Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS TANÍTÁSA KÖZÉPISKOLÁBAN

SZAKDOLGOZAT

Készítette:
Nagy Veronika
matematika tanár szakos hallgató

Témavezető:
Dr. Ambrus András
egyetemi docens

Budapest
2011

NYILATKOZAT

Név: Nagy Veronika

ELTE Természettudományi Kar, matematika tanár szak

ETR azonosító: navnabt.elte

Szakdolgozat címe: Differenciálszámítás tanítása középiskolában

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2011. május 25. _____

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

I. Bevezetés **4**

II. Történeti áttekintés **5**

III. Tantervek elemzése **10**

3.1. Nemzeti alaptanterv: 11

3.2. Kerettanterv: 14

3.3. Helyi tanterv: 18

IV. Tankönyvelemzés **22**

V. Feladatgyűjtemény elemzés **40**

VI. Német tankönyv bemutatása **43**

VII.Kérdőívek **60**

VIII. Kétszintű érettségi **64**

IX. Feladatgyűjtemény **79**

X. Irodalomjegyzék **96**

I. Bevezetés

A kétszintű érettségi bevezetésével a differenciálszámítás tanítása szerves részévé vált az emelt szintű matematikaoktatásnak, hiszen korábban hol belevették ezt a témakört, hol elhagyták a központi tantervből. Mikor a tanítását az emelt óraszámban matematikát tanuló diákok számára előírták, a téma követelményrendszerét, felépítését az iskola a helyi tantervében szabályozta, azonban még így is sokszor kimaradt ez a témakör, vagy csak felszínesen foglalkoztak vele. Az emelt szintű érettségi hatására azonban pontos kidolgozásra került a követelményszint, és a tananyag egységesebbé és átláthatóbbá vált.

Dolgozatomban röviden áttekintem a differenciálszámítás történetét. Kitérek a jelenlegi szabályozási rendszerre. A szakdolgozatom írása előtt több tanárral folytattam beszélgetést, és kérésemre kérdőívet is töltöttek ki, amik alapján kiderült számomra, hogy a tankönyvkérdés még nincs megoldva. Így fontos része a dolgozatomnak a tankönyvelemzés és a feladatgyűjtemények tanulmányozása. A magyaron kívül német tankönyveket is tanulmányoztam a témában. A pilisvörösvári német nemzetiségi Friedrich Schiller Gimnáziumban matematikát németül tanítok, melynek során megismerkedtem a német tankönyvekkel, a német tanítási rendszerrel. Ennek köszönhetően sok német nyelvű feladattal találkoztam. Noha magyar rendszer szerint zajlik a tanulás, elkerülhetetlen a német nyelvű matematika tankönyvek használata, amelyekkel bővíthetjük a magyar nyelvű tankönyvek feladattípusainak tárházát. Ezért a magyar tankönyvelemzés után egy német tankönyv elemzése is meg található a dolgozatomban. Igyekeztem azokat a feladattípusokat kiemelni, amelyek a magyar könyvekben háttérbe szorulnak, de a téma oktatásának szerves részét képezhetné.

Ezek után a tanári kérdőívek és diák interjúk elemzése következik, majd a kétszintű érettségi analízis témakörét érintő követelményrendszer, és a differenciálszámítás témakörében megjelent eddigi feladattípusok áttekintése, vizsgálata.

A dolgozatomat egy feladatgyűjtemény zárja, amelyben a téma érdekes, és a mai követelményeknek megfelelő, a tanításhoz segítséget nyújtó feladatok találhatók.

II. Történeti áttekintés

A differenciálszámítás története

A XVIII-XIX században sorra jelentek meg a munkagépek az ipari forradalom hatására. Ez a folyamat maga után vonta a mozgások tanulmányozását. Viszont ahhoz, hogy a mechanika is lépést tartson a fejlődéssel, nem volt elég az ókorban és a középkorban kialakult matematikai tudás. A mozgás egzakt vizsgálatához egy új matematikai ágazatnak kellett megjelennie. Ez az ág volt az analízis, azaz a végtelen kicsiny mennyiségekkel, az infinitezimálisokkal foglalkozó tudományág. Az analízis létrejöttéhez már minden elő volt készítve, hiszen az analitikus geometriát már kifejlesztették.

Az infinitezimális számításokkal kapcsolatos kutatómunka már az ókorban megjelent, Zénonnál (i. e. V. sz.), az eleai görög filozófusnál, aki Parmenidész tanítványa volt. Négy paradoxonját (Akhilleusz és a teknős, a mozgó nyílvessző, a mozgás lehetetlensége, a tér végtelen oszthatóságára vonatkozó paradoxon) Arisztotelész őrizte meg. Ezek a paradoxonok a tér- és időfogalomban rejlő ellentmondásokra épülnek. Ebben összeütközésre kerül a végtelenül nagy és végtelenül kicsiny intuitív fogalma. Pl. A teknős versenyfutásra hívja ki a fürgelábú Akhilleuszt, aki nála tízszer gyorsabb; a hős elfogadja a kihívást, s ellenfelének 1 stadion előnyt ad. Mire Akhilleusz elér arra a pontra, ahonnan ellenfele indult, addig az is megtesz egy tized stadion távolságot, valamennyi előnye tehát marad. Akhilleusz villámgyorsan lefutja ezt is – ám a teknős újfent előrébb iszkol, ezúttal egy század stadionnyit. Mire Akhilleusz ledolgozza hátrányát, a teknős még mindig előtte marad: egy ezred stadionnyi távolságra. És ez így megy a végtelenségig. a teknős előnye folyamatosan csökken, de soha nem fogy el. Vagyis mindig lesz köztük távolság, hiszen Akhilleusz nem éri utol a teknőst. Zénon gondolatmenete logikus és világos, az eredmény azonban ellentmond a tapasztalatainknak. Így paradoxonhoz jutunk. Több századon keresztül voltak Zénon paradoxonjai a matematikai gondolkodásra hatással, hiszen a végtelenül kicsi, és végtelenül nagy fogalmai tisztázatlanok voltak. Először Arisztotelész (i.e. 384-322) jött rá, hogy az egynél kisebb kvóciensű mértani sornak lehet véges összege. Egészen a 17. sz. közepéig kellett várni, hogy valaki a végtelen sor összegképletét kiszámítva és bizonyítva meghatározza, hogy Akhilleusz hol éri utol a teknősbékát.

Eudoxosz (i. e. III. sz.) fedezte fel a „kimerítés” módszerét, de ennek leírását Euklidész Elemek c. művében találhatjuk csak meg, hiszen Eudoxosz írásai nem

maradtak ránk. A „kimerítés” módszerének lényege az indirekt bizonyítás. Ennek egy olyan fajtája, amellyel rendszerint területet vagy térfogatot határoztak meg. A módszert Eudoxosz találta fel, bár a gondolat csíráját már megtaláljuk az i. e. 450 táján élt Antiphónnál is. Tehát a kimerítés módszere nem számítás, hanem bizonyítás: az előzőleg valahogy (méréssel, gondolati kísérlettel) megsejtett eredmények igazolása. Erre a bizonyítási eljárásra azért volt szükség, mert a matematika szigorú szabályainak nem tett eleget a mérés és a becslés gondolatmenete, ezért szükség volt ennek az eredménynek a szabatos bebizonyítására, azaz a kimerítés módszerére, amely lényegét tekintve a matematika legősibb bizonyítási módszere. A kimerítés módszerét Arkhimédész (i. e. 287- 212) tökéletesítette és használta súlypont-, kerület-, terület- és térfogatszámításra. Geometriai egyenlőtlenségek felhasználásával olyan érintő feladatokat oldott meg, melyeket később csak a deriválás segítségével tudtak kezelni. Ezért szokták munkásságát a differenciálszámítás alapjának tekinteni.

A kimerítés módszerének precizitását még évszázadokig nem tudták felülmúlni. Az 1630 utáni 25-30 évben nagyon sokat fejlődött a differenciál- és integrálszámítás. Meghatároztak görbéket, és vizsgálták is őket. De nem merült fel még, hogy az integrál- és a differenciálszámítás között van összefüggés. Newton és Leibniz előtt legmagasabb fokon Wallis (1616-1703) és Huggens (1629-1695) munkáiban jelent meg a differenciálszámítás.

Először Fermatnál (1601-1665) jelent meg az a gondolatmenet, hogy ha egy változót megnövelünk egy nagyon kis értékkel, akkor a növekményt nullának tekinthetjük. Majdnem eljutott a differenciahányadosig, de egy kis lépés hiányzott. Hiányzott a határérték fogalma. Integrálszámításban eljutott az $x = x_0$ görbe alatti területet kiszámolásáig, „alsó“ és „felső“ téglalapsorozatba foglalva.

A differenciál- és integrálszámítás felfedezése sok tudós együttes érdeme, de **Leibniz** és **Newton** akik a meglevő eredmények ismeretében és teljes megértésével egymástól függetlenül fedezték fel a differenciál- és integrálszámítást, illetve azok kapcsolatát. Így bár az ő eredményeik is tökéletesítésre szorultak, mégis őket illet meg a felfedezés dicsősége.

Az első Isaac **Newton** (1642-1727) gondolatmenete volt, amely a fluxióelméletre alapult az 1665-66-os években. Az eljárást azonban sokáig nem hozta nyilvánosságra, mert tudta, hogy logikai megalapozása nem kielégítő, így a közlése csak 1704-ben, és halála után 1736-ban történt meg. Newton tanulmányozta Wallis Arithmeticáját. A műben megismert sorok és végtelen szorzatok ösztönözték arra, hogy a binomiális tételt

általánosítsa tört- és negatív kitevőkre is. Ezek a binomiális sorok segítették a fluxió elméletéhez (így nevezte az ő általa feltalált differenciálszámítást). Fizikus gondolkodásának megfelelően vizsgálta a mozgást. Az ő felfogása a mozgásról már nagyban különbözött Zénon mozgásfelfogásától. Míg Zénon a mozgást egymás utáni helyzetek sorozatának tekintette, addig Newtonnál a mozgás egy megszakítás nélküli folyamat volt. A rendszerében is a folytonos mechanikai mozgások változó mennyiségét tanulmányozta. Független változónak tekintette az időt, az időtől függő változó pedig valamilyen fizikai folyamatot leíró függvény volt. A függvényt fluensnek nevezte el a latin flure = folyni szóból és y-nal jelölte. A fizikai változás sebességét, vagyis a mozgás sebességét pedig fluxiónak nevezte és a változó feletti ponttal jelölte. Az idő momentumának végtelen kicsiny megváltozásának jelölésére az o-t vezette be. A fluens momentumát, a pillanatnyi sebesség és az idő momentumának szorzataként határozta meg, amely lényegében a fluens differenciálja volt. Mivel a határérték fogalma ebben az időben még nem volt ismert, így Newton fluxióelmélete sem volt hézagmentesen alátámasztva (támadási felület volt, az infinitezimális mennyiségek – o - maghatározatlansága).

Leibniz (1646-1717) felfedezése csak 1673-76 született meg, de már 1684-86-ban nyilvánosságra hozta az általa alapított Acta Eruditorum című folyóiratban. Ez az értekezés már tartalmazta a ma is használatos jelöléseket, differenciálási szabályokat, szélsőérték- és inflexiós pont meghatározásokat. Ő a differenciálszámítást geometriai modell segítségével alkotta meg. A széleskörű alkalmazási lehetőségek és főleg a szerencsésebb jelölés miatt Leibniz módszere nagyobb hatással volt kortársaira, mint Newton felfedezése. Tőle származnak a dx, dy/dx jelölések. Differenciálszámításának gondolatmenetét a Δx, Δy, Δs alapozta.

Az ő munkája is hiányosnak számított, hiszen ő sem tudott támaszkodni a határérték definíciójára, és létre sem hozta, illetve még hiányosságként merült fel nála az érintő fogalma.

Newton és Leibniz munkái hiába nem teljesek, és néhol hiányosak, de hatalmas löketet adtak az analízis továbbfejlődésére, hiszen hatásukra sok matematikus kezdett kutatni a témában, Angliában Newton elméletének fogalmait próbálták tisztázni, Európában pedig a függvényfogalom formális kialakításával foglalkoztak. A továbbfejlesztők sorát Jacob Bernoulli (1654-1705) és fivére, Johann Bernoulli (1667-1748) nyitották meg. **Johann Bernoulli** 1924-ben kiadott, differenciálszámítással foglalkozó (Leibniz típusú) könyve 3 fontos posztulátumot tartalmazott:

1. Egy mennyiség, amelyet végtelen kicsiny mennyiséggel csökkentünk vagy növelünk, nem lesz kisebb, sem nagyobb.

2. Egy görbe vonal végtelen sok kicsiny szakaszból áll.

3. Egy síkidom, amelyet két ordináta, az abszcisszák különbsége és valamely görbének végtelen kicsiny darabja határol, paralelogrammának tekinthető.

Utána Leonhard **Euler** (1707-1783) kísérelte meg az analízis megalapozását. 1748-ban jelent meg a Introductio in analysin infinitorum (Bevezetés a végtelen analízisbe) című műve. Ezt követte 1755-ben Institutiones calculi integralis (A differenciálszámítás alapjai) című könyve, majd a háromkötetes Institutiones calculi integralis (Az integrálszámítás alapjai) című nagy tekintélyű könyve. Ezzel biztos alapokra helyezte korának matematikai ismereteit.

D'Alambert (1716-1783) francia matematikus jelentős előrehaladást tett a határérték és a differenciálszámítás témakörében. A határérték definiálása („Egy változó A mennyiségnek H akkor határértéke, ha A bármilyen közel juthat H-hoz, de H-t soha nem érheti el”) azonban hiányos, mert felfogásában az A egyirányban monoton közeledik H-hoz, tehát a határértéke egy oldali határérték. Majd azt a kijelentést tette, hogy „Az egyenletek differenciálása abból áll, hogy az egyenletben szereplő két változó véges különbségei hányadosának határértékét megkeressük.” ez a kijelentése a határértékének egyoldalúsága miatt hiányos volt.

Taylor, Stirling, Darboux és Laplace mellett **Lagrange** (1736-1813) eredményei kiemelkedtek. Kimutatta, hogy minden $y = f(x)$ függvény tisztán algebrai módszerekkel sorbafejthető, és az $f'(x)$, $f''(x)$ stb. differenciálhányadosokat az $f(x+h)$ Taylor-sorában, mint a h, h2 stb. együtthatóit definiálta. Mindebből hiányzott a sorok konvergenciája, ami nagy támadási felületet eredményezett számára. De sokakat ezzel ösztönözött a határértékkel való foglalkozásra.

Cauchy (1789-1857) volt az első, aki a határérték fogalmát teljesen aritmetikai alapon definiálta és így a differenciálhányadost is nagy részletességgel sikerült meghatároznia. Mindezt az 1821-ben megjelent Cours d'analyse (Analízis kurzus) című művében hozta nyilvánosságra. Először a differenciálhányadost definiálta: $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$, majd ezen hányados határértékeként (i tart 0-hoz) a differenciált. A határérték definiálása is pontos volt: ha egy változó egymást követő értékei úgy közelítenek meg egy fix értéket, hogy attól csak tetszőlegesen kis mértékben

különböznek, akkor ez a fix érték a változó értéksorozatának határértéke. A határérték fogalmát még tovább Weierstrass tökéletesítette. **Weierstrass** (1815-1897) német matematikus volt. Munkássága a függvénytan minden részét érintette. Célja az volt, hogy az analízisnek teljes szabatossággal még meg nem határozott alapfogalmait tisztázza. Gondos definíciókat adott a függvény, a szélsőérték, a differenciálhányados fogalmára. Az analízist a valós számok precíz elméletére építette, tehát az analízis fogalmait aritmetikai fogalmakra vezette vissza. Weierstrass határérték definícióját használjuk ma is.

III. Tantervek elemzése

A magyar közoktatás jelenleg három tanterven alapul. A Nemzeti alaptanterven, a kerettanterven és a helyi tanterven. A közoktatási törvény határozza meg ezen tantervek funkcióját.

A Nemzeti alaptanterv (NAT) nem egy klasszikus értelemben vett tanterv, hanem egy országosan érvényes útmutatót biztosít az iskoláknak, amelyben a közvetítendő tananyag fő területeit, azok szakaszait jelöli meg, kiegészítve a fejlesztési feladatokkal, célokkal. A NAT a közoktatás egységesítését segítő tanterv. Rögzíti azokat az átfogó nemzeti, európai és általános értékeket, általános fejlesztési követelményeket, amelyek a korszerű és közös nemzeti alapműveltség kialakítását szolgálják.

A kerettanterv köztes szabályzó elemként van jelen a Nemzeti alaptanterv és a helyi tanterv között. A NAT-on alapuló kerettanterv egy szabályozórendszer, amely biztosítja, hogy országosan megjelenjenek a NAT elvei. Meghatározza az ismeretanyag mennyisége és a rendelkezésre álló idő között fennálló arányt, oly módon, hogy lehetőség nyíljon a készség- és képesség fejlesztésére is. Óraszám és a tartalom tekintetében egységesen tartalmazza a helyi tanterv alapjául szolgáló tartalmi elemeket és szabályokat. Azt, hogy évfolyamonként mit kell tanítani, teljes mértékben a kerettanterv határozza meg (indokolt esetben arra is van lehetőség, hogy egyes esetekben eltérhessenek a NAT által megadott tagolástól)

A helyi tanterv a közoktatási törvény előírásainak megfelelően, az intézményi oktatás céljait meghatározó pedagógiai program részeként tartalmazza

- az egyes évfolyamokon tanított kötelező és választható tantárgyakat;
- azok óraszámait, fő témaköreit és követelményeit;
- a magasabb évfolyamba lépés feltételeit;
- az ellenőrzés, értékelés és minősítés tartalmi és formai követelményeit;
- az alkalmazható tankönyveket és más taneszközökre vonatkozó döntéseket

3.1. Nemzeti alaptanterv:

A Nemzeti alaptantervben nem iskolafokozatonként, nem iskolatípusonként, nem évfolyamonként, hanem együttesen, azaz a tantárgyi logikához képest integrálva jelenik meg az a műveltséganyag, amelyet a közoktatásban az iskoláknak kell közvetíteniük. Ennek részei a kulcskompetenciák, a kiemelt fejlesztési feladatok és az egyes tartalmi szakaszokban megvalósítandó műveltségterületi fejlesztési feladatok. A NAT azt a tudást tartja kiemelt értéknek, amely következtében minőségi munkavégzés, gazdasági világban való eredményesség és az élet egyéb területein sikeres szerepvállalás érhető el. Az iskolában megszerzett tudást a gazdaság hajtóerejének akkor tekinti, ha az elsajátított tudást használni, alkalmazni is megtanítja.

Az első hivatalosan elfogadott NAT 1995-ben jelent meg (A Nemzeti alaptanterv kiadásáról szóló 130/1995. (X. 26.) Kormányrendelet) és bevezetése szakaszosan, az 1998. szeptember 1-jén kezdődött el az első és a hetedik évfolyamon. Bevezetése 2006/07. tanévben a 10. évfolyamon fejeződött be. Az első NAT a központi oldalt képviselte egy hazánkban még új típusúnak számító kétpólusú tartalmi szabályozásban. Az iskoláknak ehhez a központi szabályozáshoz mérten kellett meghatározniuk az iskolára jellemző pedagógiai programjukat és a helyi tantervüket. Strukturális újdonságot jelentett, hogy a NAT részletes követelményeket fogalmazott meg az iskolai oktatás első 10 évfolyamára érvényesen. Emellett még újdonságot jelentett, hogy az eddigi magyar oktatási rendszerben tantárgyi szemlélet uralkodott, és ezt most egy integrált szemlélet váltotta fel. A szerkesztők a műveltség alapjait (a műveltség kánonját) 10 műveltségi területen foglalták össze.

A NAT műveltségterületei (részterületei):

- anyanyelv és irodalom (magyar nyelv és irodalom; kisebbségi nyelv és irodalom)
- élő idegen nyelv
- matematika
- ember és társadalom: társadalmi, állampolgári, és gazdasági ismeretek; emberismeret; történelem
- ember és természet: természetismeret; fizika; kémia; biológia és egészségtan
- földünk és környezetünk
- művészetek: ének-zene; tánc, dráma; vizuális kultúra, mozgóképkultúra és médiaismeret
- informatika: számítástechnika; könyvtárhasználat
- életvitel és gyakorlati ismeretek: technika; háztartástan és gazdálkodás;

pályaorientáció
- testnevelés és sport

A második hivatalosan elfogadott NAT-2003-ban jelent meg (243/2003.(XII. 17.) Kormányrendelet). A részletes követelmények elmaradtak, helyettük a tanulás lényegét jobban kifejező fejlesztési feladatok kaptak helyet. Így a dokumentum lényegesen rövidebbé és áttekinthetőbbé vált. A hangsúly a tartalomról a tanulás kompetencia alapú felépítésére helyeződött át. Megnőtt a kiemelt fejlesztési területek (kereszttantervek) hangsúlya és szerepe. A Nat-2003 bevezetése a 2004/05 tanévben azaz 2004. szeptember 1., kezdődött el az első évfolyamon.

Azzal a céllal, hogy továbbmélyítsék a kompetenciaalapú oktatást kidolgozták a NAT-2007-et. Újragondolták a kiemelt fejlesztési feladatokat, és érvényesítették a közoktatásról szóló törvény 2003-2006 közötti tartalmi változásait. Továbbra is kiemelt figyelem irányult az általános és kiemelt fejlesztési feladatokra, a kereszttantervekre – vagyis a közös értékekre. Fontosabb tartalmi jellemzői:

- A dokumentum bevezetőjében megerősítést kap a Nemzeti alaptanterv szerepének és értékrendszerének a fontossága a közoktatásban.
- A bevezetőben még sor kerül a tanulói esélyegyenlőség segítségének elveire.
- A kulcskompetenciák szerepének meghatározását és az egyes területek szerkezetét is megtaláljuk. (meghatározás, ismeret, képesség)
- Elkészítette a képzési szakaszok leírását: 1-2. bevezető szakasz; 3-4. kezdő szakasz; 5-6. alapozó szakasz; 7-8. fejlesztő szakasz; 9-12 általános műveltséget megszilárdító, elmélyítő, pályaválasztási szakasz.

A Nemzeti alaptantervben a differenciálszámítással nem találkozhatunk, hiszen ebben a tantervben csak 10. osztály végéig találunk követelményeket. A függvények témakörében a következő részletes követelményeket találhatjuk a NAT-ban:

Részletes követelmények a 6. évfolyam végén

Tananyag	**Fejlesztési követelmények (kompetenciák, képességek)**
Számegyenes, derékszögû koordináta-rendszer.	Helymeghatározás. Adatok gyűjtése, lejegyzése, grafikonok készítése, értelmezése, szabályszerűségek észrevétele.

Változó mennyiségek közötti kapcsolatok felismerése, lejegyzése, ábrázolása. Egyszerű függvények értelmezése, vizsgálata grafikon segítségével $x \mapsto x+2 \quad x \mapsto -2x \quad x \mapsto \frac{1}{2}x$	Adatpárok, mérési eredmények táblázatba rendezése, grafikon készítése, olvasása, értelmezése. (Koordináció a természettudományos tárgyakkal és a gyakorlattal, esetleg könyvtári foglalkozás bekapcsolásával.) Változó mennyiségek közötti kapcsolatok.
Sorozatok képzése és folytatása *(konkrét számtani, illetve mértani sorozatok).*	Sorozat folytatása adott szabály szerint; néhány elemével adott sorozathoz lehetséges szabályok keresése. Az ismeretszerzés induktív módjának alkalmazása.

Részletes követelmények a 8. évfolyam végén

Ábrázolás derékszögû koordináta-rendszerben.	Készség szinten tudjon pontot ábrázolni, illetve pont koordinátáit leolvasni. Adatsokaság elemzése, jellemzése, ábrázolása.
Változó mennyiségek közötti kapcsolatok. Függvények és ábrázolásuk a derékszögû koordináta-rendszerben $x \mapsto \frac{1}{x};; x \mapsto \sqrt{x}$	Táblázat és grafikon készítése a felsorolt konkrét függvényekhez. Elsõfokú egyismeretlenes egyenlet, egyenlõtlenség grafikus megoldása. Halmazszemlélet, elemi halmazműveletek a matematika különböző területein. Részhalmazképzés.
Sorozatok vizsgálata (egyszerû számtani és mértani sorozatok).	Sorozat "folytatása" adott szabály szerint. Néhány tagjával adott egyszerû sorozathoz szabályok keresése. Az induktív módszer további alkalmazása. Deduktív következtetések, néhány lépéses bizonyítások. Sejtések szabályszerűségek megfogalmazása.

Részletes követelmények a 10. évfolyam végén

A függvénnyel kapcsolatos fogalom- és ismeretrendszer. Másodfokú függvények.	A másodfokú függvény ábrázolása és jellemzése. Fejlődő függvényszemlélet. Függvények és függvénygrafikonok alkalmazása.
$y = ax + b$ egyenlettel megadott egyenes. Egyszerû egy- és kétismeretlenes algebrai állítások igazsághalmaza a koordináta-síkon $\lvert x\rvert \leq 1; \lvert x+y\rvert = 0$ Kétismeretlenes elsõfokú egyenletrendszer grafikus megoldása.	Az $y = ax+b$ alakú egyenletben az a és a b számok jelentése, ennek alkalmazása. Két egyenes metszéspontjának meghatározása; egyenesek párhuzamossága. Többféle megoldás lehetősége. Fejlődő diszkusszió képesség. Szemléltető ábrák és modellek alkalmazása az algebrában, kombinatorikában.
Szögfüggvények (sin; cos; tg; ctg).	A hegyesszögek szögfüggvényeinek alkalmazása egyszerû esetekben, zsebszámológéppel is.

3.2. Kerettanterv:

1998-ban a közoktatási törvény bevezeti a kerettantervet.

A kerettantervek tartalmazzák az adott iskolafokozaton, illetve iskolatípusban folyó nevelés-oktatás általános célrendszerét, a tantárgyi struktúráját (bár az iskola eltérhet ettől), a kötelező és közös követelményeket, valamint a követelmények teljesítéséhez szükséges óraszámokat. Az alapfokú nevelés-oktatás 1-4. évfolyamára és az 5-8. évfolyamára elkészített tantervek szerves egységet alkotnak. A 9. évfolyamtól kezdve az egymástól eltérő iskolatípusokhoz külön tantervek készültek. Ugyanakkor igyekeztek elérni, hogy az egyik iskolatípusból a másikba való átlépés ne legyen akadály középfokon, mivel a gimnáziumi, a szakközépiskolai kerettantervek csak annyira különböznek egymástól, amennyit az eltérő képzési funkció feltétlenül megkövetel.

A kerettanterv a műveltségterületeket tantárgyakká bontja, és a domináns iskolaszerkezethez igazodva tagolja az ismeretanyagot. Meghatározza, hogy a NAT-ban megfogalmazott elemeknek hol kell megjelenniük a helyi tantervben, melyik tantárgyban és melyik évfolyamon.

