Hogyan oldjunk meg 10. osztályban matematika feladatokat más évfolyamokon szokásos módszerekkel

készítette:
Barcs Ádám
ELTE-TTK matematika tanári szak

Témavezető:
Dr. Ambrus Gabriella
adjunktus
Matematikatanítási és Módszertani Központ

2012.

Tartalomjegyzék

Előszó 3
„Axiómáim” 5
1. Egyenlet – algebra vagy számelmélet? 7
2. Egyenlet – analízissel 15
3. Koordinátageometria: a Pitagorasz-tételtől a Gauss egészekig 19
4. Szélsőérték számítás: a terület maximuma 25
5. Geometria feladat: térfogatszámítás 37
6. Geometria feladat sok megoldással – Euler-tétel 43
7. Geometriai feladat sok megoldással – „Ismételjük a geometriát egy feladaton keresztül.” 51
8. Bizonyítási feladatok 69
Reflexiók 81
Melléklet 82
Irodalomjegyzék 87

Előszó

Gyakorló pedagógusok gyakran szembesülnek azzal a jelenséggel, hogy a matematika tanítása során a feladatok jó megválasztása fél siker. Nemcsak a „mit tanítok” hanem a „hogyan tanítom meg” kérdését is befolyásolja. Fontos, hogy minden matematikatanárnak – a rengeteg nyomtatásban megjelent tankönyv, példatár és feladatgyűjtemény mellett is – legyen egy saját használatú példatára, amely azokat a feladatokat tartalmazza, amelyeket ténylegesen fel is használ a tanév során, a matematika órákon.

Példatárunkban kell, hogy szerepeljenek az egy témakörhöz tartozó hasonló feladatok között „kakukktojás” feladatok is, hogy a tanulókat gondolkodásra és kreativitásra ösztönözzük, és ne csak a tanult tartalmak leginkább mechanikus alkalmazására. Szakdolgozatomban ilyen feladatokat válogattam össze.

Első – és számomra legfontosabb – funkciója az általam kiválasztott feladatoknak a korábban tanított tartalmak folyamatos és állandó ismétlése. Ezt elsősorban a matematika tantárgy koncentrikus tananyagstruktúrája indokolja. Minden témakör kapcsán szükséges elővenni olyan feladatokat is, amelyek az előző témakörök ismereteit is alkalmazzák és ismétlik át az új ismeretek mellett.

Másik funkciója a későbbi – akár egyetemi szintű – tanulmányok előkészítése. Célom tehát, hogy a feladatoknak a későbbi tananyagban is legyen vonatkozása.

Harmadik funkció a komplex matematikai szemlélet kialakítása. Annál értékesebb egy tanítási óra, minél több területét érintjük a matematikának. Legyen szó akár ismétlésről, akár a későbbi tartalmak megalapozásáról, tehetünk kitérőket a matematika olyan területei felé, amelyeket szigorú értelemben nem tartalmaz az a témakör, amellyel éppen a tanítási órán elsődlegesen foglalkozunk. A példatáram az összeállításánál ez is fontos szempont.

A negyedik funkció a többféle megoldás lehetősége. A példatárban szereplő feladatok mindegyike többféleképpen is megoldható, sok esetben éppen ez világít

rá egyes összefüggésekre, a tanulók számára ez teremthet kapcsolatot látszólag független tartalmak között.

Szakdolgozatomban tehát olyan feladatokat válogattam össze, amelyek eleget tesznek a felsorolt négy feltételnek, ráadásul más-más évfolyamokon, különböző tudással, különbözőképpen oldhatjuk meg őket. Ez a szakdolgozat azonban több mint egy példatár. Nemcsak a feladatokat és megoldásaikat tartalmazza, nemcsak a megoldási módszereket hasonlítja össze, hanem feladatelemzéseket is tartalmaz.

Meg kell jegyeznem, hogy ennek a négy felsorolt szempontnak egyszerre megfelelő feladat ritkán szerepel egy hagyományos matematika órán. Az is kétségtelen, hogy a tanulmányi versenyek versenypéldái között találni ilyen feladatokat, de a versenyfeladatokból összeállított példatárak nem témakörönkénti struktúrában közlik a feladatokat, ezért nem is igen jut eszünkbe, hogy ezekből is válogassunk egy-egy feladatot a hagyományos matematika órákra.

A példatár nem teljes: lehetne bővíteni folyamatosan – és a későbbiekben, saját használatra tervezem is ennek megvalósítását – újabb feladatokkal. Szakdolgozatom feladatait csak a tizedik osztályos tartalmak köré csoportosítottam, tehát ugyanilyen példatárat össze lehet állítani minden évfolyam számára. Másrészt nem fedi le a szóban forgó évfolyam teljes anyagát: igyekeztem azokat a feladatokat kiválasztani, amelyben minél több témakör tartalmai felbukkannak.

Köszönettel tartozom Ambrus Gabriellának, aki a munkámhoz témavezetőként minden lehetséges segítséget megadott, ötletekkel, javaslatokkal, szakirodalommal.

„Axiómáim”

1.) Mit értek tizedik osztályos tartalmakon?A jelenleg érvényes NAT és kerettantervek alapján deklarált tartalmakat, amelyek összhangban állnak a tankönyvek tananyagával.

2.) A matematikai tartalmak eltérő elnevezéseinek egyértelműsítése. Ritkán előfordulhatnak a matematikai szakirodalomban ugyanannak a fogalomnak, tételnek eltérő megnevezései is. Az egyértelműség kedvéért, ahol szükségesnek látom, kimondom a szóban forgó tételeket és állításokat, ezek korábban már megjelent bizonyításaira vagy a lábjegyzetben fogok hivatkozni, vagy a mellékletben közlöm. Ha közismert tételről van szó, akkor ettől eltekintek, ugyanolyan elnevezéseket fogok használni, mint amelyek az általam átnézett tankönyvekben szerepelnek.

3.) A tananyag „hagyományos” struktúrája. Hagyományosnak azt a bizonyítási struktúrát értem, amelynek tradíciói vannak, és a magyar matematikatanítási kultúrára leginkább jellemző, általánosnak tekinthető. Munkám során összehasonlítottam a négy jelenleg legnagyobb példányszámban megjelenő magyar tankönyvcsalád tankönyveit, és az 1989-ben kiadott Hajnal-féle gimnáziumi tankönyvet (Ld. részletesen Irodalomjegyzék.) Ha egy tétel bizonyítása mind az öt tankönyvben lényegében ugyanaz (ilyen például a később is említett magasságtétel) akkor úgy veszem, hogy ezt a tételt hagyományosan így bizonyítjuk. Tapasztalataim szerint ezekben a könyvekben – bár a tankönyvek felépítésében és tartalmában vannak jelentős különbségek – a bizonyítási koncepcióikat tekintve azonban mégis nagyon hasonlóak. Éppen ezért ezt a bizonyítási struktúrát tekintem majd hagyományosnak.

4.) A tananyagháló „másodlagos”kapcsolatai. Az általunk kiválasztott bizonyítási koncepció egyértelműen kijelöli a tartalmak közötti ok-okozati összefüggéseket. Vannak azonban olyan kapcsolatok is, amelyekre nem építünk az adott koncepcióban. Ezek a „mellékvágányok” a „másodlagos” kapcsolatok a felsorolt tartalmak között. A feladatok megoldása során viszont ezeket a

másodlagos kapcsolatokat is meg kell, hogy ismerjék a tanulók a tananyag tartalmi elemei között. Feladatok formájában előkerülhetnek olyan bizonyítások is, amelyek nem fértek bele a tananyagba koncepcionális okok miatt. Hogy ezt hogyan oldhatjuk meg bizonyos feladatok segítségével, főként ezzel foglalkozik a szakdolgozatom.

5.) Két megoldási módszer akkor tekinthető különbözőnek, ha az alábbi kritériumok valamelyike teljesül:[1]

- ha a két megoldás során különböző ismeretekre hivatkozunk.
- ha más probléma-megoldási stratégiát alkalmazunk (célirányú következtetés, fordított irányú következtetés, tervszerű próbálgatás)
- ha más gondolkodási műveleteket hajtunk végre (analízis, szintézis, általánosítás, analógia, stb.)
- ha a nem felcserélhető megoldási lépéseket (logikai műveletet) más sorrendben hajtunk végre, vagyis a megoldás logikai útja eltérő.

[1] ***Kántor Sándor: A matematikai feladatok konvenciói 1999. című cikkében részletesen szerepel (ld.: Irodalomjegyzék), hogy konvencionálisan mit tekinthetünk egy feladatmegoldási lépésnek, és milyen szempontoknak kell egy feladatmegoldásnak megfelelnie.***

1. Egyenlet – algebra vagy számelmélet?

Feladat: ***Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán!***[2]

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}+\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{63}}$$

Hol, melyik évfolyamon kerülhet elő a feladat? Természetesen az algebrai törtek bevezetése után bármikor, amikor a tanulók tudnak algebrai törteket egyszerűsíteni és közös nevezőre hozni, találkoztak olyan algebrai törttel, amelynek a nevezőjében is van ismeretlen. (Ez először 9. osztályban időszerű, vagy utána bármelyik évfolyamon.)

1.1. Első megoldás[3]

Első lehetőségként vázolom, hogy 10. osztályban hogyan kerülne megoldásra ez a feladat, a másodfokú egyenlet megoldóképletének ismerete után.

1.1.1. Először is kikötéseket kell tenni, mert a nevezőben nem lehet nulla, ezért az$x$ lehetséges értékei közül ki kell zárnunk az $x \in \{0, -1, -2\}$ számokat.

A közös nevező $63x(x+1)(x+2)$, tehát ezzel szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát!

$$63(x+2)+63x=2x(x+1)(x+2)$$

1.1.2. Az egyenlet bal oldalán kiemelést végzünk. Emeljünk ki 63-at!

$$63(2x+2)=2x(x+1)(x+2)$$

A bal oldali zárójelből még ki tudunk emelni 2-t is, ezzel el is oszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát.

$$63(x+1)=x(x+1)(x+2)$$

[2] ***Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 2006. (részletesen ld.: Irodalomjegyzék.) 1240. feladata alapján.***
[3] ***Saját megoldás***

Egyszerűsítés, a zárójelek felbontása és az egyenlet átrendezése utána következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2 + 2x - 63 = 0$$

Az egyenletet a megoldóképlet segítségével megoldhatjuk, az$a = 1$; $b = 2$; és$c = -63$ helyettesítéssel.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 1 \cdot 63}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-2 \pm 16}{2}$$

Ebből tudni fogjuk, hogy $x_1 = 7$ és $x_2 = -9$ lesz a másodfokú egyenlet két gyöke. A valós számok halmazán keresünk megoldásokat, tehát mindkét megoldást el tudjuk fogadni.

1.1.3.Ellenőrzés: az eredeti egyenlet bal oldalába helyettesítsünk$x_1 = 7$-et:

$$\frac{1}{7(7+1)} + \frac{1}{(7+1)(7+2)} = \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} = \frac{9+7}{7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2}{63}$$

Az eredeti egyenlet bal oldalába helyettesítsünk $x_2 = -9$-et:

$$\frac{1}{-9(-9+1)} + \frac{1}{(-9+1)(-9+2)} = \frac{1}{-9 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 7} = \frac{7-9}{-7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2}{63}$$

A mindkét esetben az eredeti egyenlet jobb oldalán is ugyanez a szám áll, tehát az egyenlet állítása igaz.

Válasz: Az egyenlet egész megoldásai: $x_1 = 7$ és $x_2 = -9$.

1.2. Második megoldás

Következzen egy másik megoldás, ami szintén elvégezhető 10. osztályban. A különbség itt a közös nevezőre hozásban van, amit 9. osztályban már alkalmaztunk algebrai törtek esetén, és a másodfokú egyenlet megoldásában, amelyet megoldóképlet nélkül, szorzattá bontással oldunk meg.[4]

[4] ***Sokszínű matematika tankönyvsorozat(2010.részletesen ld.: Irodalomjegyzék) 9. osztályok számára írt tankönyvében szerepel is egy „Egyenlet megoldása szorzattá alakítással" című fejezet. Itt elsősorban az $p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_n(x) = 0$ alakú egyenletek megoldásait keressük, ahol minden $p_i(x)$ elsőfokú, egyváltozós polinom, és $i \in \{1, 2 \ldots n\}$. Ugyanakkor a számelmélet résznél szerzett ismeretek alapján $ap_1(x) \cdot p_2(x) = p$ egyenletet is meg tudjuk oldani, ha a $p \in \mathbb{Z}$ prím. Lényegében erre az egyszerű állításra épül a feladat megoldása.***

Kikötéseket itt szintén tegyük meg. (Ld.: 1.1.1.)

Az egyenlet bal oldalán két törtet látunk, ezt hozzuk közös nevezőre. A közös nevező a $x(x+1)(x+2)$kifejezés.

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x+2)}+\frac{x}{x(x+1)(x+2)}=\frac{2}{63}$$

A bal oldali azonos nevezőjű törteket összeadjuk.

$$\frac{2x+2}{x(x+1)(x+2)}=\frac{2}{63}$$

1.2.1. A bal oldali törtet egyszerűsítjük $(x+1)$-el. A feladat most már csak a következő egyenlet megoldásáról szól:

$$\frac{2}{x(x+2)}=\frac{2}{63}$$

Ha két tört egyenlő, és a számlálójuk ugyanaz a szám, akkor a két tört nevezője is egyenlő.

$$x(x+2)=63$$

Keresem azt az egész számot, és a nála 2-vel nagyobb másik számot, amelyeknek a szorzata 63. Írjuk fel 63 pozitív osztóit!

$$63 \text{ pozitív osztói} = \{1; 3; 7; 9; 21; 63\}$$

A negatív osztók pedig ugyanezek a számok lesznek, negatív előjellel ellátva. Keressünk olyan osztópárokat, amelyek között a különbség 2 lesz!

A $63 = 7 \cdot 9 = (-7) \cdot (-9)$ felbontás miatt az egyenlet két megoldása:
$x_1 = 7$, mert ekkor $x_1 + 2 = 9$
és$x_2 = -9$, mert ekkor $x_1 + 2 = -7$.
A feladatot ugyanúgy ellenőrizzük, mint 1.1.3.-ban.

A feladat leginkább attól nehéz, hogy mechanikusan alkalmazva a középiskolában szokásos mérlegelv lépéseit a feladat egyre bonyolultabbá válik. Például az egyenletmegoldás második sorában, az (1.1.2. pont) kézenfekvő lépés

lenne a zárójelek felbontása. A tanulók egy része valószínűleg ezt is tenné, és csak a zárójelfelbontás után jönne rá, hogy ez egy harmadfokú egyenlet, amit még nem tud megoldani.

Miért választottam a feladatot? A 9. osztályos egyenletek témakör nagyon gazdag egyenletmegoldó módszerekben: mérlegelv segítségével, lebontogatással, grafikus módszerrel, esetszétválasztással oldunk meg feladatokat elsősorban, de vannak olyan egyenletmegoldó „trükkök" is, amelyeket elemi feladatmegoldáshoz tudnunk alkalmazni, ilyen például a már említett magasabb fokú egyenletek szorzattá bontása. Ezek a „trükkös" módszerek azonban könnyen elfelejtődhetnek magasabb évfolyamokon, mert itt már inkább más jellegű problémákra koncentrálunk (másodfokú egyenlet, exponenciális egyenlet, trigonometrikus egyenlet, stb. speciális módszereire.) Ebben a feladatban szerencsére a szorzattá bontásnál is alkalmazott számelméleti megoldás gyorsan eredményre vezet.

Mikor, hogyan adnám fel a feladatot? Ezt a feladatot akár többször is. (Vagy valamelyik feladatvariációját.) Először 9. osztályban. Utána 10. osztályban ismét. Azért foglalkoznék a feladattal a másodfokú egyenletek tanítása után, hogy felhívjam a figyelmet a mechanikus feladatmegoldás veszélyeire. Itt ugyanis vissza lehet utalni a korábbi évfolyamon alkalmazott megoldására.

1.3. Megjegyzés: A feladat nem egészen így hangzik a könyvben. Hanem a következőképpen:

Egy osztályban számolási versenyt rendeztek. A feladat az volt, hogy az alábbi „bonyolult" egyenletek gyökeit ki tudja a leggyorsabban meghatározni. A győztes Aladárnak néhány perc elég volt az összes feladat megoldására. Hogyan okoskodhatott?

a.)

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{2}{63}$$

b.)

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{24}$$

c.)

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x(x+1)}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+1)(x+2)}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+2)(x+3)}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{88}}$$

d.)

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x(x+1)}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+1)(x+2)}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+2)(x+3)}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+3)(x+4)}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{63}}$$

e.)

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x(x+2)}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+2)(x+4)}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{45}}$$

A 1.1. és a 1.2. pontban ismertetett módon mindegyik egyenlet megoldható. A feladat szövege azonban azt sugallja, hogy valami általánosabb módszerre lenne szükség. Első próbálkozásként vegyük a lehető legegyszerűbb általánosítást! Ahol a, b, c, d, e változók egymást követő egészek (az e.) feladatban egymást követő páros egészek.)

A feladat a.) b.) és e.) részének egyenleteit általánosítva:

$$\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{b\cdot c}=\frac{c}{a\cdot b\cdot c}+\frac{a}{a\cdot b\cdot c}=\frac{a+c}{a\cdot b\cdot c}$$

Ugyanígy a c.) részben:

$$\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{b\cdot c}+\frac{1}{c\cdot d}=\frac{cd+ad+ab}{a\cdot b\cdot c\cdot d}$$

A d.) részben pedig:

$$\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{b\cdot c}+\frac{1}{c\cdot d}+\frac{1}{d\cdot e}=\frac{cde+ade+abe+abc}{a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e}$$

Egy középiskolás diák valószínűleg nem ezt az alakot írja fel, hanem nála az a, b, c paraméterek helyett az $a=x; b=(x+1);\ c=(x+2)\ldots$ stb. kifejezések szerepelnek.

Ezeket a kifejezéseket most én is visszahelyettesíthetném, de most eltekintek tőle. A konkrét esetekben szerzett tapasztalatok azt sugallják, hogy teljesülnek majd a következő összefüggések:

a.) és b.) és e.) részben:

$$\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{b\cdot c}=\frac{c}{a\cdot b\cdot c}+\frac{a}{a\cdot b\cdot c}\overset{?}{\Leftrightarrow}\frac{c-a}{a\cdot c}$$

a c.) részben:

$$\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{b\cdot c}+\frac{1}{c\cdot d}\overset{?}{\Leftrightarrow}\frac{d-a}{a\cdot d}$$

és a d.) részben:

$$\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{b\cdot c}+\frac{1}{c\cdot d}+\frac{1}{d\cdot e}\overset{?}{\Leftrightarrow}\frac{e-a}{a\cdot e}$$

Vagyis általánosabban:

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+p-1)(x+p)}\overset{?}{\Leftrightarrow}\frac{(x+p)-x}{x(x+p)}=\frac{p}{x(x+p)}$$

Illetve speciálisan az e.) feladat esetében:

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\cdots+\frac{1}{(x+2p-2)(x+2p)}\overset{?}{\Leftrightarrow}\frac{p}{x(x+2p)}$$

1.3.1. Ezeket a sejtéseket bizonyítani elég nehéz középiskolai módszerekkel, de például teljes indukcióval lehetséges lenne. Én most ettől is eltekintek, inkább visszavezetem a problémát az alábbi– felsőoktatásból ismert – összegzési feladatra[5]:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

Középiskolában ez a bizonyítási feladat legfeljebb fakultáción vagy tagozatos osztályban kiegészítő anyagként kerülhet elő.

Az előző összegzésre vonatkozó összefüggést felhasználva tényleg látjuk:

$$\sum_{i=x}^{x+p-1}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=\sum_{i=1}^{x+p-1}\frac{1}{i\cdot(i+1)}-\sum_{i=1}^{x-1}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=\left(1-\frac{1}{x+p}\right)-\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{p}{x(x+p)}$$

Megjegyzés: ez igazolja, hogy

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+p-1)(x+p)}=\sum_{i=x}^{x+p}\frac{1}{i\cdot(i+1)}$$

és a feladat a.) b.) részében $p=2$, c.) részében $p=3$, és d.) részében $p=4$.

1.3.2. A feladat e.) részében speciálisan:[6]

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}=1-\frac{n+1}{2n+1}$$

A fentiek mintájára itt:

$$\sum_{i=(x+1)/2}^{(x+2p-1)/2}\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}=\sum_{i=1}^{(x+2p-1)/2}\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}-\sum_{i=1}^{x-1/2}\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}$$

Az összegzési képletet alkalmazva egyrészt:

$$\sum_{i=1}^{(x+2p-1)/2}\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}=1-\frac{x+2p+1}{2(x+2p)}$$

[5] ***Az összegzési feladat bizonyítása ld.: Melléklet.***
[6] ***A sorösszegzési feladat bizonyítása ld.: Mellékletben***

másrészt pedig:

$$\sum_{i=1}^{x-1/2} \frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)} = 1 - \frac{x+1}{2x}$$

A két összeg különbsége:

$$\frac{(x+1)(x+2p)}{2x(x+2p)} - \frac{(x+2p+1)x}{2(x+2p)x} = \frac{(x^2+2xp+x+2p)-(x^2+2xp+x)}{2x(x+2p)} = \frac{p}{x(x+2p)}$$

A feladat e.) részében $p = 2$ teljesül.

A feladat a sorösszeg segítségével leegyszerűsített változata:

a.) feladatban:

$$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{2}{63}$$

b.) feladatban:

$$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{24} = \frac{2}{48}$$

c.) feladatban:

$$\frac{3}{x(x+3)} = \frac{3}{88}$$

d.) feladatban:

$$\frac{4}{x(x+4)} = \frac{1}{8} = \frac{4}{32}$$

e.) feladatban:

$$\frac{2}{x(x+4)} = \frac{2}{45}$$

egyenletek megoldásait keressük. A feladatban említett Aladár is leginkább így kaphatott gyorsan megoldásokat.

Mindegyik egyenlet az egész számok halmazán gyorsan megoldható szorzattá bontással, ahogy az 1.2.1. pontban történt. Vagyis:

b.) feladatban:

$$48 = x(x+2) = 6\cdot 8 = (-8)\cdot(-6)$$

c.) feladatban:

$$88 = x(x+3) = 8\cdot 11 = (-11)\cdot(-8)$$

d.) feladatban:

$$32 = x(x+4) = 4\cdot 8 = (-8)\cdot(-4)$$

e.) feladatban pedig:

$$45 = x(x+4) = 5 \cdot 9 = (-9) \cdot (-5)$$

1.3.3. **Válasz:** Aladár ismerve a p tagból álló sorösszeg képletét az egyenletek jobb oldalán álló tört – szükség szinti átalakításával és – nevezőjének $x(x+p)$alakú szorzattá bontásával oldhatja meg legkönnyebben az egyenleteket.

Mikor és hogyan adnám fel ezt az utóbbi változatot? Ugyanúgy 10. osztályban, de az 1.3. pontban közölt megoldási móddal csak fakultáción, szakkörön, érettségi előkészítőn, vagy tagozatos osztályban foglalkoznék, 11-12. évfolyamon. Ekkor előnyt jelent, ha a tanulók már ismerik az általam leírt másik két megoldásváltozatot.

2. Egyenlet – analízissel

Feladat: ***Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:***[7]

$$\boldsymbol{x^2 + \sqrt{x} = 18}$$

Melyik évfolyamon lenne magától értetődő a feladat? Igazából minden középiskolai évfolyamon nehéz a feladat, mert nem lehet megoldani a hagyományos algebrai módszerekkel.

Mikor és hogyan adnám fel 10. osztályban? A másodfokú egyenletek – egyenlőtlenségek – függvények témakör végén, vagy a témakör után, de csak akkor, ha a tanulók jártasságot mutatnak a grafikus megoldásban, és elég idő jutott a másodfokú és a gyökös kifejezést tartalmazó függvényekre.

