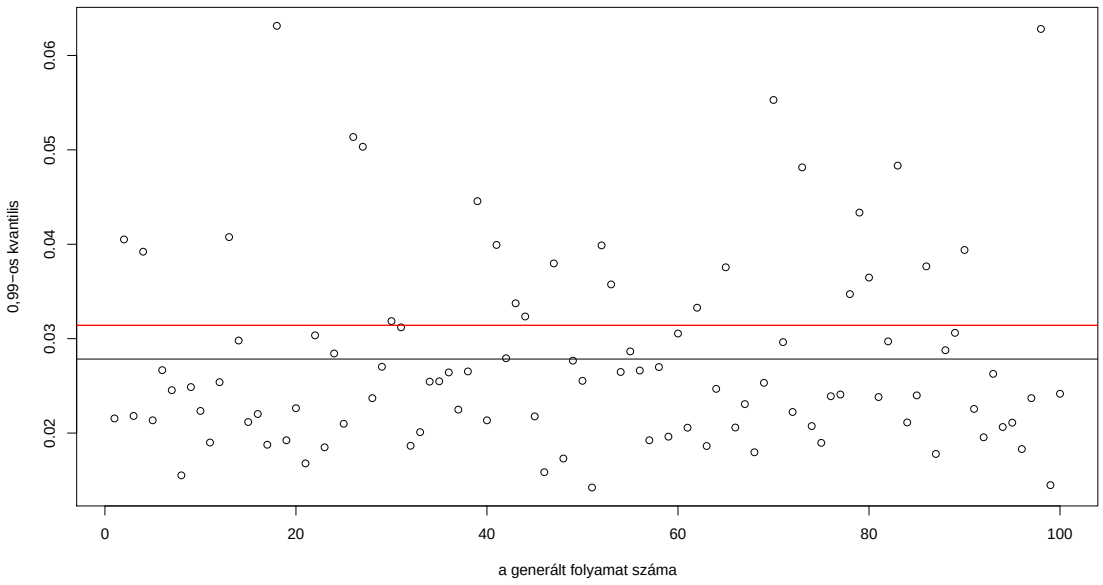
Egy másik érdekes kérdés, hogy milyen küszöb határozza meg azt, hogy az elemek egy adott százaléka még a küszöb alatt tartózkodjon. Készítettünk tehát egy újabb vektort, amely elemei a mátrixban található folyamatok 0,95-os kvantilise minden egyes sorra, azaz folyamatra nézve. Ezek átlagát hasonlítottuk össze a minta 0,95-os kvantilisével (az eltérés $10^{-4}$ nagyságrendű): a vektorból számolt átlag: $1,575 \cdot 10^{-2}$, a minta kvantilise pedig $1,598 \cdot 10^{-2}$. A vektor elemeit együtt ábrázoltuk az imént kapott kvantilisek átlagával, illetve a minta kvantilisével (piros színnel a 3.10. ábrán).

Kvantilisek esetén is érdemes más küszöbökkel is kísérletezni. Néz-




**3.10. ábra.**

zük például, hogy az elemek 99% -a milyen küszöb alatt található a modellben, illetve a mintában (piros színnel a 3.11. ábrán).