Fontos szempont volt, hogy a tanterv ne legyen konkrét, azaz bármely pedagógiai felfogás vagy módszer egyoldalú megjelenítését vagy kizárását ne okozza! Sokféle tartalmi kibontást kell lehetővé tennie. A kerettantervek a tanulók törvényben előírt heti kötelező óraszámainak nem az egészét szabályozza. A minimálisan kötelező óraszámnak csak a 80%-át írja elő tartalmilag (bár ez évfolyamonként és intézménytípusonként kissé eltérhet), a helyi tanterv szinten teljesen szabad mozgást biztosít– NAT-ot figyelembe véve - a maradék órákban. Ez lehetőséget ad az iskoláknak arra, hogy az új szabályok bevezetése után is kialakíthassák saját arculatukat.

Az óraszám mellett másik fontos kérdés a helyi tantervek átalakításában a tematikák ügye. Ezen a területen a NAT-hoz képest az egyik megkötés az volt, hogy az első nyolc évfolyam tartalma logikailag zárt egységet jelentsen. Tehát ne alakuljon ki az a helyzet, hogy 8. év végén levegőben marad bizonyos tantárgyak tanulása. (Pl.: történelem)

A kerettanterv nem követelményt fogalmaz meg, hanem leírja, hogy milyen feladattípusokat kell elvégezni 4., 5., 6. osztályban ahhoz, hogy a hatodik évfolyam végére a NAT által meghatározott képességszint valóban elvárható legyen a gyerekektől. Tehát az iskolák a fejlesztési folyamathoz is segítséget kapnak.

2000 szeptemberében minden iskola kézhez kapta ezt a tantervet. A közoktatási törvény

előírásainak megfelelően 2001. szeptember 1-től már a kerettantervek alapján kellett oktatni az 1., az 5. és a 9. évfolyamokon. A három ponton kezdődő, felmenő rendszerű bevezetés eredményeként a 2004/2005-ös tanévben már az összes alap és középfokú iskolában a kerettanterven alapuló helyi tantervek szerint tanultak a diákok.
A kerettanterv bevezetése nem jelenti a tartalmi szabályozás teljes átalakítását, de feszesebbé teszi a tanulmányi idő tartalmi területek közötti felosztását, s az iskolai szintű tantervi tervezés és tanulásszervezés szabályozását. Tehát az iskoláknak nem kellett új helyi tantervet készíteniük, hanem csak a korábbit kellett átdolgozniuk, hogy mindenben megfeleljenek az előírásoknak.

A differenciálszámítás a 11. osztályban matematika fakultáción, azaz emelt óraszámban jelenik meg. A közoktatásról szóló 121. § 7) pontja definiálja az emelt szintű oktatás fogalmát. Olyan oktatást tekint emeltszintűnek, amely – a kerettantervek szerint – magasabb követelmények alapján, az átlagosnál nagyobb tanítási óra felhasználásával szerveződik. Az emelt szintű oktatás törvényi meghatározásából és a kerettantervi rendelet 5. § (3) bek. a) pont szövegéből az következik, hogy az emelt szintű oktatás a kerettantervben előírt tartalmakat egészíti ki speciális ismeretekkel, a közös kerettantervi követelményeket emeli magasabb szintre. Az emelt szintű osztályokban tehát biztosított a kerettantervi követelmények elsajátítása. Tehát a kerettanterv nem érinti közvetlenül a határérték, a folytonosság és a differenciálszámítás témakörét. Viszont a 11. osztályos függvények témakörét megtalálhatjuk a kerettantervben: II. témakörként van megjelölve a függvények oktatása 20 órás időkerettel.

KÉPESSÉGFEJLESZTÉS	
Képességfejlesztési fókuszok	**A képességfejlesztés megvalósulási lehetőségei a témakörben**
Számlálás, számolás	Konkrét számolási feladatok a valós számkörben, a matematika legkülönbözőbb területein. Ezzel is mélyítjük a valós számok fogalmát Műveletek racionális és irracionális számokkal. A valós számok és a számegyenes pontjai közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, a folytonosság érzékeltetése.
Mennyiségi következtetés	Szögmérés különféle egységei közötti átváltás, ívmérték, fok.
Becslés, mérés, valószínűségi szemlélet	A közelítő értékekkel való számolás valamint a zsebszámológép használata (hatványértékek, logaritmus, trigonometria) miatt kiemelten elengedhetetlen a becslés szerepe. A kapott eredmények realitásának eldöntésére szoktassuk a tanulókat.

Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakognició	A szövegértés tudatos fejlesztése, hétköznapi szöveg „lefordítása” a matematika nyelvére, a valóság problémáinak matematikai értelmezése (a metakogníció továbbfejlesztése). A természet jelenségeinek értelmezése, azok matematikai modellezése, az exponenciális és logaritmikus folyamatok szövegben való alkalmazása.
Rendszerezés, kombinativitás	A szükséges adatok kikeresése, a fölösleges adatok mellőzése, a lényegkiemelő képesség fejlesztése folyamatos a középiskolai évek alatt is. A hatványértékek nagyságrendjének rendszerezése az alapok változása szerint, ez a különböző alapú hatványfüggvények megértését készíti elő. Az inverz függvény fogalmának további elmélyítése az exponenciális és logaritmus függvények kapcsán. A lehetséges alkalmazások megkeresése, a tanult új ismeret beillesztése, a rendszerező szemlélet alakítása.
Deduktív következtetés, induktív következtetés	Azonosságok, konkrét számoktól az általános eset megfogalmazásáig (induktív gondolkodásmód fejlesztése). Azonosságok alkalmazása konkrét esetekben (deduktív gondolkodás fejlesztése). *A permanencia elvének felfedezése, annak megértése a hatványozás kiterjesztésekor.*

AJÁNLOTT TEVÉKENYSÉGEK
Egyszerű szöveges összefüggések leírása matematikai jelekkel. Szöveges feladatok értelmezését szolgáló nyelvi játékok. Szöveges feladatok megoldása előtt a várható eredmények közös becslése, a megoldott egyenletek eredményének ellenőrzése, értelmezése, szöveges válasz a felvetett szöveges problémára. Egyéni, csoportos munkában azonosságok felfedezése, azok alkalmazása. Kutatási projektek (előadás, vagy írásbeli feldolgozás) – matematikatörténeti témában (logaritmus kialakulása, az első logaritmus táblázatok, logarléc) – Internet használata: exponenciális és logaritmikus jelenségek a természetben

ISMERETEK, TANANYAGTARTALMAK
Hatványozás kiterjesztése racionális kitevőre. A hatványozás azonosságai. A logaritmus értelmezése. A logaritmus azonosságai. Egyszerű exponenciális és logaritmikus egyenletek megoldása. Egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldása.

KAPCSOLÓDÓ TÉMÁK	
Kapcsolódó tantervi témák	**Más műveltségterületi kapcsolódási lehetőségek**
Matematikai azonosságok. Irracionális számok definíciója, helyük a számegyenesen. Terület-, térfogatszámítás. Függvények. Statisztika: szórás.	Fizika, csillagászat. Kamatos kamat számítása. Exponenciális és logaritmikus folyamatok a valóságban, a természetben, a művészetekben.

KÖVETELMÉNYEK
A hatványozás definíciója racionális kitevőre. *Irracionális kitevőjű hatvány:* A hatványozás azonosságainak használata.

Az $\sqrt[n]{a}$ fogalma. A gyökvonás azonosságainak alkalmazása. A logaritmus fogalma, azonosságainak alkalmazása egyszerűbb esetekben. Exponenciális és logaritmikus egyenleteket megoldása a definíciók és az azonosságok közvetlen alkalmazásával. *Logaritmikus egyenlőtlenségek megoldása.* Egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldása. *Trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása.*

A 12. évfolyamon IV. témakörnél jelenik meg a kerettanterveben a függévnyek témaköre 16 tanórában meghatározva.

KÉPESSÉGFEJLESZTÉS	
Képességfejlesztési fókuszok	**A képességfejlesztés megvalósulási lehetőségei a témakörben**
Számlálás, számolás	A zsebszámológép biztos használata. A műveleti sorrend tudatos alkalmazása a valós számkörben minden tanult műveletre nézve. A százalékszámítás alapelemeivel biztos használata. A kifejezések helyettesítési értékének magabiztos meghatározása különösen a rekurzív definíció esetén.
Mennyiségi következtetés	Adott sorozatbeli elemek alapján definiált szabály szerint a többi elem kiszámolása, sorozatbeli elemek összegzése.
Becslés, mérés, valószínűségi szemlélet	A gazdasági matematikában a várható reális eredmények megbecsülése, és összevetése a kiszámolt értékekkel.
Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakogníció	A valóságból merített szöveges faladatok algebrai megfogalmazása, átültetése a matematika jelölésrendszerébe. Ez többsíkú gondolkodást igényel, az ehhez szükséges képességek fejlesztése.
Rendszerezés, kombinativitás	Az összefüggések felismerésének képességét feltételezi a sorozatok elemei közötti kapcsolatok vizsgálata, a sorozatok tulajdonságainak meghatározása. A sorozat elemeinek megfigyelése grafikonon, a képi megjelenés és a valós folyamat kapcsolata. Konkrét sorozatok tulajdonságaiból következtetések levonása.
Deduktív következtetés, induktív következtetés	Konkrét számokkal és összefüggésekkel megadott sorozatokból átlépés az általánosításra, illetve az általánosítás után azok konkrét alkalmazása. A kapott eredmények értelmezése.

AJÁNLOTT TEVÉKENYSÉGEK
- Grafikonok készítése. - Bankok ajánlatainak összehasonlítása. - Áremelések és árleszállítási katalógusok gyűjtése, és a bennük található adatok feldolgozása.

ISMERETEK, TANANYAGTARTALMAK
A sorozat fogalma, megadási módjai. Sorozatok tulajdonságai. Sorozatok grafikonja. Számtani sorozat definíciója, tulajdonságai, a_n, S_n. Mértani sorozat definíciója, tulajdonságai, a_n, S_n. Kamatos kamatszámítás.

KAPCSOLÓDÓ TÉMÁK	
Kapcsolódó tantervi témák	**Más műveltségterületi kapcsolódási lehetőségek**
Algebrai azonosságok, műveletek a valós számkörben. Százalékszámítás. Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Elemi függvények grafikonja, és a függvények tulajdonságai.	almazás fizikai, biológiai, kémiai törvényszerűségek leírására. alóság diszkrét folyamatai. Közgazdasági alapismeretek és fogalmak.

KÖVETELMÉNYEK
A számsorozat fogalma és különböző megadási módjai. Alapvető összefüggések alkalmazása a számtani és a mértani sorozatoknál. A sorozatok alkalmazása a valóságból vett problémák megoldásakor. A kamatos kamatra vonatkozó alapvető képletek használata, és azokból bármelyik ismeretlen adat kiszámítása.

3.3. Helyi tanterv:

A pilisvörösvári német nemzetiségi Friedrich Schiller Gimnázium és Szakközépiskola helyi tantervében meghatározták, hogy egy adott évfolyamon mennyi a matematika heti ill. az éves kötelező óraszám; röviden összefoglalták a tantárgy tanítása során megvalósítandó célokat, végül táblázatos formában megadták, hogy az egyes anyagrészeknél mit, milyen óraszámban kell tanítani.

A 11 osztályban fakultáción tanulnak a diákok differenciálszámítást, hiszen a mai magyar oktatási rendszer követelményében ez az anyagrész csak az emelt óraszámú 11. évfolyamos csoportok tantervében szerepel. Viszont a differenciálszámítás megalapozása, már hetedik osztályban megkezdődik. Ekkor sajátítják el:

- két halmaz közötti hozzárendelések,
- lineáris függvények,
- egyismeretlenes egyenletek grafikus megoldása,
- sorozatok vizsgálata, számtani sorozatok.

Nyolcadik osztályban találkoznak a diákok:

- abszolútérték, másodfokú és a négyzetgyökfüggvénnyel, illetve egyszerűbb transzformáltjaival,
- egyismeretlenes egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek grafikus megoldásával.

Kilencedik osztályban tovább bővítik az ismereteiket a diákok:

- abszolútérték, másodfokú és a négyzetgyökfüggvénnyel, transzformáltjaival, és tulajdonságaival (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték)
- megismerkednek a lineáris törtfüggvénnyel, a törtrész- és egészrészfüggvénnyel, transzformáltjaival, illetve a sgnx függvénnyel,
- egyismeretlenes egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek grafikus megoldásával.

Következő évben új függvénycsaláddal ismerkednek meg a diákok: Itt kerül sor:

- forgásszög szögfüggvényeinek értelmezésére, definiálására,
- összefüggések felismerésére a szög szögfüggvényei között,
- a sinus, cosinus, tangens, cotangens grafikonjaira és tulajdonságaira.

Tizenegyedik évfolyamon – a határérték, folytonosság témaköre előtt - kerül sor az exponenciális és a logaritmus függvényekre illetve a számtani és mértani sorozatok fogalmára, az *n*. tag és az első *n* elem összegével.

A Schiller Gimnázium a következő célokat tűzte ki a helyi tanterv differenciálás tanítás témakörében:

- Az analízis elemei bővítik a függvényekről tanultakat. A differenciálhányados fogalma a matematikában, a természettudományokban egyaránt igen fontos szerepet játszik (érintő, sebesség, gyorsulás stb.). Ezzel továbbá a differenciálási szabályokkal célszerű megismertetni a matematika iránt érdeklődő s a matematikát a későbbiekben is használni akaró tanulókat.
- Olyan függvények vizsgálata is célunk, melyek elemi úton nem vizsgálhatok.
- Fontos az elemi szélsőértek vizsgálatok (másodfokú függvénnyel, közepekkel történő módszerek) mellett a differenciálszámítás eszközeinek ismerete.

A célok mellett a követelmények is megtalálhatók a helyi tantervben:

- Ismerjék a tanulok a függvény határértékének es folytonosságának fogalmat. Tudjak a tanult függvények adott helyhez tartozó határértéket megállapítani. Tudjanak példákat adni folytonos es nem folytonos függvényekre.
- Ismerjék es értsek a differenciálhányados fogalmat. Ismerjek az összeg, szorzat, hányados deriválási szabályát. Tudjanak polinomot, algebrai törtfüggvényeket es trigonometrikus függvényeket differenciálni. Tudjak, hogy a deriváltfüggvény

segítségével hogyan vizsgálható a függvény menete, hogyan lehet meghatározni a függvény lokális szélsőértékeit.

- Ismerjenek elemi módszereket is a szélsőértékek megállapítására.

Előzmény:

A korábbi években tanult függvény fogalom es függvény tulajdonságok ismerete.

A Schiller Gimnáziumban a 11. osztályban az emelt óraszámban matematikát tanulók heti óraszáma 5, az éves óraszáma pedig 185 (37 hét).

11. évfolyamon a 185 órából előírások szerint 36 óra telik a hatvány és logaritmus témakörével, 38 óra trigonometriával, 45 óra koordinátageometriával. Ezt a sorozatok, sorok témaköre követi 25 órával. A tananyag a határérték és a folytonosság témával folytatódik 12 órában, végül 27 órán keresztül pedig a differenciálszámítás témaköre kerül feldolgozásra.

HATÁRÉRTÉK ÉS FOLYTONOSSÁG – 12		
1.	Bevezető feladatok	
2.	Függvény határértéke x_o pontban	
3.	Függvény határértékének a definíciója	
4.	Függvény végtelenben vett határértéke	
5.	Két függvény összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértéke	
6-7.	Gyakorló feladatok	
8.	A függvény folytonosságának definíciója	
9.	Példák folytonos függvényekre	
10.	Műveletek folytonos függvényekkel	
11.	Összefoglalás	
12.	Témazáró dolgozat	
DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS - 27		
1.	Bevezető feladatok	- az analízis elemei bővítik a függvényekről tanultakat
2-3.	Differencia- és differenciálhányados fogalma	- a differenciálhányados fogalma a természettudományokban
4.	A deriváltfüggvény	
5.	Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között	
6-8.	Műveletek differenciálható függvényekkel (összeg, szorzat, hányados deriváltja)	
9-10.	Polinomfüggvények deriváltjai	
11-12.	Trigonometrikus függvények deriválása	- a deriválási szabályok megismerése, alkalmazása
13-14.	Exponenciális és logaritmusfüggvények deriváltjai	
15-16.	Összetett függvények deriválása	

17.	Monoton függvények és differenciálható függvények	- függvényvizsgálat elemi úton nem elemezhető függvények esetén Szélsőértékfeladatok megoldása
18.	Függvény szélsőértéke és a derivált közötti kapcsolat	
19.	Konvexitás, inflexiós pont	
20-22.	Függvényvizsgálat	
23-24.	A differenciálszámítás további alkalmazásai	
25.	Összefoglalás	
26-27.	Témazáró dolgozat	

A továbbhaladás feltételei:

- A határérték szemleletes fogalma.
- A folytonosság szemleletes fogalma.
- A differenciálhányados fogalma, alkalmazása.
- Egyszerűbb függvények deriváltjainak meghatározása.
- Függvények vizsgálata.
- Értékelés: Szóbeli es írásbeli számonkérés.

IV. Tankönyvelemzés

A tankönyvek a tanítási-tanulási folyamat leghasznosabb, de nem kizárólagos eszköze. Nagyon fontosnak tartom, hogy milyen tankönyv áll rendelkezésre. Természetesen önmagában a tankönyv nem veheti át a tanóra felépítésének meghatározását, de egy jó tankönyv megkönnyíti a tanár és a diák munkáját is. Ezért kihagyhatatlan a tankönyvelemzés egy középiskolai tananyag feldolgozásában.

Az általam kiválasztott tankönyvek:

- Hajnal Imre – dr. Pintér Lajos: Matematika III. osztály, fakultatív B változat, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003, 13. kiadás
- Dr. Hajdu Sándor - Dr. Czeglédy István - Dr. Kovács András-Hajdu Sándor Zoltán: Matematika 11, Műszaki Könyvkiadó, 2008, 4. kiadás
- Czapáry Endre - Gyapjas Ferenc: Matematika 11-12. évfolyama számára, Emelt szintű kiegészítő tananyag, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003, 1. kiadás
- Pintér Lajos: Analízis I., speciális matematika tankönyv, Typotex kiadó, 1998, hatodik kiadás
- Ila-Horváthné Nagy Ilona: Matematika VI., Analízis: Differenciál és Integrálszámítás, AKG Kiadó, 1994

A fejezet első részében Hajnal-, Hajdu- és Czapáry-féle tankönyveket hasonlítom össze, a második részben pedig Pintér Lajos és Horváthné Nagy Ilona könyveit külön-külön röviden elemzem.

Az emelt szintű matematika képzésben résztvevő 11-es osztályok az 1980-ban megjelent **Hajnal Imre - Dr. Pintér Lajos** tankönyvét a mai napig használják. Ez a tanárok átal kitöltött kérdőívekből is kiderült. A tankönyv az általam tárgyalt témakört 3 nagy fejezetre osztja. A folytonosságra, a differenciálszámításra, és végül egy kiegészítő fejezetre.

Az első nagy rész a folytonosság a következő felosztásban jelenik meg:

Bevezető példák

Függvények folytonossága:

A folytonosság definíciója.

Példák folytonos függvényekre.

Műveletek folytonos függvényekkel.

Intervallumon folytonos függvények.

Függvény határértéke:

Függvény határértékéről az x_0 pontban.

A $\frac{sinx}{x}$ vizsgálata.

A függvény határértékének a definíciója.

Függvény végtelenben vett határértéke.

Ez a fejezet megteremti az alapokat a következő nagy fejezet, a differenciálszámítás számára, amelynek a következő a felosztása:

Bevezető példák

A differenciálhatóság, a derivált, a deriváltfüggvény.

Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között.

Műveletek differenciálható függvényekkel.

Összeg deriváltja.

Szorzat deriváltja.

Hányados deriváltja.

Összetett függvény differenciálása.

Az $\sqrt[n]{x}$ differenciálása.

Trigonometrikus függvények differenciálása.

Monoton függvények és differenciálható függvények.

A függvények szélsőértéke és a derivált közötti kapcsolat.

Konvex függvények.

Függvényvizsgálat.

A kiegészítő fejezet az exponenciális és logaritmus függvény folytonosságát és deriváltját, továbbá a sorozat és függvény határértéke közötti kapcsolatot dolgozza fel. Ezzel a fejezettel megalapozza a tovább tanulni vágyók matematika tudását.

A fakultatív B változatban az ismeretek deduktív módon kerülnek feldolgozásra. Az alfejezeteiben alig találunk rávezető példákat. Általában, egy-egy új anyagrész konkrét probléma megfogalmazása nélkül, erősen behatárolt gondolatvezetéssel történik.

A **Hajdú**-féle tankönyv a 11. osztályos tanulókat készíti fel az emelt szintű érettségire és a reáltudományok területén való továbbtanulásra.

A tankönyv ötödik fejezete foglalkozik a differenciálszámítással a következő felosztással:

Függvények határértéke
Határérték-számítási szabályok
A differenciálhányados
Néhány nevezetes függvény deriváltfüggvénye
Függvények folytonossága és differenciálhatósága
Függvények menetének vizsgálata
Szélsőérték-számítási feladatok
A differenciálszámítás alkalmazásai
Ellenőrző feladatok

A **Matematika emelt szintű kiegészítő anyag 11-12. évfolyama számára** című tankönyben a differenciálszámítással foglalkozó fejezetének a következő a felépítés:

Bevezetés
Függvények elemi vizsgálata
Függvény határértéke
A függvény folytonossága
Az érintő szemléletes fogalma
A differenciahányados és a differenciálhányados
A differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolta
Az $f(x)=x^3$ függvény deriváltja
Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény deriváltja
Az $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$ négyzetgyökfüggvény deriváltja
Racionális egész függvény deriváltja
Szinusz és koszinusz függvény deriváltja
Differenciálható függvények menetének vizsgálata
Példák differenciálható függvények menetének vizsgálatára
Deriválási szabályok
Összefoglalás, történeti megjegyzések

Az elmezett három tankönyv differenciálszámítás témakör bevezetésének összehasonlítása:

A Czapáry-féle könyvben a differenciálszámítás témaköre egy gyakorlati életből vett példával kezdődik:

A műszaki életben járatos szakemberek kísérletezéssel arra a következtetésre jutottak, hogy adott hosszúságú és téglalap keresztmetszetű gerenda teherbíró képessége egyenesen arányos a gerenda szélességével és a vastagság négyzetével. Ebből az következik, hogy ha egy 2r átmérőjű hengeres fatörzsből téglalap keresztmetszetű gerendát akarunk kifaragni, akkor a hordképesség az f:$]0; 2r[\to \mathbb{R}, f(x) = kv(4r^2 - x^2)$ *függvénnyel fejezhető i, ahol a k egy állandó (arányossági tényező) és x a gerenda szélessége. (Például, ha r=10, akkor az f(x)=k(400-x*^{3}*). A gerenda akkor felel meg a legjobban a műszaki követelményeknek, ha az x-et úgy válasszuk meg, hogy a teherbíró képessége, a függvény értéke a legnagyobb (maximális) legyen.*

A Czapáry-féle könyv bevezetőjében még egy történelmi összefoglaló is található, amelyben megindokolja, hogy a „nem csúcsos, nem hegyes görbe esetén a maximum- vagy a minimumpontokban a görbe érintőjének párhuzamosnak kell lennie az x tengellyel" és hogy ezekben a pontokban pedig az érintő iránytangensének nullának kell lennie. A bevezető példák után a függvények elemi vizsgálata következik: a monotonitás, korlátosság, szélsőértékek, periodicitás, a páros és páratlan függvény definíciója. A definíciókat követően rövid példák és magyarázatok találhatók, amelyek segítik a tanulóknak a definíciók megértését, illetve az ismétlést könnyebbé teszik.

A Hajdú-féle könyvben bevezető fejezetet nem találunk, a differenciálszámítás a határérték témakörével kezdődik, amelynek az első mondatában felszólítja az olvasókat, hogy a függvényekről korábban tanultakat ismételjék át a 9.-es tankönyvből. Illetve az eddig tanultak alapján elemzi az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ függvényt.

A Hajnal-féle könyv felépítése eltér az előbbi könyvektől, hiszen itt külön fejezetben található meg a határérték, folytonosság és a differenciálszámítás témaköre. A differenciálszámítás bevezetőjében egy függvénygörbe adott P pontbeli érintőjét és annak iránytangensét keressük, illetve egy szabadeső test pillanatnyi sebességét határozzuk meg. Mindkét probléma ott kezdődik, hogy 0-val nem tudunk osztani, ezért a szelők iránytangenseiből és az átlagsebességből sorozatok képzünk és azt vizsgáljuk, hogy e sorozatok konvergensek-e.

Határérték bevezetése:

A Czapáry könyvben és a Hajdú-féle könyvben a határérték tárgyalása eltér egymástól. A Hajdú-féle könyv az epszilon, deltás definíciót és magyarázatot részesíti előnyben, de azt nagyon részletesen, míg a Czapáry-féle könyv nem csak az epszilon, deltás definíciót, hanem a sorozatos definíciót is bemutatja, viszont a mintapéldákkal, az ábrák számával fukarabban bánik, mint az előbbi.

A Hajdú-féle könyv először a végtelenben vett határértéket vizsgálja példán keresztül, majd definícióját is közli a végtelenben vett határértékről ábrákkal szemléltetve, és csak ezek után tér rá a véges helyen vett határérték fogalmára. A végtelenben vett határérték bevezető feladata:

Tekintsük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ *függvényt. Vizsgáljuk meg, hogy milyen értékeket vesz fel a függvény, ha az x értéke „minden határon túl nő”.*

A feladat kidolgozása néhány helyen meghatározza a függvény értékeit, majd megállapítja, hogy minél nagyobb értékeket helyettesítünk be az x helyére, az $\frac{1}{x^2+1}$ annál kisebb pozitív szám lesz, de a tört értéke a nullát soha sem veheti fel. Ezt követően, a könyv bevezeti a megfelelő szóhasználatot: „Ilyenkor azt mondjuk, hogy *f*(*x*) tart a 0-hoz, ha *x* tart a végtelenhez” vagy hogy a függvény határértéke a végtelenben nulla. Miután a szóhasználat és a jelölés tisztázottá vált, a következőre szólítja fel a könyv a tanulókat:

Figyeljük meg, a $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ *azt jelenti, hogy tetszőlegesen kicsiny* $\varepsilon > 0$*-hoz* ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) *található olyan* x_0*, hogy ha* $x>x_0$*, akkor* $|f(x)-0|< \varepsilon$.

Ezt $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ($x_0 = 3$) –ra egyből levezeti és ábrával szemlélteti. A magyarázat után közli a végtelenben és a mínusz végtelenben vett határérték definícióját. A végtelenben vett határérték definícióját a következőképpen találhatjuk:

Az $f: D_f \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$ *függvénynek a* ∞*-ben a határértéke A, ha bármilyen* $\varepsilon > 0$*-hoz* ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) *található olyan* x_0*, hogy ha* $x>x_0$*, és* $x \in D_f$*, akkor* $|f(x)-A|< \varepsilon$.

A definíciókat követően a sin*x* függvény határértékét mutatja be a végtelenben, amivel rámutat arra a tényre, hogy nem minden függvénynek van határértéke a végtelenben.

Miután a diákok a végtelenben vett határérték fogalmával megismerkedtek tér rá a könyv a véges helyen vett határértékre. Ezt is mintapéldával vezeti be:

Tekintsük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ *függvényt. Vizsgáljuk meg, hogy milyen értékeket vesz fel a függvény, ha az x értéke „megközelíti” az* $x_0=1$*-et.*

Ezt teljesen hasonló módon vezeti le, mint a végtelenben vett határértéket. A definícióra való rávezetés a következőképpen hangzik a példa szerint ábrával mellékelve: „Ha az x_0=1 elegendően kicsiny intervallumából (δ sugarú környezetéből) választunk x_0-tól különböző x értékeket, akkor az ezekhez tartozó függvényértékek az $f(x)$=0,5 érték tetszőlegesen kicsiny intervallumában (ε sugarú környezetében) lesznek."