2.1. Első megoldás:[8]

$x^2 + \sqrt{x} = 18 \Rightarrow \sqrt{x} = 18 - x^2$átalakítássalkönnyebben alkalmazható a grafikus módszer. Ábrázoljuk a következő függvényeket!

$$\begin{cases} f(x) = 18 - x^2 \\ g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

Válasz: <u>a rajzról már könnyen leolvasható, hogy az egyetlen megoldás a következő számpár:</u>

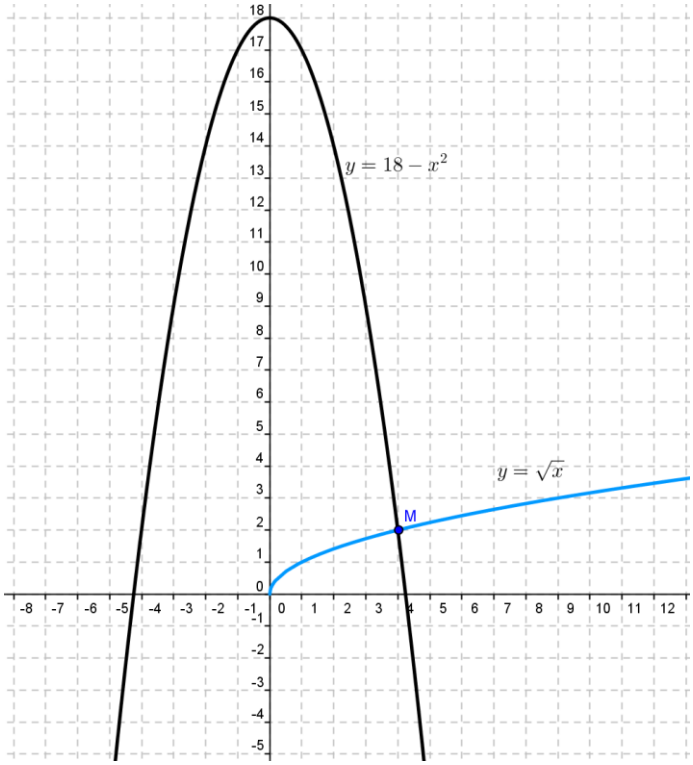
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Megjegyzés: ritkán találunk tankönyvben olyan feladatot, amelynek megoldásához a grafikus módszert alkalmazzuk, de előtte átrendezzük az egyenletet, így ez hiánypótló lehet.

---

[7] ***A feladattal Juhász Péter egyik kurzusán találkoztam (Hogyan foglalkozzunk tehetséges gyerekekkel? ELTE-TTK Matematikatanítási és Módszertani tanszék.) Elmondása szerint ez a feladat eredetileg Pósa Lajos tanár úrtól származik.***

[8]***Saját megoldás.***



2.1. ábra

Miért nehéz a feladat? Megfelelő mennyiségű feladatmegoldó rutinnal rendelkezve csábít bennünket a lehetőség, hogy a hagyományos algebrai módszerekkel kezdjünk a feladatnak. Például könnyen zsákutcába jutunk új ismeretlen bevezetésével: a$\sqrt{x} = y \geq 0$helyettesítéssel kapott $y^4 + y = 18$ alakból látszik, hogy ez egy hiányos negyedfokú egyenlet, amelynek a nemnegatív $y$megoldásait keressük. Ezt középiskolai módszerekkel nem lehet megoldani. Abban az esetben találhatunk középiskolai módszerekkel megkapható megoldást, ha az egész számok körében keressük azt. (Az 1-es feladat alapján. Keressük a megfelelő szorzattá bontást:

$$y(y^3 + 1) = 18$$

A 18 páros, tehát y vagy $y^3 + 1$ páros. 18 osztóit felírjuk, és az $y = 2$ esetén találunk is megoldást, amiből az $x = 4$ adódik.

2.3. Második megoldás[9]

Ez a gondolatmenet egyszerű, ráadásul nélkülöz minden előzetes ismeretet, amit az előző pontban használtunk. Ez elvégezhető minden olyan évfolyamon, ahol a gyerekek már ismerik a gyökvonás műveletét, akár általános iskolában is, így természetesen 10. évfolyamon is alkalmazható.

A gyökjel alatt nem szerepelhet negatív szám, ezért biztos, hogy az egyenlet megoldását a nemnegatív számok között kell keresni.

Nemnegatív szám négyzete és négyzetgyöke is nemnegatív, tehát az egyenletben két nemnegatív szám összege lesz 18.

Egy lehetséges megoldás az $x = 4$, azt tudjuk, kérdés: van-e másik megoldás is.

A 4-nél nagyobb számok négyzete nagyobb 16-nál, négyzetgyöke nagyobb 2-nél, e kettő összege nagyobb, mint 18.

A 4-nél kisebb nemnegatív számok négyzete kisebb, mint 16, négyzetgyöke kisebb, mint 2, e kettő összege kisebb, mint 18.

<u>Tehát csak az $x = 4$ lesz megoldás, más nem.</u>

Megjegyzés: a fenti megoldás triviálissá válik 11. osztályban, ahol sokat foglalkozunk a függvények monotonitásával. Ki is használjuk például az exponenciális és logaritmussal kapcsolatos egyenletek megoldásánál. Ugyanezt használjuk ki most az egyenlet megoldásainak megkeresésénél is.

Az egész számok körében próbálgatással az $x = 4$ megoldást könnyen megtaláljuk. Kérdés: van-e más megoldása is az egyenletnek? A bal oldalon két függvény összege szerepel. $f(x) = x^2$és$g(x) = \sqrt{x}$. Mindkét függvény szigorú monotonitást mutat.

Az $x = 4$ esetre beláttuk, hogy $f(4) = 16$ és $g(4) = 2$.

[9] ***Juhász Péter által tartott gyakorlaton ezzel a megoldással találkozhattam.***

Ha $x < 4$ akkor a szigorú monotonitás miatt $f(x) < 16$ és $g(4) < 2$. A két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva adódik:

$$f(x) + g(x) < 16 + 2 = 18$$

tehát $x^2 + \sqrt{x} < 18$, ami azt jelenti, hogy az $x < 4$ számok körében nincs megoldás.

Ugyanígy ha $x > 4$ akkor a szigorú monotonitás miatt $f(x) > 16$ és $g(4) > 2$. ebből adódik:

$$f(x) + g(x) > 16 + 2 = 18$$

tehát $x^2 + \sqrt{x} > 18$, ami azt jelenti, hogy az $x > 4$ számok körében nincs megoldás.

Miért választottam ezt a feladatot? Mert az algebrai egyenletmegoldó lépések egyikével sem lehet a feladatot megoldani középiskolában. Viszont a fenti két módszer együtt nagyon szépen demonstrálja a matematikai analízis szemléletét.

3. Koordinátageometria: a Pitagorasz-tételtől a Gauss egészekig

Feladat: ***Egy koordinátarendszerben megrajzoltuk az origó középpontú, 5egység sugarú kört. Hány rácspont esik erre a körvonalra? (Rácspontnak nevezzük azokat a pontokat, melyeknek mindkét koordinátája egész szám.)***[10]

Hol, milyen évfolyamon magától értetődő a feladat? A feladat megoldható akár a 8. osztályos apparátus segítségével is, de úgy gondolom a gyerekek többsége 8. osztályban még nem elég érett a feladat alapproblémájára.[11] Egy érettségiző tanuló viszont a feladat elolvasása után nagy valószínűség szerint a 11. osztályban tanult koordinátageometriai ismeretekre asszociál először. Hagyományos tanórai keretek között véleményem szerint leginkább 9-10. osztályban érdemes a feladattal foglalkozni.

Hogyan kerülhet elő ez a feladat 10. osztályban? Mivel koordináta-geometriával még nem foglalkoztunk, ezért csakis elemi úton kereshetjük meg a megoldásokat. Tudni kell ehhez a Pitagorasz-tételt, biztonsággal kell tudni használni a Descartes féle koordináta-rendszert.

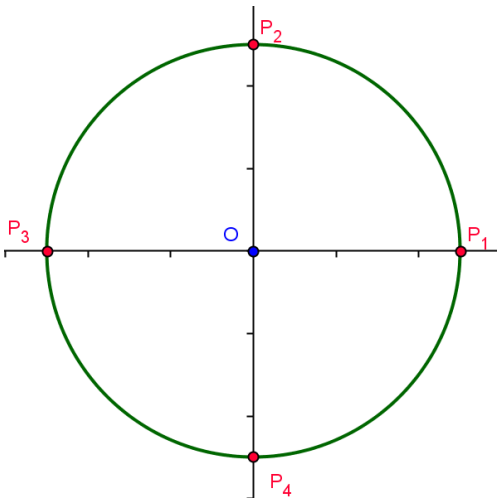
2.1. Első megoldás

2.1.1. Először is készítsünk egy jó ábrát! Az egyből látszik (a rácspontok megrajzolása nélkül is) hogy a kör a tengelyeket rácspontban metszi, ezeket rögtön jelölhetjük is. Ezeket tekinthetjük triviális megoldásnak. A kérdés, hogy találunk-e máshol is rácspontokat a körön?

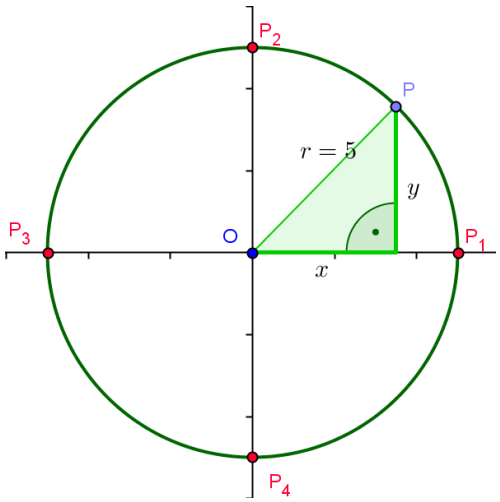
2.1.2. Rajzoljunk be egy tetszőleges pontot, amiről egyelőre még nem tudjuk, hogy rácspontra esik-e! (Ld. 2.1.2. Ábra!) Azt tudjuk, hogy a P pont koordinátái x és y, tehát az x tengelyre vetítve az OP szakaszt egy derékszögű háromszöget kapunk,

[10] ***KÖMAL 2009. márciusi feladat. K. 208.a)***
[11] ***A K jelű feladat a versenykiírás szerint 9. osztályt még nem, de a 8. osztályt már elvégzett tanulóknak szól.***

melyre felírhatjuk a Pitagorasz tételt. (Tehát itt még az $x^2 + y^2 = 5^2$egyenlet nem a kör egyenleteként szerepel.)

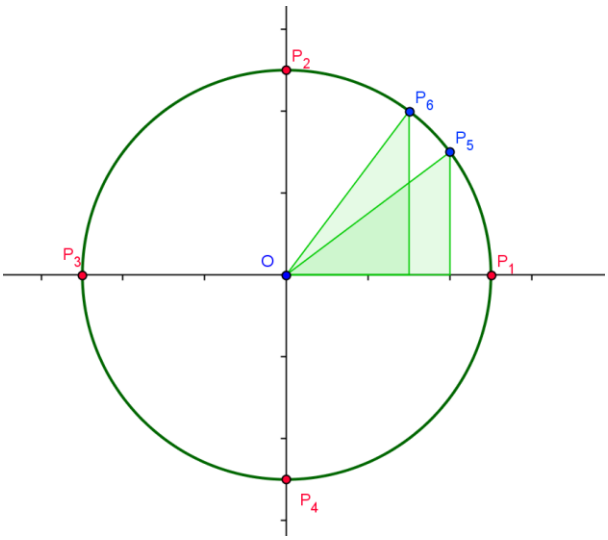


2.1.1. ábra



2.1.2. ábra

2.1.3. Oldjuk meg az$x^2 + y^2 = 5^2$ diofantoszi egyenletet! (A 9. osztályos számelméleti témakör kapcsán már találkozhattunk diofantoszi egyenlettel.) Az egyenletet megoldhatjuk próbálgatással, mivel már csak kevés számot kell behelyettesítenünk. Az $1, 2, 3, 4$ számokat elég x helyére behelyettesíteni, hogy az első negyedben található megoldásokat megkeressük.



2.1.3. ábra

2.1.4. Ha $x = 3$ akkor $y = 4$, és ha $x = 4$ akkor $y = 3$. Az első negyedben ez a két pár megoldás van, a többit pedig megkaphatjuk a tengelyekre vagy az origóra való tükrözéssel.

A feladat megoldásai a következő számpárok lesznek:

Előjelek:		$\lvert x\rvert = 5$	$\lvert x\rvert = 4$	$\lvert x\rvert = 3$	$\lvert x\rvert = 0$
x	y	$\lvert y\rvert = 0$	$\lvert y\rvert = 3$	$\lvert y\rvert = 4$	$\lvert y\rvert = 5$
$+$	$+$	$P_1(+5,0)$	$P_3(+4,+3)$	$P_7(+3,+4)$	$P_{11}(0,+5)$
$+$	$-$		$P_4(+4,-3)$	$P_8(+3,-4)$	
$-$	$+$	$P_2(-5,0)$	$P_5(-4,+3)$	$P_9(-3,+4)$	$P_{12}(0,-5)$
$-$	$-$		$P_6(-4,-3)$	$P_{10}(-3,-4)$	

Válasz: <u>Összesen tehát ez a 12 rácspont lesz, vagyis ez a 12 számpár a megoldás.</u>

Második megoldás[12]

Szintén 10. osztályban az 2.1.3. pontban már említett másodfokú kétismeretlenes egyenlet megoldásait máshogy is megkereshetjük. Átrendezve az egyenletet a következő kifejezést kapjuk:

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Keressük tehát azokat az $x \in [-5, +5]$, egészeket, amelyekre a négyzetgyökvonás eredménye is egész lesz. Tízedik osztályban gyakran találkozunk az x^2 kifejezéssel, és tudjuk, hogy egy szám és ellentettjének ugyanaz lesz a négyzete, tehát elég az $x \in [0, +5]$ halmazon megoldásokat keresni.

Az eredeti $x^2 + y^2 = 5^2$felírásból az is kitűnik, hogy x és y helyzete szimmetrikus, tehát elég megkeresni az alábbi egyenlet egész megoldásait:

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

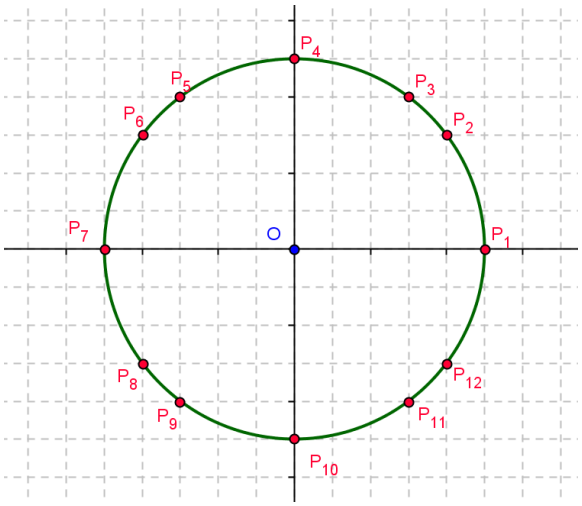
Ebből már felírhatjuk az összes megoldást, úgy, mint 2.1.4. pontban.

Megjegyzés: a 10. osztályos gyökvonással foglalkozó algebrai témakör miatt fontos így is foglalkozni a feladattal.

[12] ***Saját megoldás.***

2.3. Harmadik megoldás

A feladatmegoldás sikere ennél a feladatnál is a jó ábra készítésén múlik. A legjobb ábra egyben a feladat megoldását is jelenti, mert a rácspontok berajzolásával le is olvashatjuk a megoldásokat a rajzról. A feladat tehát megoldható szerkesztéssel is, amit ki kell egészítenünk annak a bizonyításával, hogy nincsen más megoldás.



2.3. ábra

A bizonyítás egyszerű, hiszen a középpontos szimmetria miatt itt is elegendő az első koordináta-negyedben megoldanunk a feladatot. (Ugyanezt tettük algebrai értelemben a 2.1. és 2.2. esetén, amikor a P pont mindkét koordinátáját nemnegatív számnak vettük, majd ezekből kerestük meg a negatív megoldásokat is.)

Biztos, hogy P_1 és P_2 között nincs megoldás, mert a pontok első koordinátái szomszédos egész számok, nincs közöttük újabb egész szám.

Biztos, hogy P_3 és P_4 között sincs megoldás, mert a pontok második koordinátái szomszédos egész számok, nincs közöttük újabb egész szám.

P_2és P_3 között mindkét indoklás lehetséges.

Ezt az elemi megoldást 10. osztályban szintén érdemes az előző kettő mellett alkalmazni, de meg kell jegyezni, hogy ez a megoldás már 8. osztályban is alkalmazható lenne.

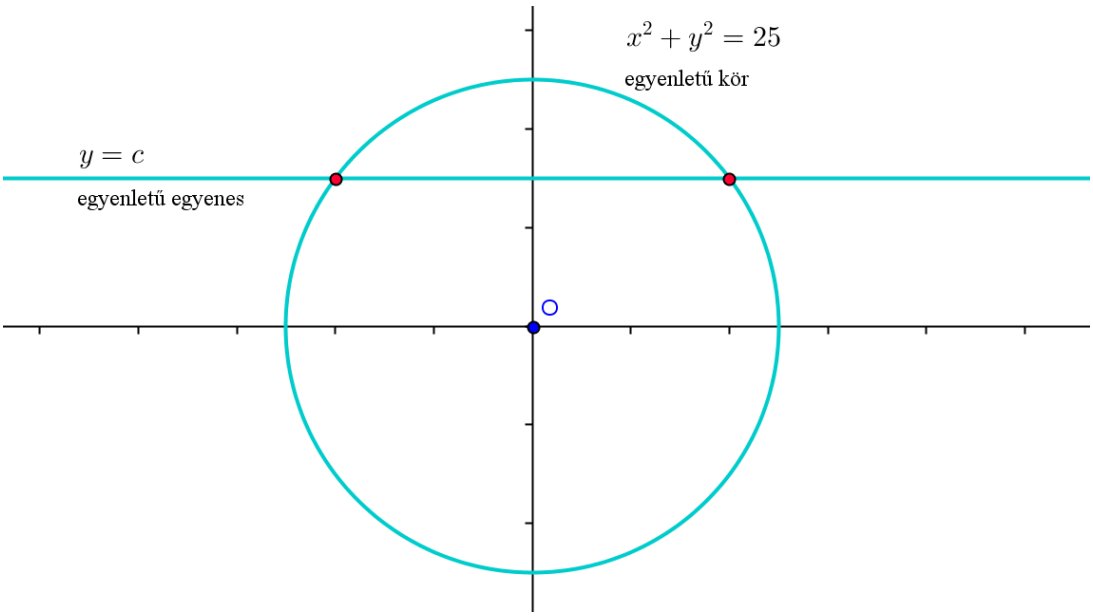
2.4. Negyedik megoldás

A KÖMAL honlapján található megoldás egyértelműen a Pithagoraszi számhármasok között keres megoldásokat.[13]

2.5. Megjegyzések:

a.) Forgásszögek szögfüggvényeinél 10. osztályban, ahol az egységkörben hasonlóan a kör pontjainak tengelyekre eső merőleges vetületeit nézzük, akkor$x = r \cdot \cos\alpha$, és $y = r \cdot \cos\alpha$.

b.) Kör egyenletének tanításánál, 11. osztályban, és kör-egyenes metszéspontjainak meghatározásánál.



2.4. ábra

A feladatban kör és egyenesek metszéspontjait keressük. Kérdés, milyen $c \in \mathbb{Z}$ konstans esetén lesz az alábbi másodfokú egyenletrendszernek egész megoldása:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = c \end{cases}$$

Természetesen, ha $x = c$ egyenletű egyenesekkel dolgozunk, ugyanígy eredményre vezet, éppen a változók szimmetriájából adódóan.

[13] ***http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=K208&l=hu***

c.) Ha esetleg foglalkoztunk a számelméleti témakörben a témával, akkor a diofantoszi egyenletet úgy is megoldhatjuk az $x, y \in \{0, 1, \dots 5\}$ halmazon, hogy a megoldásokat pitagoraszi számhármasok között keressük.

d.) Szintén fakultáción, a komplex számok tanításánál, hiszen ha az x a valós tengely, az y a képzetes, akkor az ábrán látszik, hogy az $\alpha = 3 + 4i$ komplex szám konjugáltja a $\beta = 3 - 4i$, és szorzatuk éppen a norma, azaz

$$N(\alpha) = \alpha\beta = (3 + 4i)(3 - 4i) = 32 - (4i)2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

ami a sugár négyzete. Érdekes lehet a feladat átfogalmazása (bár nyilván így sosem fogjuk a feladatot megoldani) hogy keressük azokat a Gauss egészeket, amelyeknek a normája 25.

e.) Nehezíthetjük a feladatot, ha változtatjuk r értékét, vagy feladhatjuk a KÖMAL feladat b.) részét, ami így hangzik: ***Adjunk meg olyan r egész értéket, melyre az origó középpontú, r sugarú körvonalon több mint 14 rácspont található. Mutassuk is meg, hogy a megadott r érték eleget tesz a feltételnek!***

A KÖMAL honlapon található megoldás szerint[14] itt is a Pithagoraszi számhármasok között kell keresgélnünk. Ha r egész, akkor a triviális megoldások száma szintén 4 lesz. Koordináta-negyedenként átlagosan legalább további 2,5 megoldás jut. Keresünk tehát olyan négyzetszámot, amelyet kétféleképpen tudunk négyzetszámok összegére bontani. A 3, 4, 5 és az 5, 12, 13 számhármasokból adódik:$13^2 \cdot (3^2 + 4^2) = 13^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot (12^2 + 5^2)$.

Miért választottam a feladatot? Mert a középiskolai matematika több területét érinti (számelmélet, algebra, analitikus geometria) és ezek között a területek között teremt kapcsolatot. A feladat – bár egyszerű, elemi módszerekkel megoldható - olyan következményekkel bír, amelyekre későbbi témaköröknél, és minden további évfolyamokon lehet majd hivatkozni. Például azért is foglalkoznék a feladattal tízedik osztályban, hogy előkészítsem a következő évi koordináta-geometria anyagot.

[14] ***szintén megtalálható:http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=K208&l=hu***

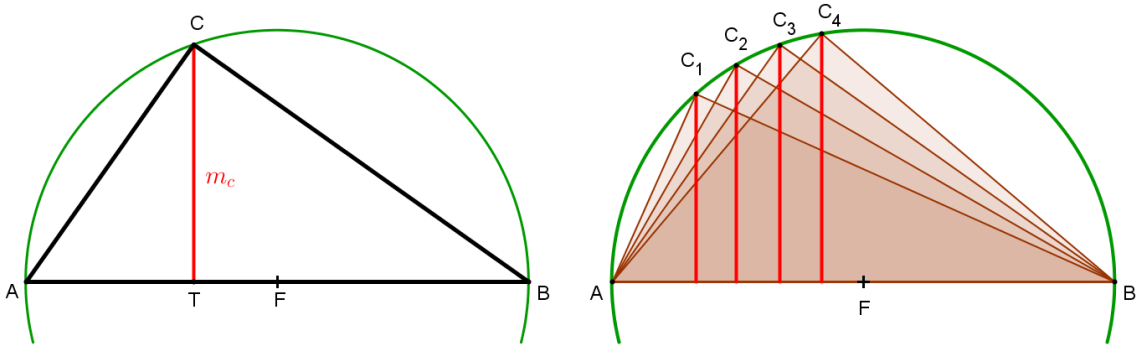
4. Szélsőérték számítás: a terület maximuma

Feladat: ***Adott átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek a legnagyobb a területe?***[15]

Mikor, melyik évfolyamon magától értetődő a feladat? A Thálesz-tétel tanítása után, csakis abban az esetben, ha a tanulók már találkoztak egyszerű szélsőérték problémával, vagy legalább függvények kapcsán előkerült a függvények minimuma és a maximuma.

4.1. Első megoldás[16]

4.1.1. Adott c átfogójú derékszögű háromszögeket úgy tudunk könnyen meghatározni, ha ac átfogóra Thálesz kört emelünk, ugyanis ekkor a derékszögű csúcs rajta van az AB átmérőjű körön.



4.1.1. ábra

A mellékelt ábra csak egy lehetséges C pont esetét mutatja, tekintsük ezt általános esetnek. Az 4.1.1. ábrán látható derékszögű háromszög területe ($c := AB$ jelöléssel természetesen)

$$T = \frac{c \cdot m_c}{2} = \left(\frac{c}{2}\right) \cdot m_c$$

[15]***Sokszínű matematika 10. osztályos könyvében (2010.) található számtani és mértani középértékekre vonatkozó összefüggés bizonyításának alapján készült feladat. A hasonlóság néhány alkalmazása című fejezetben található 2. példa „Bizonyítsuk be geometriai eszközökkel, hogy két szám számtani közepe mindig nagyobb vagy egyenlő, mint ugyanezen számok mértani közepe… Mikor teljesül az egyenlőség?”***

[16] ***Ez a megoldás a könyvben szereplő példa alapján készült.***

A terület nagysága tehát csak az m_c magasság függvényében alakul. Keressük tehát az m_c magasság lehetséges maximális értékét, ami a rajzon is látszik, hogy legfeljebb r hosszúságú lehet.

4.1.2. **Válasz:** c átfogójú derékszögű háromszög területe akkor maximális, ha $\frac{c}{2} = r = m_c$ teljesül és ekkor a terület:

$$T = \frac{c \cdot m_c}{2} = \left(\frac{c}{2}\right) \cdot m_c = \left(\frac{c}{2}\right) \cdot r = \left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{c^2}{4}$$

Megjegyzés: A feladat megoldása a fent leírt módon már lehetséges 9. osztályban. Mivel nem számít könnyű feladatnak, ezért inkább 10. osztályban érdemes vele foglalkozni.