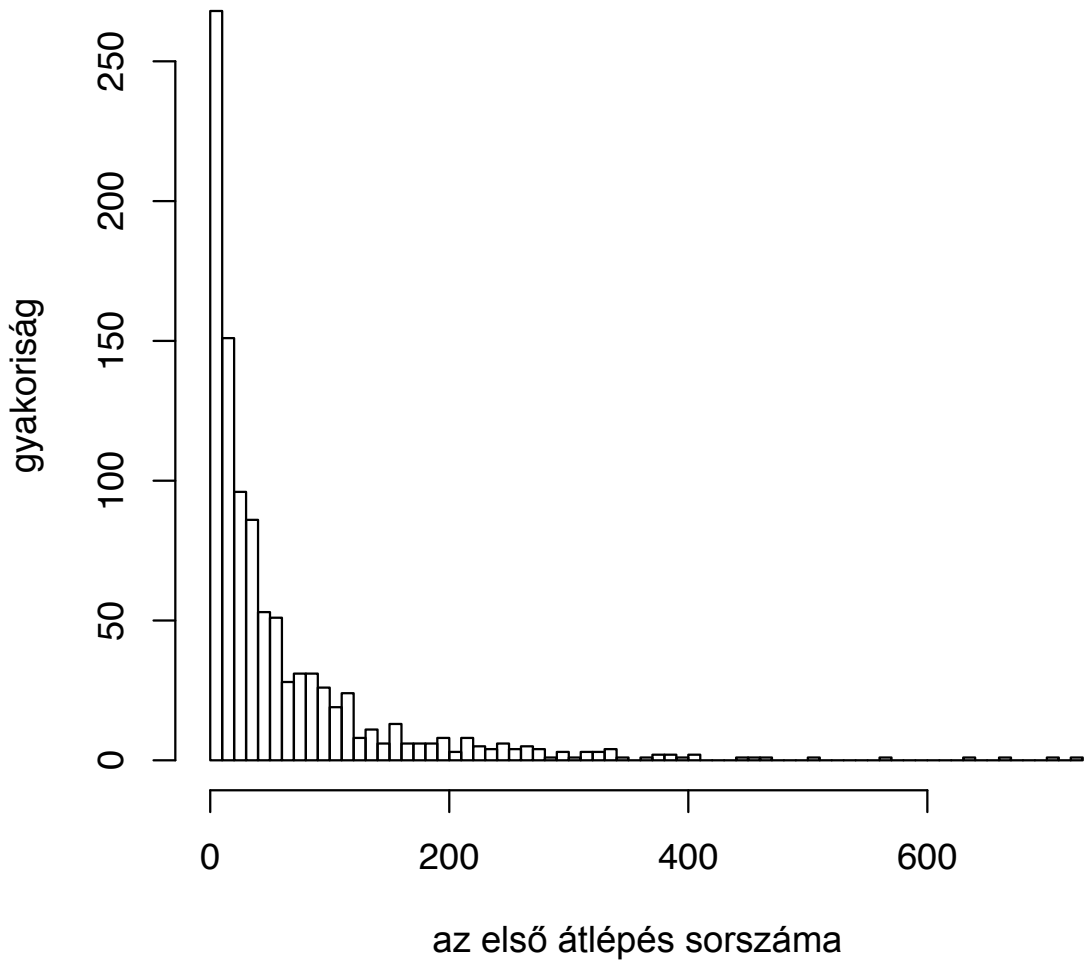



**3.11. ábra.**

Látható, hogy az eltérés sokkal szembetűnőbb, mint előző esetben. Ezen nem is csodálkozunk, hiszen az elemek egyetlen százaléka eshet csak kívűl a küszöbön, azaz az anomáliák hatása abban az egyetlen

kimaradó százalékban felerősödik.

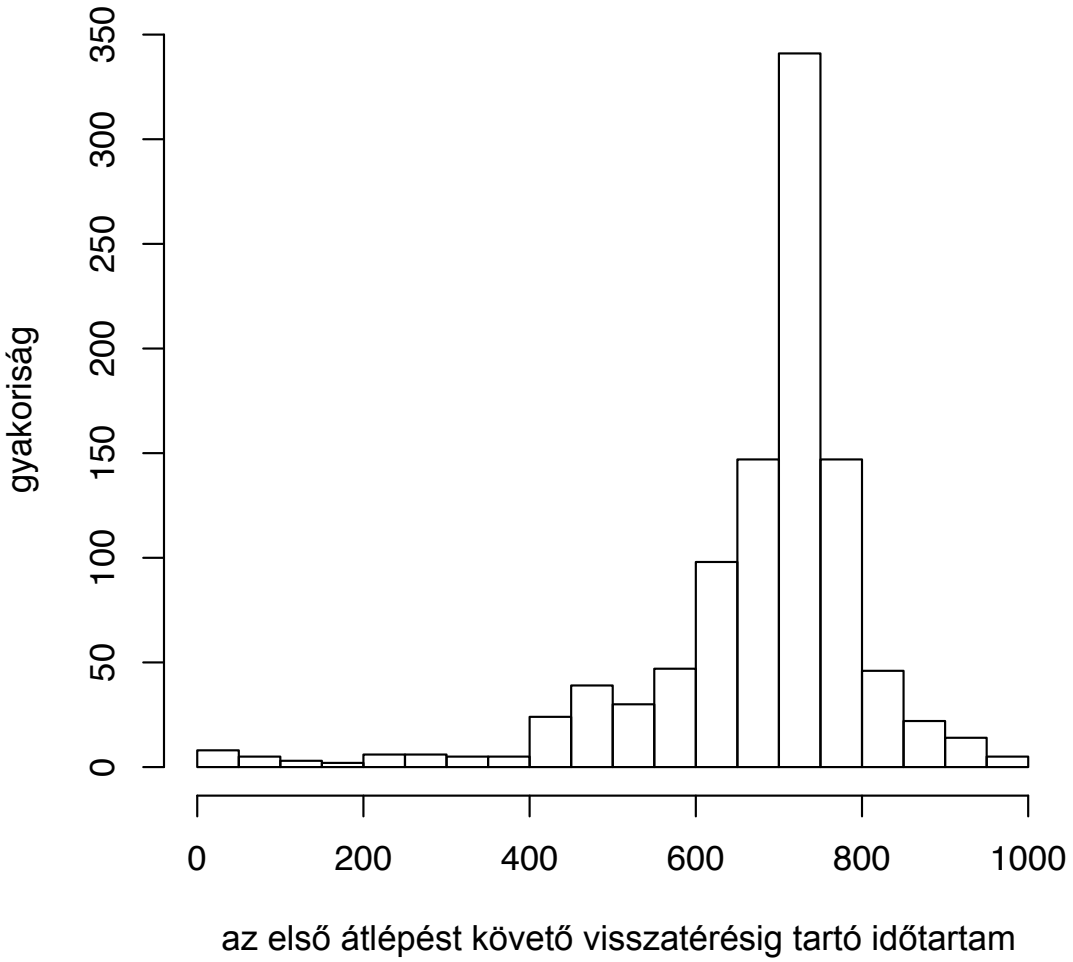
Ismerkedjünk más szempontból is a mintával! Megvizsgáltuk például, hogy az utóbb számolt 95%-os kvantilis szintjét mikor lépi át először a mintabeli folyamat, és mikor csúszik bele az általunk generált ezer modell. Bár hosszútávú következtetések alapjául a következő hisztogram (3.12. ábra) nem szolgál, mégis leolvashatjuk róla, hogy az átlépések legtöbbször igen hamar megtörténnek, és ritka, hogy a kereskedelembe való belépést követően 200-300 kereskedelmi napon át nem történnek nagyobb ugrások.




**3.12. ábra.**

Ábrázolhatjuk továbbá, hogy az ilyen folyamatok mikor térnek vissza újra e kvantilis szint fölé az első átlépést követően (3.13. ábra).

Ráadásképpen írtunk egy rövid programot, amely a kereskedelembe




**3.13. ábra.**

tetszőleges időpontban történő csatlakozást követően a fentieket ellenőrzi a mintánkban is: mikor lépjük át a kívánt kvantilist; mikor történik a következő visszatérés; mennyi ideig maradunk ekkor a küszöb felett.