Majd az epszilon, deltás definíciót mondja ki a véges helyen vett határértékre:

Az $f: D_f \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$ függvénynek a x_0 helyen a határértéke A, ha bármilyen $\varepsilon > 0$-hoz ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) található olyan $\delta > 0$ ($\delta \in \mathbb{R}$), hogy ha $|x - x_0| < \delta$, $x \in D_f$ és $x \neq x_0$, akkor $|f(x)-A| < \varepsilon$.

A definíció alatt bemutatja, hogy mit is értünk $|x - x_0| < \delta$ és $|f(x)-A| < \varepsilon$ alatt. Ez egy nagyon fontos eleme a definíció megértésének, főleg hogy egy ábrán is szemlélteti a mondottakat. Sajnos ilyen leírást a többi könyvben nem találtam, pedig hiánya gyakran csak a definíciók betanulásához vezet, nem pedig a megtanuláshoz, megértéshez. A fejezetben még 4 részletesen kidolgozott feladatot találunk, ami segíti a definíció alkalmazását a feladatokban.

A Czapáry-féle könyv bevezetésének első két mondata elárulja, hogy mi a célja a fejezetnek: „Geometriai, fizikai jellegű számítások közben előfordul, hogy egy-egy függvénnyel kapcsolatban megkérdezzük, hogyan viselkednek a függvényértékek, ha a változóval valamilyen számhoz (helyhez, ponthoz) közeledünk." Nagyon hasznos ez a néhány mondat, hiszen értelmet ad a mintapéldáknak, a diákság megtudja, hogy mit szeretne elérni, mi a célja a fejezetnek. Egy gyakorlati életből vett mintapéldával kezd, majd több kidolgozott feladatot mutat, és ezekre támaszkodva definiálja a határértéket. Először jelenik meg a könyvben a pillanatnyi sebesség, amelyet út-idő függvényében kell kiszámolni.

Egy test egyenes vonalú pályán mozog, és x s alatt $f(x)=x^2$ méter hosszúságú utat tesz meg ($x \geq 0$). Számítsuk ki a test pillanatnyi sebességét az x_0=5 s időpillanatban, az A pontban. (A mozgás kezdetétől mért 5. s végén.)

A példa segítségével a tanuló egyre közelebb kerül az ε, δ ismeretéhez, és még a határérték definíció előtt kialakul a diákokban egy szemléletből fakadó meghatározás. „Az átlagsebesség annál jobban megközelíti az A pontban érvényes pillanatnyi sebességet, minél kisebb időtartamot veszünk, minél kisebb az x-5 értéke. Ez más szóval azt a követelményt jelenti, hogy x minél közelebb legyen az 5-höz, a B pont

pedig az A ponthoz.”

A nullával való osztást a magyarázat sorozatok határértékének vizsgálatával küszöböli ki. A levezetések után két definíciót is kapunk, az egyik amit a Hajdú-féle könyvben is megtalálhatunk, a másik pedig a következő:

- *Feltételezzük, hogy az f függvény az x_0 pont környezetében értelmezve van, kivéve esetleg az x_0 pontot. Az f függvénynek az x_0 pontban létezik a határértéke, és a határérték A, ha minden az f értelmezési tartományából vett $x_n \to x_0$ ($x_n \neq x_0$) sorozat esetén a függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozata A-hoz tart.*

A Hajnal-féle tankönyv a határértéket érintő iránytangensével vezeti be, majd pedig részletesen megvizsgálja a $\frac{\sin x}{x}$ függvényt az x=1 egy környezetében. A magyarázat végén, amelyben rendőr elvet használ fel, közli, hogy a látottak úgy is kifejezhetők, „hogy ha x közel van a 0-hoz, $\frac{\sin x}{x}$ közel van 1-hez”. E példa után ismerteti a két definíciót a határértékre. Ugyanazokat, amelyeket már feljebb említettem. Mivel a Hajnal-féle tankönyvben a határérték témakörét megelőzi a folytonosság, ezért a definíciók után következtetéseket is von le:

- *Ha az f folytonos az x_0-ban, akkor az x_0-ban határértéke is létezik, és ez a határérték $f(x_0)$.*
- *Fordítva, ha f-nek létezik határértéke az x_0-ban, ebből nem következik, hogy a függvény folytonos, hisz esetleg nincs értelmezve, illetve ha értelmezve is van, a határérték és a helyettesítési érték nem feltétlenül egyezik meg.*

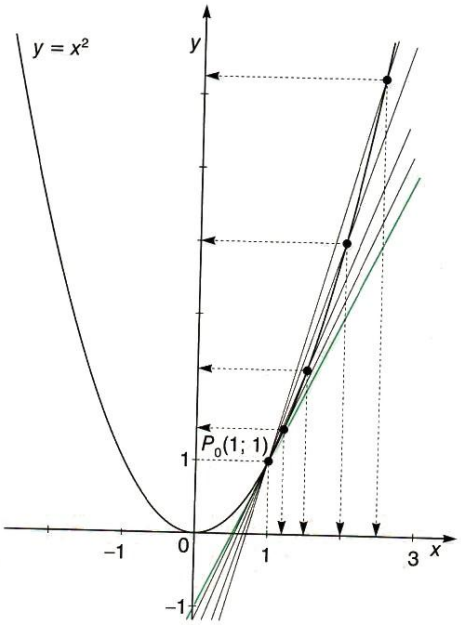
Nagyon jó, hogy a könyv közli ezeket az összefüggéseket, de hiányosságként megemlíthető, hogy nincs részletes magyarázat és ábra sem. A határérték eddigi alfejezeteire is igaz, hogy nincsenek ábrák. Természetesen ezt pótolni tudja az órai magyarázat, és az órán készített ábrák, de ha egy tanulónak csak ez a könyv állna rendelkezésére igencsak nehézséget jelentene számára a tananyag elsajátítása.

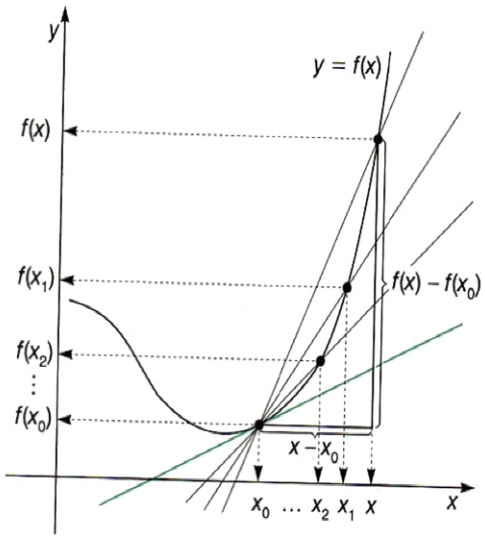
Differenciahányados, differenciálhányados, derivált, deriválhatóság:

A Czapáry-féle tankönyv külön-külön alfejezetben foglalkozik az érintő szemléletes fogalmával és a parabola érintőjével. E két téma után következik a differencia-, differenciálhányados című fejezet. Azonban mindhárom tankönyvben a differencia- és a differenciálhányados bevezetéséhez az x^2 függvény egy pontjához húzott érintők meredekségét vizsgálja.

A Hajnal-féle könyv még bevezető példaként hozza a szabadesését is. Ezek segítségével jut el a $g(x) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ különbséghányados függvényhez. A nullával való osztást pedig a sorozatok konvergenciájával küszöböli ki.

A Hajdu-féle tankönyv ábrája az x^2 példához viszont részletesebb, szemléletesebb. Több pontban vizsgálja ábra segítségével a szelők iránytangensét, azaz differenciahányadosát. Azt a sejtést fogalmazza meg a feladat végén, hogy „amint szelők sorozata közelít az érintőhöz, úgy az iránytangensek sorozata is közelít" az iránytangenshez. Ennek a sejtésnek a bemutatását ábrával is segíti. Végül ezt a vizsgálatot egy általános görbén, ábrával szemléltetve is bemutatja.





Ezt pedig a differenciahányados, majd a derivált definíciója követi:

- *A* $D_f \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *függvényt az f függvény x_0 helyhez tartozó differenciahányados függvényének nevezzük, ahol* $D_f \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$, *és az x_0 a D_f-nek egy belső pontja.*

- *A differenciahányados függvény x_0 helyen vett határértékét a függvény x_0 helyen vett differenciálhányadosának, másképpen deriváltjának nevezzük. Jelölése:* $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- *Az f függvényt differenciálhatónak, másképpen deriválhatónak mondjuk az x_0 pontban, ha ez a határérték létezik és véges.*

A definíciók alatt szerepel a differenciálhányados geometriai jelentése: az $y=f(x)$ görbe x_0 pontjában húzott érintőjének az iránytangense. Ennek kapcsán az $f(x)=x^2$ görbe P(1,1) pontjában húzott érintőjének az iránytangensének a levezetése található, ami alapján általánosan megfogalmazza a könyv az érintő egyenletét:

Ha f differenciálható x_0 pontban, akkor az $y=f(x)$ görbe x_0 abszcisszájú pontjában húzott érintőjének egyenlete: $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

A definíciókat két kidolgozott feladat követi, amelyekben egy adott pontban a differenciálhányadost, és az érintő egyenletét kell felírni, majd pedig a differenciálhányadost kell megadni egy x_0 pontban. Végül pedig a deriváltfüggvény definíciója zárja a sort.

Az f függvény deriváltfüggvénye az az f', amelynek értelmezési tartománya az f értelmezési tartományának az a részhalmaza, ahol f differenciálható, és értékkészlete az x helyekhez tartozó differenciálhányadosok értékeinek a halmaza.

Egy definíció sem marad példa nélkül, ezek a példák segítik a definíciók megértését, elmélyítését. A fejezetet a Hajdu-könyvben egy történeti kitekintés zárja.

A Hajnal-féle könyvben a szabadeséses feladat után, csak egy kiemelt definíció található:

Az f: (a;b)⟶ ℝ függvényt az $x_0 \in (a;b)$ pontban differenciálhatónak nevezzük, ha létezik a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határérték. Ezt a határértéket nevezzük a függvény x_0 pontbeli deriváltjának vagy differenciálhányadosának.

A **differenciálhatóságra** két féle megfogalmazást is ad, a másik viszont elveszve a sorok között található, így a diákok önkéntelenül „átnéznek" rajtuk. Majd négy példa következik, amelyben az $f(x)=c$, $f(x)=x$, $f(x)=|x|$, $f(x)=x^2$ függvények differenciálhatósága és deriváltja kerül részletes tárgyalásra. Ezt tovább gondolva teremt kapcsolatot a differenciálhatóság és a folytonosság között, ahol példa hiányában (csak visszautalást kapunk) a bizonyítás és a kapcsolat kimondására kerül sor:

a) *A folytonosság a differenciálhatóság szükséges, de nem elegendő feltétele*
b) *a differenciálhatósága folytonosság elegendő, de nem szükséges feltétele.*

A Hajdu-féle könyvben viszont csak később következik ez a differenciálhatóság című alfejezet, a műveletek a differenciálható függvényekkel rész után, és mivel a folytonossággal ebben a könyvben korábban még nem találkoztunk, ebben a fejezetben kerül bevezetésre. Itt nem találhatjuk meg tétel formájában az összefüggéseket, csak egy-egy kidolgozott példa következményeként vannak megfogalmazva, és a diákság számára könnyen észrevehetetlennek tűnhet.

A Czapáry-féle könyvben is ugyanígy a differenciálhányados című fejezet után következik a differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolata című rész. Itt két mintapélda következik, az első az x^2 függvény differenciálhatóságát látja be minden x valós számra, a második pedig az $|x|$ függvény deriváltját vizsgálja a 0 pontban. Majd kiemelve a következő tételt találjuk:

Ha az f függvény az x_0 pontban differenciálható, akkor az x_0 pontban folytonos is. Ebből következik, hogy a folytonosság a differenciálhatóság szükséges feltétele.

A folytonosság azonban nem elégséges feltétel ahhoz, hogy az f függvény valamely pontban differenciálható legyen. Az $f(x)=|x|$, $x \epsilon R$ függvény a 0 pontban folytonos, de nem differenciálható.

A Hajdu-féle könyvben a differenciálhányados fejezet után kerül sor néhány nevezetes függvény **derivált függvény**ére, de a bizonyítások jóval egyszerűbben vannak megfogalmazva, mint a Hajnal-féle tankönyvben, és apró példákkal vannak megtűzdelve. Színes kerettel pedig ki van emelve minden összefüggés, végül pedig egy összefoglaló táblázatban összegyűjtve. Néhány függvény deriváltját bizonyítás nélkül közli, ilyen a sin$x$, cos$x$, tg$x$, ctg$x$, e^x, a^x deriváltjai.

A Czapáry-féle könyvben külön fejezet foglalkozik az x^3, $\frac{1}{x}$; $\sqrt{x}$; a racionális egész függvény, és a szinusz- koszinuszfüggvény deriváltjaival. Mindegyik fejezetben van bizonyítás, ami a differenciálhányados segítségével történik. Középiskolás diákok számára ez az anyagrész elsajátítása ezzel a tankönyvvel valószínüleg nagy nehézséget okoz. A tanári részletes magyarázat elengedhetetlen a bizonyítások megértéséhez, illetve a bizonyítások fő pontjainak megtalálásához.

A Hajnal-féle könyvben az $\sqrt[n]{x}$ és a sin$x$, tg$x$ függvény deriváltjai is bizonyítással együtt feldolgozásra kerülnek.

A **műveletek** a differenciálható függvényekről című rész a Hajnal-féle könyvben külön fejezetben van leírva, és mindegyik részletes bizonyítással (differenciálhányados segítségével) és példákkal kerül tárgyalásra a könyvben. Ezzel szemben a Hajdu-féle

könyvben bizonyítások nem minden esetben szerepelnek és az apró példák is helyenként elmaradnak, amikhez viszont eddig hozzá szokott az ezt a tankönyvet forgató tanuló. Ebben az anyagrészben is szükség lenne rá, hogy a szabályok után rögtön egy-egy mintapéldát is lásson a tanuló. Így a gyengébb diákok is sikeresebben sajátíthatnák el a szabályokat. A Czapáry-féle tankönyvben – mint már megszokhattuk – külön alfejezetben találhatóak a deriválási szabályok részletes, hosszas bizonyítással. Az alfejezet végén mintapélda is található, viszont mindegyik elég bonyolultra sikerült, így nem a szabály elsajátítását segíti, hanem azon tovább mutat. Egy jó képességű diáknak ezek a példák nem okoznának gondot, de egy átlagos diáknak igencsak feladják a leckét.

Ezek után a Hajnal-féle könyvben a **függvény menete és a derivált kapcsolat**áról szóló részben egy konkrét példán, az $f(x)=x^3-x$ függvényen keresztül kerül szóba a derivált és a monotonitás kapcsolata, és a feladatra alapozva kimondásra kerül bizonyítás nélkül:

- *Az (a;b)-n differenciálható, monoton növekedő (csökkenő) függvény deriváltfüggvénye nemnegatív (nempozitív).*
- *Ha az (a;b)-n differenciálható függvény deriváltfüggvénye pozitív (negatív) az (a; b)-n, akkor itt f monoton növekedő (csökkenő).*

Ezt a függvény szélsőértéke és a derivált közötti kapcsolatról szóló rész követi, majd a konvex függvények és a második derivált kapcsolata kerül kidolgozásra. (*Ha az f függvény az (a;b) intervallumon differenciálható, és a függvény grafikus képének bármely pontjába húzott érintő a grafikon alatt (fölött) van, akkor a függvényt az (a;b)-n konvexnek (konkávnak) nevezzük*) Mindegyik rész elméleti levezetéssel kezdődik, és egy konkrét példával végződik. A korábban tanultak pedig összefoglalva megjelennek a **függvényvizsgálat** című részben két mintapéldaval: $f(x)=x+\sin x$ és az $f(x)=4x^3-x^4$.

A Hajdu-féle könyvben a **függvény menetének** című alfejezetben olvashatjuk mindezt, kivéve a második derivált és a konvexítás közötti kapcsolatot. A fejezet felépítése nagyban különbözik a Hajnal-féle tankönyvétől, hiszen elméleti bevezető helyett itt konkrét feladattal közelíti meg a témát:

Vizsgálja meg az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto x^2$ *függvény differenciálhányados függvényének előjelét a D_f különböző pontjaiban. Mit tapasztalunk?*

A feladat gondolkodásra sarkalja a diákokat, nekik kell a tanulságokat levonni, és a szabályt megfogalmazni. Csak ez után következik a tétel kimondása bizonyítással együtt.

Ha egy intervallum minden pontjában a differenciálhányados értéke pozitív, akkor a

függvény ezen az intervallumon szigorúan monoton növekedő.

Ha egy intervallum minden pontjában a differenciálhányados értéke negatív, akkor a függvény ezen az intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

A bizonyítás a differenciálhányados felírásával kezdődik, és a folytatásban azt vizsgálja, hogy a differenciahányados értéke mikor lesz pozitív (tehát a derivált pozitív), és éppen ahhoz az összefüggéshez jut, amit korábban szigorúan monoton növekedésnek nevezett.

A következő mintapéldában ismét gondolkodásra szólítja fel a tanulókat a feladat (természetesen megoldást is ad hozzá könyv, de hagyja a diákokat is kibontakozni):

Vizsgáljuk meg az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto x^3$ *függvény növekedési viszonyainak és a differenciálhányados-értékeinek kapcsolatát!*

Ebben a feladatban felhívja a könyv az olvasó figyelmét, hogy az $f'(x_0)=0$ nem feltétlenül jelenti azt, hogy az x_0 helyen a függvénynek szélsőértékhelye van.

A következő mintafeladatnál pedig az eddigi ismereteket kell felhasználni:

Jellemezzük, majd a kapott tulajdonságok alapján ábrázoljuk az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto 2(x+1)^2(x-2)$ *függvényt.*

A feladat levezetése után a könyv közli „a fenti gondolatmenetet általánosítva" a helyi minimum és maximum és a derivált kapcsolatáról szóló tételt bizonyítás nélkül.

Valamely $D_f \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$ *differencilható függvénynek helyi minimuma van az* $x_1 \in D_f$ *helyen, ha* $x < x_1$ *esetén* $f'(x) < 0$; $f'(x_1) = 0$; $x > x_1$ *esetén* $f'(x) > 0$;

helyi maximuma van az $x_2 \in D_f$ *helyen, ha* $x < x_2$ *esetén* $f'(x) > 0$; $f'(x_2) = 0$; $x > x_2$ *esetén* $f'(x) < 0$.

Végül kidolgozott feladatként az $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}; x \longmapsto x + \frac{1}{x}$ függvény vizsgálata jelenik meg.

Nagyon fontos fejezeteinek tartom a Hajdu-féle tankönyvnek a **szélsőérték számítást** és a **differenciálszámítás alkalmazásai**t. A szélsőérték számítás egy mintapéldával kezdődik:

4 m^3 *térfogatú nyitott, négyzetes oszlop alakú tárolót szeretnénk építeni. Milyen méreteket érdemes felvenni ahhoz, hogy az építéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel?*

A feladat végig gondolása után fogalmazódik meg a második derivált, amit egyből felhasználva ellenőrzése történik meg a feladatnak. További 3 mintapélda kerül a fejezetben kidolgozásra, és 4 feladatot tűztek ki önálló feldolgozásra. Az első kijelölt feladat:

Az 1 számot bontsuk fel úgy két összeadandóra, hogy a tagok a) szorzata b) négyzetösszege c) köbeinek összege d) hatodik hatványainak összege amennyiben lehetséges, szélsőértéket vegyen fel.

A differenciálszámítás alkalmazásai című fejezetben mintapéldákat találunk: egy szabadon eső test két időpont között mekkora sebességet ér el, egy optikával kapcsolatos és egy sebességgel kapcsolatos feladatot. A fejezet végén pedig egy ellenőrző feladatsor segíti az összefoglalást, és a témazáróra való felkészülést.

A Czapáry-féle könyv a differenciálható függvények menetének vizsgálatát az x^2 függvény néhány intervallumának elemzésével kezdi, és megfigyeli, hogy ahol a függvény növekedő, ott az érintő meredeksége pozitív. A deriváltfüggvény és a függvény monotonításának kapcsolatáról szóló tételt kimondja, és bizonyítja is, ugyanolyan módon, mint a Hajnal-féle könyv. A derivált és a lokális szélsőérték kapcsolatáról szóló tétel részenként és összefoglalóan is kimondásra kerül. Ez nagyon hasznos, hiszen az összefoglaló rész által a tanulóknak átláthatóbbá válik a szükséges és elégséges feltétel.

A derivált zérusértéke a szélsőérték létezésének szükséges, de nem elégséges feltétele. A derivált zérusértéke és előjelváltása a szélsőérték létezésének elégséges, de nem szükséges feltétel.

Ebben a könyvben a tételek kimondása után teljes függvényvizsgálatokat kapunk 2 mintafeladaton keresztül, utánuk pedig egy rövid összefoglalót, hogy hogyan, milyen sorrendben érdemes elvégezni a függvényvizsgálatokat. Ez nem elméleti szempontból fontos, hanem a diákoknak kapaszkodót jelent a feladatok megoldása során, így a gyakorlati haszna nagy.

A három tankönyv összegzése:

A Hajnal-féle tankönyv felépítésében eltér a másik két vizsgált tankönyvtől. A differenciálszámítással foglalkozó fejezet nem tartalmazza a függvény folytonosságát és határértékét, hanem külön fejezetet alkotnak. Ennek köszönhetően a folytonosság és a határérték fogalmával részletesebben megismerkednek a diákok, így ez segítheti a differenciálszámítás megértését. Viszont korántsem biztos, hogy az iskola tanterve erre lehetőséget biztosít, hiszen az óraszám behatárolt, és az „csak” a tanártól függ, hogy mennyire mélyíti el a határérték fogalmát, mennyi példát hoz a begyakorlásra.

A Hajnal-féle tankönyv problémaszerű példák megfogalmazása nélkül, erősen

behatárolt gondolatmenettel ismerteti az egyes témaköröket. Így a tanulói aktivitás jelentősen redukálódik a lexikális tudásra. Ezt tovább erősíti, hogy az elméleti anyagrész túlsúlya háttérbe szorítja a gyakorlati alkalmazásokat. Így a tanulóknak nagyfokú absztrakció szükséges a tananyag megértéséhez. Mindez komoly problémát jelenthet a diákok számára. Ráadásul a középiskolában nem az a cél, hogy a felsőfokú tanulmányok ismeretanyagát már előre megtanulják, hanem hogy megalapozzák a későbbi tudás könnyebb elsajátítását. Ehhez pedig az anyag elmélyítése lenne a cél, amit a másik két tankönyv sokkal inkább szem előtt tart, és törekszik a megértésre, az olvasmányosságra. Még hiányosságként jön elő a Hajdú-féle könyvben, hogy nem teremt kapcsolatot az egyenletes mozgás ill. egyenletesen változó mozgás pillanatnyi sebessége és gyorsulása, valamint az út-idő grafikonjának deriváltjai között. A Hajnal-féle könyv sem a legkiválóbb ebből a szempontból, de sokkal inkább törekszik rá, hiszen 3 kidolgozott példa és több kidolgozásra szánt feladat is található ebben a témakörben. A Hajnal-féle tankönyvet a diákok egyedül is tudják használni, logikusan felépített, lényegre törő, a fontos összefüggések színes kerettel vannak kiemelve, és a definíciók megértését sok példa szolgálja. A bizonyítások is lényegre törők, nem tartalmaznak „felesleges” megjegyzéseket, megmaradnak egy átlagos középiskolai tanulótól elvárható tudásszintnél. Ebben a tankönyvben található meg a legtöbb kidolgozott feladat, ami segíti a begyakorlását az egyes témaköröknek. A Czapáry-féle tankönyv több közös vonást tartalmaz a Hajnal-féle tankönyvvel. Bizonyításai, magyarázatai gyakran nehézséget okozhatnak a diákoknak, mert túlságosan törekszik a pontos, mindenre kiterjedő megfogalmazásra, viszont ebben az információ tömegben könnyen eltévedhetnek a tanulók, és a lényeges pontok feledésbe merülhetnek. A tételek, definíciók kiemelve találhatóak meg, ami segít kiigazodni a diákokat a könyvben. Kidolgozott mintafeladat több található benne, mint a Hajnal-féle könyvben, de nem éri utol a Hajdu-féle kiadást.

Pintér Lajos: Analízis I., speciális matematika tankönyv

Pintér Lajos könyve két kötetes, az első kötetben (310 oldalon keresztül) a függvény fogalmától egészen a függvény vizsgálatig (differenciálszámítás segítségével) jut el. Kettős céllal készült ez a könyv, egyrészt a speciális matematika tagozatos osztályok számára, másrészt pedig szakköri „füzetnek". Több olyan részt tartalmaz, amely a középiskolai tanulmányok során kihagyható, de a matematika iránt érdeklődő illetve továbbtanuló diákok számára hasznos lehet.

Külön fejezet foglalkozik a folytonos függvényekkel, a függvény határértékével és a differenciálható függvényekkel. Mindegyik részletes, korrekt matematikai leírásokat tartalmaz, de a szemléltetés sem marad elhanyagolva. A példák a hagyományos szárazabb típusúak, néhol találkozunk csak 1-1 fizikából vett példával, a ma divatos gyakorlati életből vett feladatok itt nem fordulnak elő, de a diákok által igényelt matematikai háttér megértését, begyakorlását teljes mértékben kiszolgálja a könyv.

A differenciálszámítás bevezetésében az érintő problémafelvetéséből indul ki és jut el a differenciálhányadosig, ahol központi szerepet tölt be a differenciálható-e a függvény abban az adott pontban vagy nem.

Bevezető példa:

Tekintsük az $f: [0;\ \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ *függvényt. Valaki azt kérdezi, a sin függvény grafikonjának van-e az* $x = \frac{\pi}{4}$ *pontban érintője?*

Sorozatok határértékével vizsgálja a $P_n(x_n;\ \sin x_n)$ és $P(\frac{\pi}{4};\ \sin\frac{\pi}{4})$ pontokon átmenő húr iránytangensét.

Második bevezető mintapélda:

Egy rakéta motorja 100 s-ig működik. Az indítás után a rakéta $25t^2$ *m magasságban lesz (*$0 \le t \le 100$*). 5s múlva mekkora a rakéta sebessége?*

Itt veti fel a könyv, hogy mit értünk egy adott t_0=5 időbeli sebességen. A következő magyarázatot találjuk: Legyen $\{t_n\}$ egy 5-höz konvergáló sorozat. Az világos, hogy a t_n és 5 időpontok közötti átlagsebesség $\frac{25t_n^2-25\cdot 5^2}{t_n-5}$. Ha ennek a kifejezésnek $t_n \to 5$ esetén létezik határértéke (függetlenül attól, hogy milyen sorozaton át tart t_n az 5-höz, persze $t_n \neq 5$), akkor természetesnek látszik azt mondani, hogy a t = 5 időpontban ez a rakéta sebessége.