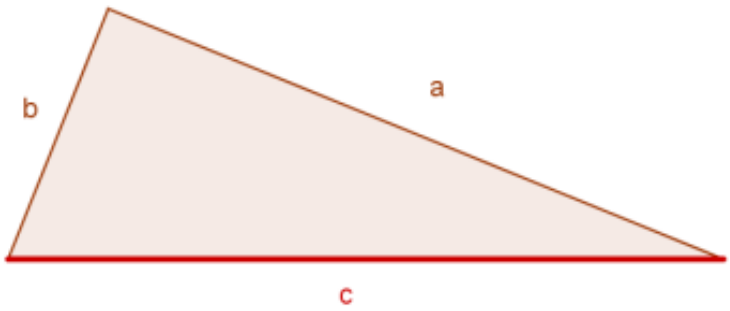
4.2. Második megoldás[17]

Ez a megoldás már mindenképpen a 10. osztályban aktuális. Szerepel ebben másodfokú algebrai kifejezés átrendezése és négyzetgyökvonás, valamint alkalmazzuk a számtani-mértani középértékre vonatkozó egyenlőtlenséget.

4.2.1. A derékszögű háromszög területe:

$$T = \frac{a \cdot b}{2}$$

A terület tehát akkor maximális, ha az ab szorzat maximális.



4.2. ábra

[17] ***Saját megoldás.***

4.2.2. Az oldalakra felírhatjuk a Pitagorasz-tételt: $a^2 + b^2 = c^2$. Mivel c adott, és a terület képletében két ismeretlen található, fejezzük ki valamelyik ismeretlent c segítségével!

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Így az ab szorzat értéke: $ab = a\sqrt{c^2 - a^2}$.Vigyük be az a-t a gyökjel alá, és alkalmazzuk az a^2 és a $(c^2 - a^2)$ tagokra a számtani és mértani középérték közötti relációt![18]

$$ab = a\sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{a^2(c^2 - a^2)} \leq \frac{a^2 + (c^2 - a^2)}{2} = \frac{a^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

Az egyenlőtlenség tehát azt mondja ki, hogy az $a \cdot b$ szorzat maximális értéke $\frac{c^2}{2}$ lehet,

$$a \cdot b \leq \frac{c^2}{2}$$

ahol az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b \xRightarrow{helyettesítve} a \cdot b = a^2 = \frac{c^2}{2}$.

4.2.3. **Válasz:**$a = b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c$<u>esetén lesz a legnagyobb a háromszög területe, azaz ha a háromszög egyenlőszárú. A terület maximális értéke pedig:</u>$T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c^2}{4}$

4.3.Harmadik megoldás

Alkalmazhatjuk a számtani és mértani középértékekre vonatkozó egyenlőtlenséget a^2ésb^2 kifejezésekre is:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot b^2}$$

Az egyelőség akkor teljesül, ha $a^2 = b^2$.

Speciálisan erre a feladatra alkalmazva: legyen az a és b a két befogó, amelyek értéke nem lehet negatív, ezért

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

[18]***A két számtani és mértani középértékére vonatkozó összefüggést nem csak geometriai úton bizonyíthatjuk, hanem éppen 10. évfolyamon a másodfokú azonos egyenlőtlenségek kapcsán bizonyítjuk algebrai úton is. (A bizonyítást az általam átnézett minden középiskolai tankönyv közli.) A bizonyítást a Mellékletben közlöm.***

és az $a \cdot b$ kifejezés értéke $a = b$ esetén lesz maximális. Alkalmazva a 4.2.1. pontban felírt területképletet és 4.2.2. pontban felírt Pitagorsz-tételt:

$$\frac{c^2}{2} \geq 2 \cdot T$$

Ez az állítás pedig azonos az 4.2.3. pontban közölt megoldással.

4.4. Negyedik megoldás[19]

Foglalkozhatunk a feladattal, amikor a tanulók a szögfüggvényeket már biztonsággal alkalmazzák derékszögű háromszögekre vonatkozó feladatokban, és már ismernek trigonometrikus azonosságokat, illetve tudják alkalmazni a függvénytáblázatban szereplő képleteket. 10. osztályban már ez is lehetséges.

Induljunk ki ismét a 4.2.1. összefüggésből!

Helyettesítsünk $a = c \cdot \sin\alpha$-t és $b = c \cdot \cos\alpha$-t!

$$T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha$$

Ebben az összefüggésben a terület tehát a $\sin 2\alpha$ értékétől függ. Ennek szélsőértékeit a következő egyenlőtlenségből olvashatjuk le: $0 \leq \sin 2\alpha \leq 1$, azaz keressük a $\sin 2\alpha = 1$egyenlet megoldásait a hegyesszögek körében, mert ekkor lesz a terület értéke maximális.

Válasz:<u>esetén a háromszög területe maximális lesz, ha:</u>

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45° \text{ (és értelemszerűen } \beta = \frac{\pi}{4} = 45°\text{)}$$

<u>és a maximum értéke:</u>

$$T = \frac{c^2}{4}$$

[19] ***Saját megoldás.***

4.5. Ötödik megoldás[20]

Függvények segítségével. A fenti megoldások közül bármelyiken elindulva írjuk fel a terület valamelyik változó szerinti függvényét, és ennek a függvénynek keressük meg a maximumát – elemi eszközökkel.

4.1. esetben: $T(m_c) = \frac{c \cdot m_c}{2} = \left(\frac{c}{2}\right) \cdot m_c$ a függvény, amelyben a változó az m_c magasság.

4.2. és 4.3. esetben: $T(a) = \frac{\sqrt{a^2(c^2-a^2)}}{2}$ a függvény, amelyben a változó az a oldal.

4.4. esetben: $T(\alpha) = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha$ a függvény, amelyben a változó az α szög.

Ez három különböző függvény. Ebben – és a következő – szakaszban egyszerre fogok tárgyalni három különböző megoldást, amelynek a megoldási módja azonos. Most a felírt függvények algebrai alakjából fogjuk leolvasni a szélsőértékeket, illetve a szélsőérték-helyeket.

A terület függvényében x változónak válasszuk:

4.1. esetben megadott függvényben m_c magasságot;
4.2. esetben megadott függvényben $a$oldalhosszúságot:
4.4. esetben megadott függvényben α szögmértéket

Az így keletkező függvények:

$$f(x) = \frac{c}{2} \cdot x, ahol\ x \epsilon \left]0, \frac{c}{2}\right]$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot |x| \cdot \sqrt{c^2 - x^2} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{c^2 - x^2}\ mert\ x \geq 0\ és\ x \in\ ]0, c[$$

$$h(x) = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2x\ ahol\ \ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

A függvényekben a c egy (nemnegatív) paraméter, ami konstansnak tekinthető. A 10. osztályban is ismert függvénytani ismeretek alapján az f függvény képe

[20] ***Saját megoldás.***

origón áthaladó egyenes lesz, amelynek a meredeksége a $k = \frac{c}{2}$ konstans kifejezés. Keressük az $f(x) = k \cdot x$ függvény (lokális) maximumát. Minél nagyobb az x, a$k \cdot x$ algebrai kifejezés is annál nagyobblesz. Az $x \in \left]0, \frac{c}{2}\right]$intervallumon a változó legnagyobb értéke$x = \frac{c}{2}$lehet, ekkor a függvény helyettesítési értéke

$$f\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{4}$$

Szintén 10. osztályos ismeretek alapján a $h(x) = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2x = k \cdot \sin 2x$ függvénynek keresem a maximumát. A $k \cdot \sin 2x$ algebrai kifejezésnek az első periódusban a $2x = \frac{\pi}{2}$helyettesítéssel kapom meg a maximumát. Ebből adódóan a $h(x)$ függvénynek az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen lesz maximuma, és ekkor a függvény helyettesítési értéke:

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{c^2}{4} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \frac{c^2}{4}$$

Sajnos a $g(x)$ függvényt algebrai alakja miatt nem tudjuk középiskolában ugyanilyen vizsgálatnak alávetni, de ugyanezen az elven kaphatunk megoldást ebből a függvényből is.

4.6. Hatodik megoldás[21]

Középiskolában függvények szélsőértékét leggyakrabban a függvények grafikonjairól olvassuk le. Úgy gondolom, hogy ezt a lehetőséget semmiképpen nem szabad elvetni, még akkor sem, ha a függvények algebrai alakja nem teszi lehetővé a füzetben, szabadkézi rajzon történő ábrázolásukat. Amennyiben van lehetőségünk gépteremben órát tartani, grafikus matematikai program segítségével is megoldható a feladat. Jelen esetben én a GeoGebra nevű programot használtam.

[21] ***Saját megoldás***

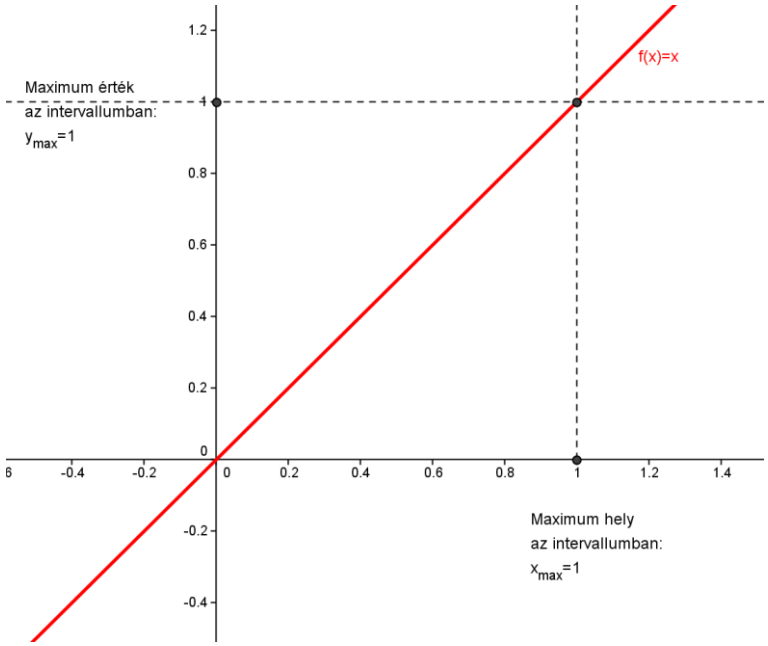
Gyakorlati szempontból könnyebb megvalósítani a feladatot, ha c paraméternek először konkrét értéket választunk, ez most legyen a $c = 2$. (Ez ugyanis könnyen egyszerűsíthető.)

$$f(x) = \frac{2}{2} \cdot x = x, ahol\ x\epsilon \left]0, \frac{2}{2}\right] =]0,1]$$

$$g(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{4 - x^2}\ és\ x \in]0,2[$$

$$h(x) = \frac{4}{4} \cdot \sin 2x = \sin 2x\ \ ahol\ \ x \in]0, \pi[$$

Ábrázoljuk a fenti függvényeket!

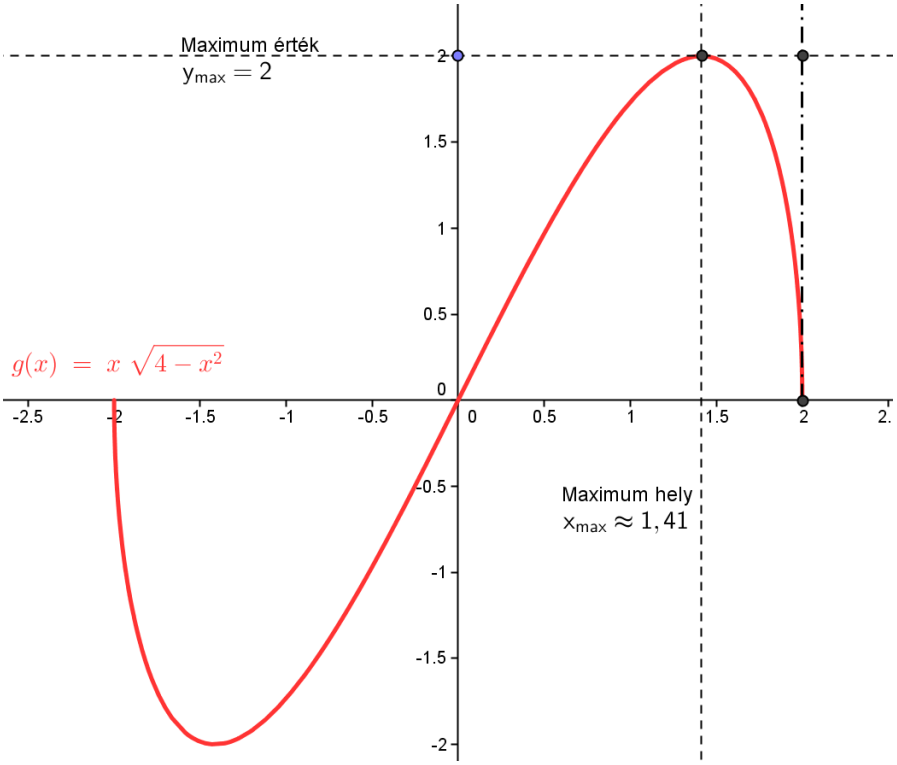


4.5.1. ábra: az $f(x) = x$ függvény grafikonja

A függvénynek a megadott intervallumban az $x = 1$ helyen lesz maximuma, vagyis az intervallum jobb oldali végpontjában, ennek értéke: $f(1) = 1$.

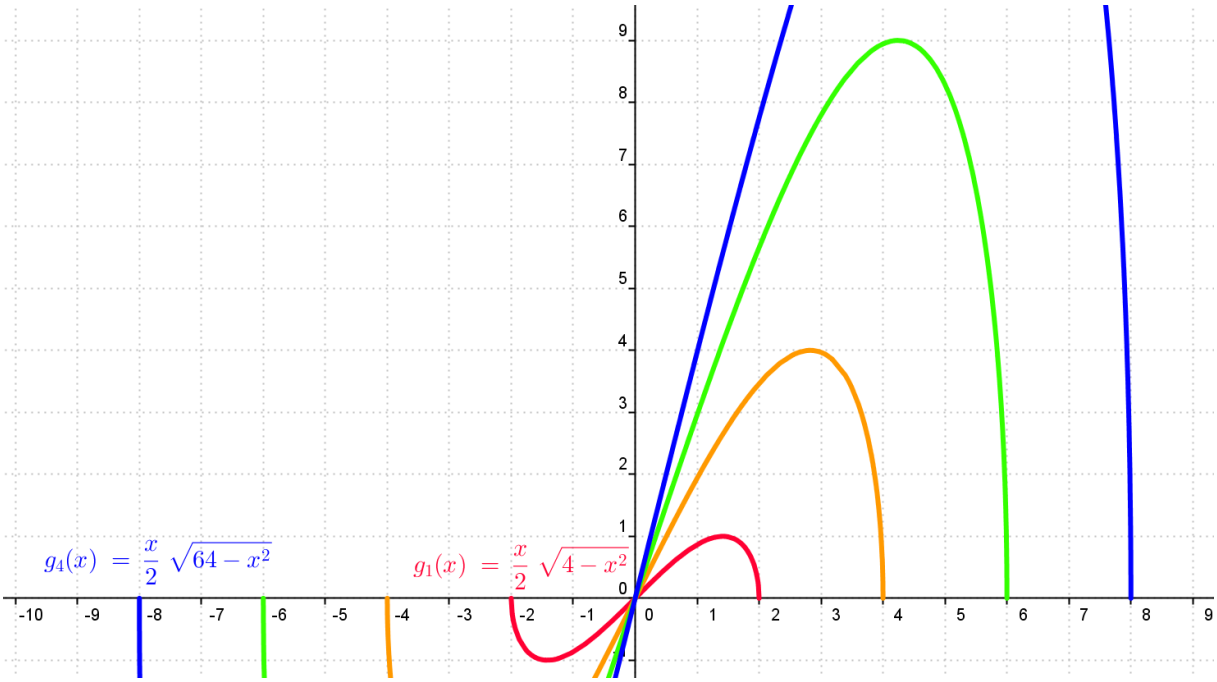
Általánosan: az $f(x) = \frac{c}{2} \cdot x$ lineáris függvénynek az $\left]0, \frac{c}{2}\right]$ intervallumon a maximuma mindig az intervallum jobb oldali végpontjában lesz, a (nem negatív) c értékétől függetlenül, ez további függvények ábrázolása nélkül is látható.

A $g(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ függvény maximuma $x = \sqrt{2}$ helyen található.



4.5.2. ábra

Ábrázoló programmal a különböző paraméterekre ($c := \{2, 4, 6, 8 \dots\}$) függvénysort is készíthetünk.



4.5.3. ábra

Általánosan: A rajz alapján is lehet sejteni, hogy a c paraméter megválasztása és a g(x) függvény maximumhelye között lesz összefüggés. 10. osztályos tudással ezt az összefüggést nehéz megkeresni, de a helyességét belátni mindenképpen lehet. A $g(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{c^2 - x^2}$ függvénynek az $]0, c[$ intervallumon $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c$ helyen lesz maximuma, és a maximum értéke:

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} c\right)}{2} \cdot \sqrt{c^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} c\right)^2} = \frac{c}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{c^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{c^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{c^2}{4}$$

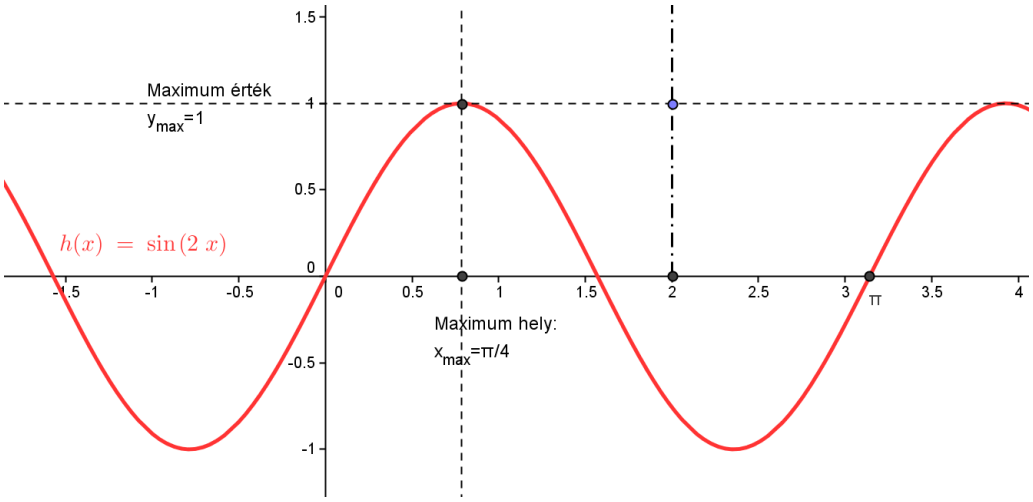
A fenti állítás nem csak algebrai úton indokolható, ez a függvénysor minden elemére igazolható szerkesztéssel is. Minden x esetén a $c = \sqrt{2} \cdot x$-et kell megszerkesztenünk, ami az x oldalhosszúságú négyzet átlója lesz.

4.5.4. ábra

A $h(x)$ függvény maximuma az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen található, itt az értéke:

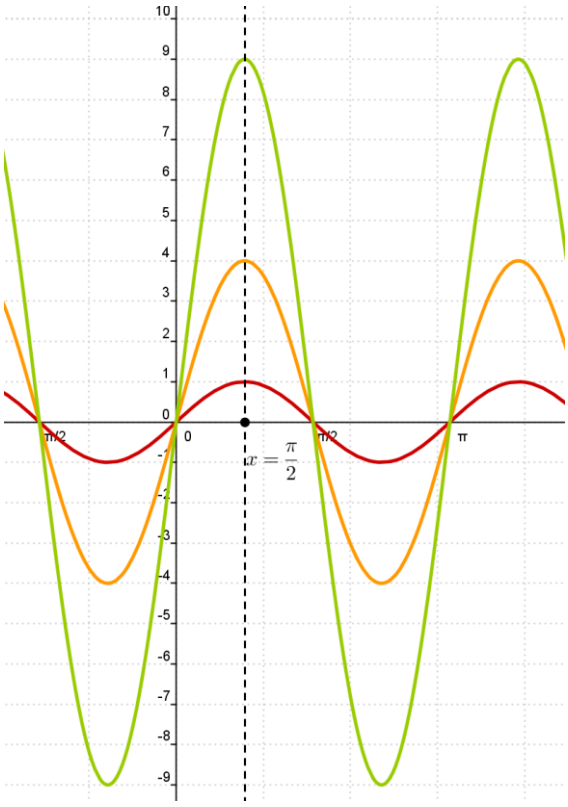
$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Természetesen figyelembe kell venni, hogy az x változó a háromszög egyik hegyesszöge, ezért csak az $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén kerestük a lokális maximumot.



4.5.5. ábra

Általánosan: $h(x) = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2x$ függvény maximuma a $]0, c[$ intervallumon –a c paraméter értékétől függetlenül –az $x = \frac{\pi}{4}$ helyeken található. Ezt az alábbi ábra szemlélteti:



4.5.6. ábra $c = \{2,4,6\}$ paraméterekre kapott függvények. A tengelyek megjelenítési aránya 1:2

4.7. Hetedik megoldás

A felsőoktatásban, és középiskolákban emelt szinten az előző pontban felsorolt függvények lokális szélsőértékeit sok esetben egyszerűbb a függvények differenciálásával megkeresni, mint a függvények ábrázolásával. Az x változó szerint felírt, (legalább n-szer) differenciálható$T(x)$ függvénynek lokális szélsőértéke csak akkor lehet $x = x_0$ helyen, ha a $T'(x_0) = 0$; ez a szélsőérték szükséges feltétele. Elégséges feltétel, ha és létezik olyan páros n, hogy a $T(x)$ függvénynek n-edrendű deriváltja nem nulla az $x = x_0$ helyen, ugyanakkor az n-nél alacsonyabb rendű deriváltak helyettesítési értékének mindegyike szintén nulla. Látni fogjuk, hogy most elég lesz csak a második deriváltakig eljutnunk.

Mivel a 4.1., 4.2. és a 4.4. pontban felírt függvények esetén is ugyanazt az eljárást kell követni, ezért most csak az egyik megoldást írom le. Azért itt meg kell jegyezni, hogy az elemi megoldás igen egyszerű, csak a teljesség kedvéért szerepel itt a differenciál-számítással történő megoldás is.

A 4.4. pontban felírt függvényre: $T(x) = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2x$ a függvény, és a fenti eljárást használva először differenciáljuk.

Az első derivált:

$T'(x) = \left(\frac{c^2}{4}\right) \cdot (\cos 2x) \cdot 2 = \frac{c^2}{2} \cdot \cos 2x.$

Keressük az olyan $x = x_0$ helyeket, ahol ez a függvény $T'(x_0) = 0$ helyettesítési értékeket vesz fel.

$$\frac{c^2}{2} \cdot \cos 2x_0 = 0 \xLeftrightarrow{mivel\ c \neq 0} \cos 2x_0 = 0 \xRightarrow{x\ csak\ hegyesszög\ lehet} 2x_0 = \frac{\pi}{2}\ és\ x_0 = \frac{\pi}{4}$$

Keressük meg a második derivált értékét ugyanezen a helyen!

$T''(x) = \left(\frac{c^2}{2}\right) \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = (-c^2) \cdot \sin 2x.$

$T''\left(x_0 = \frac{\pi}{4}\right) = (-c^2) \cdot \sin\frac{\pi}{2} = (-c^2) \cdot 1 = -c^2 < 0$; mert minden nem nulla c esetén $c^2 > 0$.

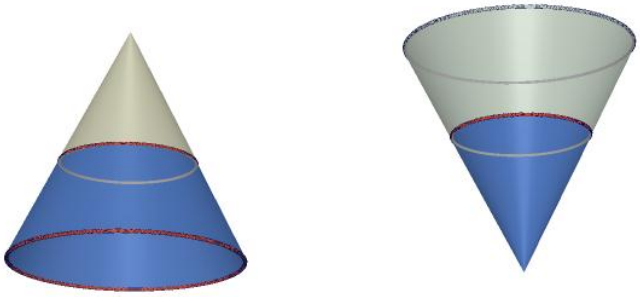
Válasz: a $T(x)$ függvénynek az$x_0 = \frac{\pi}{4}$helyen lokális maximuma lesz. Ennek az értéke:

$$T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{c^2}{4}\right) \cdot \left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{c^2}{4}\right) \cdot 1 = \frac{c^2}{4}$$

Miért választottam a feladatot? A szélsőérték-problémák először jellemzően a tizedikes anyagban szerepelnek, a másodfokú függvények és egyenletek kapcsán. Szélsőérték-feladatokat ekkor ugyanis alapvetően kétféle módszerrel oldunk meg: függvényekkel, vagy nevezetes egyenlőtlenségekkel. A középiskolai anyagban szereplő függvények közül a tanulók legelőször az abszolút-érték függvénnyel, és a másodfokú függvénnyel találkoznak, amelyeknek van szélsőértékük. E kettő közül gyakorlati szempontból a másodfokú függvény a jelentősebb, hiszen a geometriában és a hétköznapokban gyakran találkozunk olyan jelenségekkel, amelyet másodfokú függvények segítségével tudunk leírni. Az egyik középiskolai módszer lényege tehát, hogy a feladatban szereplő mennyiség szélsőértékét úgy keressük meg, hogy egy változó szerint felírt függvényének keressük meg a szélsőértékét. Ebben a feladatban erre három különböző példát is láthatunk. Ugyanakkor itt használható a másik módszer is: találunk nevezetes egyenlőtlenséget is, amelyekkel a feladat megoldható.