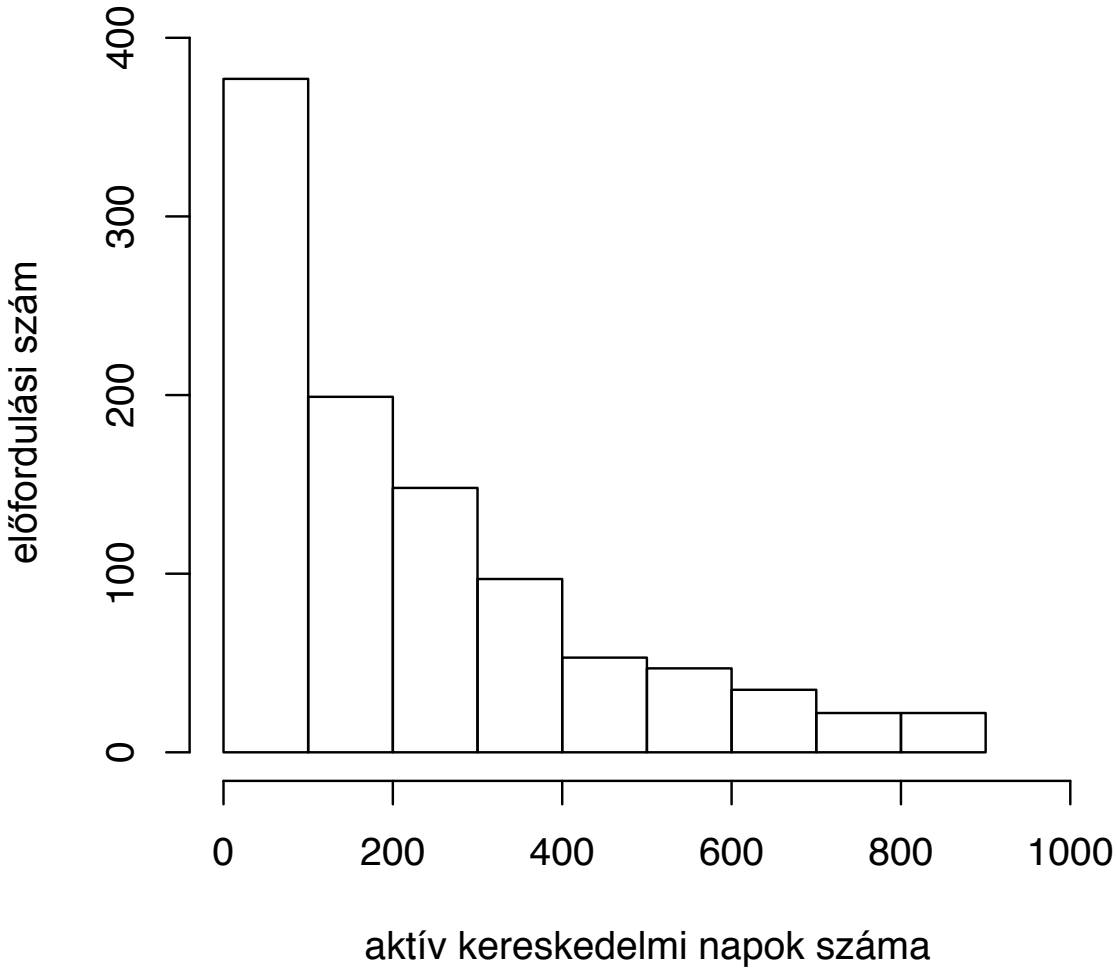
# 4. fejezet

# Leegyszerűsített kereskedelem

A következőkben eljátszunk a gondolattal, hogy 1932. szeptember 27-én, azaz tetszőleges napon (nevezetesen az ezredik adat a mintánkban) becsatlakozunk a kereskedelembe. Ismerjük tehát a tőzsde első ezer lépését, és szeretnénk valamilyen stratégia szerint cselekedni a továbbiakban. A stratégiák kidolgozásának és elemzésének múltját és hagyományait nem tudjuk áttekinteni, de egy pár módszer heurisztikusan felépített, leegyszerűsített másolatát kipróbálhatjuk ezen a modellen, és máris játékosabbá és könnyedebbé tehetjük a téma feldolgozását.

Első esetként tegyük fel, hogy végtelen sokáig várhatunk, és az első kijelölt küszöb átlépésénél – azaz akkor, amikor nagy változás következik be – azonnal kiszállunk a kereskedésből. Legyünk óvatosak: a 99%-os kvantilist jelöljük meg első küszöbnek. Ekkor a minta szerint az 1106. napon, azaz 106 kereskedelmi nap után vesszük ki a pénzünket. A modellben ez elég korainak számít: az első átlépések átlaga 223,3 nap, viszont viszonylag nagy szórással rendelkező adatról van szó: a szórás 209,4. A legrövidebb kereskedelmi időtartam az 1000 modellbeli folyamat során 1 nap, a leghosszabb pedig 890 kereskedelmi nap (4.1. ábra).