Az $s(t) = 25t^2$ jelöléssel, $t_n \neq 5$ miatt:

$$\frac{s(t_n)-s(5)}{t_n-5}=\frac{t_n^2-25\cdot 5^2}{t_n-5}=25\cdot\frac{t_n^2-5^2}{t_n-5}=25(t_n+5)\to 250$$

Azt mondhatjuk, hogy $v(5)= 250\ \frac{m}{s}$.

Ezek a mintapéldák nagyon jól megalapozzák a differenciálhányados fogalmát, a differenciálszámítást. Főképp akkor érdemes használni, ha a tanulók már könnyedén kezelik a határérték számítást.

Következő fejezet 'A műveletek differenciálható függvényekkel' című, részletes bizonyításokkal, pár példával. Ezek után az $\sqrt[n]{x}$, exponenciális, logaritmus és az összetett függvény deriváltjának részletes tárgyalása, és 'A középértéktételek' című fejezet található részletes magyarázatokkal, bizonyításokkal, ami nincs a középiskolai tananyagban. Erre a fejezetre támaszkodva levezeti a monoton függvények viselkedésének és a deriváltjuknak a kapcsolatát. Mintapéldaként az $f:\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=tg^3x-3\cdot tgx$ jelenik meg. Majd a konvex és konkáv függvények vizsgálata következik a derivált segítségével. Végül a témakört a függvényvizsgálat zárja. Ebben a fejezetben négy kidolgozott példát találunk:

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^6-3x^4+4x^2-32$
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2\ \sin x-\sin 2x$
4. $f:\mathbb{R}\{-1;1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

A könyvben sok állítás van, amelyet több, különböző módon bizonyítanak be, tehát nagy hangsúlyt fektetnek a bizonyítási módszerek gyakorlására. Rengeteg a megoldott, részletesen kidolgozott feladat a könyvben, és a legtöbbje nehezebb, mint a könyv által kitűzött egyéb feladat. Viszont hiányzik a könyvből a szélsőérték feladatok témaköre, és a mindennapi életből vett szöveges feladatok bevezetése. Így elengedhetetlen a tankönyv mellett a feladatgyűjtemények használata.

<u>Ila-Horváthné Nagy Ilona: Matematika VI., Analízis: Differenciál és Integrálszámítás:</u>

Ez a munkatankönyv a már tanult ismeretek begyakorlását szolgálja. Célja a (régi) érettségire és felvételire való felkészítés volt. Az új kétszintű érettségi felkészülésben is sok segítséget nyújthat, ha a mechanikus számolásokat akarjuk begyakoroltatni, de önmagában semmiképpen sem elegendő a kétszintű érettségire való felkészüléshez.

A differenciálszámítás fejezete 42 oldalt ölel fel, a következő felépítésben:
Az első alfejezete, a függvény folytonossága, 3 oldalt foglal magában 9 feladattal. A feladatok felépítése rávezeti a diákot arra, hogy el tudja mondani, hogy mikor folytonos egy függvény és mikor nem, és erre a tapasztalatokra építve egy feladaton keresztül meghatározza egy függvény folytonosságát, és a limesz szó jelentését, illetve először itt használja a határérték kifejezést.
A második alfejezete a függvény határértékével foglalkozik 16 oldalon keresztül. A diákot gondolkodásra sarkalja, mert 1-2 feladatot követően, végig kell gondolnia és meg kell fogalmaznia egy függvény adott pontbeli folytonosságának feltételeit a határérték segítségével. Három fontos feltételt kell megadnia a diáknak. A további feladatokban megtanítja a diákoknak, hogy kell használni a sáv és a környezet kifejezést. A határértékkel való műveletekre is rávezeti a könyv a tanulókat, végül pontosan ki is mondja a szabályokat, és be is gyakoroltatja őket.
'A függvény határértéke' című fejezetet a függvény differenciálhatósága követi 12 oldalban. Első körben függvények viselkedését tanulmányozza, majd két ponton átmenő szelőegyenesek egyenletét íratja fel a diáksággal egy megadott képlettel (y-y_0 = m(x-x_0)), végül a meredekséget is leolvassák, amelyből több szemléletes feladat után végül a differenciálhányadosig jutnak. Ez után több feladat következik, amelyben meg kell adni, hogy differenciálhatóak-e az adott függvények vagy sem. A derivált bevezetése után, felsorolja néhány függvény deriváltfüggvényét, és műveleti szabályokat, bizonyítással, amelyekben a tanulóknak meg kell találniuk azt a pontot, ahol felhasználják, hogy egy adott helyen differenciálható függvény folytonos is.
Negyedik alfejezet 'a függvény és deriváltja' címet viseli. 5 oldalas ez a rész. A függvény viselkedése és deriváltjainak (első, második) kapcsolatára világít rá, ábrákkal, táblázatokkal, és definíciókkal.
Utolsó alfejezete a differenciálszámításnak 'a differenciálszámítás alkalmazása feladatokban' című témakör. 24 feladatból áll, de a gyakorlati életből vett feladatokkal nem találkozunk, csak néhány geometria példa jelenik meg.

Összefoglalóan meg lehet állapítani, hogy a tankönyveknek nem az ismeretek puszta reprodukálása a cél, hanem arra is kell törekednie, hogy továbbgondoltassa a diákokat, és saját megfigyeléseken alapuló ismeretszerzésre ösztönözze őket. Ebből a szempontból a Hajdu-tankönyv magasabb színvonalú, mint a többi tankönyv. Több

minta feladatot is találunk, amelyben a tanulóknak a feladat segítségével maguknak kell rájönniük egy-egy definícióra, összefüggésre. A rávezetés után, és a probléma felvetést követően mindig található kiemelve egy általános definíció, szabály kimondása, ami segíti a diákságot az anyag elsajátításában, vagy akár az összefoglalásban.

A Hajnal-féle tankönyv kérdései és feladatai közül több olyan van, ami egyszerűen csak szó szerint visszakérdezi a tankönyvi szövegben olvasottakat. A Hajdu-féle könyvben viszont több olyan feladat is található, amelyek valóban gondolkodtató jellegűek, vagy önálló tanulói tevékenységet feltételeznek.

A gyakorlati életből vett példák a szélsőérték feladatok és a differenciálszámítás témakörben is hiányoznak Hajnal Imre, Horváthné Nagy Ilona és a Pintér Lajos könyvéből, miközben az emelt szintű érettségiben ez követelményként jelenik meg. E hiányosság ellenére a könyvek jól hasznosíthatóak a tanításban, főként egy-egy új anyagrész megismertetésére.

A Hajdu-féle könyv is kis kiegészítésre szorul, hiszen egyes bizonyításokat (összegfüggvény deriváltja stb.) hiányolok a könyvben, de ez könnyen pótolható az órai magyarázattal. Feladatok szempontjából az előbbi tankönyvekhez viszonyítva teljesebb, hiszen szélsőérték feladatokat, és alkalmazási példákat is találunk benne, de ennél a tankönyvnél is elengedhetetlen a feladatgyűjtemények használata.

V. Feladatgyűjtemény elemzés

2005-ben új érettségi került bevezetésre. A specifikusan a kétszintű érettségire felkészülést megcélzó feladatgyűjtemények célja, hogy az olvasót megismertessék az új típusú feladatok jellegével, valamint az új és hagyományos témákban a várható feladatok nehézségi szintjével. A differenciálszámítás témaköre csak emelt szinten jelenik meg, így az arra (is) felkészítő feladatgyűjteményeket tanulmányoztam. Ezeknek a köteteknek a célja, hogy bemutassa, hogy az emelt szintű érettségi nem egy teljesíthetetlen vizsga, fel lehet rá készülni, és eredménnyel teljesíthető. A korábbi érettségikhez képest a változások két területen jelennek meg. A feladatok egy részének a jellege más, mint a korábbiaké. Például eltérést jelent, hogy komoly szerepet kap a szövegértést és a modellezést igénylő szöveges feladatok. Továbbá új témák is kerültek bevezetésre az emelt szintű érettségiben, amelyek korábban nem szerepeltek. Ezek a fejezetek a következőek: analízis elemei, gráfok, valószínűség számítás. Az analízis elemei között szerepel a határérték, folytonosság, differenciálszámítás és az integrálszámítás.

Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Simon Judit: MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.

2006-ban a Nemzeti Tankönyvkiadó új, három kötetes feladatgyűjtemény-családja – a hozzá tartozó három megoldáskötettel együtt, amely CD mellékletként megtalálható a feladatgyűjteményeknél – feldolgozza a teljes középiskolai matematika tananyagot az új kétszintű érettségi tekintetében, középszinten és emelt szinten egyaránt. Több ezer feladatott tartalmazó feladatgyűjteményekben minden feladat sorszáma előtt egy kódot találunk, amellyel a feladatok nehézségi fokát tudjuk megállapítani, ami nagyban segíti mint a tanuló, mint a tanár dolgát. (K1 = középszintű, könnyebb; K2 = középszintű, nehezebb; E1 = emelt szintű, könnyebb; E2 = emelt szintű, nehezebb; V = versenyre ajánlott feladat; Gy = a gyakorlati vonatkozású, élet közeli matematikapéldáknál áll)

A feladatgyűjtemény-család II. kötetében az V. fejezetben, ’Az egyváltozós valós függvények analízisének elemei’ című fejezet a következő alfejezetekre oszlik: Sorozat

határértéke; Függvény határértéke. Folytonosság; Differenciálszámítás; Integrálszámítás. A differenciálszámítás témaköre közel 120 példája további témakörökre bomlik: deriválás, érintők, szélsőérték, függvényvizsgálat. Ezek a témák tökéletesen lefedik az eddigi érettségikben előforduló deriválással kapcsolatos példák témaköreit. A differenciálszámítás témakörét a folytonossággal és a határértékkel kapcsolatos feladatok megalapozzák, bár élet közeli feladatokat nem találunk. A differenciálszámítás témakörében viszont a szélsőérték keresése kapcsán felmerülő példák között rengeteg a gyakorlati életből vett feladat. A tipikus példákat is megtaláljuk -pl: Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet át lehet vinni az egyik folyosóról a másikra, ha adottak a folyosók szélessége -, azok a megszokott példák sem kerültek ki a gyűjteményből, amik kissé erőltettek is, mint például az adott térfogatú négyzetes oszlop alakú csomagot kötünk át egy spárgával. A kérdés az, hogy hogyan válasszuk meg a csomag méreteit, hogy az átkötő spárga hossza a lehető legrövidebb legyen? A mindennapi életben ez elég érdekes szituációban merülhet csak fel, hiszen általában először az ajándékot vesszük meg, aminek adottak a méretei, és csak utána akarjuk becsomagolni. Nem fordítva. De a régi típuspéldákon túl rengeteg feladatot találunk, melyek nem csak a matematika témaköréből, és a hétköznapi életből merítenek ötletet, hanem a fizika, illetve a kémia világából is. Ezeknél a példáknál általában találunk egy kis útmutatót, hogy azok a diákok se maradjanak ki, akik a fizikában nem oly otthonosan mozognak.

Bárd Ágnes – Frigyesi Miklós – Lukács Judit – Major Éva – Székely Péter – Vancsó Ödön: Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten feladatgyűjtemény

A feladatgyűjtemény célja kimondottan az emelt szintű érettségire való felkészítés. Az írásbeli emelt szintű matematika érettségi két részből áll. Az első négy feladat általában a vizsgakövetelmények öt témaköréből kerülnek ki. Az ilyen típusú feladatok találhatók a könyv első öt fejezetében (Halmazok, logika, kombinatorika, gráfok; Algebra, számelmélet; Függvények, analízis; Geometria, koordináta-geometria, trigonometria; Statisztika és valószínűség számítás) találhatók. Az emelt szintű matematika írásbeli érettségi második felében öt összetett, több témakört érintő feladat található. Az ilyen típusú feladatokat a 6. fejezet tartalmazza a könyvben. A feladatgyűjtemény hetedik fejezetében pedig olyan feladatok kerültek, amelyek túlmutatnak a

vizsgakövetelményeken, de a versenyre készülő diákok számára tökéletes.

Ehhez a feladatgyűjteményhez megoldó kötet is tartozik, ami többnyire a feladatok részletes megoldását tartalmazza, illetve néhány feladatnál didaktikai megjegyzéseket is találunk.

A differenciálszámítás témakörébe tartozó feladatok között megtaláljuk a deriválási példákat, az érintők meghatározását, majd pedig szöveges feladatok formájában a szélsőérték keresést (24db), végül pedig függvényvizsgálatokat. A szöveges feladatok sokszínű repertoárjából tetszés szerint válogathatunk. Azonban folytonossággal, határértékkel kapcsolatos példákat nem tartalmaz a gyűjtemény. Ami nem feltétlenül hibája, hiszen az érettségin feladatok formájában ezen témakörök nem jelentek még meg.

Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön: Egységes érettségi feladatgyűjtemény Matematika I.

Ebben a példatárban többnyire középszintű érettségire felkészítő feladatokat vannak széles választékban. Emelt szintű példák csak elvétve találhatók, de ezeket jelölik. A differenciálszámítás témaköre csak néhány szélsőérték kereső feladatban, illetve függvényvizsgálattal kapcsolatos feladatban jelenik meg.

VI. Német tankönyv bemutatása

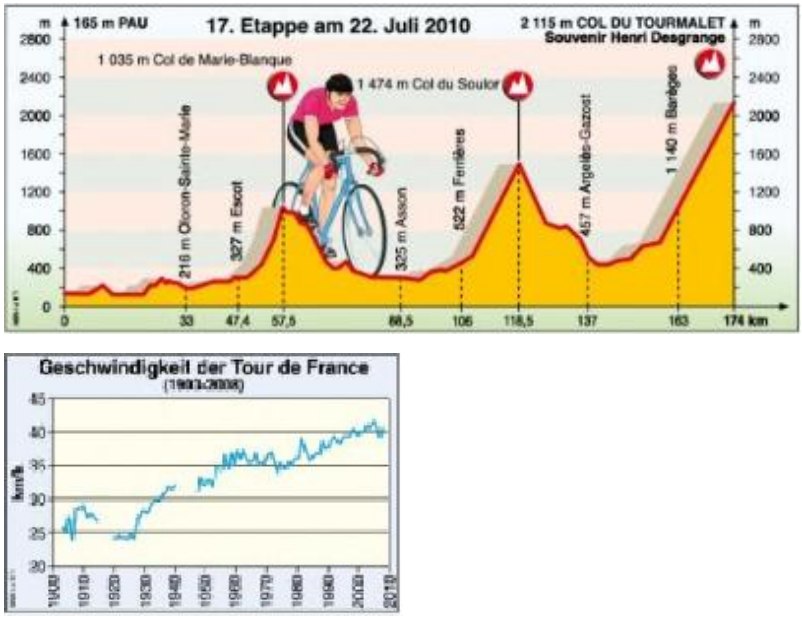
Egyetemi tanulmányaimat matematika német szakon végzem, így lehetőségem nyílt matematikát németül tanítani, amihez szükséges volt a németnyelvű matematika tankönyvek tanulmányozása illetve a német rendszerrel való megismerkedés. Az órákra való felkészülés során sok eltérést tapasztaltam a magyar és a német matematika tanítás módszerei között. Természetesen rengeteg dolog van, amit ők szeretnének hasznosítani a magyar oktatásból, de én elsősorban azokra a dolgokra fogok kitérni, amiket hasznosítani lehet Magyarországon a német differenciálszámítás tanításából. Ilyen elsősorban a gyakorlati szemlélet, az élet közeliség és a többi tudományterülettel való kapcsolat a matematikaoktatásban.

Tankönyvelemzéshez az Elemente der Mathematik tankönyvsorozatot választottam, amelyet Berlinben és Brandenburgban használnak. Németországban már a 10. osztályban megjelenik a differenciálszámítás, míg a magyar rendszerben csak 11. osztályban.

Heinz Griesel, Helmut Postel, Friedrich Suhr: Elemente der Mathematik, 10. Schuljahr, Schülerband című könyv 2010-ben jelent meg a Schroedel kiadótól.

Ezt a tankönyvet a gimnáziumokban a 10. osztályában használják alapképzésen (Grundkurs), bár egy-két fejezet meg van jelölve, amelyek emelt szintű tananyag (Leistungskurs). Németországban tartományonként változó, hogy 10. osztályban vagy 11. osztályban kerül elő a differenciálszámítás. Hainz Griesel könyvében a harmadik fejezetben jelenik meg a differenciálszámítás, a negyedik fejezetben pedig a függvényvizsgálat és alkalmazási módszerek. A legtöbb helyen viszont 11. osztályban jelenik csak meg a teljes függvényvizsgálat és a differenciálszámítás egyéb alkalmazási területei. Ez a tankönyvsorozat 11. osztályban „csupán“ összefoglalja – bár az elég részletesen − az eddig tanultakat a differenciálszámítás témaköréből, és az integrálszámítás témakörével folytatja.

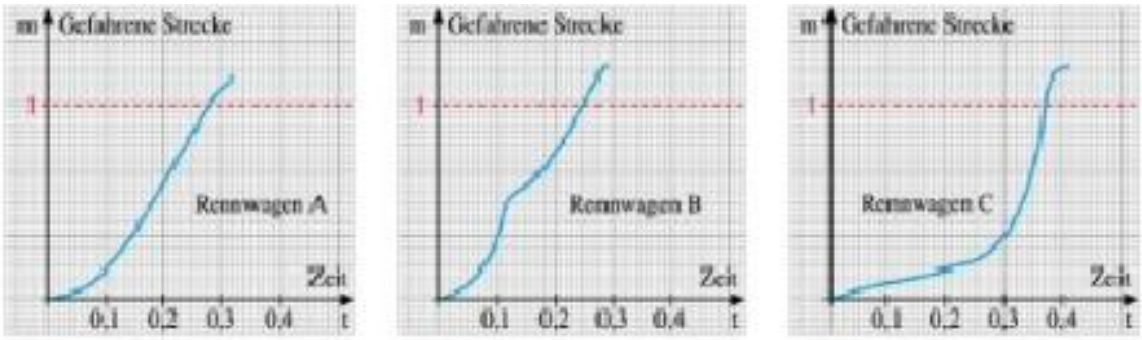
A bevezető feladatban a 2010-es Tour de France 17. szakaszát találjuk egy diagram (1. ábra) formájában, illetve a versenyzők sebességét 1903-tól 2010ig. A feladat több kérdést tartalmaz a diagramokkal kapcsolatban (pl.: hol ér el a versenyző a legmeredekebb részhez, hol érhetik el a versenyzők a legmagasabb sebességet)



1. ábra

A feladat során feleleveníti a tanuló, hogy mit ért meredekség alatt, hogy tudja mindezt kiszámolni és hogy jelenik meg a mindennapokban. A feladat után, még a fejezet kezdőlapján megtalálhatjuk a fejezet célját is: mit értünk egy görbe vonal meredeksége alatt, és hogyan tudjuk azt meghatározni. Ezen ismeret birtokában tudjuk meghatározni a függvények viselkedését.

Ezt a változások leírása című rész követi, amelyben három különböző gyakorlati életből vett feladattal találkoznak a diákok, ahol a változásokat kell megfigyelniük leírás, grafikon vagy táblázat segítségével. Ezek a feladatok felkeltik a diákok érdeklődését a téma iránt. A fiúk körében sikeres példa lehet a következő:

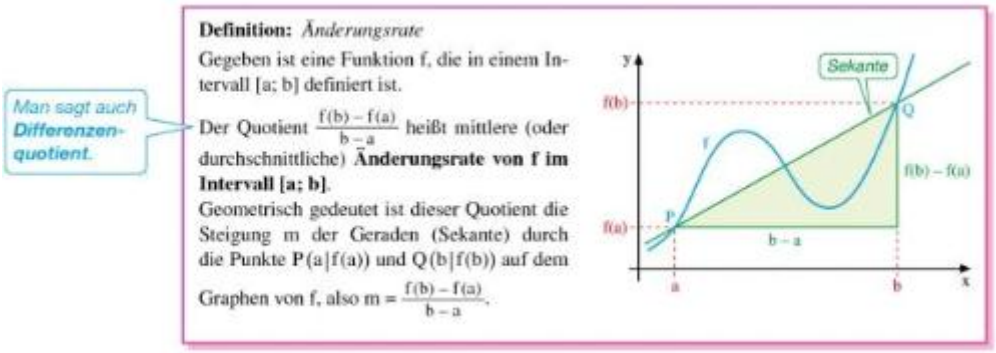


2. ábra

A feladat rövid felvezetése után, a diákoknak a 2. ábra (út-idő függvény) alapján kell megválaszolniuk, hogy melyik autó nyerne egy versenyen, ahol az út egy méter hosszú, szavakkal el kell tudni mondaniuk az autó sebességét az idő függvényében, illetve hogy melyik autó éri el a legnagyobb sebességét.

Az eddigi feladatokban nagy szerepe van a tanárnak, hiszen eddig megoldásokat nem mellékel a könyv, hanem tanári irányítással zajlik a feladatok feldolgozása. A tanulónak minden lépésnél lehetőséget kell biztosítani, hogy önállóan gondolja végig a feladatot. Így érhetjük el, hogy a matematikát nem megmutatjuk a diáknak, hanem ő maga fedezi fel.

Az első alfejezet címe a differenciahányados, szelő meredeksége. Differenzenquotient (differenciahányados) helyett az Änderungsrate im Intervall (adott intervallumon való átlagos változása) kifejezést használja a könyv, amellyel a differenciahányados fogalma érthetőbbé válik a tanulók számára. Tehát a határérték kikerülését úgy teszi lehetővé, hogy egyszerűen egy folytonos görbe adott intervallumon való átlagos változását mutatja be a könyv. A bevezető feladat egy napraforgó különböző napokon mért magasságát adja meg táblázatos formában. A feladat arra kérdez rá, hogy melyik időszakban volt a legmagasabb a napraforgó méretének növekedése. Így diákok közelebb jutnak egy függvény (a virág növekedését leíró függvény) meredekségének vizsgálatához. (Ha ábrázoljuk a napraforgó növekedésének függvényét koordinátarendszerben, akkor érdemes kitérni a Δx, $\Delta f(x)$ jelentésére is). Ez(eke)t a fogalma(ka)t továbbmélyíti a következő példa, amihez már a könyv megoldást is csatol. Ez a példa egy folyó vízállás növekedéséről szól. Koordinátarendszerben ábrázolják a vízállás növekedést, amelyet táblázattal is kiegészít a feladat, és megadja, hogy melyik órában növekedett a leggyorsabban a folyó vízszintje. A következő kidolgozott példa ugyanezt a gondolatmenetet mélyíti el, amely a hőmérséklet növekedéséről szól.
Ezekkel a minta példákkal a diákok már kapnak egy összefüggő képet a fejezet matematikájáról, alkalmazási lehetőségeiről. A bevezető feladatokat egy három pontból álló összefoglaló rész követi, amelyben az eddig felhasznált lépéseket, matematikai szabályokat, logikai lépéseket általánosan megfogalmazva találjuk. Első pontban a zárt intervallum definíciója, második pontban a differenciahányados fogalma, majd a harmadik pont alatt az található, hogy a differenciahányadosa egy lineáris függvénynek éppen az egyenes meredeksége. Mindegyik pontban az általános felvezetés és definíció alatt egy konkrét példát is találhatunk, ami segíti a diákoknak a szabály megértését és elsajátítását.
A differenciahányados fogalmát a következőképpen definiálja:



Man sagt auch **Differenzen-quotient**.

Definition: *Änderungsrate*

Gegeben ist eine Funktion f, die in einem Intervall [a; b] definiert ist.

Der Quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ heißt mittlere (oder durchschnittliche) **Änderungsrate von f im Intervall [a; b]**.

Geometrisch gedeutet ist dieser Quotient die Steigung m der Geraden (Sekante) durch die Punkte P(a|f(a)) und Q(b|f(b)) auf dem Graphen von f, also $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Azaz:

Adott az *f* függvény, ami az [a; b] intervallumon értelmezve van. Az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hányadost a görbe [a; b] zárt intervallumon való átlagos változásának nevezzük. Geometriailag az egyenes (szelő) meredekségét mutatja meg ez a hányados a P és a Q pontok (amik az f függvényen vannak rajta) segítségével, hogy $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ezt a részt egy feladatsor zárja, amelyben csak valóság közeli feladatokat találunk. Például az egyik feladatban az idő-sebesség függvényt kell felrajzolniuk a diákoknak egy motorverseny adatai alapján és a meghatározni a differenciahányadost a megadott intervallumokban. A feladat végül azzal zárul, hogy a diákoknak meg kell határozniuk, hogy mit adnak meg ezek a differenciahányadosok.

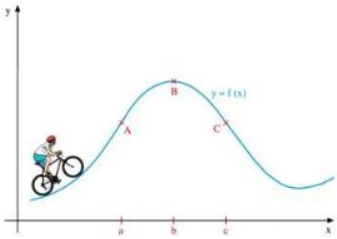
A könyv diákközpontúsága már ebből a részből nyilvánvalóvá válik, hiszen aprólékosan, a valóságból vett példák alapján vezeti rá a tanulókat a differenciahányados fogalmára. Az érdeklődésüket felkeltő feladatok szerepelnek, színes ábrákkal tarkítva, rengeteg magyarázattal. A fontos matematikai összefüggések színessel kiemelve és a mélyebb megértést segítő apró példákkal vannak tarkítva. Mind felépítésében, mind pedig feladattípusaiban nagyon megnyerő a fejezet.

A második alfejezet címe a differenciahányados, érintő meredeksége – derivált

Az első bevezető példában a diákok feladata csupán annyi, hogy meg kell határozniuk, hogy mely pontokban pozitív és hol negatív a meredeksége a függvénynek (3. ábra), illetve hogy hol nulla.

3. ábra

Ezt egy bevezető követi, amelyben az ábrának (4. ábra) a megjelölt A, B, C pontjában először meghatározzák, hogy pozitív, negatív vagy nulla a meredeksége, majd pedig mivel a meredekség fogalmát eddig a tanulók csak egyenesekhez kötve tanulták, ezért az A, B, C pontokhoz berajzoltatja az érintőket.



4. ábra

Ezt követi a függvény egy pontjában vett deriváltjának a definíciója:

(1) Steigung eines Graphen in einem Punkt, Ableitung einer Funktion an einer Stelle

Die Überlegungen aus der Einführung legen folgende Definition nahe.

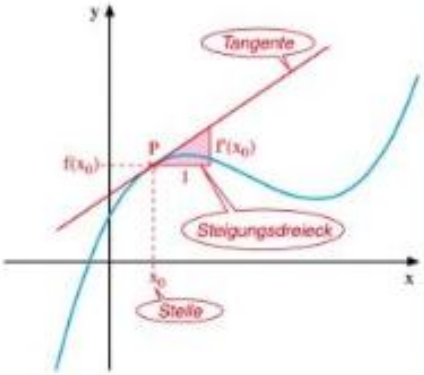
Definition

P ist ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion f mit $P(x_0|f(x_0))$.

Als **Steigung des Graphen der Funktion f im Punkt P** bezeichnet man die Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt P. Dabei ist die Tangente die Gerade, der sich der Graph in der Nähe von P möglichst gut anschmiegt.

Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an der Stelle x_0 heißt **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0.

Diese Ableitung von f an der Stelle x_0 wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet, gelesen: *f Strich von x_0*.