5. Geometria feladat: térfogatszámítás

Feladat: ***Egy forgáskúpot a térfogata feléig megtöltöttünk vízzel, majd a csúcsára állítottuk. Milyen magasan volt a kúpban a víz álló, és milyen magasan fordított helyzetben?***[22]



6. ábra

Milyen korosztálynak ajánlanám a feladatot?

Mivel eleve egy 8. osztályosok számára meghirdetett versenyfeladatról van szó, azt mondanám, szakkörön, tagozaton már általános iskolában, de tanórai keretek között legelőször 10. osztályban venném elő a feladatot, és mint ki fog derülni, egészen a felsőoktatási tartalmakig vezet a feladat.

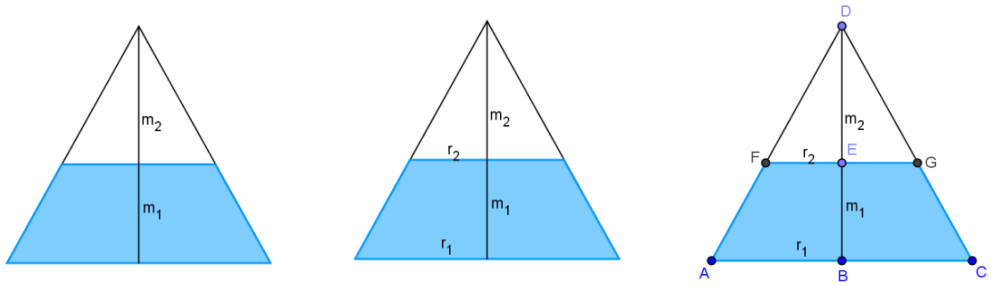
5.1. Első megoldás

Ehhez a megoldáshoz elegendő ismernünk a forgáskúp térfogatának képletét, és azt a tényt, hogy hasonló idomok (síkidomok, testek) megfelelő szakaszai között felírt hányados állandó. Ez aλ arányszám lesz a hasonlóság aránya. Ismernünk kell a $x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$ összefüggést.

5.1.1.Legyen a forgáskúp magassága m, és ezt a magasságot a kúpban lévő folyadék felszíne két részre osztja: egy m_1 magasságú csonkakúpra, amelyben először a folyadék található, és egy m_2 magasságú kisebb méretű forgáskúpra,

[22]***Varga Tamás matematikai verseny 1993/94. 8. osztályosoknak meghirdetett feladatok közül II. kategória 1. feladata***

amelyben eredetileg nincs folyadék. Ezekre teljesül: $m = m_1 + m_2$. Az alábbi rajzok oldalnézetű keresztmetszetet mutatnak.



5.1.1. ábra

A keresztmetszeti rajzon látható r_1 és r_2 szakaszok a kúpok alapköreinek sugarai. Az $ACD\Delta \sim FGD\Delta$ hasonlóság miatt felírhatjuk:

$$r_1 : r_2 = (m_1 + m_2) : m_2 = m : m_2$$

5.1.2. A forgáskúp térfogata: V, a csonkakúpé V_1, a kisebb kúpé V_2. Összefüggések: a szövegből tudjuk, a következő összefüggéseket:

$$V = V_1 + V_2$$

5.1.4. Az egyenes körkúp térfogatát a következő képlet szolgáltatja:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3}$$

Ha az r az alapkör sugara, m pedig a kúp magassága.

Fejezzük ki az ismert térfogatokat! A 6.1.4. képletet alkalmazva egyrészt:

$$V = \frac{r_1^2 \cdot \pi \cdot m}{3}$$

$$V_1 = \frac{r_2^2 \cdot \pi \cdot m_2}{3}$$

A V_2 térfogatot kétféleképpen írjuk fel:a 5.1.3. állítást ezekkel kiegészítve kapjuk:

$$V_2 = \frac{V}{2} = \frac{r_1^2 \cdot \pi \cdot m}{6}$$

és az 5.1.2. állítást kiegészítve kapjuk:

$$V_2 = V - V_1 = \frac{r_1^2 \pi m}{3} - \frac{r_2^2 \pi m_2}{3} = \frac{(r_1^2 m - r_2^2 m_2)\pi}{3}$$

A különbözőképpen kifejezett V_2térfogatokat egyenlővé tehetjük:

$$\frac{r_1^2 \pi m}{6} = \frac{(r_1^2 m - r_2^2 m_2)\pi}{3}$$

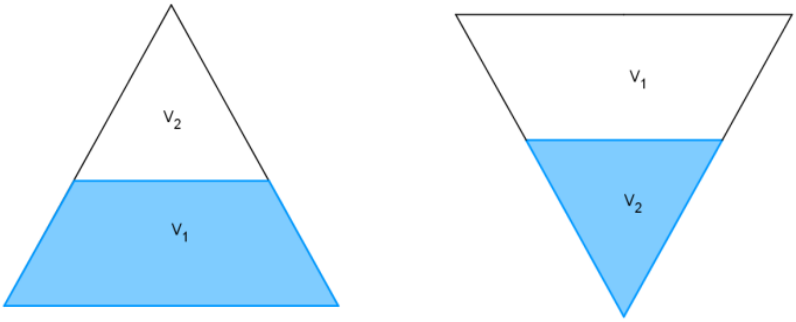
Rendezve az egyenlőséget:

$$2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \sqrt[3]{2}$$

Az első esetben tehát a víz magassága:

$$m_1 = m - m_2 = m - \frac{m}{\sqrt[3]{2}} = m\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2}} = m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

5.1.5. A második esetben, miután megfordítottuk a kúpot, a víz helye a V_1 és V_2 térfogati részben felcserélődik. Mivel a víz a kúp térfogatának felét töltötte ki, és $\frac{V}{2} = V_1 = V_2$, ezért most az előbb V_2 névvel nevezett térfogati részben foglal helyet.



5.1.5. ábra

5.1.6. **A válasz:**<u>az első esetben a víz magassága tehát</u>

$$m_1 = m\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$$

<u>a második esetben a víz magassága</u>

$$m_2 = \frac{m}{\sqrt[3]{2}}$$

Megjegyzés: A megoldás szépsége, hogy elég a síkmetszetben szemléltetnünk,

még akkor is, ha egyébként térfogatot számolunk. Az n-edik gyökvonás jellegzetesen 10. évfolyamos probléma, de szakkörön, fakultáción, vagy emelt szintű osztályokban előkerülhet korábban is, akár 8-9. évfolyamon is.

6.2. Második megoldás:

Ehhez a megoldáshoz tudni kell azt is, hogy λ arányú hasonlóság esetén a hasonló testek térfogatának aránya λ^3. (Ez szintén 10. osztályban előkerülő geometriai probléma.) Az első esetben a jelölés szerinti hasonló kúpok magasságának aránya legyen (ld.: 5.1.1.)

$$\frac{m_2}{m} := \lambda$$

A térfogatok arányára vonatkozó összefüggést felhasználva:

$$\frac{V_2}{V} = \lambda^3 = \left(\frac{m_2}{m}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

Ebből már következik:

$$\left(\frac{m}{m_2}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{m}{m_2} = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow m_2 = \frac{m}{\sqrt[3]{2}}$$

és az 5.1.2. alapján:

$$m_1 = m - m_2 = m - \frac{m}{\sqrt[3]{2}} = m\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$$

A második esetben a 6.1.5. indoklás miatt éppen m_2 magasságban fog állni a víz.

6.3. Harmadik megoldás:

Inkább a felsőoktatásban vagy 12. évfolyamon, matematika fakultáción használható módszer, amely ráadásul nagyon rövid. Meg kell jegyezni, hogy ez gyakorlatilag a térfogatképlet alkalmazását jelenti csupán az első megoldáshoz képest.

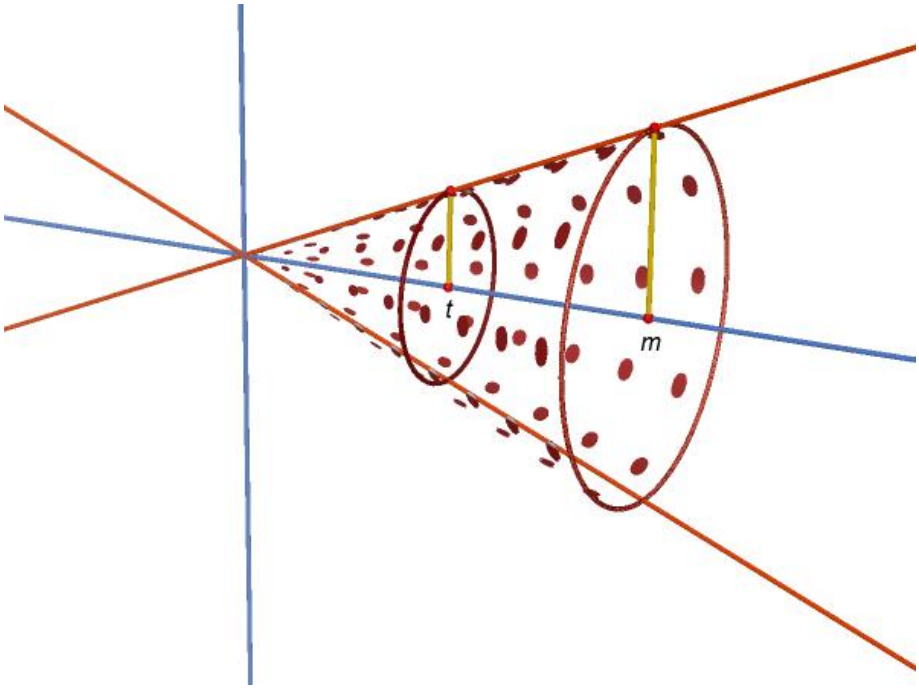
Vegyünk egy koordináta rendszerben egy $f(x) = k \cdot x$ egyenletű egyenest! Forgassuk meg x tengely körül az egyenest, és határozzunk meg úgy $0 < t < m$ határokat, hogy a forgástest térfogata $[0; t]$ intervallumban és $[t, m]$ intervallumban egyenlő legyen!

A forgástest térfogata, ha a forgástestet az $f(x)$ alakzat az $[a, b]$ intervallumba eső szakaszátx

tengely körüli megforgatásával nyertük:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Az $f(x)$ alakzat egyenletét négyzetre emelve: $f^2(x) = k^2x^2$



6.3. ábra

A forgáskúp térfogata tehát:

$$V = \pi \int_a^b (k^2x^2)dx = \pi k^2 \int_a^b (x^2)dx = \pi k^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

Az a, b határok behelyettesítésével:

$$V = \pi k^2 \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right)$$

Most már csak a határok megválasztásáról szól a feladat. Az ábra alapján ezt is hamar megtehetjük. A térfogatokat felírva a határokkal, ahol a $t \geq 0$ valós paraméter

$$V = \pi k^2 \left(\frac{m^3 - 0^3}{3}\right) = \pi k^2 \left(\frac{m^3}{3}\right)$$

$$V_2 = \pi k^2 \left(\frac{m^3 - t^3}{3}\right)$$

$$V_1 = \pi k^3 \left(\frac{t^3 - 0^3}{3}\right) = \pi k^2 \left(\frac{t^3}{3}\right)$$

A fenti három térfogatképletből már az összes keresett adatot levezethetjük:

$$V_1 = V_2$$

$$\pi k^2 \left(\frac{t^3}{3}\right) = \pi k^2 \left(\frac{m^3 - t^3}{3}\right)$$

$$\frac{m}{\sqrt[3]{2}} = t$$

Az 5.1.5. pont indoklása szerint éppen ilyen $m_2 = t$ magasságban állt másodszor a víz a kúp belsejében. Az m_1 magasságot már ebből egyszerű kivonással elvégezhetjük, hiszen

$$m_1 = m - m_2 = m - t$$

Miért tetszik a feladat? Az első megoldás során geometriai problémát oldottunk meg algebrai eszközökkel. Ez előkészíti azt a szemléletet, ami egyeuklidészi szerkesztéssel megoldandó feladattól – a déloszi problémától – az algebrai testbővítésekhez vezetett. Azt már középiskolában is tapasztaljuk, hogy a hosszúság és a terület között másodfokú, a hosszúság és a térfogat között harmadfokú összefüggés áll fenn. Azt is tapasztaljuk, hogy hasonló síkidomok területének aránya között négyzetes, hasonló testek térfogatának aránya között köbös összefüggés áll fenn.

Miért választottam a feladatot? Az első megoldásban középiskolai algebrai eszközökkel szerezhettünk tapasztalatot arról, hogy a hosszúság és a térfogat között valamiféle „harmadfokú” kapcsolat áll fenn, és amelyet a harmadik hatványra emelés, illetve a köbgyökvonás segítségével kezelhetünk. A második megoldás eleve a testek hasonlóságára épül.

10. évfolyamon aktuális téma a köbgyökvonás, és a hasonlóság is. Mivel a térgeometria 12. évfolyamon fordul elő középiskolában, az alsóbb évfolyamokon könnyen elfelejtődnek a felszín és térfogatszámítás ismeretei, amelyeket még általános iskolában tanultak a tanulók.

6. Geometria feladat sok megoldással – Euler-tétel

Feladat: ***Az ABCD trapéz AC átlója 12, a BD átlója 9 egység, átlói merőlegesek egymásra. Tudjuk, hogy $|AB| \cdot |CD| = 50$. Határozzuk meg az alábbi kifejezés értékét!***[23]

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$$

6.1. Első megoldás[24]

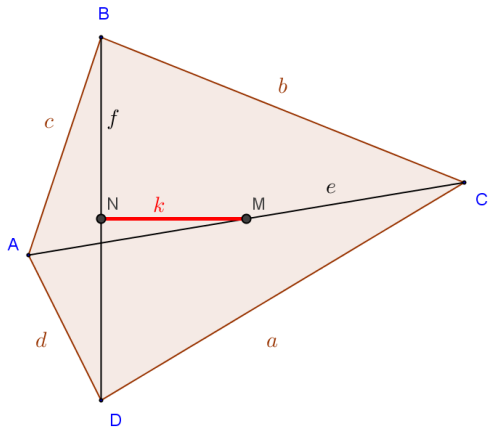
A feladatot megoldhatjuk Euler tételének[25] felhasználásával. Ez a legkézenfekvőbb, hiszen a feladat általánosításával éppen Euler négyszögekre vonatkozó tételét kapjuk.

Euler tétele *ABDC* négyszög átlói: *AC*, ennek felezőpontja *M*, és *BD*, ennek felezőpontja N. Ekkor teljesül a következő egyenlőség:

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4 \cdot |MN|^2$$

más jelölésekkel:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4 \cdot k^2$$



6.1. ábra

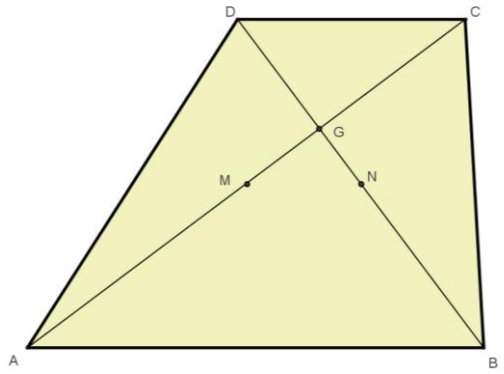
[23] ***A XIV. Nemzetközi Magyar Matematikai Verseny (2005. március 20-23.) 9. osztályosok számára meghirdetett 5. feladata. (A feladat kitűzője Kiss Sándor Nyíregyháza.)***

[24] ***A feladat szerepelt már Dr. Kántor Sándorné Dr. Varga Tünde: Gondolatok egy versenyfeladattal kapcsolatban című írásában (Nyitott Könyv Könyvműhely, 2007.) Ebben a cikkben említ megoldási ötleteket, de a megoldásokat nem közli részletesen, ezért én megteszem.***

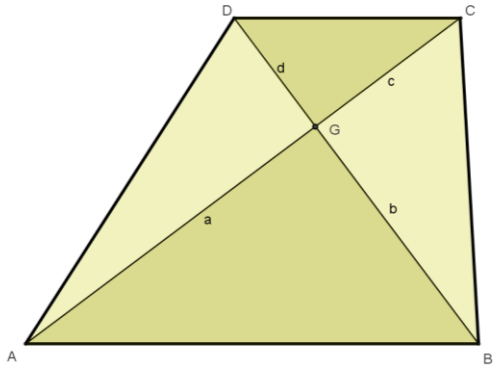
[25] ***Euler tétele a magyar középfokú matematikaoktatásban nem tananyag, Erdélyben azonban igen. A tétel bizonyítását a Mellékletben közlöm.***

6.1.1. Euler tételét alkalmazva: *ABDC* négyszög – mellesleg most ez a négyszög trapéz – átlói: *AC*, ennek felezőpontja *M*, és *BD*, ennek felezőpontja *N*. Ekkor teljesül a következő egyenlőség:

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4 \cdot |MN|^2$$



6.1.1. ábra



6.1.2. ábra

A feladat megoldásához az $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$ kifejezés értékét kell meghatároznunk. Az Euler tételt alkalmazva

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4 \cdot |MN|^2 = (12)^2 + (9)^2 + 4|MN|^2$$

Mivel ABCD négyszög trapéz, jelen esetben teljesül: $|MN| = \frac{1}{2}\big||AB| - |DC|\big|$.

Az *MN* szakaszhossz helyére ez behelyettesíthető:

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 144 + 81 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (|AB|^2 + |CD|^2 - 2|AB| \cdot |CD|)$$

Most ki tudjuk használni a feladatban megadott, $|AB| \cdot |CD| = 50$ feltételt.

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 225 + |AB|^2 + |CD|^2 - 100$$

Ha az előző állítást, mint egyenletet rendezzük, akkor a következő állítást kapjuk:

$$|BC|^2 + |DA|^2 = 125$$

6.1.2. Nevezzük el az AC átlón a metszéspont által létrehozott szakaszokat a és c szakaszoknak, valamint aBD átlón keletkezett szakaszokat b és d szakaszoknak! A Pitagorasz tételt alkalmazva $ABC\measuredangle$ derékszögű háromszögre:

$$|AB|^2 = a^2 + b^2$$

Ugyanígy a $DCG\measuredangle$-re:

$$|CD|^2 = c^2 + d^2$$

6.1.3. A fenti két egyenlőség megfelelő oldalait összeadva:

$$|AB|^2 + |CD|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |BC|^2 + |DA|^2 = 125$$

Hiszen $|BC|^2 = b^2 + c^2$ és $|AD|^2 = a^2 + d^2$ szintén a Pitagorasz-tétel miatt. Ezt az összefüggést az Euler-tételtől függetlenül kaptuk meg, ezért a többi megoldás során is fel fogjuk használni.

A feladat megoldása tehát:

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2 \cdot (|BC|^2 + |DA|^2) = 2 \cdot 125 = 250$$

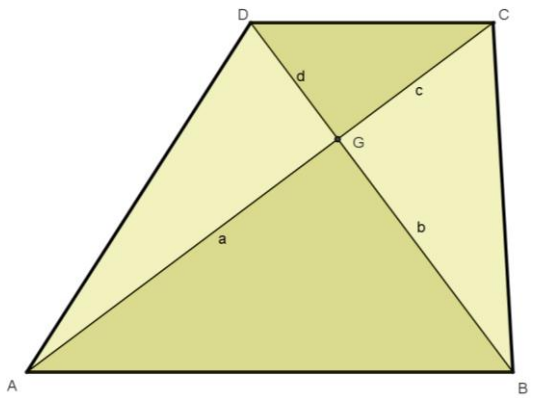
Válasz:<u>a keresett érték: $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 250.$</u>

Megjegyzés: Természetesen a feladatot középiskolában nem így oldjuk meg, már csak az Euler-tétel hiánya miatt is más módszerekre van szükség.

7.2. Második megoldás

A feladatot megoldhatjuk hasonlóság segítségével. Ez a megoldás felel meg a legjobban a 10. évfolyamos követelményeknek. Alkalmazzuk ezen kívül a Pithagorasz-tételt és tudnunk kell egyenletrendszert megoldani.

7.2.1. Vegyük észre, hogy $ABG\measuredangle \cong CDG\measuredangle$!



7.2.1. ábra

6.2.2. Az ábrán látható szakaszokat a, b és c, d betűkkel jelölve a következő arányokat írhatjuk fel: ha a hasonlóság aránya λ, akkor:

$$\begin{cases} |AB| = \lambda \cdot |CD| \\ b = \lambda \cdot d \\ a = \lambda \cdot c \end{cases}$$

Ebből nekünk egyelőre az első egyenlet a fontos, mert a megadott adatokkal együtt a következő egyenletrendszert írhatjuk fel belőle:

$$\begin{cases} |AB| = \lambda \cdot |CD| \\ |AB| \cdot |CD| = 50 \end{cases}$$

A behelyettesítő módszert alkalmazva a fenti egyenletrendszerben a második egyenletben:

$$|AB| \cdot |CD| = (\lambda \cdot |CD|) \cdot |CD| = \lambda \cdot |CD|^2 = 50$$

Majd ennek átrendezéséből a következő kifejezést kapjuk:

$$|CD|^2 = \frac{50}{\lambda}$$

6.2.3. Az $|AB|^2 + |CD|^2$ kifejezést meg fogjuk tudni határozni λ ismeretében, mert

$$|AB|^2 + |CD|^2 = (\lambda \cdot |CD|)^2 + |CD|^2 = \lambda^2 \cdot \frac{50}{\lambda} + \frac{50}{\lambda} = 50 \cdot \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

Az ábra alapján a következő arány is teljesül:

$$\frac{a+c}{a} = \frac{b+d}{b}$$

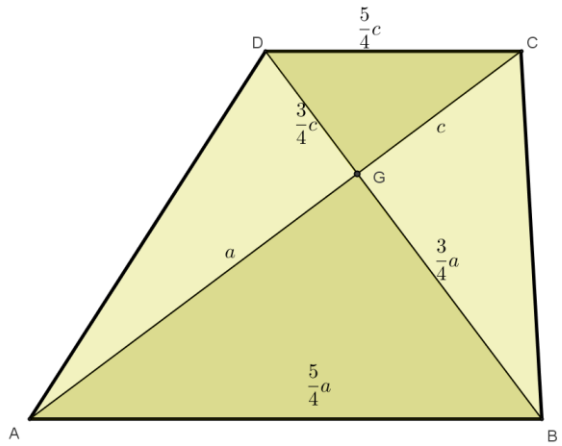
Ez másképpen írva:

$$\frac{12}{a} = \frac{9}{b}$$

Az egyenlőséget átrendezve kapjuk:

$$b = \frac{3}{4}a$$

6.2.4. Készítsük el a következő ábrát:



6.2.4. ábra

Az alapokra felírhatjuk Pithagorasz tételének alkalmazásával:

$$|AB| = \frac{5}{4} \cdot c; \;\; |CD| = \frac{5}{4} \cdot a$$

$$|AB| \cdot |CD| = \frac{5}{4} c \cdot \frac{5}{4} a = 50 \Leftrightarrow a \cdot c = 32$$

Ha a-ra és c-re egyenletrendszert írunk fel:

$$\begin{cases} a + c = 12 \\ a \cdot c = 32 \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai:

$$\begin{cases} c_1 = 4 \\ a_1 = 8 \end{cases} \begin{cases} c_2 = 8 \\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Ebből az első megoldást kerestük, ha $a > c$ esetet feltételezzük, ahol a 6.2.2. egyenletrendszer alapján a $\lambda = 2$. A $c > a$ esetben ugyanezt a megoldást kapnánk.