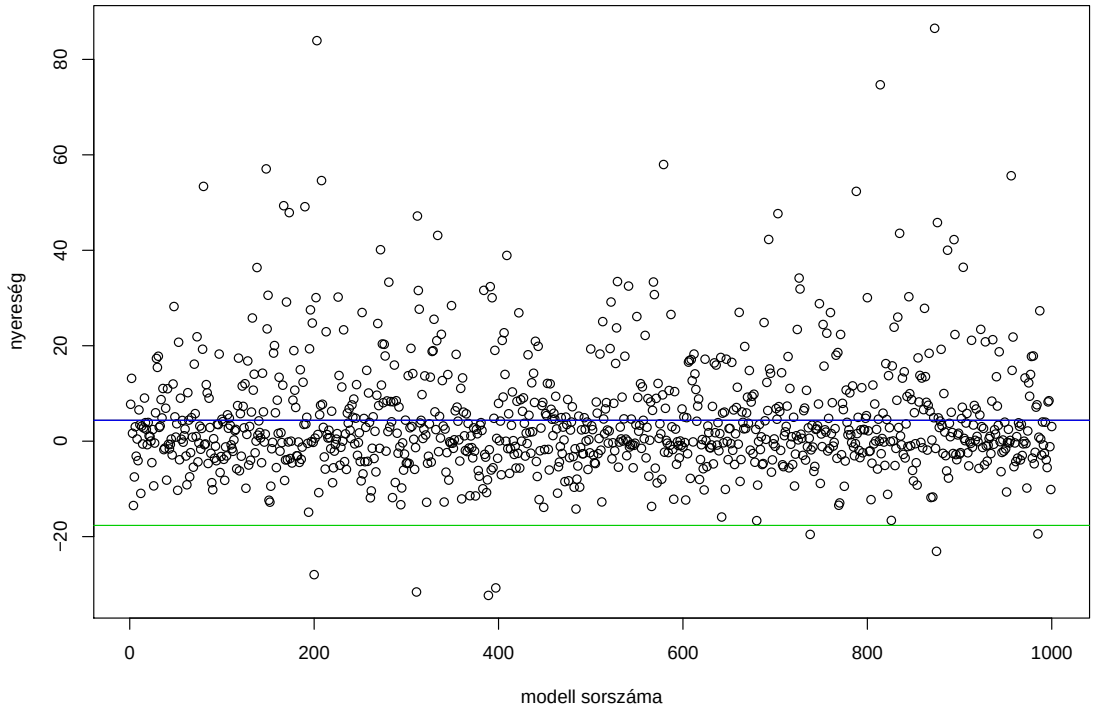
A modellezés elején elkészített második mátrixot felhasználva ki is számíthatjuk, hogy ezer ilyen esetben mekkora átlagos nyereséggel számolhatunk, illetve megfigyelhetjük, hogy a megvalósuló esemény ehhez képest mekkora nyereséggel szolgál (rendre kék, illetve zöld színnel a 4.2. ábrán). Láthatjuk, hogy ebben a konkrét esetben veszteségesen zár-




**4.1. ábra.**

tuk volna a kereskedést, de alapvetően pozitív kimenetelre számíthatunk ezzel a stratégiával.

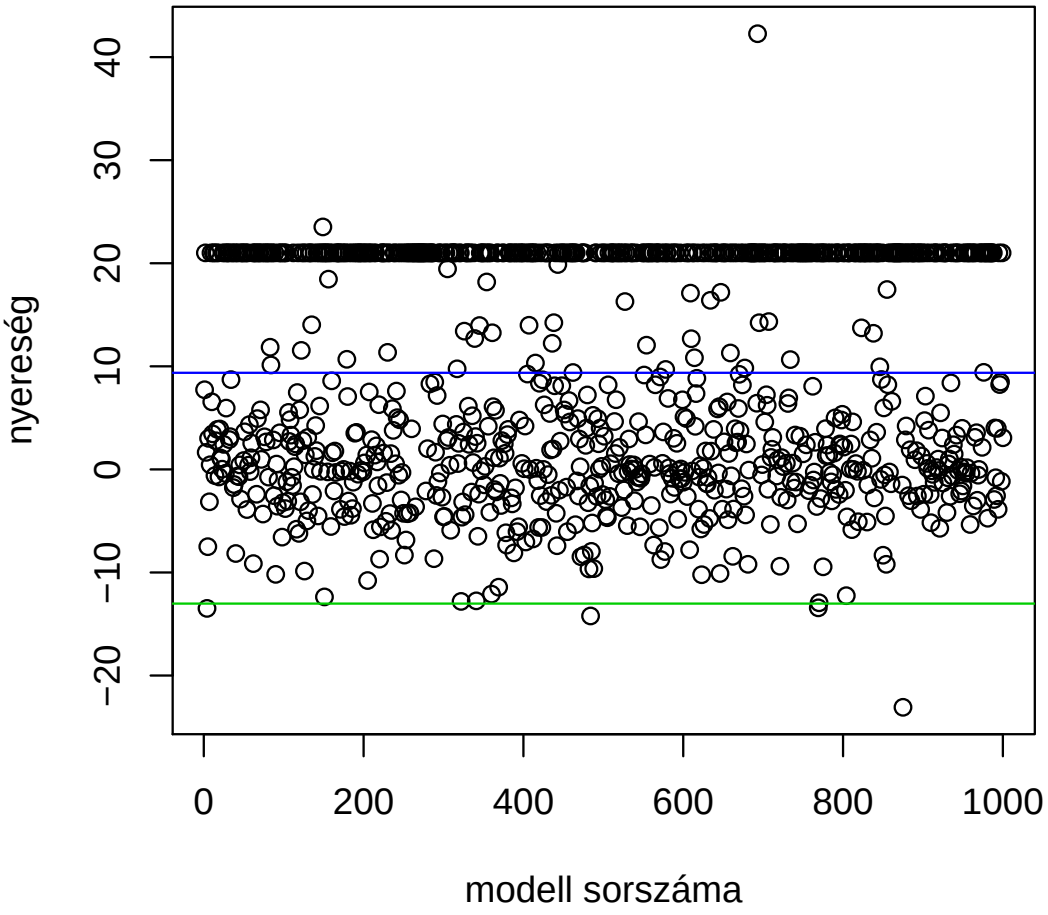
A valóságban azonban ritkán fordul elő, hogy tetszőlegesen sokáig rendelkezünk azokkal a képességekkel és körülményekkel, amelyek a kereskedelmet lehetővé teszik számunkra. Érthető tehát, ha módosítjuk az előző elképzelésünket azzal a kitétellel, hogy az előző stratégiát kiegészítve egy megkötéssel élünk a kereskedelmi napok számát illetően: egy adott lépésszámot követően mindenképpen eladjuk, amink van. Tetszőlegesen variálható ez a korlát; próbálkozhatunk, hogy hogyan változik az így várható nyeremények minimuma, maximuma, átlaga, tekintettel a megkötésre. Példaként azt a megkötést tettük, hogy 200 napon belül mindenképpen ki kell szállnunk a kereskedelemből. Megint csak veszte-