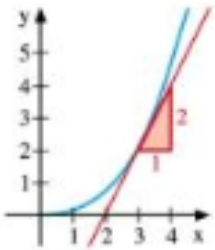


Azaz: Legyen az f függvényen a $P(x_0|f(x_0))$ pont. A függvény meredekségét a P pontban a függvény P pontban vett érintő meredekségével határozzuk meg. Az érintő az az egyenes, amely a függvény P pontjához a legjobban simul. Az érintő meredekségét a függvény x_0 helyen vett deriváltjának nevezzük. Az *f* függvény x_0 helyen vett deriváltját $f'(x_0)$-lal jelöljük.

Minden definíciót egy apró példa követ, itt a következőt rövidke feladatot láthatjuk: 5. ábra

Az *f* függvénynek a 3 helyen 2 a meredeksége.

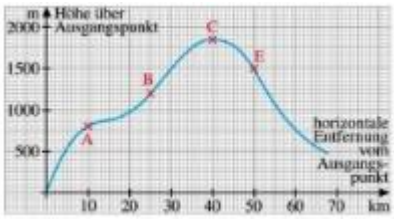
Azaz *f*-nek a 3 helyen kettő a meredeksége, amit úgy jelölünk, hogy $f'(3) = 1$



5. ábra

7. ábra

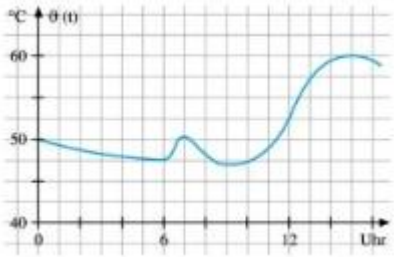
Ezt egy kidolgozott feladat követi, hogy a definíció egy alkalmazási területére is rámutasson a könyv. A mellékelt 6. ábra alapján kell kiválasztani, hogy az A, B, C, vagy a D pontban lehet elhelyezve a 2 jelzőtábla (7. ábra) az úttest mellett. Ezt még további kidolgozott feladatok követik, természetesen itt is megtalálható az út-idő függvénye, amiből sebességet illetve gyorsulást kell számolni. A fejezetet újból egy egyéni megoldásra váró feladatsor zárja le.



6. ábra

A következő fejezetek is ugyanúgy épülnek fel, mint az első kettő. Először minta példákkal vezeti be a könyv a fejezet mondanivalóját, majd általánosan megfogalmazza a látottakat, és definíciókat fogalmaz meg apró példákkal ellátva. Majd minden alfejezet egy-egy megoldandó feladatsorral zárul. A következőekben egy-egy mintapéldával szemléltetem az egyes alfejezeteket.

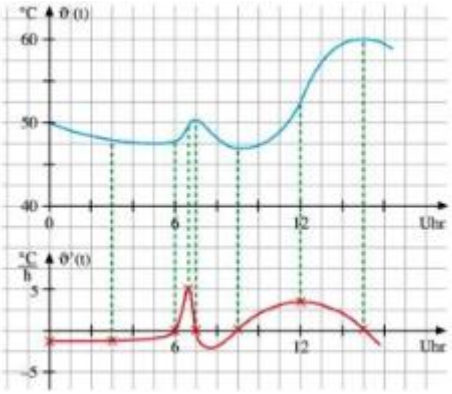
A következőekben a **deriváltfüggvény** grafikonja kerül kidolgozásra. A témakör egy problémafelvetéssel kezdődik. Egy grafikon (8. ábra) található, amely egy autóverseny közben az akkumlátor által elraktározott energiát mutatja idő függvényében.



8. ábra

A tanulóknak ez a grafikon alapján kell következtetéseket levonni, hogy az átlagos változás milyen mértékű, milyen adatokat lehet figyelmen kívül hagyni, mely adatok

fontosak. A kidolgozott bevezető feladatban egy grafikonon a hőmérsékletalakulás látható. A feladatban a diákoknak több pontban kell meghatározni (lokale Änderungsrate) a pontbeli érintők meredekségét (deriváltat). Majd a kapott adatokat egy koordiánátarendszerben kell ábrázolni, összekötni, végül az eredeti görbét és a kapott görbét összehasonlítani és az



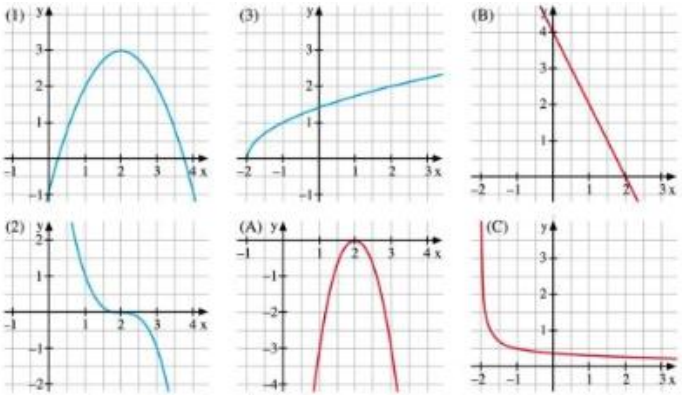
9. ábra

összefüggéseket leolvasni. (9. ábra) A feladat kidolgozása közben részletesen leírja a függvénygörbe és a derivált függvény kapcsolatát.

Ezt követően mondja ki a derivált függvény definícióját: Azt a függvényt, amely megadja, hogy a változó egyes értékeihez mely derivált tartozik, az *f(x)* függvény deriváltfüggvényének vagy röviden deriváltjának nevezzük.

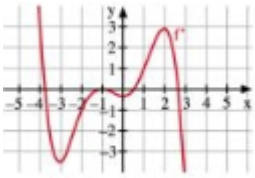
Majd a könyvben a nyílt intervallum, egy függvény maximum, minimum, inflexiós pont definíciói találhatók. Ezek után következik egy feladatsor, hogy a tanult összefüggéseket még jobban elmélyítsék a diákok. A feladatok nagyon sok oldalról megközelítik ezt az anyagot.

Az egyik feladatban például össze kell párosítani a derivált függvényt az eredeti függvény képével (10. ábra)

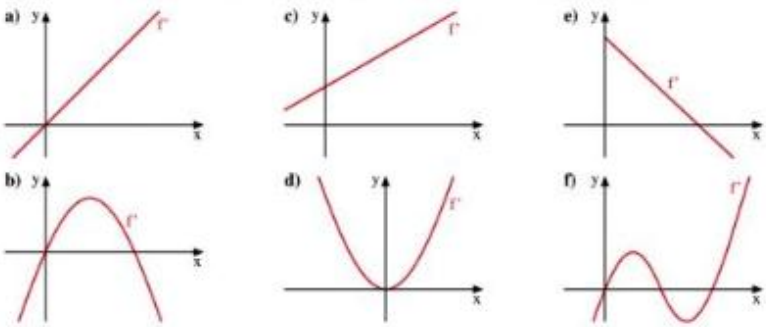


10. ábra

Egy másik feladatban pedig a számítógéppel kell kirajzoltatni függvényeket és azok deriváltjait, majd pedig megfigyelni rajtuk az összefüggéseket. Majd a derivált függvények segítségével a diákoknak kell felrajzolniuk az eredeti függvényeket (12. ábra, 11. ábra).



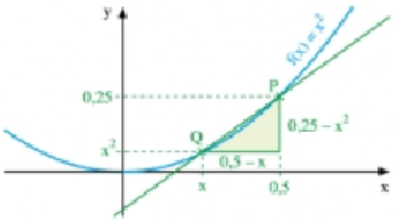
11. ábra



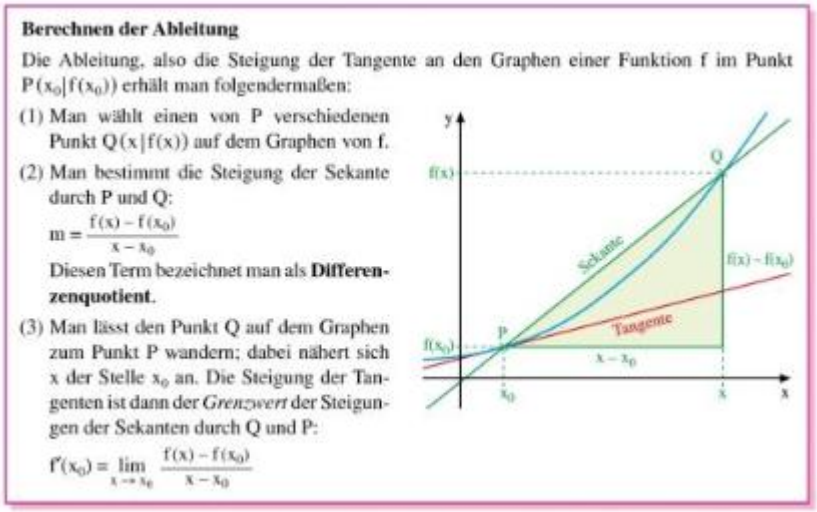
12. ábra

Találunk alkalmazási feladatokat is ebben a feladatsorban: Például egy autóutat ír le egy görbe. Ki kell számolni az átlagsebességét, és ezt meg is kell jeleníteni az ábrán, majd néhány pillanatnyi sebességet kell kiszámolni, és egy koordinátarendszerben ábrázolni. Végül következtetéseket kell levonni a diákoknak a két görbe között. Ehhez hasonló példából még található 4-5 darab a felsorolásban.

Ezek után az x^2 függvény egy adott P(0,5; 0,25) pontjába húzott érintőjének a vizsgálata következik. Először szelők meredekségét állapítja meg a könyv, úgy hogy folyamatosan egyre közelebb halad a P ponthoz a szelő másik metszéspontja a parabolával. majd Q(x, x^2) formában is felírja a szelő meredekségét, azaz a $\frac{0{,}25-x^2}{0{,}5-x}$ hányadost. (13. ábra) Viszont ahogy folyamatosan közelíti a P pontot a Q pont, és a szelőből végül érintő válna, egyszer csak nem tudják kiszámolni a hányados értékét, hiszen nullával kellene osztani, ami nem lehetséges. Így kerül szóba a határérték és a **differenciálhányados** definíciója. (14. ábra)



13. ábra



Berechnen der Ableitung

Die Ableitung, also die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ erhält man folgendermaßen:

(1) Man wählt einen von P verschiedenen Punkt $Q(x|f(x))$ auf dem Graphen von f.

(2) Man bestimmt die Steigung der Sekante durch P und Q:
$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Diesen Term bezeichnet man als **Differenzenquotient**.

(3) Man lässt den Punkt Q auf dem Graphen zum Punkt P wandern; dabei nähert sich x der Stelle x_0 an. Die Steigung der Tangenten ist dann der *Grenzwert* der Steigungen der Sekanten durch Q und P:
$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

14. ábra

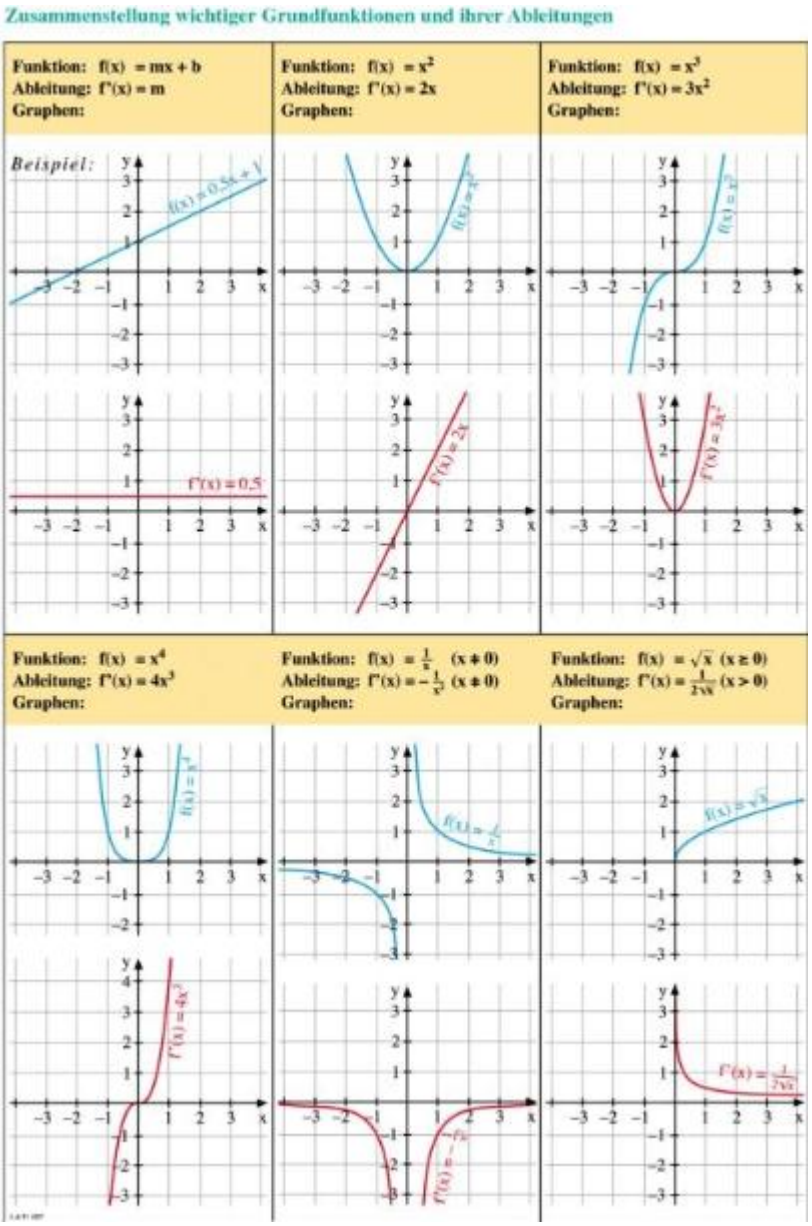
A definíciót követő példában az x^2 függvény P(x_0, x_0^2) vett érintő meredekségét

határozzák meg határérték segítségével, azaz az x^2 függvény deriváltját a P helyen. A levezetés után pedig következik a tétel: x^2 függvénynek az x_0 helyen $2x_0$ a deriváltja, azaz $f'(x_0)=2x_0$.

Ez után pedig a „h-s felírása" következik az érintőnek, amellyel szintén eljut az x^2 függvény derivált függvényéig.

A következő fejezetekben újabb függvények deriváltjaival ismerkedhetünk meg: x^3; $\frac{1}{x}$; $\sqrt{x}$; a „h-s felírás" segítségével pedig levezetve is megtaláljuk őket. Feladat formájában pedig feladja a diákoknak az x^4; $\frac{1}{x^2}$ függvény deriváltjainak a bizonyítását. A további feladatokban egyes helyeken kell kiszámolni a megadott függvények deriváltjait.

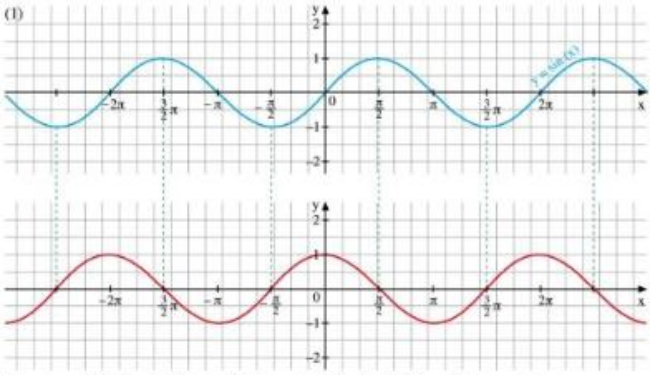
Majd egy összefoglaló táblázat következik (15. ábra):



15. ábra

Ilyen összefoglaló táblázattal még nem találkoztam magyar tankönyvekben, de nagyon hasznosnak találom, mert a függvény és a derivált függvényének a kapcsolatát nagyon jól lehet ezen görbék segítségével bemutatni a diákoknak.

Következő alfejezet a szinusz és a koszinusz függvények deriváltjával foglalkozik. Az első kidolgozott feladatban a sin függvény deriváltfüggvényét kell felrajzolni az eddig tanultak



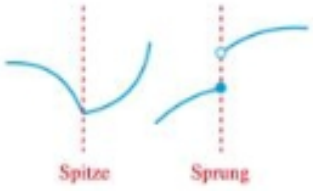
Vermutung: Die Sinusfunktion mit f(x) = sin(x) hat die Ableitung f'(x) = cos(x).

16. ábra

alapján. Az ábra (16. ábra) segítségével már a sejtést is megfogalmazza a feladatban, hogy a szinusz függvény deriváltja a koszinusz függvény. Ugyanezt az utat végig járja a koszinusz függvénnyel, majd tétel formájában kimondja a deriválási szabályaikat.

A hetedik alfejezet a deriválhatóság fogalmával ismerteti meg a diákokat.

Bevezető példaként az $f(x) = |x^2 - 4|$ függvénynek az $x = 1$ helyen vizsgálja a deriváltját, érintő segítségével, viszont ellentmondásra jut a példa, így megállapítja, hogy a függvényhez az $x = 1$ helyen nem lehet érintőt húzni. Majd pedig részletesen magyarázza, hogy mikor van egy függvénynek „csúcsa" illetve mikor van benne „ugrás" (mikor nem folytonos a függvény)(17. ábra), de bizonyítás nem található hozzá, se pontos definíció.

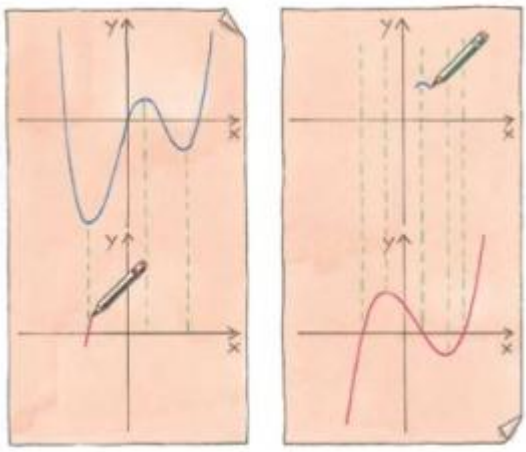


17. ábra

A következőekben a hatványfüggvény deriváltja jelenik meg levezetés nélkül, majd a függvény konstans szorosának deriváltja, összegfüggvény deriváltja bizonyításokkal.

Egy teljesen új fejezet foglalkozik a függvényvizsgálattal. A fejezet első húsz oldala a függvény tulajdonságok ismétléséről szól. Miután az ismétlés befejeződött elkezdődik a függvény viselkedésének a vizsgálata az első derivált segítségével. Ezt az alfejezetet azzal kezdi, hogy feleleveníti a függvénygörbe és a derivált függvény közti kapcsolatot. (18. ábra)

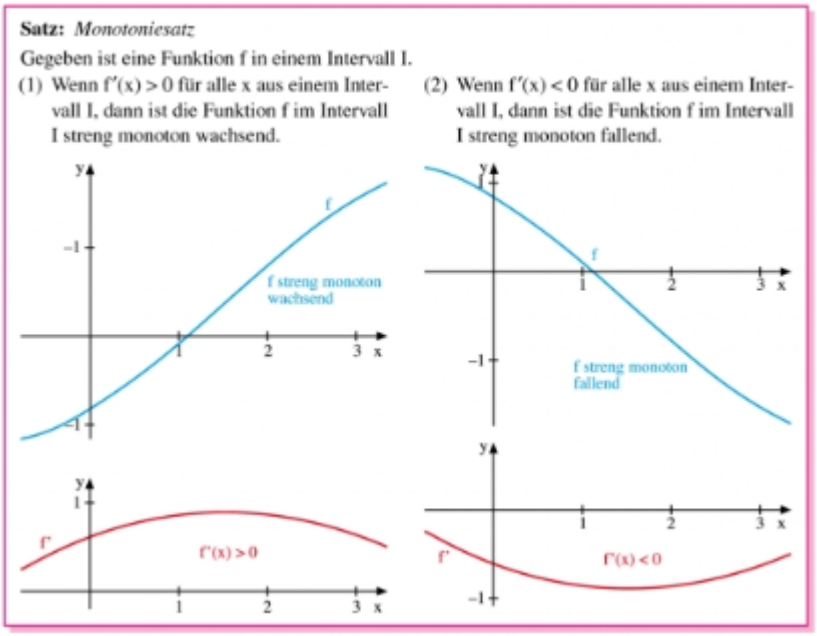
Ezek után több példát is hoz a könyv függvénygörbe és deriváltjára ábra kíséretével.



18. ábra

A példák után a monotonítás és a deriválás kapcsolatáról szóló tételt olvashatjuk (19. ábra):

- Ha egy intervallum minden x pontjában az $f'(x)>0$, akkor az f függvény az intervallumban szigorúan monoton növekedő.
- Ha egy intervallum minden x pontjában az $f'(x)<0$, akkor az f függvény az intervallumban szigorúan monotoncsökkenő.

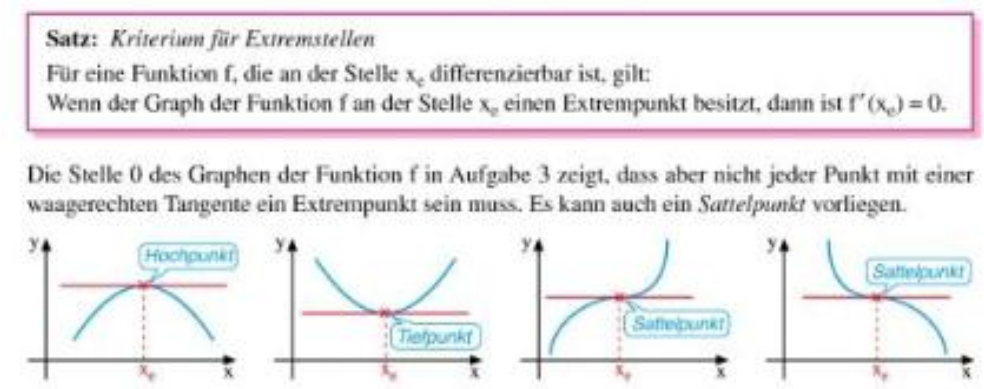


19. ábra

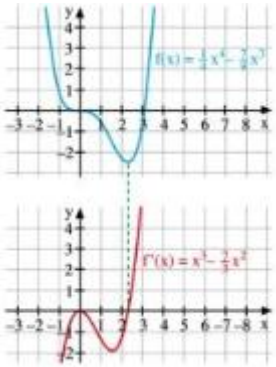
A tétel után a szélsőértékek és a derivált kapcsolatának a vizsgálata található. Mivel már korábban szó volt a függvény szélsőérték helyeiről, ezért egy minta példa után egyből következik a tétel (20. ábra): A szélsőértékhelyek kritériuma:

Ha egy függvény az x_0 helyen differenciálható, akkor a következő érvényes rá: Ha a függvénynek szélsőértékhelye van az x_0 pontban, akkor $f'(x_0)=0$.

A tétel után egyből következik egy kis megjegyzés, hogy a tétel megfordítása nem igaz, hiszen inflexiós pontnál is a függvény első deriváltja nulla.



20. ábra



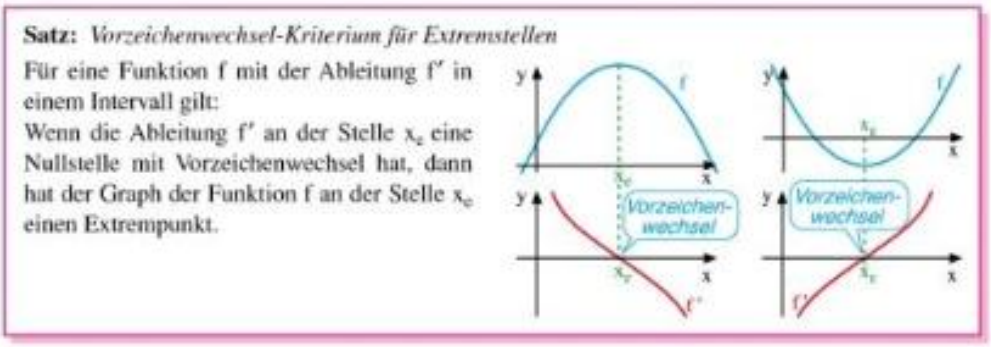
Ezt az $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{9}x^3$ függvény és a deriváltfüggvényének a képének a vizsgálata következik.(21. ábra), amelyet a következő tétel követ (

22. ábra): előjelváltás kritériuma a szélsőértékeknél:
A következő teljesül egy intervallumon egy *f* függvényre és *f'*

derivált függvényére:

Ha egy *f'* derivált függvénynek az x_0 helyen előjelváltással zérushelye van, akkor ott az

21. ábra *f* függvény görbének szélsőértékhelye van.

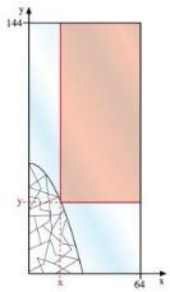


22. ábra

Az elméleti összefoglalót egy feladatsor követi, sok különböző típusú feladattal.

A következő alfejezet címe a szélsőérték keresés algebrai módszerrel. A fejezet egy problémafelvetéssel kezdődik: a konzervdoboz mért pont úgy néz ki ahogy. Ezt a kérdést tanulóknak szóban kell megvitatniuk. Majd 2 kidolgozott példa következik:

- Hogyan vágjunk ki egy 20 cm hosszú oldalú négyzet alakú papír sarkaiból 4 kis négyzetet, ha azt akarjuk, hogy a megmaradt papírból az oldalak felhajtásával kapott doboz térfogata maximális legyen?



- Egy értékes üvegasztallapból (64cm x 144cm) letört a széle. (23. ábra) A törésvonalat az $y = -\frac{1}{16}x^2 + 64$ függvény írja le. Az eltört asztal megmaradt részéből mekkora az a legnagyobb téglalap alakú rész, amiből még elkészíthető egy asztal?

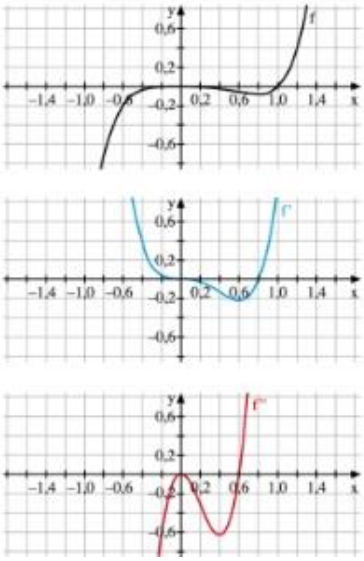
23. ábra

A két mintapélda után általánosan pontokba szedve írja le, hogy hogyan kell az típusú (szélsőértékvizsgálatokat) feladatokat megoldani. Ez nagy segítség lehet a diákoknak, egy vezérfonal, amelyet bármikor felhasználhatnak.

Az alfejezet végén pedig, mint minden esetben egy feladatsor található.

A következőekben visszatér a függvények általános vizsgálatához, mint például a zérushely megkereséséhez, polinomok szorzattá alakításához, polinom osztáshoz, majd

a konvexítást, konkávítást vizsgálja bizonyos függvényeken, ahol újból megjelenik a differenciálszámítás.