Ezt a $\lambda = 2$ értéket 6.2.3-ba helyettesítve:

$$|AB|^2 + |CD|^2 = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \cdot 50 = 125$$

6.2.5. Ha az eredeti feladat által meghatározott kifejezés értékét keressük, akkor a 6.1.3. állítást is felhasználjuk:

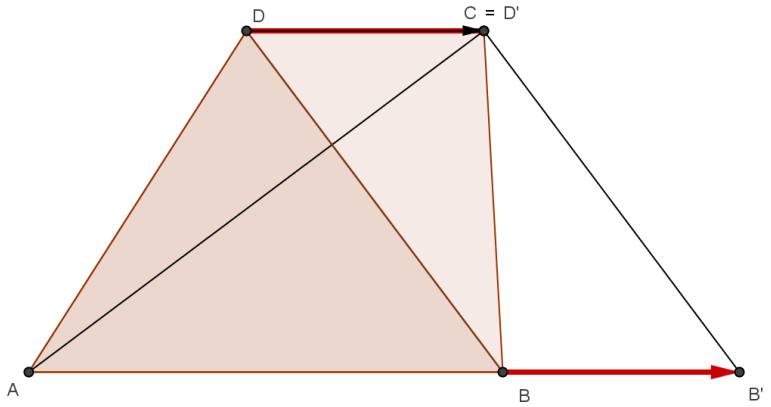
$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2 \cdot (|AB|^2 + |CD|^2) = 2 \cdot 125 = 250$$

6.3. Harmadik megoldás

Ez a megoldás geometriai transzformáció segítségével történik, ami szintén 10. évfolyamon aktuális. A feladatmegoldás során alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, a másodfokú egyenletmegoldó képletet, és meg kell oldanunk egy egyenletrendszert.

A $\overrightarrow{DC}$ vektorral toljuk el a DB szakaszt, amelynek képe a $D'B'$ szakasz. Mivel az átlók merőlegesek egymásra, az $ACB' \measuredangle = 90°$. Alkalmazzuk a Pitagorasz tételt:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = (12)^2 + (9)^2 = 144 + 81 = 225 = (15)^2 \Rightarrow AB = 15$$



6.3. ábra

Az eltolás miatt a $DC = BB'$. Felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} |AB| \cdot |CD| = 50 \\ |AB| + |CD| = 15 \end{cases}$$

A második egyenletből kifejezve $|CD| = 15 - |AB|$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve:

$$|AB| \cdot (15 - |AB|) = 50$$

Az $|AB| = x$ helyettesítéssel felírható a következő másodfokú egyenlet:

$$x^2 - 15x + 50 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = 10$; $x_2 = 5$ amiből az $x_1 = |AB| = 10 \Rightarrow y_1 = |CD| = 5$ megoldás teljesülhet.

A feladat megoldása – alkalmazva a 6.1.3. egyenlőséget:

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2 \cdot (|AB|^2 + |CD|^2) = 2 \cdot (100 + 25) = 250$$

6.4. Negyedik megoldás

Kiegészítésként közlöm a feladat koordinátageometriai (vagyis analitikus geometriai) jellegű megoldását. Ez a megoldás 11. évfolyamon ajánlott, amikor a tanulók ismerik az egyenes és a kör egyenletét. Felhasználjuk ezen kívül a Thálesz-tételt és a Pitagorasz-tételt.

Helyezzük el a trapézt úgy a koordináta rendszerben, hogy az átlói a tengelyekre essenek, és az átlók metszéspontja az origóba! (Ld.: 6.4. ábra.) Az ábrából könnyen adódik, hogy a csúcspontok koordinátái:

$$A(0; -a);\ B(b; 0);\ C(0; c);\ D(-d; 0)$$

Az A és B pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$y = \frac{a}{b}x - a$$

Ugyanígy aC és D pontokon átmenő egyenes egyenlete:

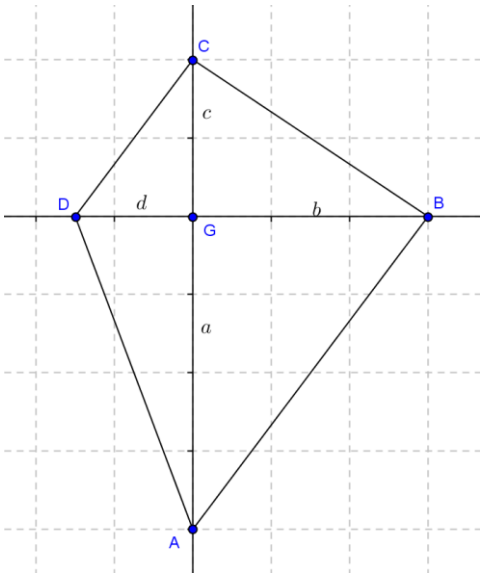
$$y = \frac{c}{d}x + c$$

Mivel a két egyenes párhuzamos, így egyenlő a meredekségük. (Ez az arány írható fel hasonlósággal is, ld. 6.2. megoldás)

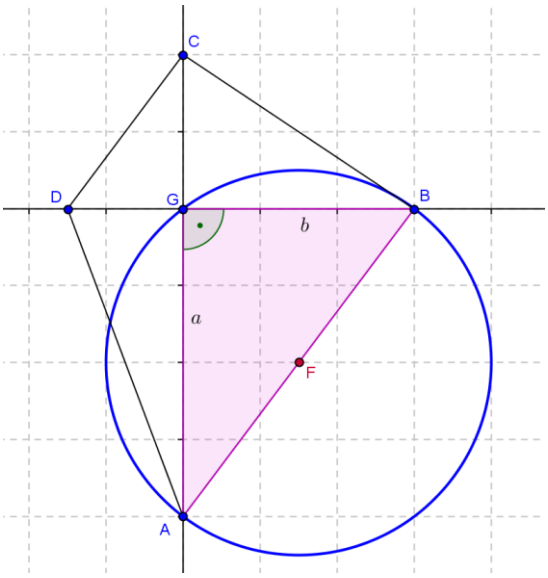
$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

A $c = 12 - a$ és $d = 9 - b$ miatt:

$$\frac{12 - a}{9 - b} = \frac{a}{b}$$



6.4.1. ábra



6.4.2.ábra

Így megkapjuk a két paraméter számszerű arányát.

$$a : b = 4 : 3$$

Most már az a paraméter segítségével minden pont koordinátáját megadhatjuk:

$$A(0; -a); B\left(\frac{3}{4}a; 0\right); C(0; 12 - a); D\left(9 - \frac{3}{4}a; 0\right)$$

Az AB szakasz felezőpontja:

$$F\left(\frac{3}{8}a; -\frac{a}{2}\right)$$

Az F középpontú r sugarú kör egyenlete:

$$\left(x + \frac{3}{8}a\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = r^2$$

Tudjuk, hogy a kör átmegy az origón, mert az átlók merőlegesen metszik egymást, tehát az $|AB|$ szakasz fölé emelt Thálesz körön rajta lesz az átlók metszéspontja is. Az $x = 0; y = 0$ helyettesítéssel a köregyenletből azt kapjuk:

$$\left(\frac{3}{8}a\right)^2 + \left(\frac{4}{8}a\right)^2 = \frac{25}{64}a^2 = r^2 \Rightarrow r = \frac{5}{8}a \Rightarrow 2r = |AB| = \frac{5}{4}a$$

Ugyanígy a CD szakasz felezőpontja:

$$T\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{8}a; 6 - \frac{a}{2}\right)$$

A T középpontú, s sugarú kör egyenlete:

$$\left(x - \frac{9}{2} + \frac{3}{8}a\right)^2 + \left(y - 6 + \frac{a}{2}\right)^2 = s^2$$

A $P(0; 0)$ pontra a következő eredményt kapjuk:

$$s = \frac{5}{2}\left(\frac{a}{2} - 3\right)$$

$$2s = |CD| = 5\left(\frac{a}{2} - 3\right)$$

Mivel $|AB| \cdot |CD| = 50$ ezért:

$$\frac{5}{4}a \cdot 5\left(\frac{a}{2} - 3\right) = 50$$

Az egyenletet átrendezve:

$$a^2 - 6a - 16 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldásával megkapjuk, hogy

$$a = 8; b = 6; c = 4; d = 3;\ |AB| = 10 \text{ és } |CD| = 5$$

Ebből már egyszerű helyettesítéssel

$$|AB|^2 + |CD|^2 = 10^2 + 5^2 = 125$$

és a 6.2.5. pont felhasználásával már adódik az eredmény.

Mikor és hogyan adnám fel a feladatot? Mindenképpen 10. évfolyamon, a benne szereplő matematikai tartalmak miatt. Az elemi geometriai úton és a vektorok segítségével adott megoldásokat össze is lehet vetni. Jól jöhet a feladat szakkörön, fakultáción, emelt szintű, tagozatos osztályban, ha meg akarunk ismerkedni az Euler-tétellel, és ekkor már az összes megoldási mód alkalmazható.

7. Geometriai feladat sok megoldással – „Ismételjük a geometriát egy feladaton keresztül.”

Feladat: az ABC hegyesszögű háromszög C-nél levő szöge 45°. Az M pont a háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy $CM = AB$ teljesül![26]

Lackó László sok megoldásos geometria feladata (19 különböző megoldást gyűjtött össze) alkalmas a középiskolai geometria tananyag teljes körű átismétlésére. A Fazekas-portálon megjelent anyagának ezt a címet adta: „Ismételjük a geometriát egy feladaton keresztül!”.A mi céljainknak ez annyiban mindenképpen megfelel, hogy tizennégy feladatmegoldással már a tizedik osztályos tananyag ismeretével is elboldogulunk.[27]

Először olyan megoldások következnek, amelyekben csak egybevágósági transzformációkat alkalmazunk, vagy szögek és szakaszhosszak egybevágóságát vizsgáltuk. A megoldások minden lépése akár 9. évfolyamon is elvégezhető, de elég összetettek ahhoz, hogy tizedik osztályban foglalkozzunk a feladattal. Továbbá azért is érdemesebb 10. évfolyamon foglalkozni a feladattal, mert így több megoldás is összehasonlítható.

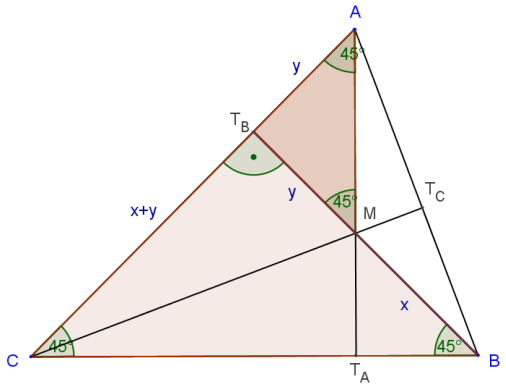
7.1. Első megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz?A háromszög belső szögeinek összege 180˚, az egyenlő szárú háromszög szimmetrikus, háromszögek egybevágóságának alapesetei.

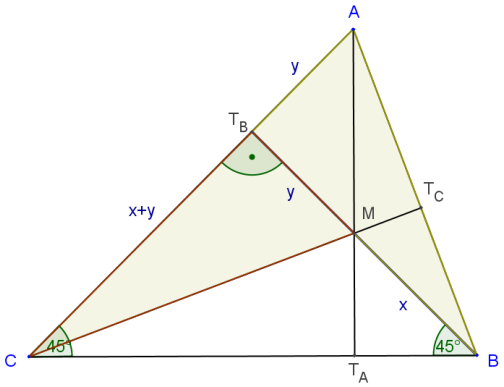
A megoldás teljes mértékben a háromszögek egybevágóságára épül, és a feladat elemi úton megoldható. A feladat fejleszti a térlátást és a problémamegoldó

[26] ***A feladat és megoldásai megtalálható:***
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Laczko_Laszlo/geoism/geoism.html
[27] ***A szerző által publikált megoldásoknak eredetileg más a sorrendje. Szükségét éreztem azonban a sorrend megváltoztatásának, méghozzá didaktikai okokból. Az általam megállapított sorrend annak felel meg, ahogy az iskolai oktatásban a feladatmegoldások előkerülhetnek.***

képességet: visszafelé gondolkozva kell elindulnunk, onnan, hogy melyik két szakasz egyenlőségét kell bizonyítanunk.



7.1.1. ábra



7.1.2. ábra

Az első megoldás menete[28] AT_A pont legyen az A csúcshoz tartozó magasság, T_B pont a B csúcshoz tartozó magasság csúcspontja. A BM szakasz hossza legyen x, az MT_B szakaszé y.

- 7.1.1. A rajz alapján látjuk: $CAT_A\measuredangle$ háromszög derékszögű háromszög, és egyenlő szárú is, mert$T_ACA\measuredangle = 45° \Rightarrow CAT_A\measuredangle = 45°$.
- A $BT_BC\measuredangle$ is derékszögű egyenlő szárú háromszög. Ezért CT_B hossza $x + y$.
- Az $AT_BM\measuredangle$háromszög is derékszögű egyenlő szárú háromszög. Ezért $AT_B = y$.
- 7.1.2. A CMT_B és AT_BB háromszögek egybevágók, mert két-két oldaluk és közbezárt szögük egyenlő. Ezért $AB = CM$.

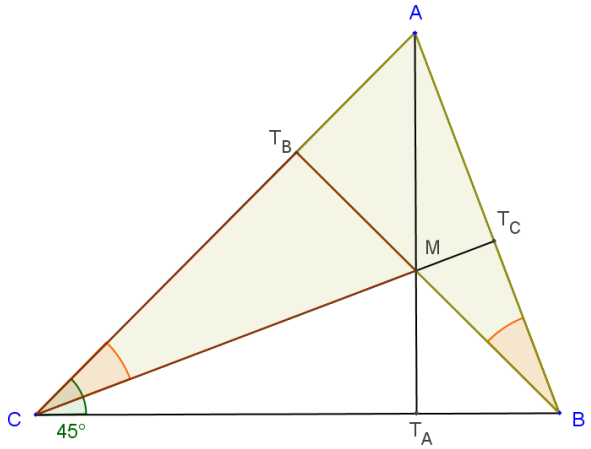
7.2. Második megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Az előző feladathoz is szükséges ismereteken kívül ismerni kell a szögpárok közül a merőleges szárú szögeket. Ez is az előző megoldás mintájára épül, csak más indoklást használunk fel a megoldáshoz.

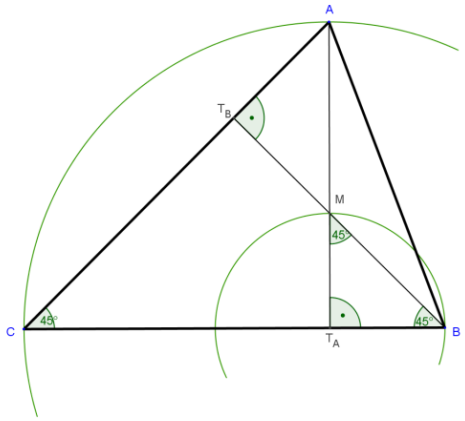
A második megoldás menete[29] Szintén a T_A pont az A csúcshoz tartozó magasság, T_B pont a Bcsúcshoz tartozó magasság csúcspontja.

[28] ***Eredetileg ez az I.megoldás***
[29] ***Eredetileg ez a II. megoldás***

- $T_BBA\measuredangle = ACM\measuredangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek.
- Az AT_BB és a CMT_B háromszögek derékszögűek és még van egy-egy egyenlő szögük, ráadásul aBT_Bés CT_B egymásnak megfelelő oldalak egyenlők.
- A CBT_B háromszög egyenlő szárú derékszögű ezért a két háromszög egybevágó. (Ezt már a 7.1.2.-ben is láttuk, csak ott más volt az indoklás.) Ebből következik, hogy $CM = AB$.



7.2. ábra



7.3. ábra

7.3. Harmadik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Az első feladathoz is szükséges ismereteken kívül ismernünk kell még a pont körüli adott szögű elforgatást, mintegybevágósági transzformációt. Ez a megoldás nagyon egyszerű és nagyon szemléletes. Egy jó ábrán könnyen látni, hogy középpont körüli elforgatásról van szó. A segédvonalak behúzásával az indoklást is könnyen megtalálhatjuk. (7.3. ábra.)

Harmadik megoldás menete[30]

- Legyen M a háromszög magasságpontja, és már 7.1.1. pontban láttuk, hogy
$$CAT_A\measuredangle = CBT_B\measuredangle = BMT_A\measuredangle = 45°$$
- A két szakasz egyenlőségét most úgy bizonyítjuk, hogy találunk olyan pontot, amely körül az egyiket a másikba tudjuk forgatni. Ez a T_A pont, mert T_A körül 90°-os megfelelő irányú elforgatásokkal az AB és a CM szakaszok egymásba vihetők, tehát $AB = CM$.

[30]***Eredetileg ez a XV. megoldás***

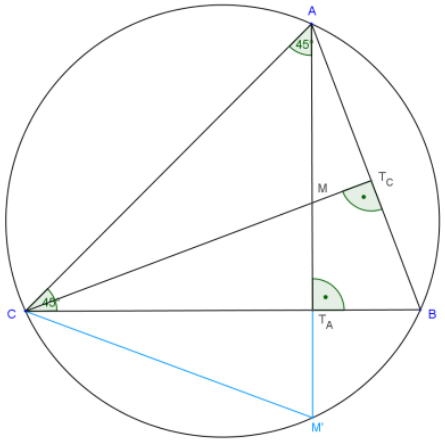
A következő megoldások mindegyike tartalmaz olyan ismeretet, amely miatt már csak a tízedik osztályon lesz csak alkalmazható.

7.4. Negyedik megoldás

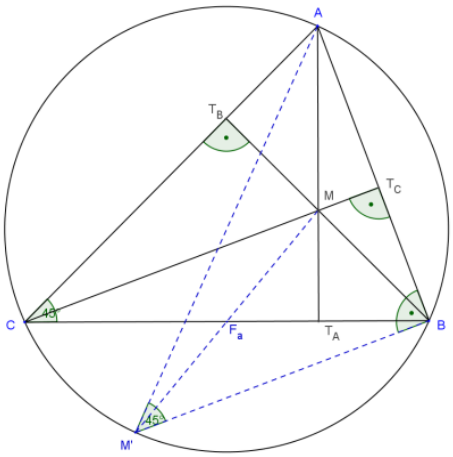
Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Az első feladathoz is szükséges ismereteken kívül ismernünk kell még a tengelyes tükrözést, mint egybevágósági transzformációt, és a kerületi szögek tételét.

A negyedik megoldás menete[31]

- Tükrözzük az M pontot a CB oldalra, a tükörképet M′ jelöli.
- Ismeretes, hogy M′ a háromszög köré írt körön van.
- 7.4.1. CM = CM′ a tükrözés miatt.
- Az AT_AC derékszögű háromszögben $CAT_A\measuredangle = 45°$. (Ld. 7.1.1.)
- 7.4.2. AB = CM′, mert mindkét szakaszhoz 45°-os kerületi szög tartozik.
- Végül a 7.4.1. és a 7.4.2. állításból együtt következik: AB = CM.



7.4. ábra



7.5. ábra

7.5. Ötödik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Éppen ugyanazok az ismeretek, amelyek az előző megoldáshoz.

[31] ***Eredetileg ez a IV. megoldás***

Az ötödik megoldás menete[32]

- 7.5.1. A CM szakaszt aCB oldal (F_a) felezőpontjára tükrözve kapjuk $M'B$ szakaszt.
- M' pont a körülírt körön van.
- Tudjuk, hogy AM' átmérője lesz a körnek, ezért a Thálesz-tétel miatt $M'BA\measuredangle = 90°$.
- $AM'B\measuredangle = 45°$, mert ez egy AB ívhez tartozó kerületi szög.
- 7.5.2. Az $AM'B$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $BM' = AB$.
- Készen is vagyunk, mert a 7.5.2. pontban felírt egyenlőségből és a 7.5.1. pontból következő $CM = M'B$ egyenlőségből a bizonyítani kívánt $AB = CM$ állítást felírjuk.

7.6. Hatodik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Mindent, amit az előző megoldáshoz, ezeken kívül a Thálesz-tételt. A két megoldás egymás variánsai, azzal a különbséggel, hogy a hatodik megoldásban alkalmazunk egy transzformációt: az O középpont körüli elforgatást.

A hatodik megoldás menete[33]

- Tekintsük az ABC háromszöget a köré írt körével, melynek középpontja O pont!
- Az AB szakaszt O pont körül 90°-kal a háromszög körüljárásával ellenkező irányban elforgatjuk.
- Az elforgatás következménye, hogy $BAA' = 90°$, (tehát B elforgatottja B'pont, A elforgatottja A'pontlegyen, és ekkor B' egybeesik A ponttal); ebből pedig a Thálesz-tétel miatt tudjuk, hogy a BA' szakasz átmérő.
- A CM szakasz párhuzamos az $A'B'$ egyenessel, mert mindketten AB szakaszra merőlegesek.
- A $BCA'\measuredangle = 90°$ a Thálesz-tétel miatt.

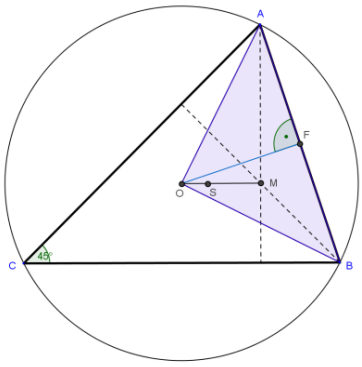
[32] ***Eredetileg ez az V. megoldás***
[33] ***Eredetileg ez a IX. megoldás***

- AzAM szakasz illeszkedik a háromszög magasságvonalára, ami merőleges a BC oldalegyenesre. Ugyancsak BC-re merőleges CA', tehát $CA' \parallel AM$.
- A $B'A'CM$ négyszög paralelogramma, mert szemközti oldalai párhuzamosak, így $CM = A'B' = AB$ teljesül.

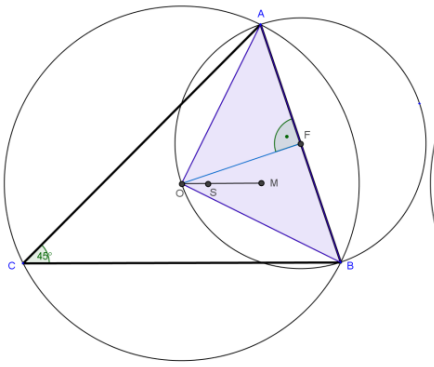
Az utóbbi három megoldás tehát a háromszög köréírható körében keres egyenlő szögeket: függően attól, hogy melyik kerületi szöget figyeljük, a kerületi szögek vagy a Thálesz tételét alkalmazzuk. A most következő feladatmegoldásokban szintén a háromszög köré írható körét használjuk fel, de annak más tulajdonságaira építünk.

7.7. Hetedik megoldás

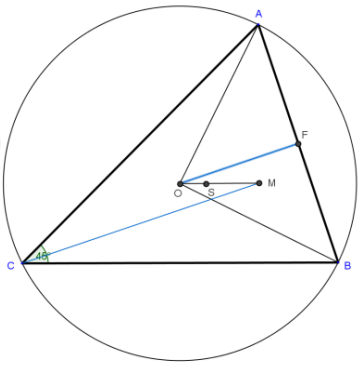
Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz?Ismerni kell kerületi szögek tételét, a Thálesz-tételt, és kell tudni alkalmazni középpontos hasonlósági transzformációt. Szerencsés esetben ismerjük az Euler-egyenest is, ami középiskolában emelt szintű tananyag.



7.7.1. ábra



7.7.2. ábra



7.7.3. ábra

A hetedik megoldás menete[34]Legyen O a háromszög köré írható kör közepe, F az AB oldal felezőpontja, Sa háromszög súlypontja M a háromszög magasságpontja!

- 7.7.2. A kerületi és középponti szögek tétele miatt AOB derékszögű háromszög egyenlő szárú.
- OFaz ABThalész-körének sugara, ABpedig az átmérője, ezért $2 \cdot OF = AB$.

[34]***Eredetileg ez a X. megoldás***

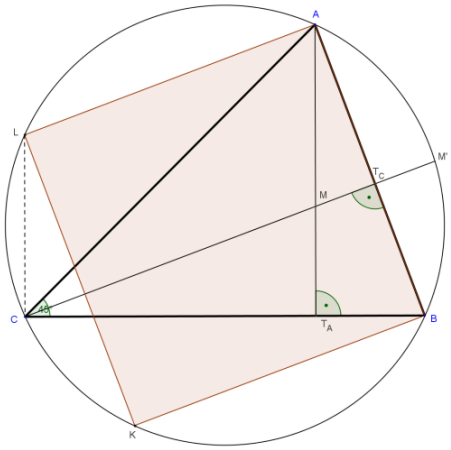
- 7.7.3. Tudjuk, hogy az S pontra vonatkozó $\lambda = -2$-szeres hasonlóság az FO szakaszt a CM szakaszba viszi. Így $CM = 2 \cdot FO = AB$.

7.8. Nyolcadik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Ismerni kell a középponti és kerületi szögek tételét, a húrnégyszögek tulajdonságait, hogy a négyzet oldalai egyelőek és merőlegesen felezik egymást. Ezen kívül az ábrán is látható szimmetriákat használjuk ki.