**4.2. ábra.**

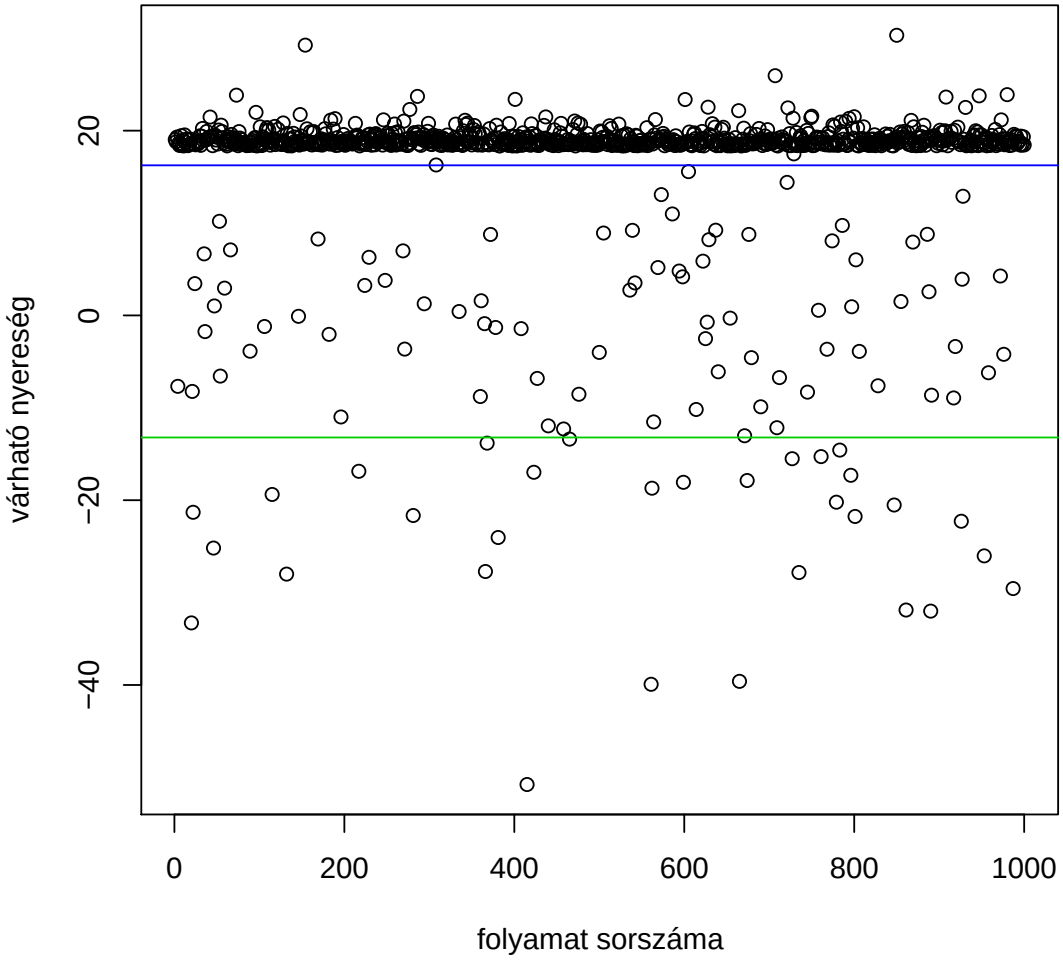
séggel zárnánk a valóságnak megfelelően, hiszen már egy megelőző kereskedelmi napon elérjük azt a kvantilis adta szintet, ahol abbahagyjuk a kereskedést. Ha tovább csökkentjük (akár 100 nap alá) a lehetséges kereskedési időtartam hosszát, akkor is veszteséggel zárnánk, bár a modellek szerint átlagosan nyereséggel zárnánk az ilyen stratégiájú kereskedést (4.3. ábra).

Zárásként az utolsó kereskedési stratégia, amelyhez hasonlót megtekintük, az úgynevezett „stop-loss” stratégia. Ekkor nem csak az időtartamot korlátozzuk, hanem azt is, hogy mekkora időközbeni veszteség esetén hagyjuk el azonnal a tőzsdét. Akkor is kivesszük a pénzünket, amennyiben a mutató nem nő tovább, de a kereskedés megkezdéséhez viszonyítva adott időpillanatban több pénzünk van. Az adatsor 1500. kereskedelmi napjánál lépünk be és ezer kereskedési napot várunk. A 4.4. ábra azt az esetet mutatja be, amikor 10%-os veszteség, illetve 20%-os nyereség esetén hagyjuk abba a kereskedést az imént tárgyalt feltételek mellett. A számításhoz a modelleket tartalmazó mátrixokat az 1500. nap




**4.3. ábra.**

adataiból újra generáljuk, és az új modellek segítségével számolunk. A megvalósuló nyereség (zöld színnel) láthatóan sajnos most sem éri el a várható átlagos nyereséget (kék színnel).


20
0
−20
−40
várható nyereség
0
200
400
600
800
1000
folyamat sorszáma

**4.4. ábra.**

# 5. fejezet

# Összefoglalás

A dolgozat célja, hogy bemutassa az időváltozójú jelenségek matematikai modellezésének egy leegyszerűsített, középiskolában is tárgyalható formáját.

A dolgozat elején a modellalkotás didaktikai jelentőségéről esett szó, majd röviden áttekintettük az anyag elsajátításához szükséges középiskolai előismereteket. Ezt követően megvizsgáltunk pár tulajdonságot, amelyek alapján nevezetes idősorokat tárgyalhatunk és hasonlíthatunk össze. A dolgozat utolsó részében a Dow Jones index zárási adatait vizsgáltuk, mégpedig kereskedési stratégiákon gondolkodva. Ehhez megvizsgáltuk, milyen elméleti modell illeszkedik legjobban a zárási adatsorból konvertált idősorhoz, és ezt a modellt megvalósítva próbáltuk ki a különböző kereskedési stratégiák működését. Három stratégiát építettünk fel: az elsőben korlátlan ideig kereskedtünk, és a gyors változásokat követően hagytuk el a piacot; a második stratégia egy időkorláttal gazdagította az elsőt. A harmadik stratégia magas veszteségek, illetve nyereségek esetén hagyta el a piacot, szintén korlátozott időtartamban gondolkodva. Sajnos mindhárom stratégia optimistábbnak bizonyult a valóságnál: az átlagos várható nyereséghez képest általában veszteséggel zárult piaci tartózkodásunk.