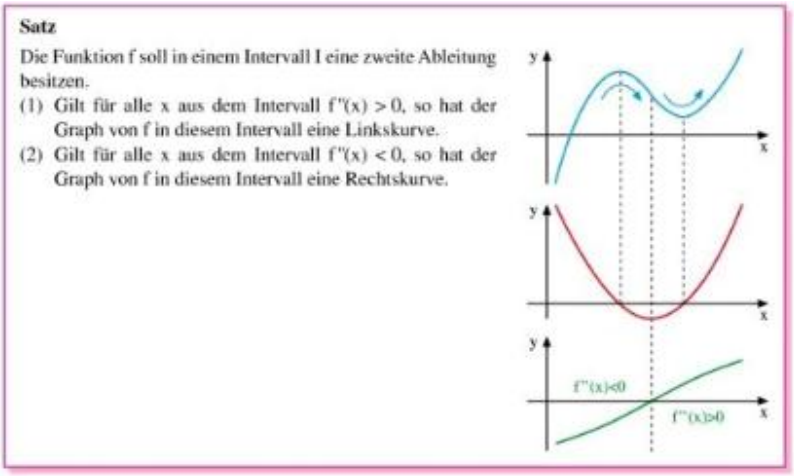


24. ábra

Mintapéldában a konvexítást és az inflexiópont vizsgálatát hajtja végre a könyv az x^5-x^4 függvényt vizsgálva, ahol az első és a második derivált görbéjét is felrajzolja.(24. ábra)

A példa után a tételt is megfogalmazza a könyv (25. ábra):

Egy I intervallumban legyen értelmezve az f függvény második deriváltja. Ha minden x-re teljesül, hogy $f''(x)>0$, akkor az f függvény balra kanyarodik (konvex). Ha minden x-re teljesül, hogy $f''(x)<0$, akkor az f függvény jobbra kanyarodik (konkáv).



25. ábra

A tétel után a könyv a szükséges és elégséges feltételét is megfogalmazza az inflexiós pont létezésének:

- szükséges feltétel:

Legyen egy f függvény minden x_0 helyen differenciálható. Ha az f függvénynek az x_0 helyen inflexiós pontja van, akkor a második derivált az x_0 helyen nulla.

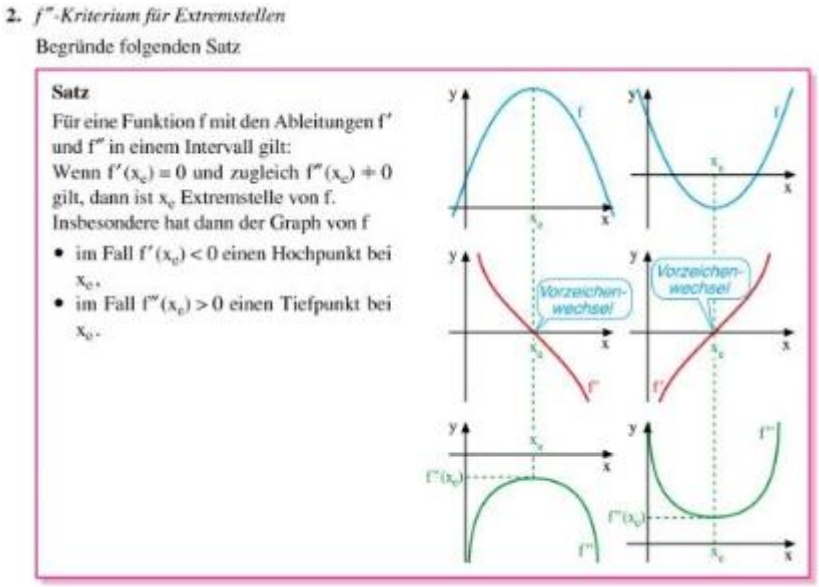
- elégséges feltétel:

Legyen értelmezve egy intervallumon az f' és f''. Ha a 2. deriváltnak az x_0 helyen előjelváltással zérushelye van, akkor a függvénynek az x_0 helyen inflexiós pontja van.

A következő alfejezetben ismét előkerül a második derivált, amelyben a

szélsőértékhelyekkel való kapcsolatát mutatja be a könyv. A bevezető feladatban az $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3$ függvényelemzést végzi el. Majd kimondja tétel formában a második derivált és a szelsőértékek kapcsolatát (26. ábra).

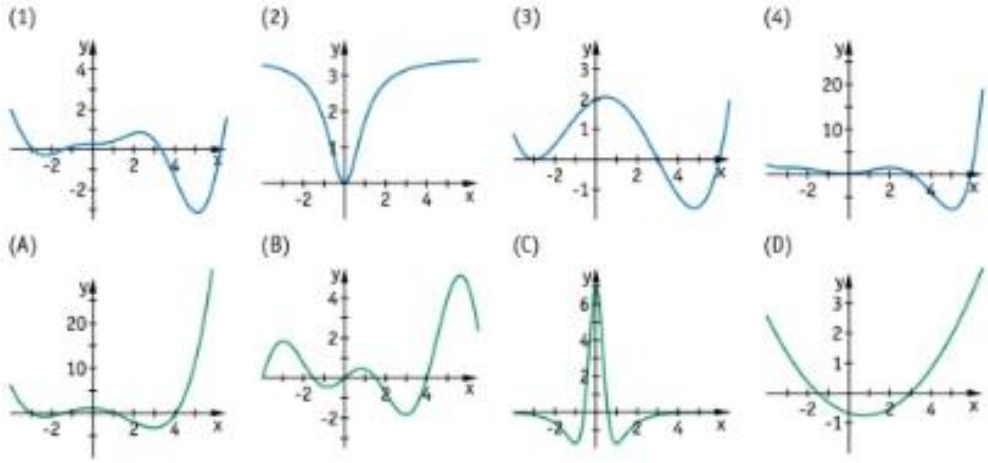
Egy f függvény, első és második deriváltja legyen értelmezve egy adott intervallumon. Ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)\neq 0$, akkor az f függvénynek szélsőértéke van. Ha $f''(x_0)<0$, akkor az f függvénynek maximuma van az x_0 helyen. Ha $f''(x_0)>0$, akkor az f függvénynek minimuma van az x_0 helyen.



26. ábra

Sok különböző feladat színesíti a feladatsort, például a következő:

Párosítsa össze a függvények grafikonját a második derivált függvényük grafikonjával: 27. ábra



27. ábra

A fejezet lezárásául egy feladatsor szolgál, ami a GTR számológéppel rajzoltat ki függvényeket, és a diákoknak elemezniük kell a kapott függvényeket.

Összefoglalás

A könyv harmadik, differenciálszámítással foglalkozó fejezetének terjedelme 50 oldal, a függvényvizsgálat című negyedik fejezet pedig 70 oldalt foglal magában.

A harmadik fejezet nagyon szépen kidolgozott, logikus felépítésű. Gyakorlatközpontúsága megfigyelhető a feladatokon, a rengeteg színes ábrán és az összefüggések részletes magyarázatán. A fejezetek minden esetben egy-egy problémafelvetéssel kezdődnek, majd kidolgozott mintafeladatokkal folytatódnak. A tételek, definíciók színes keretben találhatók, apró kis mintapéldákkal ellátva, ami segíti a megértésüket. A bizonyítás sok helyen kimarad, és csak szemléletre hivatkozik a könyv, vagy több példából ez „látható", így a definíció a következőképpen hangzik. De a könyv pozitívumai közé sorolható, hogy rengeteg színes ábra van benne, ami segíti az összefüggések megértését. Például szinte már zavaróan sok helyen, minden fejezetben megjelenik újra, meg újra a függvény és a derivált függvény képének a felrajzolása, és a kapcsolatuk leírása. Ez persze segít a tudás elmélyítésében. Minden fejezet egy feladatsorral zárul, amelyek sok különböző feladatot tartalmaznak, és a diákokat elgondolkodásra, továbbgondolásra késztetik.

A negyedik, függvényvizsgálat című fejezetben csak helyenként jelenik meg a deriválás. Az első része a fejezetnek összefoglalja az eddig tanult definíciókat, a függvényvizsgálat módszereit. Hiszen egyszerűbb függvényeknek korábban is foglalkoztak az értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás, szélsőértékhelyek tulajdonságaival. Majd csak ezután következik a monotonitás, szélsőértékhely és konvexitás vizsgálata deriválás segítségével. Ezeket jól szemlélteti, rengeteg kidolgozott feladattal, ábrákkal segíti a megértését. Mindegyik definíció illetve tétel környékén található egy ábra egy függvényről és a derivált függvényeinek képéről. A céljuk az, hogy az összefüggéseket ne csak algebrai levezetésekkel, hanem ábrákkal is alátámasszák.

Ebben a fejezetben helyenként hiányolom a bizonyításokat. Hiába mutatják be példákon, és található a grafikonokhoz magyarázat, egyértelmű levezetés, ami bizonyításként szerepel alig található a könyvben. Még hiányosságként tudnám említeni, hogy nem jelenik meg a könyvben a deriválásról tanultak összefoglalása, és a

függvényvizsgálat pontról pontra való összegzése. Bár ez a 11.-es könyvben megtalálható, innen, a 10.-esből sem szabadna, hogy hiányozzon, hiszen ez adná a teljes lezárását a fejezetnek. Az általam eddig ismert német nyelvű tankönyvekben több és sokszínűbbek az alkalmazási feladatok, hiszen itt a terület, kerület, térfogat, felszín maximalizálását, minimalizálását gyakoroltatja be – bár azt részletesen, sokszínűen – de a többi alkalmazási feladatot sem szabadna elhagynia.

Nagyon jó kiegészítésül szolgálhat viszont a függvényvizsgálathoz és az alkalmazási feladatokhoz a következő néhány tankönyv:

- Dr. Anton Bigalke, Dr. Norbert Köhler: Mathematik 11, Länderausgabe;
- Hahn/Dzewas: Mathematik 11.

Ezekben a könyvekben külön fejezet foglalkozik a differenciálszámítás felhasználási területével. Nagy figyelmet fordít ez a két tankönyv is a deriváltfüggvények és az eredeti függvények ábrázolására, hiszen itt is megjelenik majdnem minden definíciót és tételt követve.

VII.Kérdőívek

1. Tanári kérdőívek

A differenciálszámítás tanításának teljes körű vizsgálatához középiskolai tanárok véleményét is kikértem. A soproni Berzsenyi Dániel Evangélikus Gimnázium Líceum és Kollégium illetve a pilisvörösvári Friedrich Schiller Gimnázium, Szakközépiskola és Kollégium tanárait kerestem fel a kérdőíveimmel. Sopronban Kovácsné Fábián Beáta tanárnő és Barta Róbert igazgatóhelyettes töltötte ki a kérdőívemet és folytatott velem beszélgetést a témával kapcsolatban. Ők mindketten több éves tapasztalattal (30 illetve 20) tanítják ezt a témakört a 11. évfolyamon. A Schiller Gimnáziumban Geszler Katalin 2 éves, Török Anna 1 éves és Királyné Kulcsár Mónika 3 éves tapasztalattal rendelkezve töltötte ki a kérdőíveimet.

Mindkét iskolában előszeretettel használják ebben a témakörben a Czapáry Endre, Gyapjas Ferenc: *Matematika a középiskolák 11-12. évfolyama számára* című *emelt szintű kiegészítő tananyag*ot illetve a Hajnal Imre, Dr. Pintér Lajos szerzőpárostól a *Matematika III. fakultatív B* változatát. Feladatgyűjteményként a Czapáry Endre, Gyapjas Ferenc *Matematika feladatgyűjtemény a középiskolák 11-12. évfolyama számára, emelt szintű kiegészítő tananyag* című feladatgyűjtemény mindkét iskolában megjelenik, kiegészítésként még a Bolyai sorozat *Differenciálszámítás* című kötete is megjelenik. Sopronban például még megjelenik a felhasznált feladatgyűjtemények között a régi összegfoglaló érettségi feladatgyűjtemény, illetve a Műszaki Könyvkiadótól a *Készüljünk a matematikából emelt szinten* című feladatgyűjtemény Bard Ágnes, Frigyesi Miklós, Lukács Judit, Major Éva, Székely Péter és Vancsó Ödön szerzőktől.

Kovácsné Fábián Beáta Tanárnő szerint a Czapáry-féle tankönyvnek ez a része lényegre törő, tanulható. Tapasztalatai szerint a diákok érthetőnek tartják, az órai részletes magyarázat azonban elengedhetetlen.

A felhasznált irodalomhoz kapcsolódó kérdés során mindegyik iskolánál egyaránt előkerült, hogy felváltva használják őket, csak egyből nem lehet jól tanítani és egy feladatgyűjteményből elegendőt gyakorolni.

A felhasznált dokumentumokat érintő kérdés után az következett, hogy a határérték illetve a folytonosság fogalmát a diákoknak a sorozatos definícióval vagy az epszilon,

deltás definícióval tanítja. Berzsenyiben mindkét definíció megbeszélésre kerül, Barta Róbert Tanár Úr még azt is hozzáfűzte, hogy a „Geogebra” program nagy segítséget jelent az epszilon, deltás definíció szemléltetéséhez, de mélyebben, ő személy szerint a sorozatos definícióval foglalkozik az órán.

A Schiller Gimnáziumban is változó válaszok születtek, Kulcsár Mónika tanárnő mindkét definícióval megismerteti a diákokat, de Geszler Katalin tanárnő csak a sorozatos definícióval tanítja a diákoknak a határérték fogalmát.

Arra a kérdésemre, hogy milyen nehézségek merülnek fel a téma kapcsán a következő válaszokat kaptam: Barta Róbert szerint a nehézség a szemléletből fakad, és a végtelen fogalmának felszínes ismeretéből, ezért ő nagy hangsúlyt fektet ezek megértésére, tisztázására a témakör feldolgozása előtt. Kovácsné Fábián Beáta szerint a tanulók idegenkednek az új kifejezésektől, és ijesztő számukra a sok nagyon precíz megfogalmazás. Csak lassan értik meg, hogy minden szónak jelentősége van. De a szöveges gyakorlati példák megoldása a végére sikerélményt jelent a számukra. Schilleres diákok először idegenkednek tőle, rengeteg a kérdésük, de érdeklődőek. Az elméleti anyag nehézséget okoz számukra, de a gyakorlati példákhoz már lelkesen állnak neki, és büszkék arra, hogy tudnak deriválni.

Végül azzal a kérdéssel zártam a kérdőívet, hogy egyetértenek-e azzal, hogy kötelező a középiskolákban a differenciálszámítás. Egybehangzó válaszokat kaptam: Középszinten egyik tanár sem támogatja a témakör bevezetését. De emelt szinten szükségesnek tartják. Az indoklás mindenhol az volt, hogy az itt megszerzett tudás elengedhetetlen ahhoz, hogy a diákok az egyetemeken, főiskolákon sikeresen helyt tudjanak állni.

2. Diák tesztek

1. *Egy házat és egy hozzá tarozó kis kertet szeretne téglalap alakúan elkeríteni a tulajdonosa. A ház 50x60 méteres. A ház hosszabbik oldala a bekeríthető terület szélén fekszik, így a ház egyik oldalán nincs szükség kerítésre. A kerítéshez 600 m hosszú drótot használhatunk csak fel. Add meg az elkerített rész méreteit úgy, hogy az a lehetséges legnagyobb területű legyen!*
2. *Végezd el az* $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ *függvény teljes függvény vizsgálatát!*

Ezt a két feladatot a Schiller Gimnázium két diákjával, P.-val és Á.-dal oldattam meg. S. jeles, Á. közepes tanuló fakultáción. A budapesti Német Gimnáziumban (Thomas Mann) is kerestem két diákot, akik 11. osztályosok és emelt szinten („Leistungskurs") tanulják a matematikát. F. közepes, M. négyes tanuló. Először a Thomas Mannos diákokkal találkoztam külön-külön időpontban.

Az első feladatban rajzolás után szinte gond nélkül fel tudták írni a diákok a keresett másodfokú függvényt. Egyedül a Schiller Gimnázium gyengébb tanulójának okozott gondot, aki a terület és a kerület képlet felírása után megtorpant, és nem tudta, hogy hírtelen mit kellene csinálnia. Ekkor segítő kérdéseket tettem fel: *Minek is keressük a maximumát? Jó az nekünk, ha két ismeretlennel van kifejezve a terület?* Ezek segítségével már nála is megszületett a cél függvény, amit mindenki szépen lederivált. Majd az első derivált függvény zérushelyét vették. Mikor megkérdeztem, hogy *mit csinálnak, mért csinálják*, akkor a Német Gimnázium tanulói azonnal elkezdték mondani, hogy az első derivált zérushelyét keresik, mert ott van az eredeti függvény szélsőértéke. Majd kérésemre, egy kis ábrán is szemléltették az elmondottakat. A Schiller Gimnázium tanulói viszont nem voltak ennyire tudatosak. A jeles tanuló, még el tudta mondani, hogy ha az első deriváltat nullával egyenlővé teszem, akkor a szélsőérték helyeit kapom meg a függvénynek, de ábrát nem tudott készíteni. A közepes tanuló válasza pedig az volt, hogy azért csinálja így, mert így szokták csinálni. A Thomas Mannos diákoknál nem jelent meg a táblázatos felírás (hiszen ők nem is így tanulják), hanem minden rész eredmény után a lap jobb oldalára kiírták intervallumon jelöléssel, hogy hogyan viselkedik a függvény abban az intervallumban, vagy abban az adott pontban. A magyar rendszerben tanuló diákok ragaszkodtak a jól megszokott táblázathoz. A jeles tanuló el tudta mondani, hogy mit miért csinál, a „betanult szöveget" nagyon jól tudta, azaz: „Ha a derivált függvény negatív ebben az

intervallumban, akkor a függvény ott csökkenő lesz." A közepes tanuló a táblázat kitöltésekor is bizonytalanságot mutatott, de kis átgondolással már sikerült neki is kitöltenie a táblázatot, és szöveges választ adnia a kérdésre.

A második feladatban egyik diák sem állapította meg az értelmezési tartományt. A Schilleres tanulók egyből deriválni kezdtek, és az első derivált zérushelyét keresték, amihez táblázatot is készítettek. Ez minden segítség nélkül ment. Kis gondolkodás után a jeles tanuló elkezdte a lokális szélsőértékek számítását, és ezek berajzolását egy koordinátarendszerbe, ami után rájött magától, hogy a zérushelyeit is ki kell számítani az eredeti függvénynek, amit meg is tett, és jelölt a koordinátarendszerben. És végül összehúzta őket. A határértéket csak rávezetéssel vizsgálta meg $+\infty$-ben, és $-\infty$-ben. Azt tudtam, hogy a második deriváltat még nem tanulták Pilisvörösváron, így a konvexítás-konkávítás elmaradt, de ezt a tanáruk állítása szerint még az év végéig venni fogják.

A pilisvörösvári közepes tanulónak már gondja akadt az első derivált zérushely keresésénél, ugyanis az $x^2 = \frac{5}{2}$ -nél gyököt kellett vonni, és elfelejtette, hogy akkor lehet plusz és mínusz is lehet az x. Ez a Német Gimnázium tanulók is csak figyelmeztetésre írták fel. Persze mindegyikőjük megjegyezte, hogy persze emlékszik, eszébe kellett volna jutnia. A Schiller Gimnázium közepes tanulója a táblázat kitöltése több időt vett igénybe, sokat számolgatott. A lokális szélsőértékeket egyből számolta a táblázat után. Majd koordinátarendszer következett, amelynél megállapította, hogy még hiányoznak a függvénynek az x-tengellyel a metszéspontjai, és elkezdte azokat számolni, majd jelölni a koordináta rendszerben. Végül összehúzta a pontokat, de nála is lemaradt a határérték számítás, és kérdőrevonásomat követően is sokat habozott a felírásával.

A Thomas Mannos diákoknak zökkenő mentesen ment a függvényábrázolás (csak a korábban említett $x^2 = \frac{5}{2}$ –nél merült fel problémájuk). Először az eredeti függvény zérushelyeit keresték meg, majd feljegyezték a lap jobb oldalára, bekeretezve, majd az első derivált zérushelyeit is megkeresték. Számolgatás után a lap jobb oldalára keretbe kikerült az f függvény szélsőértékhelyei az értékekkel együtt, illetve a monotonítást bizonyos intervallumokon, majd a harmadik derivált, amelyből a konvexítás tulajdonságait állapították meg, ami újból a lap jobb oldalára került kis keretben. Ezek után következett a kooordinátarendszer, amelyben ábrázolták az eddig megállapított dolgokat, majd a határértéket is megvizsgálták mínusz és plusz végtelenben is, és berajzolták a függvényt, végül az értékkészletét is megállapították a függvénynek.

VIII. Kétszintű érettségi

A magyar matematikaoktatás híres precíz, már-már tudományos szintű, elméleti jellegű és összességében eredményesnek mondható módszereiről. Ám pár évvel ezelőtt a szakemberek felismerték, hogy változásra van szükség, legalábbis bizonyos területeken. A tanulók matematika tudása elméleti szinten magas színvonalú az átlagoshoz képest, de annak alkalmazásakor az eredmények lényegesen rosszabb képet mutatnak. A való élet problémáinak matematizálása, és egy-egy tanult tétel, összefüggés megtalálása a mindennapi élethelyzetekben sokkal nehezebben működik a magyar diákoknál. Ezért az új, kétszintű érettségi, mind követelményeiben, mind feladattípusaiban ezeknek a készségeknek a fejlesztését tűzte ki célul. A differenciálszámítás, mint az emelt szintű érettségin kötelező anyagrész, tanítása során sem szabad ezt az új megközelítést nélkülözni.

1) Általánosságban a kétszintű érettségi vizsgáról:

Az érettségit (maturát) 1788-ban Poroszországban vezették be. 1834-ben tették kötelezővé a gimnáziumokban. 1851-ben hét város(Pest, Buda, Pozsony, Sopron, Kassa, Nagyvárad, Temesvár) lett kijelölve, ahol érettségi vizsgát tehettek a diákok. Az érettségi vizsga kezdetektől fogva vizsgabizottság előtt zajlott. Írásban, szóban kellett a vizsgázóknak számot adni a tudásukról. 1851-ben már öt vizsgatárgy volt meghatározva: Anyanyelv; Két latin dolgozat; Görög; Matematika; Egy idegen nyelv.
1948-ban szakérettségi került bevezetésre, 1951-ben pedig a humán-reál érettségi. 1952-ben bevezették az egyetemi felvételi vizsgát. 1978-ban megszüntették a történelem érettségit, viszont nem sokkal később, közkívánatra újra bevezették.

2004-2005-ös tanévben került sor a kétszintű érettségi bevezetésére. Az érettségi reform szükségessége és céljai a következők voltak:

- Az egymás után következő korosztályok számára elérhető legyen a középiskolai érettségi, majd ennek következtében a felsőoktatás.
- Az iskolai oktatás a követelményekben a lexikális ismeretek mindenhatósága felől fokozatosan és jelentős mértékben mozduljon el a képességfejlesztés felé.
- A közoktatásban reálisan elsajátítható készségek és megszerezhető ismeretek határozzák meg a követelményeket mind az érettségi, mind a felsőoktatásba való bejutás tekintetében. (Ne legyen szükség a szülők és diákok számára egyaránt nagy

terhet jelentő, önköltséges felvételi előkészítőkre.)

- Szűnjön meg a "dupla vizsgázás". Az érettségi vizsga egyúttal "felvételi vizsga" is legyen, azaz a felsőoktatási intézmények felvételi rangsoraikat az érettségi vizsgákon elért eredmények és az iskolai teljesítmények alapján állítsák fel.
- A tantárgyankénti érettségi követelmények szintenként egységesek, mindenki számára nyilvánosak, és az egyes iskolatípusokban ugyanazok legyenek.
- A különböző középiskolákban adott egyforma érettségi minősítések a lehető legnagyobb mértékben ugyanazt a teljesítményt takarják valamennyi iskola esetében.

A középszintű érettségi a középfokú tanulmányokat lezáró, központi követelményekre épülő, de belső lebonyolítású és részben belső értékelésű vizsga. A középszintű érettségi vizsga az adott tantárgy általános érettségi követelményei alapján állhat írásbeli, gyakorlati és szóbeli vizsgarészből, csak írásbeli vagy csak szóbeli vizsgarészből. Az írásbeli feladatlap és a javítási útmutató valamennyi tárgyból központilag készül, a javítás és az értékelés az ugyancsak központilag kiadott, részletes értékelési útmutatók alapján az iskola feladata. A szóbeli feladatok összeállításának tartalmi és formai szabályait az érettségi vizsgatárgy részletes követelményei rögzítik, a konkrét tételeket azonban az iskola tanárai helyben állítják össze, értékelésüket, pontozásukat a részletes követelményekben megadott szempontok alapján maguk végzik.

Az emelt szintű vizsga külső vizsga, azaz a vizsgáztatás elszakad a felkészítő iskola tanáraitól. Az írásbeli vizsgadolgozatokat nem a tanuló iskolájában javítják és értékelik, hanem ezt független értékelők végzik, akik a tanulót nem ismerik. Az emelt szintű szóbeli vizsga az egyes vizsgatárgyakból tantárgyi bizottság előtt zajlik.

2.) Követelmények a kétszintű érettségi vizsgán a függvények és az analízis elemi témakörből:

Az új érettségi követelményrendszere mindenki számára elérhető, és a felkészülésben nagy segítséget nyújthat.

Középszinten a 3. témakörben találhatók a függvények, az analízis elemei, amelyben a

következő részletes leírás található:

- Függvények: A függvények matematikai fogalma, megadásának módjai.
- Függvények grafikonjai, függvénytranszformációk: Az alapfüggvények (lineáris, másodfokú, harmadfokú és négyzetgyökfüggvények, fordított arányosság, exponenciális és logaritmusfüggvény, trigonometrikus függvények, abszolútérték függvény) és egyszerű transzformáltjaik: $f(x) + c$; $f(x+c)$; $c \cdot f(x)$; $f(c \cdot x)$
- Függvények jellemzése: Zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, periodicitás, paritás.
- Sorozatok: Számtani sorozat, mértani sorozat; kamatos kamat számítása.

Az <u>emelt szinten</u> a felsoroltakon túl az érettségi vizsga célja annak mérése, hogy a tanuló

- rendelkezik-e a felsőfokú matematikai tanulmányokhoz szükséges alapokkal;
- képes-e hipotéziseket megfogalmazni, és sejtéseit bizonyított állításaitól megkülönböztetni;
- milyen szintű kombinatív készséggel rendelkezik, mennyire kreatív a gondolkodása;
- képes-e gondolatmenetében érthetően, világosan alkalmazni a matematikai modellalkotás
- lépéseit (probléma megfogalmazása, matematikai formába öntése, összefüggések keresése,
- az eredmények matematikai módszerekkel történő kiszámítása, igazolása, értelmezése);

  Azaz a tartalmi követelmények emelt szinten a függvények témakörben:

- Függvények: A függvény matematikai fogalma, megadásának módjai. Függvény leszűkítése, kiterjesztése. Összetett függvény.
- Függvények grafikonjai, függvénytranszformációk: Az alapfüggvények (lineáris, másodfokú, harmadfokú és négyzetgyökfüggvények, fordított arányosság, exponenciális és logaritmusfüggvény, trigonometrikus függvények, abszolútérték függvény) és transzformáltjaik: $c \cdot f(ax+b)+d$,
- Függvények jellemzése: Függvényvizsgálat. Szélsőérték-feladatok.
- Sorozatok: Sorozat megadása, jellemzése. Számtani sorozat, mértani sorozat. Kamatos kamat számítása. Járadékszámítás.