A nyolcadik megoldás menete[35]

- Tekintsük ABC háromszöget a köré írt körével együtt!
- Az ABhúrhoz 45° kerületi szög tartozik, ezért AB szakasz a körbe írt $ABKL$ négyzet oldalával egyenlő.
- A C pontból induló magasság LK oldalt Tpontban, az AB oldalt T_C pontban, a köré írt kört M' pontban metszi.
- M'az M' magasságpontAB oldalra tükrözött képe.
- A tükrözés és a szimmetriák miatt teljesül: $CT = T_C M' = MT_C$
- A szakaszok egyenlőségéből pedig az következik, hogy: $CM = KB = AB$



7.8. ábra

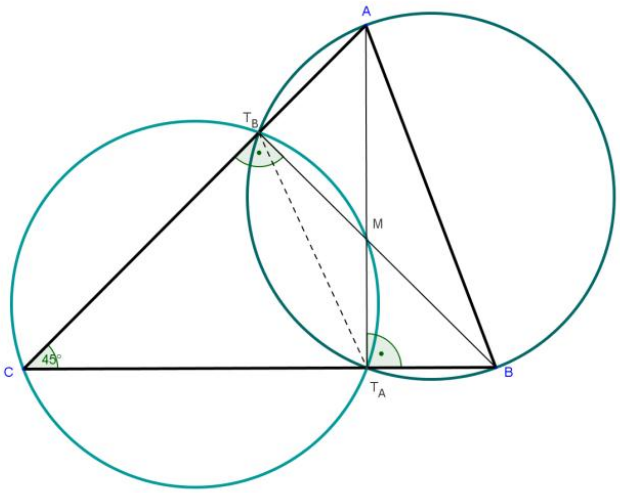
7.9. Kilencedik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Húrnégyszögekre vonatkozó ismereteket, középponti és kerületi szögek tételét, Thálesz-tételt.

[35]***Eredetileg ez a XIV. megoldás***

A kilencedik megoldás menete[36] Az M legyen a háromszög magasságpontja, T_A az A csúcshoz tartozó magasság, T_B a B csúcshoz tartozó magasság csúcspontja, és $CAT_A\measuredangle = 45°$

- AT_BT_ABnégyszög húrnégyszög, CT_AMT_B négyszög húrnégyszög a Thálesz-tétel miatt. Az első körnek az AB szakasz, a másodiknak a CM szakasz az átmérője.
- $T_BT_AA\measuredangle$ a T_BM húr és a T_BA húr kerületi szöge az egyik, illetve a másik körben.
- $T_BAM\measuredangle = T_BAM\measuredangle = 45°$, ezért a $T_BA = T_BM$.
- Egyenlő szakaszok ugyanolyan szögű látóköreinek átmérői egyenlők, ezért $AB = CM$.



7.9.-7.10. ábra

7.10. Tizedik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz?Az előző feladatmegoldáshoz hasonlóan ez is a húrnégyszögekre vonatkozó ismereteket használja fel, mindkét megoldáshoz az alábbi ábra tartozik. A nehézség, hogy most nem a megadott $ABC\measuredangle$ köré írható körével foglalkozunk.

A tizedik megoldás menete[37]Az M legyen a háromszög magasságpontja, T_A az A csúcshoz tartozó magasság, T_B a Bcsúcshoz tartozó magasság csúcspontja, és már tudjuk: $CAT_A\measuredangle = 45°$

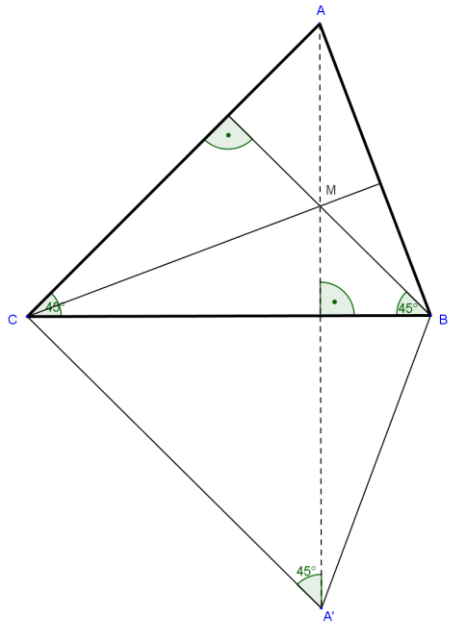
- Az AT_BT_AB négyszög és CT_AMT_B négyszög is húrnégyszög a Thálesz-tétel miatt.

[36]***Eredetileg ez a XVII. megoldás***
[37]***Eredetileg ez a XVI. megoldás***

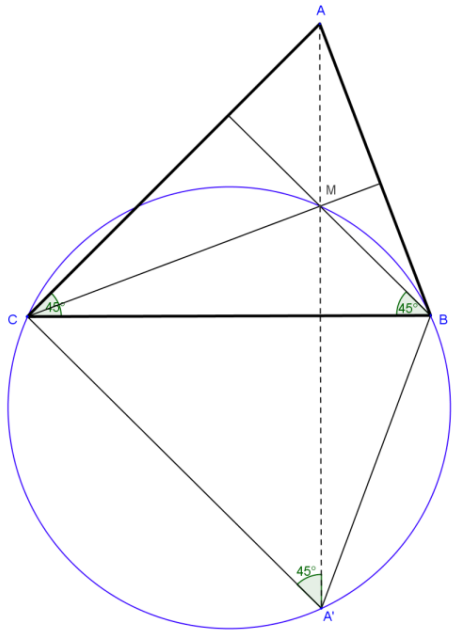
- Az első körnek az AB szakasz, a másodiknak a CM szakasz az átmérője. T_BT_A szakasz a két kör közös húrja, melyhez mindkét körben 45°-os kerületi szög tartozik.
- Ezért a két kör átmérője AB illetve CM is egyenlők.

7.11. Tizenegyedik megoldás

Szintén köré írható körös megoldás. Itt viszont a háromszöget tükrözzük előbb a CB oldalegyenesére. Ugyanide jutnánk, ha az M pontot tükröznénk a CB oldalegyenesre.



7.11.1. ábra



7.11.2. ábra

A tizenegyedik megoldás menete[38] M legyen a háromszög magasságpontja.

- 7.11.1. A CB oldalra tükrözzük az ABC háromszöget, A'legyen A pont tükörképe.
- A szimmetria miatt $CAT_A\measuredangle = CA'T_A\measuredangle = 45°$.Tudjuk, hogy szintén ugyanekkora $CBT_B\measuredangle$ is. (7.1.1. miatt.)
- 7.11.2. A CM szakasz 45°-os látókörében van Bés A'.
- Szintén a tükrözés következménye, hogy $ACA'\measuredangle = 90°$.

[38]***Eredetileg ez a XIII. megoldás***

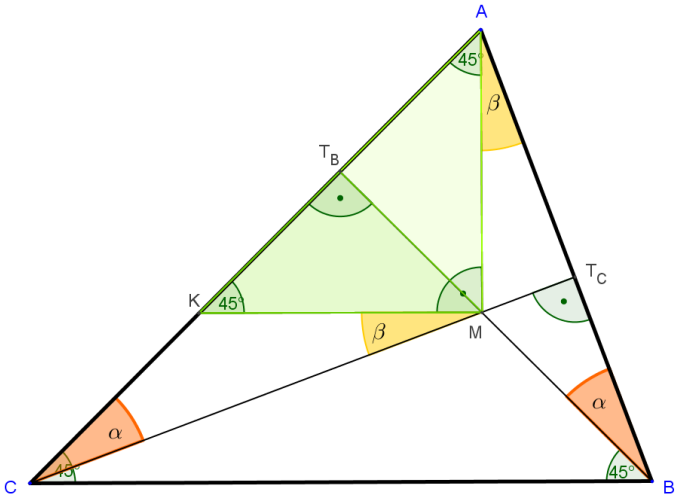
- A fenti szögek egyenlőségének következménye, hogy $BM \parallel A'C$, tehát a $CMBA'$ négyszög húrtrapéz.
- A húrtrapéz szárainak egyenlőségéből következik, hogy $CM = A'B = AB$.

7.12. Tizenkettedik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Elsősorban a hasonlóság és az egybevágóság alkalmazására van szükség. Ebben a megoldásban csak az alapötlet nehéz, hogy húzzunk párhuzamost a BC oldallal az M ponton át. Ilyen segítség megadásával a feladat már könnyen megoldható.

A tizenkettedik megoldás menete[39]

- 7.12.1. Húzzuk meg az MKpárhuzamost a magasságponton át a BC oldallal!
- Az $MKC\triangle \sim AMB\triangle$ (tehát a háromszögek hasonlók) mert szögeik egyenlők.
- A $KMC\measuredangle = MAB\measuredangle$ szögpár és a$KCM\measuredangle = MBA\measuredangle$ szögpár is merőleges szárú.
- A KMA háromszög szögei alapján egyenlő szárú derékszögű háromszög, azaz $KM = MA$.
- Az $MKC\triangle \cong AMB\triangle$(tehát a háromszögek egybevágósága is teljesül) ezért $CM = AM$.

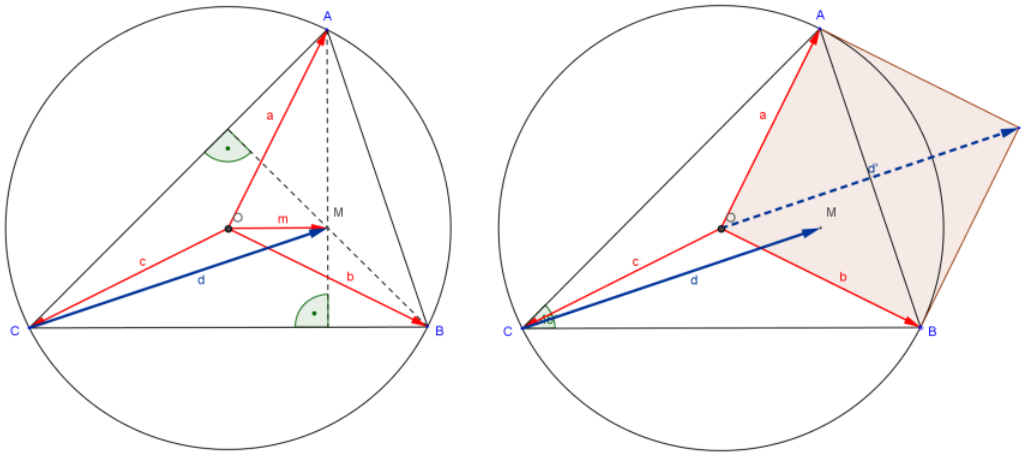


7.12. ábra

[39] ***Eredetileg ez a XIX. megoldás, ez a megoldás a törökbálinti Bálint Márton Általános Iskola és Középiskola diákjaitól származik, Kiss Gabriellától és Vágó Lajostól. Mindketten Szomju László tanítványai.***

7.13. Tizenharmadik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Vektorok összegére, különbségére vonatkozó ismeretek. Az M pontba mutató vektor felírására van szükség, szintén felhasználjuk a középponti és kerületi szögek tételét.



7.13. ábra

A Tizenharmadik megoldás menete:[40] Legyen O a háromszög köré írható körének középpontja. Az$\overrightarrow{OM}$ vektort jelölje $\underline{m}$, és ugyanígy $\overrightarrow{OA} := \underline{a}$; $\overrightarrow{OB} := \underline{b}$; $\overrightarrow{OC} := \underline{c}$; $\overrightarrow{CM} := \underline{d}$

- Felhasználjuk, hogy $\underline{m} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$
- Ebből kifejezhetjük már a $\underline{d} = \underline{m} - \underline{c} = (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) - \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$vektort.
- Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma egyik átlója AB, a másik CM.
- A kerületi és középponti szögek tétele miatt $BOA\measuredangle = 90°$.
- Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszítettparalelogramma négyzet, mert az $\underline{a}$,$\underline{b}$ vektorok hossza a háromszög köré írt kör sugarával egyenlő.
- A négyzet átlói egyelőek, így $AB = CM$.

7.14. Tizennegyedik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Alkalmazunk tengelyes tükrözést, ismernünk kell a Thálesz-tételt, a kerületi szögek tételét, és

[40] ***Eredetileg ez a VI. megoldás***

a derékszögű háromszögben definiált szögfüggvények közül a hegyesszög szinuszát.

A tizennegyedik megoldás menete

- 7.13.1. Az M pontot CB, CA, egyenesekre tükrözve kapjuk az M', M'' pontokat, melyek a háromszög köré írt körén vannak.
- A tükrözés miatt tudjuk:

$$M'CM\measuredangle = M'CB\measuredangle + BCM\measuredangle = 2 \cdot BCM\measuredangle$$

$$MCM''\measuredangle = MCA\measuredangle + ACM''\measuredangle = 2 \cdot MCA\measuredangle$$

- Az előző pontot az $M''CM'\measuredangle$ felírásánál felhasználva:

$$M''CM'\measuredangle = M'CM\measuredangle + MCM''\measuredangle = 2 \cdot BCM\measuredangle + 2 \cdot MCA\measuredangle = 2 \cdot BCA\measuredangle = 90°$$

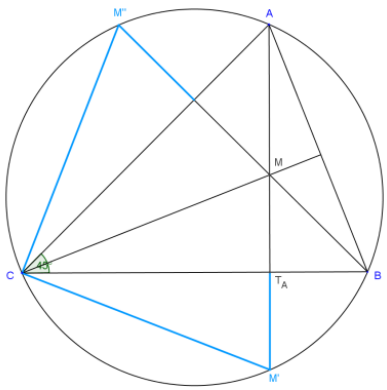
- 7.13.2. Az előző pontból Thálesz tétele miatt tudjuk, hogy az $M''M'$ szakasz a kör átmérője.
- A kör sugara

$$r = \frac{M'M''}{2}$$

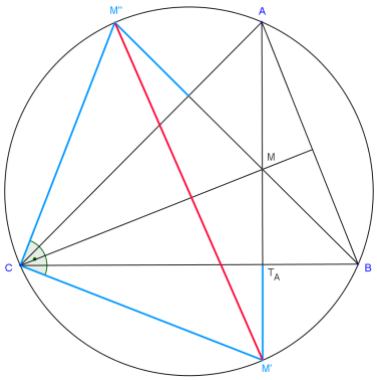
- A tükrözés miatt az $M'CM''$ háromszög egyenlő szárú is.
- 7.13.3. Az $M'CM''$ egyenlőszárú derékszögű háromszögben a szárak hossza CM szakaszéval egyenlő, és$CM' = CM'' = r \cdot \sqrt{2}$
- Másrészt az AB oldalhoz tartozó kerületi szög 45°, ezért:

$$AB = 2 \cdot r \cdot \sin 45° = 2 \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = r \cdot \sqrt{2}$$

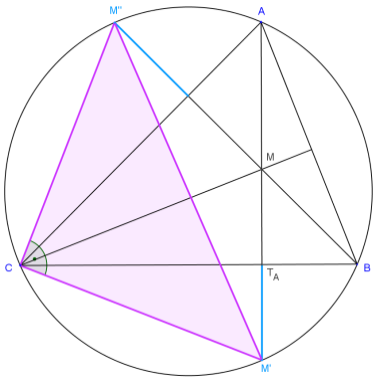
- A fent két pontból együtt következik, hogy $AB = CM$.



7.13.1. ábra



7.13.2. ábra



7.13.3. ábra

A következő feladatokhoz már a 11. osztályos ismeretek szükségesek. A teljesség kedvéért ezeket a megoldásokat is közlöm.

7.15. Tizenötödik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Új ismeretként az előzőekhez képest a szinusztétel szerepel. Felhasználjuk továbbá a $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ összefüggést az α hegyesszögre.

A tizenötödik megoldás menete$M$ jelöli a magasságpontot, T_A, T_B, T_C a magasságvonalak talppontjait. (Ld. 7.15. ábra.)

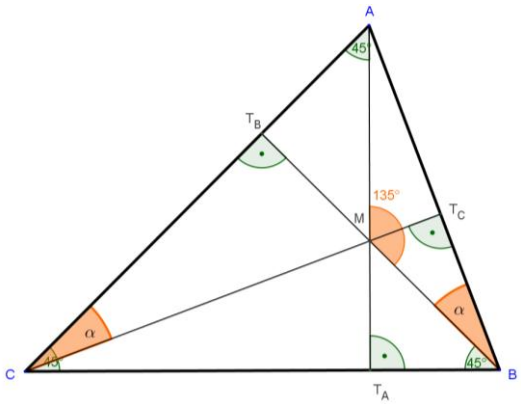
- A CMA, és aBMAháromszögeknek az A-nál fekvő közös szögükön kívül van még egy-egy derékszöge, így a harmadik szögük is egyenlő: $ACM\measuredangle = ABM\measuredangle = \alpha$.
- Az $AMB\measuredangle$az$AMT_B\triangle$ külső szöge, így 135°. Írjunk fel két szinusz-tételt:

$$\begin{cases} CMA\triangle: \dfrac{\sin\alpha}{\sin 45°} = \dfrac{AM}{CM} \\ BMA\triangle: \dfrac{\sin\alpha}{\sin 135°} = \dfrac{AM}{AB} \end{cases}$$

- Mivel $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45°$ ezért a fenti egyenletrendszerben:

$$\frac{AM}{CM} = \frac{AM}{AB}$$

- Az egyenlet átrendezésével az $AB = CM$ egyenlőséget kapjuk.



7.15. ábra

7.16. Tizenhatodik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Leginkább a koszinusz-tételt, mert ez a megoldás a tételt alkalmazza. Emellett szükség van az oldalhosszak ügyes megválasztására, hogy algebrailag tudjuk kezelni a kifejezéseket. Egy alkalommal szükség van a Pitagorasz-tétel felírására is.

A tizenhatodik megoldás menete:T_A pont szintén az A csúcshoz tartozó magasság, T_B pont a Bcsúcshoz tartozó magasság csúcspontja, ezen kívül az AC, CB oldalak hosszát jelölje b és a.

- Már láttuk a 7.1.1-ben, hogy $CAT_A\measuredangle = 45°$ Az AT_AC egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért:

$$CT_A = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$BT_A = a - \frac{b}{\sqrt{2}}$$

- BT_AM egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért

$$MT_A = a - \frac{b}{\sqrt{2}}$$

- Felírjuk a koszinusz tételt az ABC háromszögre:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 45° = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}$$

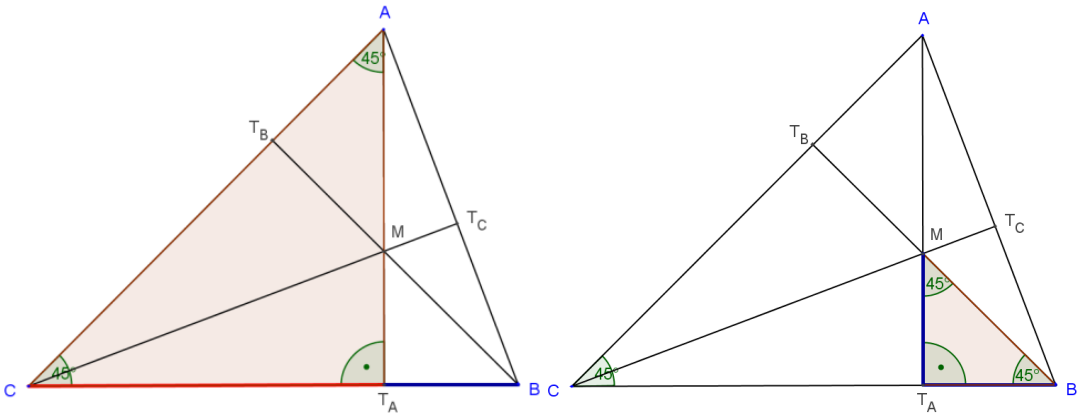
- Végezzük el a következő algebrai átalakításokat:

$$a^2 + b^2 - ab\sqrt{2} = a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}ab = \underbrace{\frac{b^2}{2}}_{\substack{teljes\\ négyzet}} + \underbrace{a^2 - 2\cdot a\frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{b^2}{2}}_{teljes\ négyzet} = \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2$$

- A CMT_A háromszögben felírt Pitagorasz tétel miatt:

$$\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = CM^2$$

- Mivel a csupa ekvivalens átalakítást végeztünk, ezért:$AB^2 = CM^2$
- Tudjuk, hogy AB és CM szakaszhosszakat jelölnek, ezért: $AB = CM$

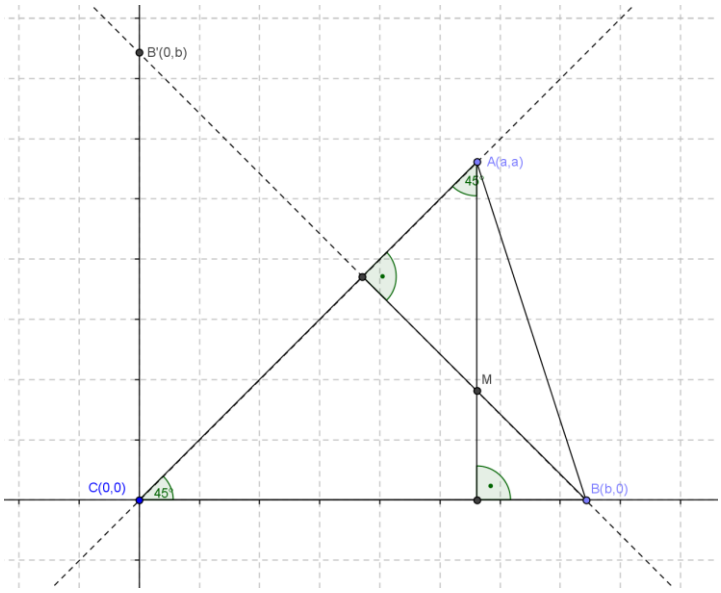


7.16. ábra

7.17. Tizenhetedik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Ez a feladatmegoldás koordinátageometriai ismereteket igényel. Ismerni kell két pont távolságát, az egyenes egyenletét, tudni kell két egyenes metszéspontjának koordinátáit meghatározni. A feladatmegoldás nehézsége, hogy el kell tudnunk jól helyezni a koordináta-rendszerben a háromszögünket.

A tizenhetedik megoldás menete: Az ABC háromszöget úgy helyezzük el a koordinátarendszerbe, hogy C pont az origóba, a CB szakasz az $x$tengely pozitív részére kerüljön, a A pont az $y = x$ egyenes első negyedben lévő részén legyen. (Ld. 7.17. ábra.)



7.17. ábra

- Koordinátákkal felírva a pontokat:
  $A(a,a)$ mert $A \in \{x = y\ egyenes\}$;
  $B(b,0)$ mert $B \in x\ tengely$
  M pont első koordinátája biztosan a, mert ez megegyezik a A pont első koordinátájával.
- A CA oldalegyenes egyenlete $y = x$. Az BM egyenes merőleges CA-ra, ezért egyenlete $y = b - x$
- Ugyanígy az $x = a$ és az $y = b - x$ egyenesek metszéspontja adja az M magasságpontot, amelynek második koordinátája $b - a$ lesz.
- Az A és B pontok távolsága $\sqrt{(b-a)^2 + a^2}$; aC és M pontok távolsága $\sqrt{a^2 + (b-a)^2}$
- A felírt távolságokból látható, hogy $AB = CM$.

7.18. Tizennyolcadik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? A többi feladathoz képest új ismeret a pont körre vonatkozó hatványa, ami kiegészítő anyagként szerepel a középiskolában.

Tizennyolcadik megoldás menete: A háromszög oldalai a szokásos betűzés szerint $a, b,$ és c.