Azonban ne hagyjuk figyelmen kívül azt a tényt, hogy a tárgyalt modell és stratégiák is csupán egyszerűsített változatai azoknak a módszereknek, amelyeknek a valódi tőzsdén hasznát vehetnénk. Nem szabad

túlértékelnünk eredményeinket, de nem is az volt a célunk, hogy felsőfokú matematikai ismereteket erőltessünk a középiskolai keretek közé. A dolgozat célja csupán az volt, hogy megalapozza és bemutassa a modellalkotás oktatásának egy lehetőségét.

A minket körülvevő jelenségek matematikai megközelítése nem csak érdekes, de hasznos és élvezetes tapasztalatokkal gazdagítja mindennapjainkat. A módszer alkalmazása betekintést ad a világ statisztikai alapokon történő megértésébe, a véletlen jelenségek működésébe, a matematikus gondolkodásának feltárásába. Nem szükséges, hogy a statisztikai adatok elemzése kizárólag szociológiai és gazdasági adatok feldolgozásán alapuljon: életünkben lépten-nyomon találkozhatunk olyan jelenségekkel, amelyek modellezése a tárgyalt megközelítési módon is lehetséges. Emellett programozási, nyelvi, információs kultúránk is gazdagodik, és ezen témakör feldolgozása a matematika más területeken való alkalmazására biztat minket. Azt a szemléletet szerettem volna közvetíteni, hogy a matematikai gondolkodásmód nem kizárólag a logikai-analitikus módszereket jelentheti, és ez a tapasztalat elengedhetetlen egy olyan korban, amelyben a tudományos paradigmák alapvetően a statisztikai szemléletet követik. Nem a matematikussá nevelés vagy a számítógépes programozás diákokra erőltetése a célunk, hanem az, hogy minimális eszközhasználattal nyerjünk betekintést egy véletlen események alkotta világ harmóniájába.

# Függelék

## Programozás az R környezetben

Az R statisztikai programcsomag egy bárki számára ingyenesen hozzáférhető, nyílt forráskódú szoftver. Főként statisztikai alkalmazásokra fejlesztetették ki és fejlesztetik még ma is matematikusok és programozók szerte a világban. Ennek köszönhetően egyes problémák orvoslására számos megoldási módot kínálnak a szintén ingyenesen használható kiegészítő csomagok. A számunkra kiegészítőként telepítendő programcsomagok nagyon könnyen hozzáférhetőek, telepítésükről és használatukról részletes leírás az interneten található[1].

Az általunk használt két kiegészítő-programcsomag a *MASS* és a *tseries*. Ezek segítenek az illesztéseket és a paraméterek becslését elvégezni helyettünk. Működésük és számítási módszereik részletesen megismerhetők, sőt át is alakíthatók a nyílt forráskódnak köszönhetően.

A függelékben a dolgozatban tárgyalt műveletek R-ben történő megvalósítását ismertetem. Először is betöltjük az adatokat, amelyekkel dolgozunk, és vesszük a logaritmikus differenciáikat.

```
DJ<-scan("DJ.txt")
dj<-diff(log(DJ))
```

Ezt követően autoregresszió, ARMA$(p, q)$, majd GARCH$(p, q)$ modell illesztésével próbálkozunk. A kívánt paramétereket kijegyzeteljük, az illesztésekre jellemző grafikonokat (az adatsor és a reziduálisok, hisztogramjaik, a kvantilisek, másodrendben az autokorrelációs függvények)

[1] http://www.r-project.org/

értékeljük. Amikor azt tapasztaljuk, hogy GARCH$(p, q)$ illesztésre lesz szükség, a reziduálisokat is kiírjuk.

```
ar(dj)
arma11<-arma(dj, order=c(1,1))
plot(arma11)
arma12<-arma(dj, order=c(1,2))
plot(arma12)
arma21<-arma(dj, order=c(2,1))
plot(arma21)
arma22<-arma(dj, order=c(2,2))
plot(arma22)
garch(dj,order=c(1,1),trace = FALSE)
garch(dj,order=c(2,1),trace = FALSE)
dj.garch<-garch(dj,order=c(2,1))
sum(as.numeric(dj<0.007))
quantile(dj,0.95)
plot(dj.garch)
res<-residuals(dj.garch)
garch(dj,order=c(1,2),trace = FALSE)
dj.garch2<-garch(dj,order=c(1,2))
sum(as.numeric(dj<0.007))
quantile(dj,0.95)
plot(dj.garch2)
residuals(dj.garch2)
res2<-residuals(dj.garch2)
garch(dj,order=c(2,2),trace = FALSE)
dj.garch3<-garch(dj,order=c(2, 2))
sum(as.numeric(dj<0.007))
quantile(dj,0.95)
plot(dj.garch3)
residuals(dj.garch3)
```

```
res3<-residuals(dj.garch3)
dj.garch1<-garch(dj,order=c(1, 1))
plot(dj.garch1)
a0=8.430e-07
a1=7.548e-02
b1=9.191e-01
```

Ezt követően megnézzük, hogy az adatsor hányszor marad a 0,007 küszöb alatt, illetve, hogy mekkora a 95%-os kvantilise.

```
sum(as.numeric(dj<0.007))
quantile(dj,0.95)
```

Annak érdekében, hogy meggyőződjünk az illesztés helyességéről, kettévágjuk az adatsort, és a folyamat első, illetve második felére is illesztünk.

```
djfit5=garch(dj[1:10057],order=c(1,1))
djfit6=garch(dj[10058:20115],order=c(1,1))
```