A tartalmi követelmények emelt szinten az analízis elemi témakörben:

- A határérték szemléletes fogalma.
- A folytonosság szemléletes fogalma.
- A differenciálhányados fogalma, alkalmazása.
- A kétoldali közelítés módszere, a határozott integrál szemléletes fogalma, alkalmazása.

3) A kétszintű érettségiben való megjelenése a differenciálszámításnak

A szóbeli vizsgán 25 tétel közül kell húznia a jelentkezőnek. Minden tételben szerepel minimum egy definíció kimondás, egy tétel bizonyítás, egy feladatmegoldás, valamint a vizsgázónak 1-1 példát kell hoznia az adott témakör alkalmazására a matematikán belül vagy azon kívül. A szóbeli vizsgán 35 pont érhető el. A 11. tételben jelenik meg a differenciálszámítás témaköre:

11. Függvények vizsgálata elemi úton és a differenciálszámítás felhasználásával.

Emelt szintű írásbeli vizsga összpontszáma: 115 pont. A vizsga két részből áll, az I. rész: 51 pontos, II. rész: 64 pontos. Az első részben 4 feladat található. (1. feladat: 11 pont ; 2. feladat: 12 pont; 3. feladat: 14 pont; 4. feladat: 14 pont) A második részben 5 feladatból 4 feladatot kell kiválasztani a vizsgázónak. Minden feladat 16 pontos, így a diákok választását nem a pont befolyásolja, hanem a témakör.

Összegyűjtöttem feladattípusonként az emelt szintű érettségin eddig felmerült feladatokat. Ha a diákokat erre a vizsgára készítjük fel, akkor a tanár kötelessége minimum ezeket a típusokat begyakoroltatni. Ezekből a feladatokból nem csak a típus derül ki, hanem a szint is, hogy milyen mélyen kérik számon a tananyag elsajátítását, a modellalkotást ebben a témakörben. Illetve fontos szempont az érettségi pontozás is, hiszen a dolgozatok pontozásának is irányt mutat.

Az emelt szintű érettségi vizsgán a következő feladattípusok merültek eddig fel:

a) közgazdasági példa (nyereség függvény előállítás)
b) terület, térfogat maximalizálása, minimalizálás
c) paraméter meghatározása egy függvényben
d) érintő

e) függvényvizsgálat

A következőekben nem sorolok fel minden feladatot megoldással együtt, hiszen az megtalálható az interneten, hanem csak a szemléltetés kedvéért hozok 1-1 mintapéldát, amelyeket a tanóra keretein belüli feldolgozás alkalmával is ajánlatos feldolgozni.

a) közgazdasági példa (nyereség függvény előállítás)

Ez egy valóságközeli közgazdasági feladat, amely a deriválási ismeretek alapjait fedi le. A diákoknak viszont nehézséget okozhat, ha még nem találkoztak hasonló példával a tanórán. Viszont akinek nem okozott gondot a feladat értelmezése, és felírta a nyereségfüggvényt, akkor a deriválás segítségével könnyen eljuthatott a deriváltfüggvény gyökeiig.

A gazdasági érdeklődésű diákok érdeklődését felkelti illetve a későbbi közgazdasági oktatáshoz szükséges szemléletmód elsajátításában nagy szerepe van, így mindenképp hasznosnak tartanám, ha a tanárok a differenciálszámítás oktatása alkalmával hasonló feladatokkal is megismertetik a diákokat.

2010. október

7. feladat:

Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi mennyisége (x kilogramm) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36 - 0{,}03x)$ euró.

A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) a $0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.

b) Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul meg? (*nyereség=bevétel-kiadás*) 10 pont

Megoldás:

A havi nyereség a havi bevétel és kiadás különbségével egyenlő. A havi nyereséget az $x \longmapsto -0{,}03x^2 + 36x - (0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13000)$ $(100 < x < 700)$ függvény adja meg.	1 pont

A nyereséget leíró függvény: $x \longmapsto -0{,}0001x^3 - 0{,}03x^2 + 66{,}12x - 13000 \quad (100 < x < 700)$	1 pont
Ez a függvény deriválható, és a deriváltja az $x \mapsto -0{,}0003x^2 - 0{,}06x + 66{,}12 \ (100 < x < 700)$	1 pont
A $-0{,}0003x^2 - 0{,}06x + 66{,}12 = 0$ egyenletnek $(x^2 + 200x - 220400 = 0)$ egy negatív (x_1= –580) és egy pozitív (x_2=380) valós gyöke van.	1 pont
A deriváltfüggvény a $]100;\ 380[$ intervallumon pozitív,	1 pont
a $]380; 700\ [$ intervallumon negatív,	1 pont
tehát a nyereségfüggvény 380-ig szigorúan nő, majd szigorúan csökken.	ont
A vizsgált függvénynek tehát egy abszolút maximumhelye van és ez 380.	1 pont
A legnagyobb függvényérték 2306,4.	
A legnagyobb havi nyereség tehát 380 kg termék eladása esetén keletkezik, értéke 2306,4 euró.	1 pont
Összesen:	10 ont

b) terület, térfogat maximalizálása, minimalizálás

Ezzel a típusú feladattal a diákok gyakran találkozhattak, de a 2009-es feladatokban a modell alkotás nehézséget okozhat. Ajánlatos ábrát készíteni hozzájuk, és annak a segítségével megalkotni a segédfüggvényt, célfüggvényt. a 2009. októberi feladatban 6 pontot ér a megfelelő függvény felírása – ebből is látszik, hogy nem egyszerű elkészíteni. Ha azt jól felírta a diák, akkor nem szabadna, hogy problémát okozzon számára a feladat megoldás.

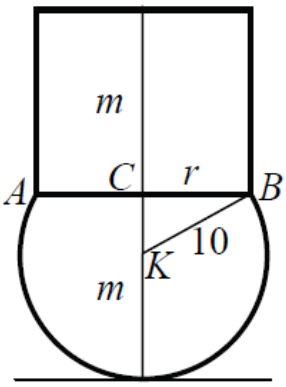
2009. október

9. feladat:

Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott m magasságú (m > 10) gömbszelet határoló köréhez egy szintén m magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszeletet határoló kör sugarával. Mekkorának válassza Jancsi a gömbszelet m magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő formájú üreges fatalpra fogják állítani.) Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m, a határoló kör sugara pedig r, akkor a

térfogata: $V = \frac{\pi}{6}\pi m \cdot (3r^2 + m^2)$. (16 pont)

Megoldás:



A *KBC* derékszögű háromszög befogóinak hossza $m - 10$ és r,	2 pont

átfogója 10 cm.	
Alkalmazzuk a Pitagorasz tételét a KBC háromszögre: $(m - 10)^2 + r^2 = 100$.	2 pont
Ebből $r^2 = 20m - m^2$	1 pont
A váza térfogata: $V = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2) + r^2 \pi m$	1 pont
A váza térfogata m függvényében: $$V(m) = \frac{\pi}{6} m \cdot [3(20m - m^2) + m^2] + \pi(20m - m^2)m$$	2 pont
azaz $$V(m) = \pi\left(-\frac{4}{3}m^3 + 30m^2\right) = \frac{2\pi}{3}(45m^2 - 2m^3),$$	1 pont
ahol $10 < m < 20$	1 pont
A V függvény differenciálható a $]10; 20[$ nyílt intervallumon, s a deriváltja: $$V'(m) = \pi(-4m^2 + 60m) = 4\pi(15 - m)m$$ A $]10; 20[$ nyílt intervallumon V'(m) = 0 pontosan akkor, ha m =15.	2 pont
<table><tr><td></td><td>$10 < m < 15$</td><td>m=15</td><td>$15 < m < 20$</td></tr><tr><td>V'(m)</td><td>pozitív</td><td>=0</td><td>negat v</td></tr><tr><td>V</td><td>szigorúan növő</td><td>helyi maximum</td><td>szigorúan csökkenő</td></tr></table>	3 pont
Az m = 15 a V függvény abszolút maximum helye is, így ekkor lesz a váza térfogata a lehető legnagyobb. ($V_{max} = 2250\pi \approx 7069(cm^3)$)	1 pont
Összesen:	16 pont

7. feladat:

A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy

olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

c) Igazolja, hogy f-nek nincs szélsőértéke! $f :]1; +\infty[\to R;\quad f(x) = 25 \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1}$.

(6 pont)

2009. május emelt:

8. feladat:

A K középpontú és R sugarú kört kívülről érinti az O középpontú és r sugarú kör ($R>r$). A KO egyenes a nagy kört A és E, a kis kört E és D pontokban metszi. Forgassuk el a KO egyenest az E pont körül α hegyesszöggel! Az elforgatott egyenes a nagy kört az E-től különböző B pontban, a kis kört C pontban metszi.

c) Mekkora α szögnél lesz az ABC háromszög területe maximális, adott R és r esetén? (4 pont)

A megoldás differenciálszámítással:

Adott r és R esetén a $T_{ABC}(\alpha) = 2R(r + R)\sin\alpha \cos\alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ függvény deriváltja: $T'_{ABC}(\alpha) = 2R(r+R)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$.	1 pont
$2R(r+R)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)=0$ megoldását keressük	1 pont
Mivel α hegyes szög, így $\cos\alpha=\sin\alpha$, ha $\alpha=\frac{\pi}{4}$	1 pont
Mivel $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ esetén a derivált függvény értéke pozitív, míg $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ esetén negatív, ezért $\alpha=\frac{\pi}{4}$ esetén lesz a terület maximális.	1 pont
Összesen	4 pont

De ezt a feladatot másképp is meg oldhatták a vizsgázók, például:

Mivel $T_{ABC} = 2R(r + R)\sin 2\alpha$ (és $R(r + R)$ pozitív),	1 pont
Ezért T_{ABC} akkor maximális, ha $\sin 2\alpha=1$,	2 pont
Azaz $\alpha= 45^o$	1 pont
Összesen:	4 pont

2006. február:

8. Kartonpapírból kivágtunk egy 1,5 dm magasságú *ABC* szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húztunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyiktől ugyanakkora, 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú, x magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágtuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora x esetén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (10 pont)

c) paraméter meghatározása egy függvényben

2008. május:

6. feladat:

a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.)

Számítsa ki, hogy k mely értéke estén lesz $x = 1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek!

Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye!

Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye is! (11 pont)

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x) = x^3 - 9x^2$ képlettel értelmezett g

függvény inflexiós pontját! (5 pont)

Megoldás:

a)

A differenciálható f függvénynek az x = 1 akkor lehet szélsőérték-helye, ha itt az első deriváltja nulla.	1 pont
Mivel $f'(x) = 3x^2 + 2kx + 9$;	1 pont
ezért $f'(1) = 3 \cdot 1 + 2k + 9 = 0$.	1 pont
innen k= –6.	1 pont
A lehetséges k értékre $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.	1 pont
A másodfokú polinom szorzatalakja: $f'(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$.	2 pont
Az x = 1 helyen a derivált pozitívból negatívba vált,	1 pont
ezért itt az f függvénynek lokális maximuma van.	1 pont
A derivált az x = 3 helyen negatívból pozitívba vált,	1 pont
ezért itt a függvénynek lokális szélsőértéke (minimuma) van.	1 pont
Összesen:	11 pont

b)

Mivel $g'(x) = 3x^2 - 18x$	1 pont
ebből $g''(x) = 6x - 18$	1 pont
A második derivált zérushelye az x = 3.	1 pont
Itt a második derivált előjelet vált.	1 pont
A g függvény (egyetlen) inflexiós pontja az x = 3.	1 pont
Összesen:	5 pont

d) érintő

Ez egy jól megszokott feladattípus, hiszen a deriválást általában egy adott pontba húzott érintő meredekségével kerül bevezetésre.

2007. május

4. feladat

b) Adja meg az $y = x^2 - 8x + 11$ egyenlettel megadott alakzat P (5; –4) pontjában húzott érintőjének egyenletét! (10 pont)

Megoldás:

A parabola egy adott pontjában húzott érintő meredekségét itt az első derivált segítségével kaphatjuk meg. $$y' = 2x - 8$$	pont
Az érintési pont első koordinátájának behelyettesítésével: $$y'(5) = 2 = m$$	2 pont
$y = mx + b$ P(5; –4), $-4 = 10 + b$, $b = -14$	2 pont
Az érintő egyenlete? $y = 2x - 14$	2 pont
Összesen:	10 pont

e) **függvényvizsgálat**

Tisztán matematikai típus feladattal is találkozhatunk az emelt szintű érettségin, amelyek teljes függvényvizsgálatra vagy csak annak egy szegmensére kérdeznek rá. A modell alkotás ezen feladatoknál elmarad. A diákoknak sokszor kell találkozniuk a középiskolai tanulmányaik során ilyen feladattal, így nem szabadna nehézséget okoznia a vizsgázónak.

Például:

2010. május

6. feladat

c) Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $g(x) = -x^3 + x$ függvénynek lokális (helyi) maximuma? (6 pont)

Megoldás:

A nyílt intervallumon értelmezett ($x \in \mathbb{R}^+$) g függvény differenciálható. $$g'(x) = -3x^2 + 1$$	1 pont
A lehetséges szélsőértékhely keresése: $-3x^2 + 1 = 0$	1 pont
A lehetséges szélsőértékhely: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ez van benne az értelmezési tartományban)	1 pont
$g''(x) = -6x$	1 pont
$g''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$	1 pont
Tehát az $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ lokális maximumhely.	1 pont
Összesen	6pont

(Ha lokális szélsőértékhelyek létezéséről az első derivált előjelváltásával ad elégséges feltételt, teljes pontszámot kap.)

2007. október:

6. feladat:

Adott az *f* függvény: $f:]-1; 6[\to \mathbb{R}; f(x) = -4x^3 + 192x$

a) Határozza meg *f* zérushelyeit, és elemezze az *f* függvényt monotonitás szempontjából! (7 p)

2006. május

2. Legyen adott az *f* : [-2,5; 2,5] →**R**, $f(x) = x^3 - 3x$ függvény.

b) Vizsgálja meg az *f* függvényt monotonitás szempontjából! (6 pont)

c) Adja meg az *f* függvény legnagyobb és legkisebb értékét! (4 pont)

Megoldás

b)

<table>
<tr><td>Az fa teljes értelmezési tartományának belső pontjaiban differenciálható függvény, ezért a monotonitás megállapítása és a szélsőértékek megkeresése az első derivált előjelvizsgálatával történhet.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>$f'(x) = 3x^2 - 3$</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Az első derivált értéke nulla, ha $x = -1$ vagy $x = 1$</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>Ezek az x értékek az értelmezési tartomány elemei. Készítsünk táblázatot az f’ előjelviszonyai alapján az f menetének meghatározásához:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-2,5 < x < -1$</td><td>$x = -1$</td><td>$-1 < x < 1$</td><td>$x = 1$</td><td>$1 < x < 2,5$</td></tr>
<tr><td>f'</td><td>pozitív</td><td>0</td><td>negatív</td><td>0</td><td>pozitív</td></tr>
<tr><td>f</td><td>növekvő</td><td>$f(-1) = 2$</td><td>csökkenő</td><td>$f(1) = -2$</td><td>növekvő</td></tr>
</table></td><td>3 pont</td></tr>
<tr><td>Összesen</td><td>6 pont</td></tr>
</table>

c)

Az *f* helyi maximumot vesz fel az $x = -1$ helyen, a helyi maximum értéke $f(-1) = 2$.	1 pont
Az *f* helyi minimumot vesz fel az $x = 1$ helyen, a helyi minimum	1 pont

értéke $f(1) = -2$	
Mivel $f(-2{,}5) = -8{,}125$, a legkisebb függvényérték $-8{,}125$.	1 pont
Mivel $f(2{,}5) = 8{,}125$, ezért a legnagyobb függvényérték $8{,}125$.	1 pont
Összesen:	4 pont

IX. Feladatgyűjtemény

A differenciálszámítás tanításának nélkülözhetetlen eleme a sokszínű (alkalmazási) feladatok tárháza, így összegyűjtötte néhány feladatot, amik hasznos elemei lehetnek a matematika óráknak, és bemutatja, hogy milyen feladatokban lehet a differenciálszámítást alkalmazni.

I. Végezze el a függvény vizsgálatát! (Reichel-Müller-Hanisch-Laub: Lehrbuch der Mathematik, 104. oldal)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

1. Értelmezési tartomány vizsgálata: Nullával nem lehet osztani, ezért egy törtben a nevező nem lehet nulla, így kikötést kell tenni: $(x-1)^2 \neq 0$, tehát $x \neq 1$, így az értelmezési tartomány $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Zérushely meghatározása: Azaz metszéspontot kell keresni az x-tengellyel, ahol az függvény értéke 0, így $\frac{x^3}{(x-1)^2} = 0$ egyenletet kell megoldani.
   1. eset: Egy tört értéke akkor nulla, ha a számlálóban nulla áll, és a nevező nem nulla. $x^3 = 0$, amiből az következik, hogy $x = 0$. Tehát a zérushelye $x = 0$.
   2. eset: Egy tört értéke még akkor lehet nulla, ha a számláló $\neq \pm\infty$ illetve a nevező $= \pm\infty$: De ez az eset itt nem lehetséges.
3. Szélsőértékek:

   Egy függvénynek ott van szélsőértéke, ahol a függvény első deriváltfüggvényének értéke nulla, és a második deriváltfüggvény értéke nem nulla.

   Egy tört deriválását a következő deriválási szabállyal hajtjuk végre: $\frac{f}{g} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

   1. derivált függvény:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{3x^2 \cdot (x-1) - x^3 \cdot 2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0$, ha a számláló nulla, azaz $x^3 - 3x^2 = 0$

$$x^2 \cdot (x-3) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = 0 \qquad x_3 = 3$$

Tehát az első derivált zérushelyei: 0 és 3. Ha ezek az eredeti f(x) függvénynek szélsőértékhelyei, akkor ott a második derivált függvényértékei nem lehetnek 0.

2. derivált függvény:

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x) \cdot (x-1)^3 - (x^3 - 3x^2) \cdot 3 \cdot (x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(3x^2 - 6x) \cdot (x-1) - (x^3 - 3x^2) \cdot 3}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$f''(0) = 0$ Tehát $x = 0$ helyen a függvénynek nincs szélsőértéke x = 0-ban.

$f''(3) = \frac{18}{16} > 0$ Tehát $x = 3$ helyen lokális minimuma van a függvénynek.

$f(3) = 6{,}75$ Így a Tiefpunktja $\mathrm{T}(3; 6{,}75)$

4. inflexiós pont:

A második deriváltfüggvény zérushelye x=0, mert ha 6x=0, akkor x=0, így $f''(0) = 0$

3. deriváltfüggvény: $f'''(x) = \frac{6\cdot(x-1)^4 - 4\cdot(x-1)^3\cdot 6x}{(x-1)^8} = \frac{6\cdot(x-1) - 4\cdot 6x}{(x-1)^5} = \frac{-18x-6}{(x-1)^5}$

$f'''(0) = -6 \neq 0$ Így x=0 ist die einzige Wendestelle. …..

5. A függvény menetének a vizsgálata:

a) monotonitás

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$f'(x)$	pozitív	∞	negatív	0	pozitív
f	növekedő	nincs értelmezve	csökkenő	lokális minimum	növekedő

1 és a 3 helyen az f függvény szigorúan monoton növő a $]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$ és szigorúan monoton csökkenő a $]1; 3[$ intervallumban.

b) konvexitás, konkávitás

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f''(x)$	negatív	0	pozitív	∞	pozitív
f	konkáv	inflexiós pont	konvex	nincs értelmezve	konvex

c) asszimptoták vizsgálata:

$$x^3 : (x-1)^2 = x^3 : (x^2 - 2x + 1) = x + 2$$

$$x^3 - 2x^2 + x$$

$$2x^2 - x$$

$$2x^2 - 4x + 2$$

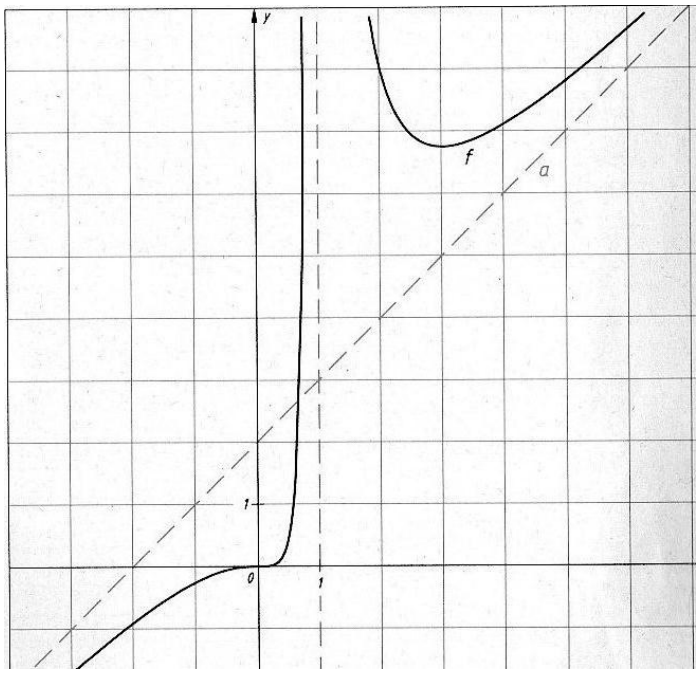
$3x - 2$ a maradék

Tehát: $\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2})$$

Mivel $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{(x-1)^2} = 0$, ezért f határértéke a végtelenben végtelen, nagyjából úgy mint a: $y = x + 2$. Az a függvény egy asszimptotája a függvénynek.

6. Ábrázolás:



7. Szimmetria: nem szimmetrikus
8. periodikusság: nem periódikus
9. értékkészlet: A függvény minden valós értéket felvesz, azaz az értékkészlete minden valós szám.

<u>Gyakorló példák</u>:

$f(x) = \sin x + \cos 2x$

$g(x) = x - \sin x$

$e(x) = \frac{1}{16} \cdot (x^4 - 24x^2 + 128)$

Készüljünk matematikából emelt szinten: 261-272

Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II: 1311-1318

II. Egy cég szeretné jövő évi nyereségét maximalizálni, és ezt az eladási ár optimális meghatározásával szeretné meghatározni. Jelöljük N-nel a nyereséget (az adózást nem vesszük figyelembe), ami egyértelműen a költségektől és a bevételtől függ. Tehát:

N = Bevétel – Költség.

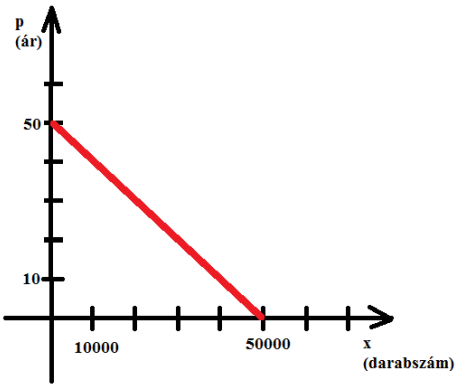
A következő költségei vannak a cégnek:

- 40000 Ft-ra tehető a fix költségek
- a változó költségek, amik minden egyes terméknél fellépnek: (p = egy darab termék ára, x = eladott darab szám)
  - 9 Ft az előállítási költsége egy terméknek, összesen $9 \cdot x$ Ft
  - a kereskedő jutaléka az ár 25%-a, összesen $0{,}25 \cdot p \cdot x$ Ft
  - a dizájner honoráriuma 10%-a az eladási árnak, összesen $0{,}1 \cdot p \cdot x$ Ft

Ezek a költségek állnak szemben az árbevétellel ($p \cdot x$ Ft).

A p és az x nem függetlenek egymástól. Ismert összefüggés, hogy minél magasabb az ár annál kisebb a keresett (megvett) mennyiség (darabszám).

Az ár és az eladott (megvett) mennyiséget a termék vásárlóinak kereslete határozza meg. (piacon csak annyi terméket lehet eladni, amennyit a vásárlók meg kívánnak venni, azaz amennyire van kereslet)



Jelen esetben tekintsünk egy végtelenül egyszerű, lineáris keresleti függvényt. Tételezzük fel, hogy ismerjük azt a termékárat, amely mellett egyetlen darabot sem tudunk eladni, legyen ez 50 Ft.

Emellett tételezzük fel, hogy ismerjük az a termékmennyiséget, amennyire a vásárlóknak maximálisan igénye lehet, 0Ft ár mellett is (azaz nincs igény többre), ez legyen 50000 darab.

(Dr. Anton Bigalke, Dr. Norbert Köhler: Mathematik 11, Länderausgabe O, 86. oldal)

Megoldás:

A nyereségfüggvénye két változótól függ, a termék árától p-től és az eladott darabszámtól, x-től. N = Bevétel – Költség = $p \cdot x - (40000 + 9x + 0{,}25px + 0{,}1px)$

Így a nyereség függvény:

$$N(x,p) = 0{,}65px - 9x - 40000$$

Az ábráról leolvasható a kereslet egyenlete:

$$x = 50000 - 1000p$$

Ha x-et behelyettesítjük a nyereségfüggvényünkbe megkapjuk, hogy:

$$N(p) = -650p^2 + 41500p - 490000$$

A nyereségfüggvény szélsőértékét meghatározhatjuk a derivált segítségével, hiszen *N'*(*p*)=0 egyenlettel kapjuk meg egy függvény maximumát.

A nyereségfüggvény deriváltja:

$$N'(p) = -1300p + 41500$$

így a maximum helye p ≈ 31,92 Ft. Végül behelyettesítésekkel megkapjuk, hogy 18080 darab terméket fogunk eladni és a nyereségünk 172404 lesz.

Válasz: A nyeresége a cégnek akkor lesz maximális, amikor a termék ára 30Ft-ba kerül, 20000darabot adnak el belőle, így a cég nyeresége 170000Ft lesz a következő évben.

III. Egy internetszolgáltató társaságnál jelenleg 120 000 előfizető van, az évi előfizetési díj 52 000Ft. A legutóbbi felmérések szerint miden egyes 1000Ft-os díjcsökkentés háromezer új előfizetőt hozhat. Menni legyen az új előfizetési díj, hogy a társaság bevétele maximális legyen?

Megoldás:

Jelöljük x-szel a díjcsökkentések számát. A bevétel a következő egyenlettel írható fel:

$$B(x) = (52\,000 - 1\,000x)(120\,000 + 3\,000x) =$$

$$= 6\,240\,000\,000 + 156\,000\,000x - 120\,000\,000x - 3\,000\,000x^2$$

$$B(x) = 6\,240\,000\,000 + 36\,000\,000x - 3\,000\,000x^2$$

A szélsőértéket pl. deriválással kereshetjük meg. Szélsőérték ott lehet, ahol *B'*(*x*) = 0.

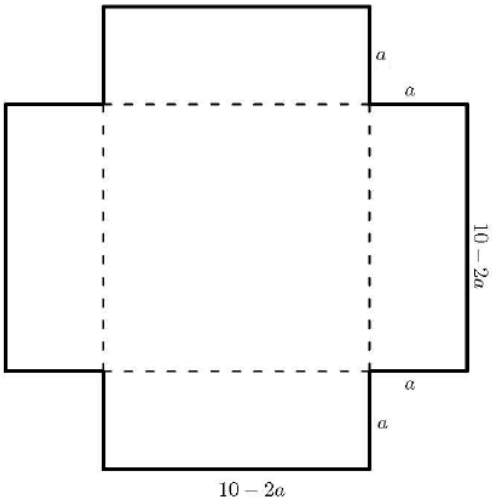
$$B'(x) = 36\,000\,000 - 3\,000\,000x = 0$$

$$x = 12$$

Tehát ha a díjcsökkentés száma 12, akkor a bevétel maximális, azaz az új előfizetési díj: 40 000Ft.