- A CT_AA háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, ezért

$$CT_A = AT_A = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

- A BT_AMT_C négyszög húrnégyszög, mert van két szemközti derékszöge.
- A C pontnak a húrnégyszög köré írható körére vonatkozó hatványa:

$$CM \cdot CT_C = CT_A \cdot CB = \frac{a \cdot b}{\sqrt{2}} = ab \sin 45° = 2 \cdot T_{ABC\measuredangle}$$

- 7.18.1.A fenti összefüggésből kifejezhető CM a következőképpen:

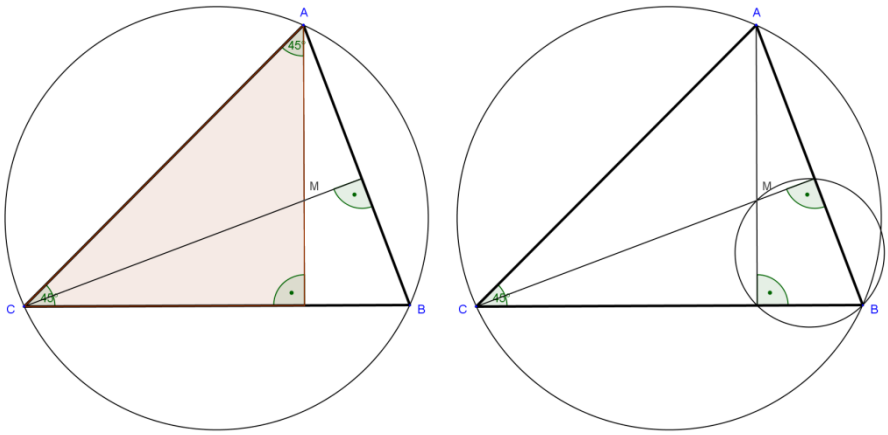
$$CM = \frac{2 \cdot T_{ABC\measuredangle}}{CT_C}$$

- 7.18.2. A háromszög területét kifejezhetjük a következő képlettel is:

$$T_{ABC\triangle} = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{c \cdot CT_C}{2}$$

- A képletet átrendezve: $2 \cdot T_{ABC\triangle} = c \cdot CT_C$
- A következő sor felírásával készen is vagyunk, csak a 7.18.1. és 7.18.2. pontok állításait kell felhasználnunk:

$$CM = \frac{2 \cdot T_{ABC\triangle}}{CT_C} = \frac{c \cdot CT_C}{CT_C} = c = AB$$



7.18. ábra

8.19. Tizenkilencedik megoldás

Milyen ismeretek szükségesek a feladat megoldáshoz? Az előző feladatokhoz képest új ismeret a Ptolemaiosz-tétel, ami szintén kiegészítő anyag középiskolában.

A tizenkilencedik megoldás menete: a háromszög jelölései legyenek a szokásosak. Mlegyen a háromszög magasságpontja,T_A az Acsúcshoz, T_B a Bcsúcshoz tartozó magasság talppontja.

- A CAT_A háromszög egyenlőszárú és derékszögű. (7.1.1.) Ebből következik:

$$CT_A = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

- A CBT_B háromszög egyenlőszárú és derékszögű. (7.1.2.) Ebből következik:

$$CT_B = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

- Az ABT_AT_B négyszög húrnégyszög a Thálesz-tétel miatt. Erre a húrnégyszögre alkalmazzuk a Ptolemaiosz-tételt:

$$T_AT_B \cdot AB = AT_A \cdot BT_B - T_BA \cdot T_AB$$

- A T_AT_B húrhoz a CT_AMT_B húrnégyszög köré írt körében 45°-os kerületi szög tartozik.
- A kör átmérője CM, ezért:

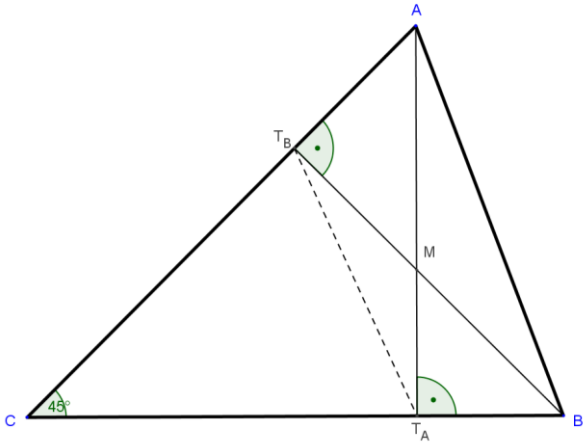
$$T_AT_B = CM \cdot \sin 45° = \frac{CM}{\sqrt{2}}$$

- Felhasználjuk, hogy korábban már oldalhosszakkal kifejeztük a szakaszokat:

$$T_BA \cdot T_AB = \left(b - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(a - \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = ab + \frac{ab}{2} - \frac{a^2}{\sqrt{2}} - \frac{b^2}{\sqrt{2}}$$

- Ezeket beírva a felírt Ptolemaiosz tételbe, a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{CM}{\sqrt{2}} \cdot AB = \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab}{\sqrt{2}}$$



7.19. ábra

Miért tetszik a feladat? A sokféle megoldás miatt. A fent ismertetett tizenkilenc megoldás ténylegesen különbözik egymástól, mind tartalmában, mind módszereiben. A feladat viszont elég összetett, ebből adódóan nehezen lehet olyan általános nagy igazságokat kihámozni a megoldásokból, ami miatt a többmegoldásos feladatokat általában preferáljuk. A feladatban eredetileg megadott $\gamma = 45°$-os szög egy derékszögű háromszöghöz tartozik, hiszen a magasság behúzásával keletkezik egy olyan derékszögű háromszög, amelyhez az a 45°-os szög tartozni fog. Szükségszerű, hogy a háromszög harmadik szöge is éppen 45°-os legyen. Szögei szerint ez egy elég speciális háromszög, és találhatunk ehhez hasonló háromszögeket a rajzon, többet is. Általánosan kimondhatjuk, hogy a több helyen felfedezett egyenlő szögekhez – és szakaszokhoz – mindig találhatunk olyan egybevágósági transzformációt, amely egyik szöget a másikba viszi. Az egyenlő szögek összehasonlításának klasszikus – és a közoktatásban is legkorábban alkalmazott – módja a szögpárok alkalmazása. Egyenlő szögeket találunk akkor is, ha az egy körívhez tartozó kerületi szögeket tekintjük, ezt is kihasználja a feladat. Ha úgy választjuk meg a kört, hogy a

kerületi szöge éppen derékszögű legyen, akkor a Thálesz-tételt alkalmazhatjuk. A háromszög szögei és oldalai között itt is alkalmazhatjuk a szinusztételt és a koszinusztételt, és mivel bővelkedünk derékszögű háromszögekben, természetesen a Pitagorasz-tételt is.

Miért választottam a feladatot? Mert a tizenkilenc megoldásból az utolsó kettő pedig eleve kiegészítő anyagot használ, ezek mindenképpen szakkörre való feladatmegoldások, a maradék tizenhétből pedig tizennégy megoldás elvégezhető a 10. évfolyamon. A tizennégy megoldás összefoglalja a tizedikes geometriai ismereteket, átismétli a korábbi évek tartalmait. 11. évfolyamon a szinusztétel és koszinusztétel alkalmazására találni sokkal direktebb feladatokat, az amúgy terhelt 11. évfolyamon érdemesebb azokkal foglalkozni. Az utolsó két megoldásban kiegészítő anyag szerepel, amelyek közül mind a pont körre vonatkozó hatványa, mind a Ptolemaiosz-tétel leginkább a tizedikes anyaghoz köthető. Érettségi előtt is érdemes lehet a feladattal foglalkozni, a 12. évfolyamos összefoglalás során.

8. Bizonyítási feladatok

Ez a fejezet olyan bizonyítási feladatokat tartalmaz, amelyek a tizedik évfolyamon szerepelhetnek legalább két megoldással. Minden feladatban a „hagyományos" bizonyításokat –amelyek beleillenek a középiskolai bizonyítási struktúrába–a „nem szokványos" vagy „nem tipikus"bizonyítással állítom szembe.

8.1. Bizonyítsuk be, hogy derékszögű háromszögben (ha a c az átfogó) teljesül:[41]

$$\mathbf{m_c = \frac{a \cdot b}{c}}$$

Első bizonyítás

Minden háromszögben a három oldalhoz tartozik három magasság, tehát a háromszög területét kiszámíthatjuk háromféleképpen:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

Ha a háromszögnek van speciális tulajdonsága – például egyenlőszárú – akkor nyilván ez az állítás módosulni fog. Ha a háromszög derékszögű, akkor kimondhatjuk:

$$\begin{cases} m_a = a \\ m_b = b \end{cases}$$

Derékszögű háromszög esetén a területképlet így módosul:

$$T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

Átrendezve a fent kapott egyenletet:

$$m_c = \frac{a \cdot b}{c}$$

Megjegyzés: ez a bizonyítási eljárás már 9. osztályban is alkalmazható, és előkészíti a magasságtétel állítását.

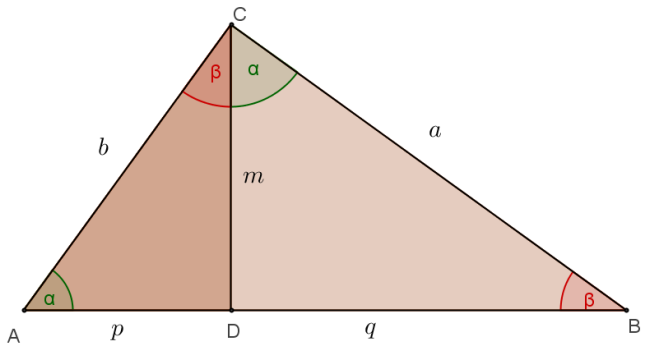
[41] ***Hajdu Sándor által szerkesztett Matematika 10. tankönyv alapján. (2004. Ld.: Irodalomjegyzék)***

Második bizonyítás:

Bizonyíthatjuk a fenti állítást a magasságtétel és a befogótétel tanítása után, ezeknek a tételeknek a segítségével is, 10. évfolyamon.

A befogótétel a 9.1. ábra jelöléseivel:

$$\begin{cases} a = \sqrt{c \cdot q} \Leftrightarrow a^2 = c \cdot q \\ b = \sqrt{c \cdot p} \Leftrightarrow a^2 = c \cdot p \end{cases}$$



9.1. ábra

A magasságtétel állítása ugyancsak az ábra jelöléseivel: $m = \sqrt{p \cdot q}$

A bizonyítás: Az oldalak átfogóra eső vetületének négyzetgyökét kifejezve a befogótételből

$$a = \sqrt{cp} \Leftrightarrow \sqrt{p} = \frac{a}{\sqrt{c}}$$

$$b = \sqrt{cq} \Leftrightarrow \sqrt{q} = \frac{b}{\sqrt{c}}$$

Ezt helyettesítve a magasságtételbe:

$$m_c = \sqrt{pq} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q} = \frac{a}{\sqrt{c}} \cdot \frac{b}{\sqrt{c}} = \frac{a \cdot b}{c}$$

8.2. Bizonyítsuk a magasságtételt!

Magasságtétel: a derékszögű háromszög átfogója legyen ac oldal! Az átfogót a rá merőleges magasság (jelöljük m-mel) az átfogót p; q szakaszokra bontja. Ekkor az$m$ magasság az átfogón keletkező szakaszok mértani középértéke. Másképpen:

$$m = \sqrt{p \cdot q}$$

Használatos az állítás következő alakja is: $m^2 = p \cdot q$

Első bizonyítás: A magasságtételt hagyományosan hasonlósággal bizonyítjuk[42], hiszen a 10. osztályos tananyagban közvetlenül a párhuzamos szelők és a párhuzamos szelőszakaszok tétele után következik, és bevezeti a trigonometriai témakört, ahol a szögfüggvényeket hegyesszögekre derékszögű háromszögekben definiáljuk. A magasságtétel állítását a 9.1. ábrán sötétebb és a világosabb színű részháromszögek hasonlóságából kapjuk. Ehhez nem kell a Pitagorasz-tétel.

A bizonyítás menete:az előző ábrán látható hasonló háromszögek:

$$ADC\measuredangle \sim CDB\measuredangle \sim ACB\measuredangle$$

A $ADC\measuredangle \sim CDB\measuredangle$ hasonlóságból felírhatók a következő arányok:

$$CD : AD = DB : CD \Leftrightarrow \frac{m}{p} = \frac{q}{m} \Leftrightarrow m^2 = pq \Leftrightarrow m = \sqrt{pq}$$

■

Második bizonyítás

A bizonyítás Pitagorasz tétellel: Írjuk fel a Pitagorasz-tételt a 9.1. ábrán látható részháromszögekre! $a^2 = m^2 + q^2$és$b^2 = m^2 + p^2$.Ebből következik, hogy $a^2 + b^2 = p^2 + 2m^2 + q^2$. Ha a nagy háromszögre is felírjuk a Pitagorasz tételt:

$$a^2 + b^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

A két állítás együttesen a $\begin{cases} a^2 + b^2 = p^2 + 2m^2 + q^2 \\ a^2 + b^2 = p^2 + 2pq + q^2 \end{cases}$ egyenletrendszert adja, amiből $m^2 = pq$, tehát készen vagyunk.

■

8.3. Bizonyítsuk be a Pithagorasz-tételt!

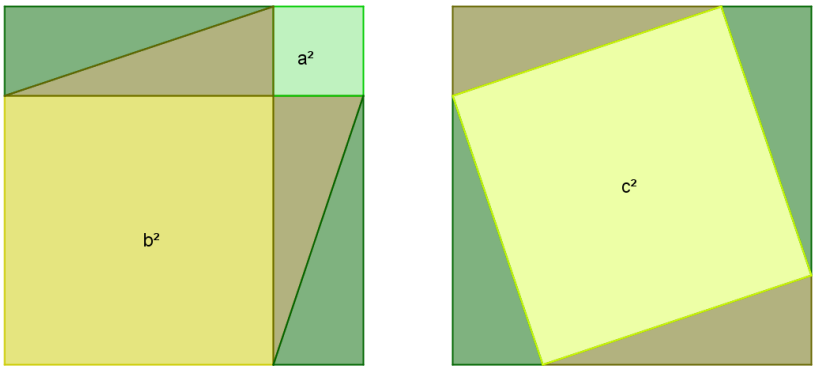
A Pithagorasz-tételre több olyan bizonyítást is adhatunk, amellyel érdemes foglalkozni 10. osztályban. A hagyományos tanterv alapján a tétellel először 8.

[42] ***Ez a bizonyítás szerepel a tankönyvekben is. (Dr. Vancsó Ödön által szerkesztett Matematika 10. (2009.) Hajdu Sándor által szerkesztett Matematika 10. (2004.) és Mozaik kiadó Sokszínű matematika 10. (2010.) valamint CzapáryEndre-Gyapjas Ferenc Matematika tankönyve ugyanezt a bizonyítást közli.(2005.))***

osztályban találkozhatunk, és bizonyításával először a 9. osztályos tananyagban foglalkozunk.

Pithagorasz-tétel: derékszögű háromszögben a befogókra emelt négyzetek területének összege megegyezik az átfogóra emelt négyzet területével.

Az első bizonyítás:[43] az $a+b$ oldalhosszúságú négyzetet daraboljuk át! Ennek az átdarabolásnak a kiindulásnál használt ábráját már az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ nevezetes azonosság geometriai szemléltetésénél megismerhettük. Az $a+b$ oldalhosszúságú négyzet területe $T = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 4T_{\triangle}$ amelynek geometriai jelentése: a és egy b oldalhosszúságú négyzet, ezek területe: $T_1 = a^2$ és $T_2 = b^2$ illetve két téglalap, amelyeket feldaraboltunk négy egybevágó pithagoraszi háromszögre. A jobb oldali rajz azt mutatja, hogy $T = c^2 + 4T_{\triangle}$ hiszen az előbbi $a+b$ oldalhosszúságú négyzetet fel tudjuk úgy is darabolni egy c oldalú négyzetre és négy pithagoraszi háromszögre. Az $a^2 + b^2 + 4T_{\triangle} = c^2 + 4T_{\triangle}$ állításból már következik a Pithagorasz-tétel.



9.3.1. ábra

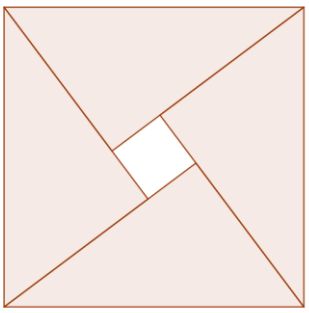
■

Második bizonyítás.[44]Ac oldalú négyzetbe helyezzük a derékszögű háromszögeket! A középen keletkező kis négyzet minden oldala $b-a$, területe $(b-a)^2$. A rajz alapján felírhatjuk: $c^2 = (b-a)^2 + 4t$. A derékszögű háromszög területét viszont a$t = ab:2$ képlettel meghatározhatjuk, amiből: $c^2 = (b-a)^2 +$

[43] ***Jellemzően ez a bizonyítás szerepel a tankönyvekben 9. osztályban a Pithagorasz-tétel tanításánál.***

[44] ***A fentihez nagyon hasonló bizonyítást ad az indiai BhaskaraII.-ként számon tartott, (1150 körül élt) szerző a művében. (A filozófiai mű címe Siddhanta-siromani, ennek a második fejezete matematikai tárgyú, melynek címe Vijaganita.)***

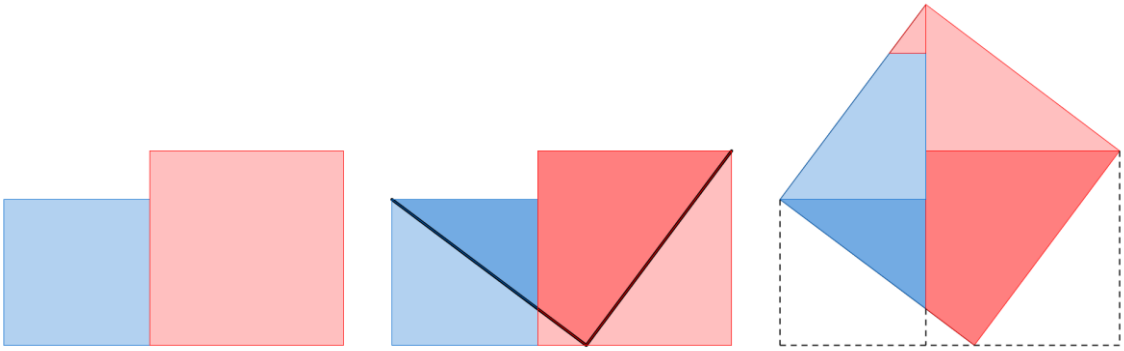
$2ab$. A zárójelet felbontva $c^2 = b^2 - a^2$ egyenlőséget kapjuk, ami átrendezve a keresett állítás.



9.3.2. ábra

■

Harmadik bizonyítás.[45] Ha adott két négyzet (ezek területe a^2 és b^2) daraboljuk át a két négyzetet egy négyzetté. Az első ábrán látható két négyzet egy közös a+b hosszúságú szakaszra helyezzük. Erre felmérve azt az osztópontot, amely ezt a szakaszt $b + a$ (és itt lényeges a sorrend) szakaszokra bontja, az átdarabolást a további ábrák szerint elvégezhetjük.



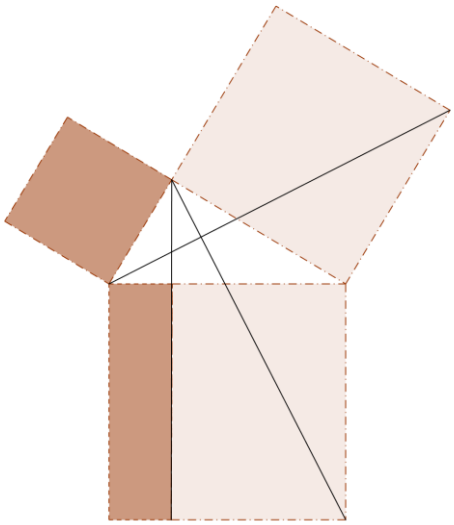
9.3.4. ábra

Az elvégzett átdarabolás egyértelműségéből kitűnik, hogy a keletkezett négyzet területe c^2 ahol a négyzet oldalhosszúságát az a és b befogóhosszúságú derékszögű háromszög átfogójának hosszúságával határozhatjuk meg.

■

[45] ***Dr. Vancsó Ödön által szerkesztett matematika 10. osztályos tankönyvben (2009.) szerepel az alábbi átdarabolással megoldható feladat: „Knumhotep, egyiptomi ácsmester a következő problémával találta szemben magát: egy 30 és egy 40 egységoldalú négyzet alakú deszkalapból kell összeraknia egyetlen négyzetet. Az ábrán látható vázlatot készítette el hozzá. Hogyan állította össze az új négyzetet? Mekkora az új négyzet oldala?”***

Negyedik bizonyítás Euklidész: Elemek című művében közölt bizonyítását a rend kedvéért mindenképpen meg kell említeni, de hozzáteszem egyből azt is, hogy a bizonyítás precíz levezetése túl hosszadalmas és az előző bizonyításokhoz képest nagyobb matematikai apparátust igényel, így középiskolában legfeljebb szakköri keretek között érdemes a tanulóknak megmutatni. A bizonyítás minden lépése a 10. osztályos tananyag keretein belül megérthető.



9.3.5. ábra

A bizonyítás lényege, hogy a befogók fölé emelt négyzetek területe megegyezik a velük egyező színű téglalappal, és a két téglalap együtt éppen az átfogóra emelt négyzetet adja.

Ödödik bizonyítás

Bizonyíthatjuk a Pithagorasz-tételt a 10. osztályban tanult befogótétel segítségével is, ezt megtehetjük, hiszen a befogótétel bizonyításához[46] nincs feltétlenül szükségünk a Pitagorasz-tételre, hasonlósággal tudjuk bizonyítani.

A (9.1. ábra jelöléseit alkalmazva) a befogótételből adódik: $a = \sqrt{cq}$ és $b = \sqrt{cp}$. Ezt felhasználva: $a^2 + b^2 = cq + cp = c(q + p) = c \cdot c = c^2$ ami a Pitagorasz tétel.

■

[46] ***A befogótétel középiskolában szokásos bizonyítását ld.: Mellékletben.***

Megjegyzés: A Pithagorasz-tétel állítása, mint a koszinusztétel speciális esete 11. osztályban belátható.

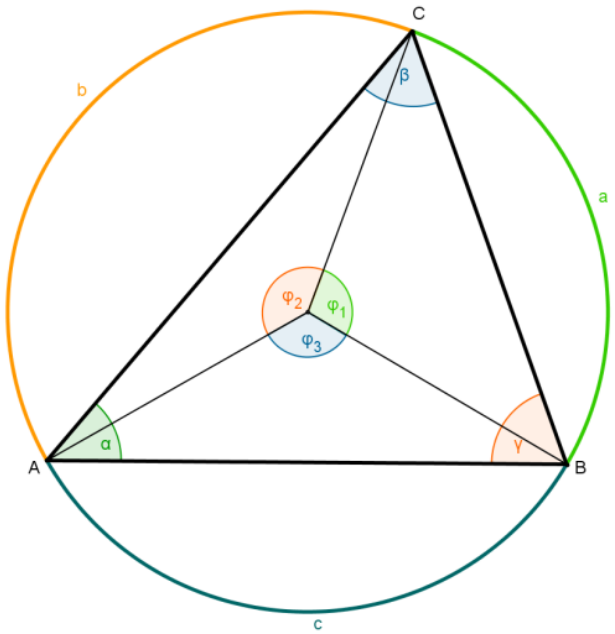
A koszinusztétel a c oldalra felírva: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.

Ha a c oldal a háromszög átfogója, akkor a vele szemközti γ szög lesz a derékszög, azaz $\gamma = 90°$.

Mivel a $\cos 90° = 0$, ezért $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90° = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$, ami a Pithagorasz-tétel állítása.

9.4. Középponti és kerületi szögek tételének speciális esete

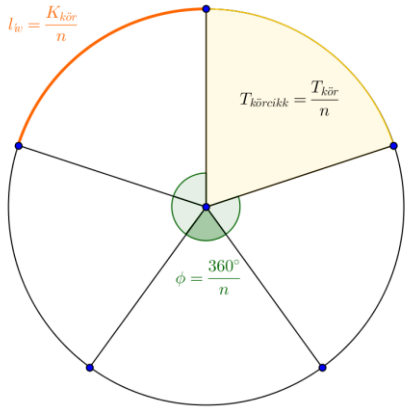
Az ábrán látható hegyesszögű $ABC\measuredangle$ csúcsai a köré írható kör vonalát a, b, és c hosszúságú ívekre bontja. A háromszög szögei α, β, és γ. Az ívekhez tartozó középponti szögek rendre φ_1, φ_2, φ_3. Bizonyítsa be a következő állítást: $\alpha : \beta : \gamma = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$.



9.4.1. ábra

Megjegyzés: Az $a : b : c = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$ állítás még 9. osztályban előkerül, az ívmérték tanításakor és a radián bevezetésekor.

Megjegyzés: Igaz, hogy 9. osztályban nem adunk az állításra bizonyítást. Azt azonban már megtapasztaljuk, hogy ha a kör vonalát n egyenlő részre bontjuk osztópontokkal, akkor az egyenlő hosszúságú ívekhez egyenlő nagyságú középponti szögek tartoznak, hiszen a kör n-edrendű forgásszimmetriája miatt egybevágó körcikkek jöttek létre.



9.4.2. ábra

Minden körcikk területe: $\frac{T_{kör}}{n}$, minden körcikkhez tartozó kerületi ív: $\frac{K_{kör}}{n}$, és minden körcikkben a középponti szög nagysága: $\frac{360°}{n} = \frac{2\pi\ RAD}{n}$.