A reziduálisokra illesztve megkeressük a $t$-eloszlás paramétereit.

```
res1<-residuals(dj.garch1)
fitdistr(res1[!is.na(res1)], "t")
m=0.044971529
s=0.823587762
df=6.388786057
```

Generáljuk a mátrixokat.

```
td=rt(1000*1000,6.387697560)*0.823516027 +0.044942466)
j=1
k=1
x0=dj[1000]
s=rep(NA,1000)
x=matrix(NA,1000,1000)
for (j in 1:1000) {
s[1]=sqrt(a0+a1*x0*x0)
x[j,1]=s[1]*td[1+((j-1)*1000)]
```

```
s[2]=sqrt(a0+a1*x[1]^2+b1*s[1]^2)
x[j,2]=s[2]*td[2+((j-1)*1000)]
for (k in 3:1000) {
s[k]= sqrt(a0+a1*x[j,k-1]^2+b1*s[k-1]^2)
x[j,k]= s[k]*td[k+((j-1)*1000)]
}
}
i=1
j=1
X0=DJ[1000]
X=matrix(NA,1000,1000)
for (i in 1:1000) {
X[i,1]=X0*(exp(x0))
for (j in 2:1000){
X[i,j]=X[i,(j-1)]*(exp(x[i,(j-1)]))
}
}
```

Az első mátrix soraira egyenként illesztünk egy-egy GARCH(1,1) modellt, és megvizsgáljuk, hogy az illesztett folyamatok hányszor lépik át a 0,007-es határt, illetve, hogy mekkora a 95%-os és a 99%-os kvantilisük. Minderről grafikonokat is készítünk.

```
q95=rep(NA,1000)
no007=rep(NA,1000)
for(i in 1:1000){
y=x[i,]
y.garch1<-garch(y,order=c(1,1))
no007[i]<-sum(as.numeric(y<0.007))/length(y)
q95[i]<-quantile(y,0.95)
}
plot(no007[1:100])
abline(mean(no007[1:100]),0)
```

```
abline(sum(as.numeric(dj<0.007))/length(dj),0,col=2)
q99=rep(NA,1000)
no007=rep(NA,1000)
for(i in 1:1000){
y=x[i,]
y.garch1<-garch(y,order=c(1,1))
no007[i]<-sum(as.numeric(y<quantile(dj,0.99)))/length(y)
q99[i]<-quantile(y,0.99)
}
plot(no007[1:1000])
abline(sum(as.numeric(dj<quantile(dj,0.99)))/[...]
 [...]length(dj),0,col=2)
abline(quantile(dj,0.99),0,col=2)
```

Megvizsgáljuk a 95%-os kvantiliseket a mátrixban, és azt, hogy a modellbeli folyamatok hányszor lépik át a mintabeli adatsor kvantilisét. Az első átlépéseket, illetve a visszatéréseket, valamint az újbóli átlépéseket is megkeressük, és hisztogramon ábrázoljuk őket.

```
q=rep(NA,1000)
for (i in 1:1000) {
q[i] = quantile(x[i,],0.95)
}
plot(q)
abline(quantile(dj,0.95),0,col=2)
i=1
k=rep(NA,1000)
for (i in 1:1000) {
k[i]=sum(as.numeric(x[i,]>=quantile(dj,0.95)))
}
ko=rep(NA,1000)
m <- 1:1000
for (i in 1:1000) {
```

```
ko[i]=min( m[(x[i,]>=q[i])])
}
hist(ko,nclass=25)
i=1
j=1
ko2=rep(NA,1000)
n<- matrix(1:1000,1000,1000)
m=t(n)
for (i in 1:1000) {
for (j in 1:ko[i]) {
m[i,j]=1000
}
ko2[i]=min(m[i,(q[i]>=x[i,])])
}
hist(ko2-ko)
ko3=rep(NA,1000)
o<-1:1000
for (i in 1:1000){
for (j in 1:ko2[i]){
o[j]=1000
ko3[i]=min(o[(x[i,]>=q[i])])
}
}
hist(ko3-ko2)
fent<-(ko2-ko)
lent<-(ko3-ko2)
```

Elsőszört azt nézzük meg, hogy tetszőleges belépést követően hogyan tudjuk kiszámítani az előbb vizsgált átlépéseket tetszőleges kvantilis által meghatározott küszöb esetén. (Az 1021. kereskedési napon kezdjük a kereskedést, és 90%-os kvantilissel dolgozunk.)

```
be=1021
i=1
kdj=0
m=1:length(dj)
j=1
kdj2=0
n=1:length(dj)
b=1
kdj3=0
o=1:length(dj)
for (i in 1:be) {
m[i]=length(dj)
kdj=min(m[(dj>=quantile(dj,0.99))])
}
for (j in 1:kdj) {
n[j]=length(dj)
}
kdj2=min(n[(dj<=quantile(dj,0.99))])
for (b in 1:kdj2) {
o[b]=length(dj)
}
kdj3=min(o[(dj>=quantile(dj,0.99))])
```

Az első stratégia szerint végtelen ideig kereskedünk, és megfelelően nagy változások esetén eladjuk a részvényeinket. A nyereséget grafikonon ábrázoljuk.

```
Q=0.99
QQ=quantile(dj[1:1000],Q)
be=1000
q=rep(NA,1000)
i=1
for (i in 1:1000) {
```

```
q[i] = quantile(x[i,],Q)
}
i=1
kdj=0
m=1:length(dj)
for (i in 1:be) {
m[i]=length(dj)
kdj=min(m[(dj>=quantile(dj[1:1000],Q))])
}
ko=rep(NA,1000)
m<-1:1000
for (i in 1:1000) {
ko[i]=min( m[(x[i,]>=q[i])])
}
i=1
ny=rep(NA,1001)
for (i in 1:1000) {
ny[i]=X[i,ko[i]]-X[i,1]
}
plot(ny)
abline(DJ[kdj]-DJ[1000],0,col=3)
mean(ko)
sqrt(var(ko))
max(ko)
min(ko)
```