<u>Gyakorló példák</u>: Készüljünk matematikából emelt szinten: 245, 243

IV. Egy 100cm^2 területű négyzet alakú lemez sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le, majd a lemez széleit felhajtjuk és dobozt készítünk. Mekkora legyen a levágott négyzetek oldala, hogy a doboz térfogata maximális legyen?



$$V = (10 - 2a)^2 \cdot a = (100 - 40a + 4a^2) \cdot a$$
$$=$$
$$= 4a^3 - 40a^2 + 100a \qquad 0 \leq a \leq 5$$

A $V(a) = 4a^3 - 40a^2 + 100a$ térfogatfüggvénynek akkor lehet szélsőértéke, ha a deriváltja 0. (Mivel $V \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$).

$$V'(a) = 12a^2 - 80a + 100 = 0$$
$$3a^2 - 20a + 25 = 0$$

Így a-ra két megoldást kapunk: $a_1 = 5 \quad a_2 = \frac{5}{3}$

Azt hogy minimum vagy maximum van-e ezeken a helyeken az alábbi módszerekkel lehet ellenőrizni:

a) Második derivált segítségével. Ha az a_0 helyen V'(a_0) = 0, de a második derivált ezen a helyen nem nulla, akkor ott a függvénynek szélsőértéke van. A második derivált előjeléből megállapítható a szélsőérték típusa is, nevezetesen ha $V''(a_0) > 0$ akkor lokális minimum, ha kisebb mint nulla, akkor lokális maximum van az a_0 pontban.

$$V''(a) = 24a - 80$$

$V''(a_1) = 24 \cdot 5 - 80 = 40 > 0 \Rightarrow$ lokális minimum.

$V''(a_2) = 24 \cdot \frac{5}{3} - 80 = -40 < 0 \Rightarrow$ lokális maximum.

Mivel ez az egyetlen lokális maximum hely van a [0; 5] intervallumon, ezért ez abszolút maximum is.

b) Táblázattal:

Ha a derivált az adott helyen előjelet vált, akkor szélsőértékhelye van. Ha a derivált pozitívból válik negatívvá, akkor lokális maximum, egyébként lokális minimum van.

A derivált előjele könnyebben vizsgálható, ha szorzattá alakítjuk:

$$V'(a) = (a-5)\cdot(a-\frac{5}{3})$$

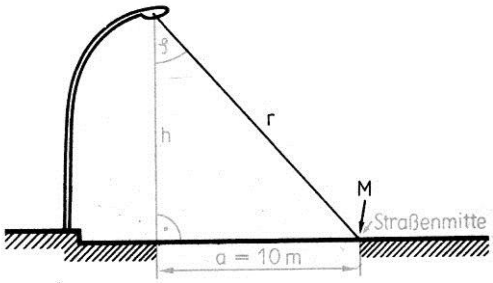
	$0 < a < a_2$	a_2	$a_2 < a < 5$
V’	+	0	-
V’’	növekvő	lokális maximum	csökkenő

Megjegyzés: Általános esetben, ha a függvény zárt intervallumon értelmezett, külön meg kell vizsgálnunk az intervallum végpontjait. Most nyilvánvaló volt, hogy a végpontokban nem lehet maximum, hiszen ott a doboz térfogata 0 lenne.

A maximális térfogatot tehát akkor kapjuk, ha $a = \frac{5}{3}$ oldalú négyzeteket vágunk le, ekkor a térfogat:

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = 4\cdot\frac{5^3}{3^3} - 40\cdot\frac{5^2}{3^2} + 100\cdot\frac{5}{3} = \frac{2000}{27}$$

$$\approx 74{,}07\ (\mathrm{cm}^3)$$



<u>Gyakorló példák</u>:

Készüljünk matematikából emelt szinten: 247, 243, 252, 254, 259

V. Egy utca egy az utca szélén álló lámpával van megvilágítva. (1. kép) Milyen magasnak kell lennie a lámpának, hogy az utca közepét a lehető legjobban világítsa meg, ha a lámpa M pontban vett erőssége (azaz B), a φ szög, és r távolság függvénye az alábbiak szerint:

$B \sim \frac{1}{r^2}\cdot\cos\varphi$

Jelöljük K-val a lámpa közvetlen közelben vett erősségét (0 m) – tanulja meg az állandó használatát

$B = K\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\cos\varphi$

1. kép

(Dr. Horst Lemke, Dr. Werner Stoye: Mathematik 12, 196. oldal)

Megoldás:

$\sin\varphi = \frac{a}{r}$, így $\frac{1}{r} = \frac{\sin\varphi}{a}$

$B = f(\varphi) = K \cdot \frac{(\sin\varphi)^2}{a^2} \cdot \cos\varphi = \frac{K}{a^2} \cdot (\sin\varphi)^2 \cdot \cos\varphi.$

$f'(\varphi) = \frac{K}{a^2} \cdot (2 \cdot \sin\varphi \cdot (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^3 = \frac{K}{a^2} \cdot \sin\varphi \cdot (2 \cdot (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2)$

$f'(x) = 0$

$\frac{K}{a^2} \cdot \sin\varphi \cdot (2 \cdot (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2) = 0$ ami ekvivalens azzal hogy:

$\sin\varphi = 0$ vagy $2 \cdot (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2 = 0$

Mivel a megoldásunkat φ-re 0° és 90° között keressük, ezért a $\sin\varphi$ nem lehet 0, tehát csak a másik egyenlettel kell foglalkozni.

$$2 \cdot (\cos\varphi)^2 = (\sin\varphi)^2$$

$$2 = \frac{(\sin\varphi)^2}{(\cos\varphi)^2} = (\tan\varphi)^2$$

$\sqrt{2} = \tan\varphi$ egyenlet vezet csak megoldáshoz a φ_0=54,7°-hoz, a $-\sqrt{2} = \tan\varphi$ egyenlet nem, mert a megoldása nem esik a (0°; 90°) megoldáshalmazba.

Mivel az f függvény differenciálható a (0°; 90°) intervallumon és f(0°)=0 és f(90°)=0 és érvényes, hogy f(φ_0) > 0, így az f függvénynek az φ_0 helyen maximuma van

Az ábráról fel tudjuk írni, hogy $\tan\varphi = \frac{a}{h} = \frac{10\,m}{h}$, így $h = \frac{10\,m}{\tan\varphi}$

Ha φ = $\varphi_0$írunk akkor megkapjuk, hogy

$$h = \frac{10\,m}{\tan\varphi_0} = \frac{10\,m}{\sqrt{2}} \approx 7\,m$$

Tehát a lámpának 7 m magasan kellene lennie, ahhoz, hogy az úttest közepe a lehető legjobban legyen megvilágítva.

<u>Gyakorló példák:</u>

Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II: 1285, 1286, 1287

VI. **Bontsuk fel az A pozitív számot két pozitív szám összegére úgy, hogy az egyik szám négyzetének és a másik szám köbének összege minimális legyen!** (Bárzy Barnabás: Differenciálszámítás, 185. oldal)

Megoldás:

Legyen az egyik szám x, a másik pedig A-x; ekkor a vizsgálandó összefüggés:

$$f(x) = (A - x)^2 + x^3 = A^2 - 2Ax + x^2 + x^3$$

Ezt differenciálva:
$f'(x) = -2A + 2x + 3x^2$.
Határozzuk meg az első differenciál zérushelyeit:

$$3x^2 + 2x - 2A = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24A}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + 6A}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 6A}}{3}$$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+6A}}{3}$; $x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+6A}}{3} < 0$, tehát nem jön számításba.
A második derivált:

$$f''(x) = 2 + 6x$$

$$f''(x_1) = 2 + 2\left(-1 + \sqrt{1 + 6A}\right) = 2 - 2 + 2\sqrt{1 + 6A} > 0$$

A függvénynek tehát az x1 helyen minimuma van.
Legyen pl: A = 4; ekkor

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24}}{3} = \frac{4}{3}, \text{és } A - x_1 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$y_{min} = f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{9} + \frac{64}{27} = \frac{198 + 64}{27} = 9\frac{13}{27}$$

VII.

Egy gépkocsi fogyasztása $f(v) = \frac{1}{12\,000}v^3 - \frac{3}{200}v^2 + \frac{4}{5}v$ függvény segítségével írható le. [A sebességet (v) km/h-ban mérve az f függvény a fogyasztást literekben adja meg.]

a) Állapítsa meg, hogy mekkora sebesség mellett a legkevésbé gazdaságos az autó használata!
b) Mekkora ekkor a fogyasztása?
c) Milyen sebességgel a leggazdaságosabb az autó használata egy hosszabb úton?
d) Mekkora ekkor a fogyasztása?

(Bárd Ágnes: Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten, 257. feladat)

Megoldás:

a) A függvény szélsőértékeit kell megkeresni, amiket a függvény v szerinti deriválásával, s a derivált nullhelyeinek megkeresésével kapunk meg.

A deriváltfüggvény: $f'(v) = \frac{1}{4000}v^2 - \frac{3}{100}v + \frac{4}{5}$

A szélsőérték helyeit megkapjuk, ha megoldjuk a $f'(v) = 0$ egyenletet. A $f'(v)$ nullhelyei: $v_1 = 80\ (\frac{\text{km}}{\text{h}})$, $v_2 = 40\ (\frac{\text{km}}{\text{h}})$.

A deriváltfüggvény 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-nél a deriváltfüggvény pozitívból negatívba vált, így itt lokális maximum van. Ekkor a legnagyobb a gépkocsi fogyasztása kis sebességnél. Természetesen nagy (80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ feletti) sebességnél a gépkocsi fogyasztása jelentősen megnő, így csak erről az értékről van értelme beszélni.

b) Itt a fogyasztás 12 l.

c) 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ – nál van minimum (helyi).

d) Itt a fogyasztás 8 l.

VIII. Differenciálszámítás segítségével igazoljuk a következő állításokat:

a) Az $f(x) = arccos(2x^2 - 1) - 2arccosx$ függvény konstans.

b) $cos^4x - \frac{1}{8}\cos 4x = 2cos^2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{5}{8}$

(Hahn/Dzewas: Mathematik 11., 179. oldal)

Megoldás:

a) A függvény pontosan akkor konstans, ha differenciálható és a deriváltja azonosan 0.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} \cdot 4x - 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4+4x^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{-4x^4+4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$$

b) $\frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{8}(cos^2 2x - sin^2 2x)$ átírása után deriváljuk mindkét oldalt:

$$-4cos^3x \cdot \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x \cdot \sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos 2x = -4\cos x \cdot \sin x + \sin 2x$$

Ekkor átalakítható: $-4\cos x \cdot \sin x = -2\sin 2x$ ezért a jobb oldal: $-\sin 2x$- szel egyenlő.

A bal oldal is alakítható, hiszen: $-4cos^3x \cdot \sin x = -2cos^2x \cdot (2\cos x \sin x) =$

$-2cos^2x \cdot \sin 2x$, és $\cos 2x = cos^2x - sin^2x$

Így azt kaptuk, hogy:

$-2cos^2x \cdot \sin 2x + \frac{1}{2}(cos^2x - sin^2x) \cdot \sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \cdot (cos^2x - sin^2x) = -\sin 2x$

A bal oldalon kiemelünk $\sin 2x$-et:

$$\sin 2x \cdot (-2cos^2x + cos^2x - sin^2x) = -\sin 2x$$

$$\sin 2x \cdot (-1) = -\sin 2x$$

Tehát a derivált jobb és bal oldala megegyezik egymással, így az eredeti kifejezés jobb és bal oldala között csak konstansnyi eltérés lehet. Meg kell néznünk a két oldal 0-ban felvett értékeit, ha ezek megegyeznek, konstansban sem térhet el a két kifejezés.

Bal oldal: $cos^4 0 - \frac{1}{8}\cos 0 = \frac{7}{8}$

Jobb oldal: $2cos^2 0 - \frac{1}{2}\cos 0 - \frac{5}{8} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$

Ezzel az azonosságot igazoltuk.

IX. Azt a negyedfokú polinomfüggvényt keressük, amely a P (1, 1) ponton keresztül megy és érinti az *x*-tengelyt az origóban. Illetve még azt is tudjuk róla, hogy inflexiós pontja van az *x* = 2 helyen. Melyik ez a függvény?

Megoldás:

Általánosan fel tudjuk írni egy negyedfokú polinom alakját, ahol $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

A deriváltfüggvényei a következőképpen néznek ki:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

A feladat szövegéből a következőket tudtuk meg:

- *f* átmegy a P(1, 1) ponton, azaz *f*(1)=1, amiből felírhatjuk, hogy: a + b + c + d + e = 1
- érinti az x-tengelyt az origóban, azaz *f*(0)=0, amiből az következik, hogy e = 0
- inflexiós pontja van a függvénynek az *x* = 2 helyen, tehát felírható, hogy:
  - $f'(0) = 0$, amiből az következik, hogy d = 0
  - $f'(2) = 0$, $\Rightarrow$ 32a + 12b + 4c + d = 0

- $f''(2) = 0,$ $\Rightarrow$ 48a + 12b + 2c = 0

Így egy egyenletrendszerhez jutottunk:

a + b + c + d + e = 1

e = 0

d = 0

32a + 12b + 4c + d = 0

48a + 12b + 2c = 0

Amiből azt az eredményt kapjuk, hogy: $a = \frac{3}{11};\ b = -\frac{16}{11};\ c = \frac{24}{11};\ d = 0;\ e = 0$

Tehát a negyedfokú függvény: $f(x) = \frac{3}{11}x^4 - \frac{16}{11}x^3 + \frac{24}{11}x^2$

X. A lencsetörvény összefüggést állapít meg a lencse fókusztávolsága a tárgytávolság és a képtávolság között: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$. Adott f fókusztávolság estén milyen tárgy- és képtávolságra legkisebb a két távolság összege, és mekkora ez a minimális távolság?

(Bárczy Barnabár: Differenciálszámítás, 172. oldal)

Megoldás:

Ha a két távolság összegét y-nal jelöljük, akkor $y = t + k$

A lencsetörvényből kifejezzük k értékét és y kifejezésébe behelyettesítjük:

$$k = \frac{tf}{t-f}$$

$$y = t + \frac{tf}{t-f}$$

Mivel f (a lencse fókusztávolsága) állandó, így y értéke csak t értékétől függ. Differenciáljuk y-t mint t függvényét:

$$g(t) = t + \frac{tf}{t-f}$$

$$g'(t) = 1 + \frac{f(t-f) - tf}{(t-f)^2} = 1 - \frac{f^2}{(t-f)^2}.$$

Ez t=f kivételével mindenütt differenciálható.

A függvénynek t azon értékére lehet szélsőértéke, amelyre az első derivált nulla:

$1 - \frac{f^2}{(t-f)^2} = 0$

Ebből: $(t-f)^2 = f^2$; amiből az következik kibontás után, hogy: $t(t-2f) = 0$.

Az egyenlet megoldásai: t_1=0 és t_2=2f. A felírt függvénynek tehát ezen t értékek mellett lehet szélsőértéke. A szélsőérték létezésére és fajtájára a második derivált előjeléből következhetünk:

$$g''(t) = \frac{f^2 \cdot 2(t-f)}{(t-f)^4} = \frac{2f^2}{(t-f)^3}$$

A t_1=0-ra a lencsetörvény nem értelmezett (a tárgyat nem lehet a lencsében elhelyezni).

t_2=2f behelyettesítéssel:

$$g''(2f) = \frac{2f^2}{f^3} = \frac{2}{f} > 0,$$

tehát y-nak minimuma van.

Értéke ezen a helyen:

$$y_2 = t_2 + \frac{t_2 f}{t_2 - f} = ef + \frac{2f^2}{f} = 4f.$$

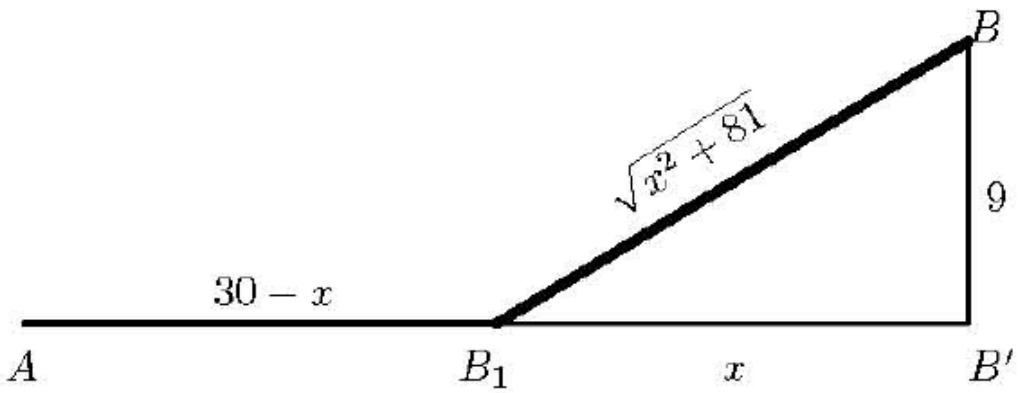
A kép és tárgy távolsága ekkor a fókusztávolság négyszerese.

XI.

Egy vasút mellett fekvő A helységből bizonyos áruszállítmányt irányítanak a vasúttól 9 km távolságra lévő B helységbe. B-nek a vasútvonalra való vetülete A-tól 30km távolságra van. Tudjuk, hogy 1 tonna áru vasúti szállítási költsége α, tehergépkocsival való szállítási költsége pedig β (> α). Határozzuk meg a vasútnak azt a pontját, ahonnan a B helységbe vezető egyenes útnak indulnia kell ahhoz, hogy a szállítás a lehető legolcsóbb legyen! (Ha a paraméter még gondot okoz a tanulóknak, először oldják meg a feladatot úgy, hogy α-hoz és β-hoz valamilyen számot rendelnek.)

(Dr. Horst Lemke, Dr. Werner Stoye: Mathematik 11, 210. oldal)

Megoldás:



Legyen $f(x)$ a szállítási költség, ha x az átrakodási pont (B_1) távolsága B'-től:

$$f(x) = \alpha(30 - x) + \beta\sqrt{x^2 + 81} \qquad x \in [0;\ 30]$$

Akkor lehet szélsőértéke a függvénynek, ha a deriváltja 0:

$$f'(x) = -\alpha + \beta \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 81}} \cdot 2x$$

$$-\alpha + \beta \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 81}} = 0$$

$$\beta \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 81}} = \alpha$$

$$\beta \cdot x = \alpha \cdot \sqrt{x^2 + 81} \qquad \alpha, \beta, x > 0$$

$$\beta^2 \cdot x^2 = \alpha^2 \cdot (x^2 + 81)$$

$$(\beta^2 - \alpha^2)x^2 = 81\alpha^2$$

$$x^2 = \frac{81\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$x = \pm\frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$

Mivel $x > 0$, ezért $x_0 = \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$

Vizsgáljuk most az elégséges feltételek valamelyikét:

a) Nézzük meg, hogy a derivált a pontban előjelet vált-e:

$$f'(x) = -\alpha + \beta \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 81}} = \frac{-\alpha \cdot \sqrt{x^2 + 81} + \beta \cdot x}{\sqrt{x^2 + 81}}$$

Mivel a fenti tört nevezője mindig pozitív, ezért az előjele megegyezik a számlálójának előjelével:

$$g(x) = \beta \cdot x - \alpha \cdot \sqrt{x^2 + 81}$$

g(x) és így a tört is pontosan akkor negatív, ha:

$$0 < \beta \cdot x < \alpha \cdot \sqrt{x^2 + 81}$$
$$\beta^2 \cdot \alpha^2 < \alpha^2 \cdot (x^2 + 81)$$
$$(\beta^2 - \alpha^2)x^2 < 81\alpha^2$$

Mivel $\beta^2 - \alpha^2 > 0$, ezért

$$x^2 < \frac{81\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2}$$
$$|x| < \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$
$$-\frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} < x < \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$

A fenti eredményt összevetve az eredeti függvény értelmezési tartományával:

	$0 < x < x_0$	$x = x_0$	$x_0 < x$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	csökkenő	lokális minimum	növekedő

Ebben a pontban tehát valóban minimuma van a költségnek, a függvény menetéből az is látszik, hogy az értelmezési tartomány végpontjaiban a függvénynek nem lehet minimuma, így az $x_0 = \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$ pontban abszolút minimuma van.

b) Vizsgáljuk meg a második deriváltat:

$$f''(x) = \beta \cdot \frac{\sqrt{x^2+81} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+81}}}{x^2+81} = \beta \cdot \frac{\sqrt{x^2+81} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+81}}}{x^2+81} = \beta \cdot \frac{x^2+81-x^2}{(x^2+81)^{\frac{3}{2}}} = \frac{81\beta}{(x^2+81)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad \forall x.$$

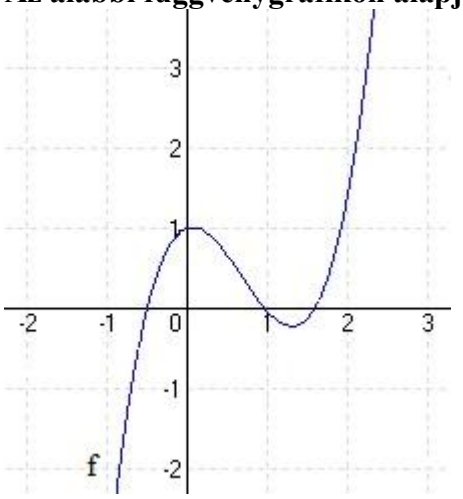
Így az x_0 –ban lokális minimuma van, melynek értéke:

$$f(x_0) = \alpha\left(30 - \frac{9\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}\right) + \beta\sqrt{\frac{81\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} + 81}$$

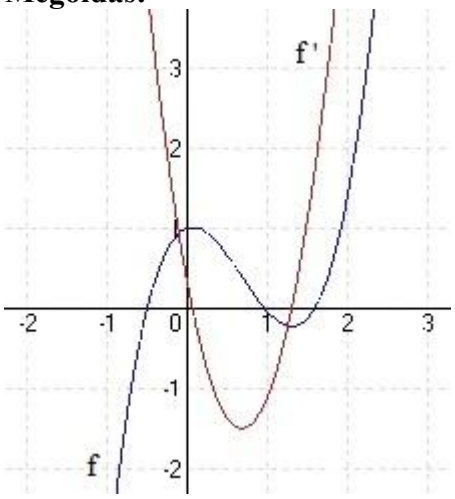
Meg kell vizsgálnunk, hogy abszolút minimum van-e a pontban. Az értelmezési tartomány belső pontjaiban máshol nem lehet szélsőérték, de a végpontokban ki kellene számítani a költséget. Ehelyett hivatkozhatunk arra, hogy a függvényünk zárt intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvény, amelynek pontosan

egy belső pontban van szélsőértéke. Ezek a tulajdonságok biztosítják, hgya függvény deriváltja máshol nem válthat előjelet, így $f(0) < f(x_0)$, mivel a [0, x_0] intervallumon a függvény szigorúan monoton növő és $f(x_0) > f(30)$, mivel a [x_0, 30] intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő.

XII.
Az alábbi függvénygrafikon alapján rajzold meg a függvény deriváltjának képét!



Megoldás:



- Az *x=0*-nál *f(x)*-nek maximuma van, tehát *f'(x)*-nek *x=0*-nál zérushelye van. Az *x=1,3*-nél *f(x)*-nek minimuma van, tehát *f'(x)*-nek *x=1,3*-nél további zérushelye van.
- Az *x=0,7*-nél megváltozik a görbület iránya, konvexből konkáv lesz, tehát *x=0,7 inflexiós pont*, azaz *f'(x)* ott minimális.
- Az *x < 0* ill. *x > 1,3* intervallumokon *f(x)* szigorúan monoton növekvő, tehát *f'(x) az x < 0* ill. *x > 1,3* intervallumokban az x tengely fölött fut.
- Az *0 < x < 1,3* intervallumban *f(x)* szigorúan monoton csökkenő, tehát *f'(x)* ebben az intervallumban az y tengely alatt fut.

X. Irodalomjegyzék

Sain Márton: *Nincs királyi út* – Matematikatörténet, Gondolat, Budapest, 1986

Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978

K. A. Ribnyikov: *A matematika története*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968

Hajnal Imre – dr. Pintér Lajos*: Matematika III. osztály, fakultatív B változat*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003, 13. kiadás

Dr. Hajdu Sándor - Dr. Czeglédy István - Dr. Kovács András-Hajdu Sándor Zoltán: *Matematika 11*, Műszaki Könyvkiadó, 2008, 4. kiadás

Czapáry Endre - Gyapjas Ferenc: *Matematika 11-12. évfolyama számára, Emelt szintű kiegészítő tananyag*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003, 1. kiadás

Pintér Lajos: *Analízis I., speciális matematika tankönyv,* Typotex kiadó, 1998, 6. kiadás

Ila-Horváthné Nagy Ilona: *Matematika VI., Analízis: Differenciál és Integrálszámítás*, AKG Kiadó, 1994

Heinz Griesel, Helmut Postel, Friedrich Suhr: *Elemente der Mathematik, 10. Schuljahr, Schülerband***,** Schroedel Kiadó, 2011

Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Simon Judit: MATEMATIKA *Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.* Középszint, Emelt szint, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006, 1. kiadás

Bárd Ágnes – Frigyesi Miklós – Lukács Judit – Major Éva – Székely Péter – Vancsó Ödön: *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten feladatgyűjtemény,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2004

Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön: *Egységes érettségi feladatgyűjtemény Matematika I.*, Konsept-H Könyvkiadó, 2003

Bárczy Barnabás: *Differenciálszámítás.* Példatár, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2001, 10. kiadás

Internet címek:

- érettségi feladatsorok, letöltve: 2011. január 15:
  http://www.oh.gov.hu/3-1-6-korabbi-erettsegi/korabbi-erettsegi-100824-2

- útmutató a matematika érettségi vizsgához, letöltve: 2011. január 15:

  http://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:ArWooptun_MJ:www.kozgazd-bp.sulinet.hu/Downloads/Erettsegire_B_F/%25C3%259Atmutat%25C3%25B3%2520a%2520matematika%2520%25C3%25A9retts%25C3%25A9gi%2520vizsg%25C3%25A1hoz.doc+emelt+szint%C5%B1+%C3%A9retts%C3%A9gi+vizsa+fel%C3%A9p%C3%ADt%C3%A9se+matematika&hl=hu&gl=hu&pid=bl&srcid=ADGEEShJd0v7B3IpqfDVeehvCUJ80zUGNg6PetO2-R3ekQ2g-ad7EQgps1w2E2nIXrdoFPFigpBr3KYLHGPby30ABea1QPBcYzyE4UthNpSR5AVcmwAk3GkNb_YvmJzz_1gePp-maSvT&sig=AHIEtbT_6MAUVmDOK1FEVFcht8tZeClvdg&pli=1

- Nemzeti alaptanterv, letöltve: 2011. február 20:
  http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/tantervek/nemzeti-alaptanterv-nat
  http://www.mek.iif.hu/porta/szint/tarsad/pedagog/oktpol/nat/