Innen adódik, hogy kétszer, háromszor, négyszer nagyobb középponti szöghöz kétszer, háromszor, négyszer nagyobb kerületi ív tartozik, ez azonban csak arra elegendő, hogy belássuk, fennáll az arányosság, ha az arányszám racionális szám.

Ezzel az állítással kibővítve az $a:b:c = \alpha:\beta:\gamma = \varphi_1:\varphi_2:\varphi_3$ kijelentést is tehetnénk. A feladatban maradunk egyelőre az $\alpha:\beta:\gamma = \varphi_1:\varphi_2:\varphi_3$ állítás bizonyításánál!

Első bizonyítás:

Kössük össze a kör középpontjait a háromszögcsúcsaival! Ekkor három egyenlőszárú háromszög jön létre, mert mindhárom háromszög szárai a kör sugarai. (Ld.: 9.4.3. ábra.) A $BCO\measuredangle$-ben – ahol az O legyen a kör középpontja – a megadott középponti szög a φ_1, a másik két szög egyenlők, azért ezek $(180° - \varphi_1):2$ nagyságúak. Ugyanígy a mások két háromszögben az alapokon fekvő egyenlő szögek rendre $(180° - \varphi_2):2$ és $(180° - \varphi_3):2$ nagyságúak. A háromszög szögei az ábra alapján:

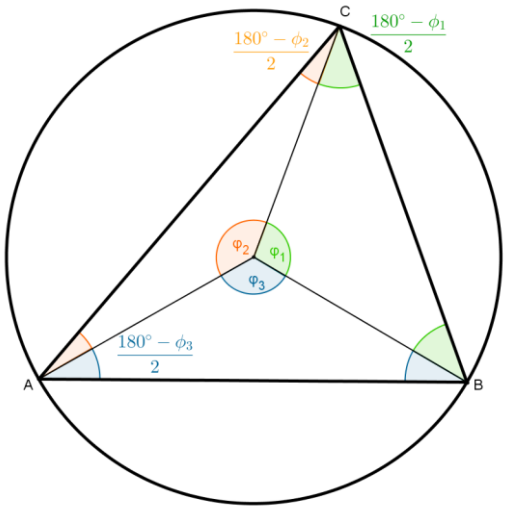
$$\alpha = \frac{180° - \varphi_2}{2} + \frac{180° - \varphi_3}{2} = \frac{360° - (\varphi_2 + \varphi_3)}{2} = \frac{\varphi_1}{2}$$

Itt kihasználtuk, hogy $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 360°$.

Ugyanígy:

$$\beta = \frac{\varphi_2}{2};$$

$$\gamma = \frac{\varphi_3}{2}$$



9.4.3. ábra

9.4.4. Írjuk fel a keresett arányt:

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\varphi_1}{2} : \frac{\varphi_2}{2} : \frac{\varphi_3}{2} = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

■

Második megoldás:

A középponti és kerületi szögek tételével is meg lehet a feladatot oldani, ami már 10. osztályos tartalom. A 9.5.1. ábra jelöléseit használva alkalmazzuk a tételt:

$$2 \cdot \alpha = \varphi_1$$

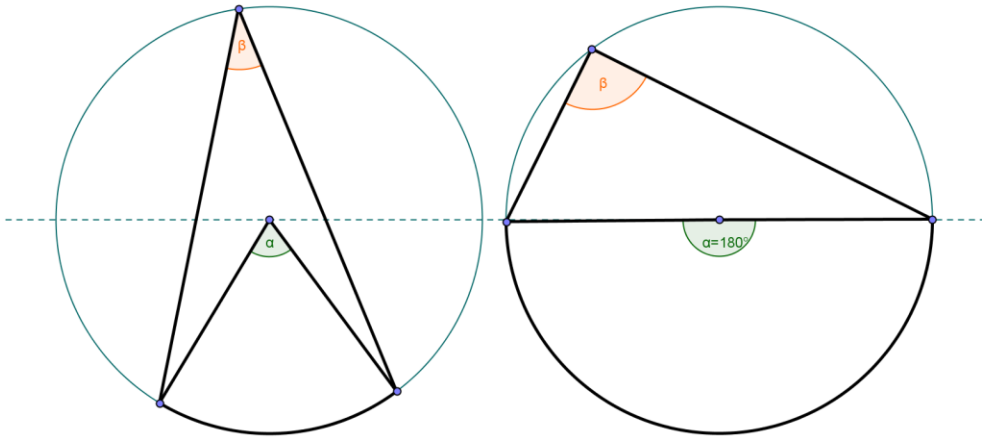
Mert az α ívhez tartozó középponti szög a φ_1 ugyanehhez az ívhez tartozó kerületi szög az α. Átrendezve az egyelőséget: $\alpha = \varphi_1 : 2$

Ugyanígy kifejezve a másik két szöget felírhatjuk a szögek arányát, amit 9.4.4.-ben.

A feladat demonstrálja, hogyan lehet kiváltani a középponti és kerületi szögek tételét 9. osztályban tanult ismeretekkel.

Megjegyzés: a középponti és kerületi szögek tételének speciális eseteként bizonyíthatjuk a Thálesz-tételt. Ezt mindenképpen megtehetjük, hiszen az általam átnézett tankönyvekben a Thálesz-tételre másik bizonyítás szerepel. [47]

A középponti és kerületi szögek tételének állítása: ha egy ívhez az α középponti és β kerületi szögek tartoznak, akkor $\alpha = 2 \cdot \beta$.



9.5.1. ábra

9.5.2. Ha az ív egy félkör, akkor az ívhez éppen $\alpha = 180°$-os. Erre alkalmazva a tételt, $\beta = 180°: 2 = 90°$.

9.5. Bizonyítsa be zsebszámológép és négyjegyű függvénytáblázat használata nélkül, az alábbi állítást[48]

$$\mathbf{tg\,15° = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}}$$

Megjegyzés: A tan 15°kerekített értékét a függvénytáblázat első négy számjegyig tartalmazza, valamint a zsebszámológép is több tizedes jegyig megadja. Ebben a feladatban a pontos érték igazolására lesz szükség, ami a nevezetes szögek szögfüggvényeihez hasonlóan kiszámítható 10. osztályban.

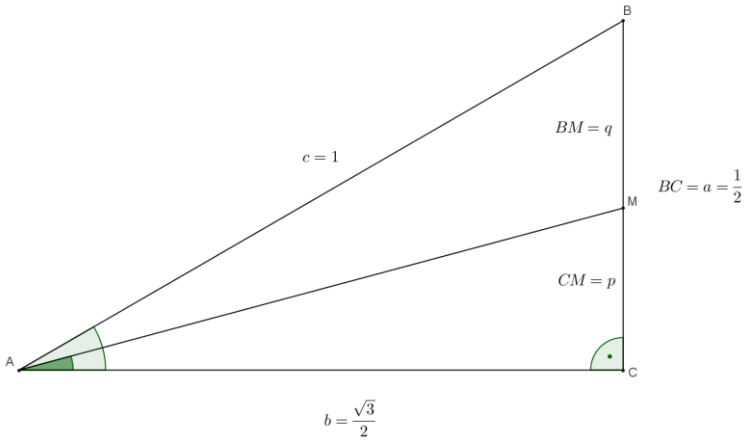
---

[47] ***A Thálesz-tétel szokásos bizonyítása a Mellékletben szerepel. Ez található a 9. évfolyamos tankönyvekben.***

[48] ***Mozaik kiadó: Sokszínű matematika tankönyv 10. osztály (2010.) Hegyesszögek szögfüggvényei című fejezet, Távolságok meghatározása a hasonlóság segítségével című alfejezetében található 2. példa alapján készült a feladat. Az ott megadott számolási feladatban a derékszögű háromszög 15°-os szöggel szemközti befogója 2m. Kérdés a háromszög másik befogója.***

Első bizonyítás:

A nevezetes szögek szögfüggvényeinél az $\alpha = 30°$ meghatározására használt ábrát vegyük elő ismételten, és húzzuk be az α szögfelezőjét!



9.6. ábra

A szögfelezőtétel miatt a szögfelező a szemközti befogót a másik két oldal arányában osztja, vagyis teljesül:

$$q : p = c : b = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ebből az arányból a q szakasz hosszát kifejezve:

$$q = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot p$$

Ezt felhasználva CB oldal hosszát kifejezhetjük p-vel:

$$p + q = p + \frac{2}{\sqrt{3}} p = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) p$$

Viszont ismerjük a CB oldal hosszát, ezért:

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} \cdot p$$

Ebből kifejezve a p szakasz hosszát:

$$p = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3} + 2\right)}$$

A rajz alapján az $ACM\measuredangle$-ben meghatározhatjuk a keresett szög tangensét:

$$\operatorname{tg} 15° = \frac{CM}{AC} = \frac{p}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+2)} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$$

A nevező gyöktelenítésével kapjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+2} \cdot \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \sqrt{3}-2$$

Második bizonyítás

11. osztályban vagy 10. osztályban emelt szinten a megoldást a félszögek szögfüggvényeire vonatkozó összefüggések segítségével kapjuk Itt a szűkítő azonosságokat is tudjuk használni, mert a 15° hegyesszög, ezért minden szögfüggvénye pozitív lesz. A félszögek szögfüggvényeit nem a szögfelezőtétellel bizonyítjuk, ezért a bizonyítási feladatnak ténylegesen két megoldása van. Ismerjük már a nevezetes szögek szögfüggvényei közül:

$$\sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$$

és az alábbi azonosságokat alkalmazzuk, $\alpha = 30°$ helyettesítéssel:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \Longrightarrow \operatorname{tg}\frac{30°}{2} = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \Longrightarrow \operatorname{tg} 15° = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}+2} = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \Longrightarrow \operatorname{tg} 15° = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

Reflexiók

Dolgozatom a 10. évfolyam anyagához tartalmaz kidolgozott feladatokat, többféle megoldással. Elmondhatom, hogy a megoldások sokfélék, szinte minden témakört érintenek a feladatok – talán még a kombinatorika statisztika, valószínűség számítás témakörébe tartozó feladatokkal lehetne némiképpen bővíteni.

Gyűjteményemben szerepel két algebrai feladat – két egyenlet – az egyiket számelméleti, a másikat analitikus módon lehet megoldani.

Úgy tapasztaltam, hogy a feladatgyűjtemények viszonylag gazdagok olyan feladatokban, amelyekben ugyanezeket a módszereket lehet alkalmazni. Szerepel továbbá egy koordinátageometriai feladat, amely előkészíti az átjárhatóságot az algebra és számelmélet, az elemi és analitikus geometria és a trigonometria között a később tanult komplex számok révén.

Geometriai feladatokban bővelkedik a gyűjteményem, de ezek a feladatok a matematika több területére szerteágaznak. Középiskolai szélsőérték problémára láthatunk többféle megoldást: elemi úton, nevezetes egyenlőtlenségekkel függvények segítségével, vagy a differenciálszámítással.

A megoldásváltozatok létrejöttének leggyakoribb oka a módszer – szemlélet – különböző megválasztása volt: transzformációk vagy elemi úton megadott vektorok alkalmazásával, koordinátageometriai módszerek segítségével – vagy analitikus geometriai módszernek is hívhatjuk – illetve algebrai módszerekkel is oldhatunk meg feladatokat. A másik nagyon gyakori ok, hogy ugyanazt a matematikai problémát átfogalmazva különféle tételeket alkalmazhatunk, vagyis más ismeretekkel dolgoztunk.

A tananyagtartalmak közötti egyértelmű kapcsolatokat a bizonyítási feladatok mutatják meg. Ezeket célirányosan úgy válogattam össze, hogy egy-egy állítást tudjunk helyettesíteni valamelyik korábban már megismert tartalommal, rávilágítva a bizonyítási struktúra összefüggéseire.

Melléklet

12. oldalon 5. számmal hivatkoztam az alábbi összegre: $n, i \in \mathbb{N}$ és $0 < i \leq n$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

Bizonyítás: teljes indukcióval.

1.) pl. $n = 2$ esetén a bal oldali kifejezés helyettesítési értéke:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

a jobb oldali kifejezés helyettesítési értéke:

$$1-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{2+1}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Tehát $n = 2$ esetén az állítás igaz.

2.) **Tegyük fel, hogy**$\exists k = n$, melyre teljesül:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=1-\frac{1}{k+1}$$

3.) **Kérdés:** teljesül-e $n = k + 1$ esetén is, azaz, teljesül-e az alábbi összefüggés:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=1-\frac{1}{k+2}$$

Válasz: végezzünk a fenti azonosság bal oldalán ekvivalens átalakításokat:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}}_{\substack{Erre\ alkalmazhatjuk\\ az\ indukciós\ feltételt}}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

Az indukciós feltételt kihasználva:

$$1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k^2+3k+2}{(k+1)\cdot(k+2)}-\frac{k+2}{(k+1)\cdot(k+2)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

A törteket összeadva:

$$\frac{k^2+3k+2}{(k+1)\cdot(k+2)}-\frac{k+2}{(k+1)\cdot(k+2)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

A bizonyítandó azonosság jobb oldalát átalakítva:

$$1-\frac{1}{k+2}=\frac{k+2}{k+2}-\frac{1}{k+2}=\frac{k+1}{k+2}$$

Tehát $n = k + 1$ esetén is teljesül az összefüggés. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

■

12. oldalon 6. számú hivatkozásban felhasználtam az alábbi sorösszeget:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}=1-\frac{n+1}{2n+1}$$

Bizonyítás: teljes indukcióval.

1.) pl. $n=2$ esetén a bal oldali kifejezés helyettesítési értéke:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{2}{5}$$

a jobb oldali kifejezés helyettesítési értéke:

$$1-\frac{n+1}{2n+1}=1-\frac{2+1}{2\cdot 2+1}=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

Tehát $n=2$ esetén az állítás igaz.

2.) **Tegyük fel, hogy**$\exists k=n$ melyre a fenti összefüggés teljesül:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}=1-\frac{k+1}{2k+1}$$

3.) **Kérdés:** teljesül-e $n=k+1$ esetén is, azaz, teljesül-e az alábbi összefüggés:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}=1-\frac{k+2}{2k+3}$$

Válasz: a bal oldalon látható kifejezést átalakítva:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}_{\substack{Erre\ alkalmazható\\ az\ indukciós\ feltétel}}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Az indukciós feltételt alkalmazva:

$$1-\frac{k+1}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{4k^2+6k+2k+3}{(2k+1)(2k+3)}-\frac{(k+1)(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Az összevonást elvégezve:

$$\frac{4k^2+8k+3}{(2k+1)(2k+3)}-\frac{2k^2+5k+3}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

A jobb oldalon álló kifejezést átalakítva:

$$1-\frac{k+2}{2k+3}=\frac{2k+3}{2k+3}-\frac{k+2}{2k+3}=\frac{k+1}{2k+3}$$

Tehát $n=k+1$ esetén is teljesül az összefüggés. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

■

27. oldalon 18. számú hivatkozás két nemnegatív szám számtani és mértani középértékére vonatkozó egyenlőtlenség bizonyítása algebrai úton: Bizonyítsuk a következő állítást, ha a,b nem negatív valós számok:

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$$

Ekvivalens átalakításokkal rendezzük át az egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab\frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

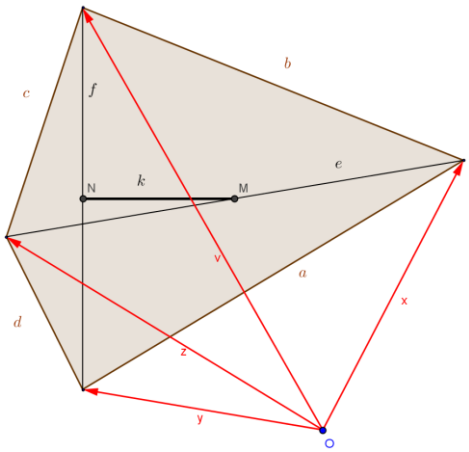
Az így kapott állítás nyilvánvalóan igaz, mert minden valós szám négyzete nemnegatív, ebből a felírásból az is látszik, hogy az egyelőség csak az $a = b$ esetén következhet be.

■

43. oldalon 25. számú hivatkozás. Alkalmaztam az Euler-tételt. Ennek bizonyítása:

Írjuk fel az ábra alapján a következő vektorokat!

$$\begin{cases} \underline{a} = \underline{x} - \underline{y} \\ \underline{b} = \underline{v} - \underline{x} \\ \underline{c} = \underline{z} - \underline{v} \\ \underline{d} = \underline{z} - \underline{y} \end{cases}$$



6.1. ábra, második változat

Ezek négyzete –a vektorok skaláris szorzására vonatkozó szabályok miatt:

$$a^2 = |\underline{a}| \cdot |\underline{a}| \cdot \cos 0° = \underline{a} \cdot \underline{a} = \left(\underline{x} - \underline{y}\right)\left(\underline{x} - \underline{y}\right) = x^2 - 2 \cdot \underline{x} \cdot \underline{y} + y^2$$

Ugyanígy:

$$\begin{cases} b^2 = \left(\underline{x} - \underline{v}\right)\left(\underline{x} - \underline{v}\right) = x^2 - 2 \cdot \underline{x} \cdot \underline{v} + v^2 \\ c^2 = \left(\underline{z} - \underline{v}\right)\left(\underline{z} - \underline{v}\right) = z^2 - 2 \cdot \underline{z} \cdot \underline{v} + v^2 \\ d^2 = \left(\underline{y} - \underline{v}\right)\left(\underline{y} - \underline{v}\right) = y^2 - 2 \cdot \underline{y} \cdot \underline{v} + z^2 \end{cases}$$

Ebből következik:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2v^2 - 2\underline{xy} - 2\underline{yz} - 2\underline{zv} - 2\underline{vx}$$

Tehát előállítottuk az állítás bal oldalán található kifejezést vektorok skalárszorzatainak összegeként. Ugyanezt tesszük a másik oldallal is. Írjuk fel a következő vektorokat:

$$\begin{cases} \underline{e} = \underline{x} - \underline{z} \\ \underline{f} = \underline{y} - \underline{v} \end{cases}$$

Az M pontba mutató vektor:

$$\underline{z}+\frac{\underline{e}}{2}=\underline{z}+\frac{\underline{x}-\underline{z}}{2}=\frac{\underline{x}+\underline{z}}{2}$$

Az N pontba mutató vektor:

$$\underline{v}+\frac{\underline{f}}{2}=\underline{v}+\frac{\underline{y}-\underline{v}}{2}=\frac{\underline{y}+\underline{v}}{2}$$

Az MN vektor:

$$\frac{\underline{x}+\underline{z}}{2}-\frac{\underline{y}+\underline{v}}{2}=\frac{\underline{x}+\underline{z}-\underline{y}-\underline{v}}{2}$$

A vektorok négyzete:

$$\begin{cases} e^2=x^2-2\cdot\underline{xz}+z^2 \\ f^2=y^2-2\cdot\underline{vy}+v^2 \\ 4\cdot k^2=4\cdot\left(\frac{\underline{x}+\underline{z}-\underline{y}-\underline{v}}{2}\right)^2=\left(\underline{x}+\underline{z}-\underline{y}-\underline{v}\right)^2=x^2+y^2+z^2+v^2-2\underline{xy}-2\underline{yz}-2\underline{zv}-2\underline{vx}+2\underline{xz}+2\underline{vy} \end{cases}$$

Ezek összege:

$$e^2+f^2+4k^2=2x^2+2y^2+2z^2+2v^2-2\underline{xy}-2\underline{yz}-2\underline{zv}-2\underline{vx}$$

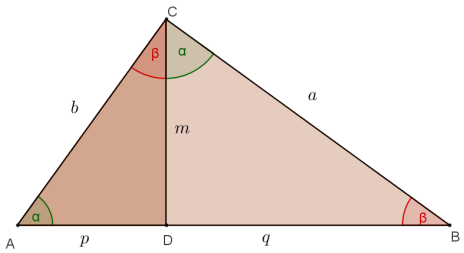
Mivel a bal és a jobb oldal megegyezik, ezért a bizonyítani kívánt egyelőség teljesül.

■

74. oldalon 46. számú hivatkozásban említettem a befogótétel tankönyvekben szereplő bizonyítását.

magasságtétel: a derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete hosszának. Másképpen:

$$\begin{cases} a=\sqrt{c\cdot q}\Leftrightarrow a^2=c\cdot q \\ b=\sqrt{c\cdot p}\Leftrightarrow a^2=c\cdot p \end{cases}$$



9.1. ábra, második változat

Az ábrán hasonló háromszögek: $ABC\measuredangle\sim CBD\measuredangle$. Ezek megfelelő oldalainak aránya állandó, ezért teljesül:

$$a:c=q:a\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{q}{a}\Leftrightarrow a^2=cq\Leftrightarrow a=\sqrt{cq}$$

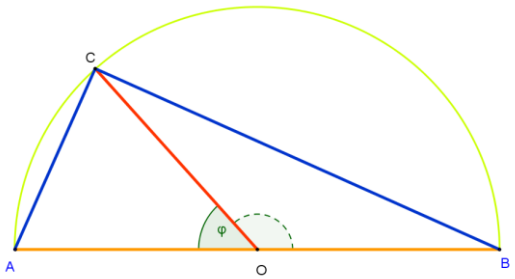
Ugyanez az $ABC\measuredangle\sim ACD\measuredangle$ hasonlóságra:

$$b:c=p:b\Leftrightarrow b=\sqrt{cp}$$

■

78. oldal 47. számú hivatkozás. a Thálesz-tétel középiskolai tankönyvekben előforduló bizonyítása.

Thálesz-tétel: ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor olyan derékszögű háromszöget kapunk, melynek átfogója a kör átmérője.
(Thálesz-tétel megfordítása: derékszögű háromszög körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja.)



9.5.1. ábra, második változat

Thálesz-tétel bizonyítása: kössük össze a kör középpontját (O pont) az AB átmérőre nem illeszkedő harmadik csúccsal (C pont), amely szintén a kör kerületi pontja. Be kell látnunk, hogy az ABC háromszög derékszögű, és az átfogója az AB oldal.

Az $r = AO = OC = OB$ miatt az $AOC\,\triangle$és a$COB\triangle$ egyelő szárú háromszögek lesznek.

Nevezzük el a háromszög $AOC\measuredangle$ –et φ szögnek. Ekkor a rajz alapján $COB\measuredangle = 180° - \varphi$ teljesül. Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180˚, és $AOC\,\triangle$és a$COB\triangle$ egyelő szárú háromszögek, ezért az $ABC\,\triangle$ két szöge:

$$\alpha = CAO\measuredangle = \frac{180° - \varphi}{2} = 90° - \frac{\varphi}{2}$$

$$\beta = CBO\measuredangle = \frac{180° - COB\measuredangle}{2} = \frac{180° - (180° - \varphi)}{2} = \frac{\varphi}{2}$$

Mivel $\alpha + \beta = 90°$, ezért $\gamma = ACB\measuredangle = 90°$, vagyis a háromszög C-nél lévő szöge csakugyan derékszögű.

■

Irodalomjegyzék

Kántor Sándor:
A MATEMATIKAI FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK KONVENCIÓI
Megjelent: A matematika tanítása módszertani folyóirat, VII. évfolyam 1999.
MOZAIK Oktatási Stúdió

Laczkó László:
ISMÉTELJÜK A GEOMETRIÁT EGY FELADATON KERESZTÜL
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Laczko_Laszlo/geoism/geoism.html

KÖMAL pontverseny feladatai:
http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=K208&l=hu

Czapáry Endre – Gyapjas Ferenc:
MATEMATIKA A KÖZÉPISKOLÁK 9-12. ÉVFOLYAMA SZÁMÁRA
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

Ambrus Gabriella – Frenkel Andor – Kaposiné Pataky Krisztina – Mezei József – Papp Péter – Dr. Szabadi László – Szász Antónia – Székely Péter – Szokol Ágnes – Tóth Attila – Dr. Vancsó Ödön:
MATEMATIKA tankönyv 9-12.
Sorozatszerkesztő: Dr. Vancsó Ödön
Műszaki Könyvkiadó, 2009.

Hajdu Sándor, Czeglédhy István, Hajdu Sándor Zoltán, Kovács András
MATETAMTIKA tankönyv 9-12.
Szerkesztette: Hajdu Sándor
Műszaki Könyvkiadó, 2004.

Hajnal Imre:
MATEMATIKA I-IV. Gimnázium
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

Dr. Gerőcs László – Orosz Gyula – Paróczai József – Dr. Szászné Simon Judit:
MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I-II.
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.

Czapáry Endre – Czapáry Endréné – Csete Lajos – Hegyi Györgyné – Iványiné Harró Ágota – Morvai Éva – Reimann István:
MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.
Geometriai feladatok gyűjteménye
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István:
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA tankönyv 9-12.
Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

VARGA TAMÁS MATEMATIKAI VERSENYEK
Összeállította: Pogáts Ferenc
Kiadta: Typotex Kft. Budapest, 1995.