A második módszerben meghatározzuk a maximális lépésszámot is ($L$). Megnézzük a leghosszabb és a legrövidebb bent tartózkodás hosszúságát, illetve a kereskedési időtartam átlagát és szórását.

```
L=400
be=1000
Q=0.99
```

```
q=rep(NA,1000)
i=1
for (i in 1:1000){
q[i] = quantile(x[i,],Q)
}
i=1
kdj=0
m=1:length(dj)
for (i in 1:be) {
m[i]=length(dj)
kdj=min(m[(dj>=quantile(dj,Q))])
}
ko=rep(NA,1000)
m <- 1:1000
for (i in 1:1000) {
ko[i]=min( m[(x[i,]>=q[i])])
}
i=1
tulfut=rep(NA,1000)
for (i in 1:1000) {
tulfut[i]=as.numeric(ko[i]>L)
}
i=1
ny2=rep(NA,1000)
for (i in 1:1000) {
ny2[i]=(X[i,ko[i]]-X[i,1])+tulfut[i]*[...]
 [...]((DJ[1500]-DJ[1000])-(X[i,ko[i]]-X[i,1]))
}
max(ko)
min(ko)
mean(ko)
```

```
sqrt(var(ko))
```

A „stop-loss” módszerhez újból elkészítjük a mátrixokat. 20%-os nyereség és 10%-os veszteség esetén hagyjuk el a piacot. Végül grafikonon ábrázoljuk a nyereséget.

```
j=1
k=1
x0=dj[1500]
s=rep(NA,1000)
x=matrix(NA,1000,1000)
for (j in 1:1000) {
s[1]=sqrt(a0+a1*x0*x0)
x[j,1]=s[1]*td[1+((j-1)*1000)]
s[2]=sqrt(a0+a1*x[1]^2+b1*s[1]^2)
x[j,2]=s[2]*td[2+((j-1)*1000)]
for (k in 3:1000) {
s[k]= sqrt(a0+a1*x[j,k-1]^2+b1*s[k-1]^2)
x[j,k]= s[k]*td[k+((j-1)*1000)]
}
}
i=1
j=1
X0=DJ[1500]
X=matrix(NA,1000,1000)
for (i in 1:1000) {
X[i,1]=X0*(exp(x0))
for (j in 2:1000){
X[i,j]=X[i,(j-1)]*(exp(x[i,(j-1)]))
}
}
L=100
ki=0.9
```

```
Lad=1.2
i=1
LE=rep(NA,1000)
m <- 1:1000
for (i in 1:1000) {
LE[i]=min(m[(X[i,]<ki*X[i,1])])
}
for (i in 1:1000) {
if(as.integer(LE[i]>10000)) LE[i]=1000
}
i=1
TUL=rep(NA,1000)
m<-1:1000
for (i in 1:1000) {
TUL[i]=min(m[X[i,]>=(X[i,1]*Lad)*[...]
 [...]as.numeric(X[i,]<(X[i,1]*Lad))])
}
for (i in 1:1000) {
if(as.integer(TUL[i]>10000)) TUL[i]=1000
}
i=1
lefut=rep(NA,1000)
for (i in 1:1000){
lefut[i]=as.numeric(LE[i]<L)
}
i=1
elad=rep(NA,1000)
for (i in 1:1000){
elad[i]=as.numeric(TUL[i]<L)
}
i=1
```

```
v3=rep(0,1000)
for (i in 1:1000){
v3[i]=X[i,1]-X[i,LE[i]]
}
i=1
ny3=rep(0,1000)
for (i in 1:1000){
ny3[i]=-X[i,1]+X[i,TUL[i]]
}
plot(ny3)
abline(DJ[kdj]-DJ[1000],0,col=3)
abline(mean(ny3),0,col=4)
```

# Irodalomjegyzék


- Alexander, Sidney S. 1961. „Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks." *Industrial Management Review* (2) 7–26.

- Ambrus András 1995. *Bevezetés a matematikadidaktikába.* Eötvös.

- Brock, W., A.,Lakonishov, J., LeBaron, B. 1992. „Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns." *Journal of Economics Dynamics and Control* (22) 1235–1274.

- Griffioen, G. A. W. 2003. *Technical Analysis in Financial Markets.* Amsterdam, Netherlands: Academisch Proefschrift aan de Universiteit van Amsterdam.

- Dr. Hajnal András és társai 2004. *Matematikai Kompetenciaterület – Szakmai koncepció és oktatási programcsomag.* http://www.sulinova.hu.

- Hamilton, J. D. 1994. *Time Series Analysis.* Princeton, NJ, U.S.A.: Princeton University Press.

- Hamilton, W. P. 1998. *The Stock Market Barometer.* Wiley, ISBN–10: 0471247642.

- Harsányi Zsuzsa és Dr. Vancsó ödön 1994. *Matematika III.* AKG Kiadó, Budapest.

- Kosztolányi József 2003. *MOZAIK NAT-2003 kerettanterv-rendszer – Középiskola* http://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/index.php.

- Novak, Joseph D. – Gowing, D. Bob 1984. *Learning How to Learn.* Cambridge University Press 6–54.

- Tóbiás Áron 2008. *Matematikai függelék* in: Major Klára (szerk.) *Markov-modellek – Elmélet, becslés és társadalomtudományi alkalmazások.* Budapesti Corvinus Egyetem Makroökonómia Tanszék és Eötvös Loránd Tudományegyetem Regionális Tudományi Tanszék. ISSN 1585-1419. 151–170.

- Dr. Vancsó ödön [Riporter: Földes Petra] 2002. „Élő matematika. Hogyan válhatnak hasznossá a matematikai ismeretek?” *'Uj pedagógiai szemle* (52) 2002. okt. 133–140.

- DJIA *Dow-Jones Industrial Average, 1928.10.01–2008.11.08.* Yahoo!FINANCE. [Elektronikus adatbázis.] Elérhető: http://finance.yahoo.com/q?s=%5Edji. Belépés dátuma: 2008. november 11.