Fraktálok a középiskolában

Gönci Miklós
Matematika tanárszak

Budapest ELTE TTK 2013

témavezető:
Vásárhelyi Éva
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Budapest, 2013

Nyilatkozat

név: Gönci Miklós
ELTE Természettudományi Kar
Matematika tanárszak
ETR azonosító: GOMNADT.ELTE
NEPTUN azonosító:FEW4M7
Szakdolgozat címe: Fraktálok a középiskolában

A szakdolgozat szerzőjeként felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések a előírt szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2013-12-18

aláírás: .....

Köszönetnyilvánítás

Hálásan köszönöm Vásárhelyi Éva tanárnőnek a rengeteg türelmét, közreműködését, bíztatását. Köszönettel tartozom Csapó Tibornak, a sok segítségért és bátorításért.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **5**

2. Dimenzió a matematikatörténetben **8**

3. A dimenzióról **10**

3.1. A hagyományos dimenzió fogalom 10

3.2. Toplogikus dimenzió 14

3.3. Dimenzió az iskolában 15

4. Ismertebb fraktálok dimenziója **20**

4.1. Végtelen hossz és skálázhatóság: a fraktálok "előszele" 20

4.2. A logaritmus 22

4.3. Út a Hausdorff-dimenzió felé 22

4.4. Önhasonló fraktálok dimenziója 25

4.5. A Hausdorff-dimenzió 26

4.6. A Koch görbe dimenziójának kiszámítása 28

5. Egyéb fraktálok vizsgálata **33**

5.1. A sárkánygörbe 33

5.2. L-rendszerek 39

5.3. Az IFS (iterált függvényrendszerek) pontosabban 43

6. Vegyes szakköri feladatok **44**

7. Összegzés **52**

8. Felhasznált irodalom **52**

9. Ábrák forrása **52**

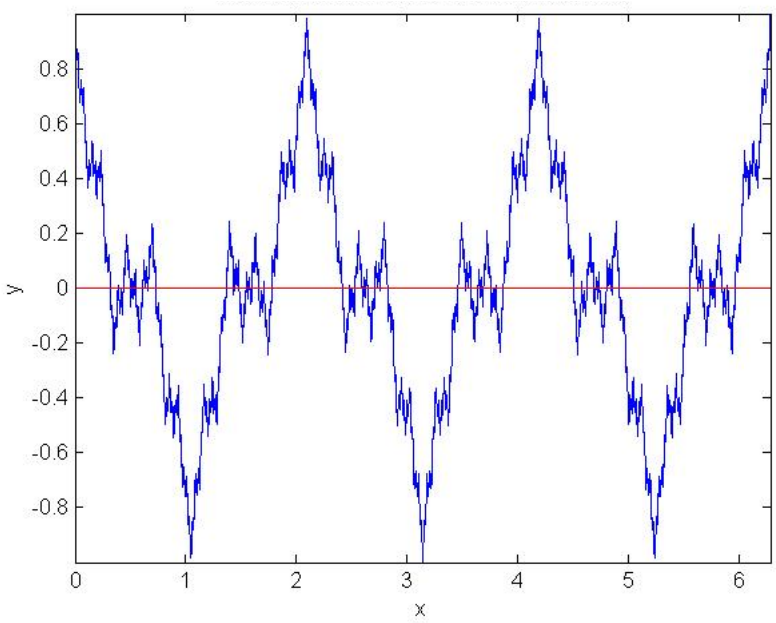
1. Bevezetés

"Benoit Mandelbrot: A felhők nem gömbök, a hegyek nem kúpok, a tengerpart vonala nem körív, a fa kérge nem sima, és a villám nem egyenes vonalban halad."

Az elmélet természettudomány hagyományos modelljei az olyan objektumok, mint a görbék és a felületek. A kalkulus alkalmazhatósága érdekében általában simaságot feltételezünk róluk, ami azt jelenti, hogy elég nagy léptékkel mérve laposnak tűnnek. A föld például durva közelítéssel gömb alakú, mi földlakók viszont laposnak érzékeljük, mert nem látszik belőle elég ahhoz, hogy a nagyon gyenge görbületet észrevegyük. A brit tengerpart, és a tüdőfelület azonban még egy erős mikroszkóp alatt sem mutatkozik laposnak. Gyűröttek maradnak. A természet bővelkedik az ilyen objektumokban, amelyek sok nagyítási skálán is részletesen strukturáltak, azonban a természettudósok, és a matematikusok csak nemrég vették észre, hogy ezzel a témakörrel érdemes önmagáért foglalkozni. Ennek eredménye egy újfajta geometriai alakzat, a fraktál lett. A latin "törni" igéből származó kifejezést Benoit Mandelbrot, a New York állambeli Wattson IBM-központ kutatója vezette be. Elsősorban Mandelbrot érdeme, hogy sikerült a fraktált, mint olyan újfajta matematikai objektumot meghonosítani, amely kiválóan alkalmas azoknak a természeti jelenségeknek a modellezésére, amelyek több skálán vizsgálva is szabálytalanságot mutatnak.

Azt szoktuk mondani, hogy háromdimenziós térben élünk (hosszúság, szélesség, magasság), a sík dimenziója 2, az egyenesé 1, a ponté 0. A matematikusok tetszőleges egész számhoz csináltak olyan teret, amelynek éppen annyi a dimenziója. Kiderül, hogy a fraktálokhoz értelmes módon hozzárendelhető dimenziók nem egész számok lesznek. Ezek a dimenziók tetszőleges, akár negatív, de még irracionális számok is lehetnek. Ez a különös tulajdonság egészen alapvető, és azt tükrözi, hogyan viselkedik a fraktál a lépték megváltozásakor. Az ilyen alakzatoknak a puszta léte hatalmas mennyiségű új fizikai és matematikai kérdést vet fel azáltal, hogy

eltereli figyelmünket a simaság iránti klasszikus ragaszkodástól. A múlt századforduló tájékán sorra jelentek meg a különböző matematikusok által konstruált rendkívül "szabálytalan" görbék, felületek, melyeket a klasszikus analízis korlátait demonstráló "patologikus" objektumoknak tekintettek. Olyan ellenpéldákról volt szó, amelyek emlékezetünkbe vésték, hogy a matematika rondaság-alkotó képessége határtalan. Görbék, amelyek egy teljes négyzetet kitöltenek; amelyek önmagukat minden pontban átmetszik; amelyek véges területet fognak közre, de végtelen hosszúak, vagy amelyeknek egyáltalán nincs hosszuk. Weierstrass 1872-ben a Berlini Akadémián tartott előadásán olyan függvényeket mutatott be, amelyek mindenütt folytonosak, de sehol sem differenciálhatók. A Weierstrass függvény gráfjában nincsenek szakadások, de annyira szabálytalan, hogy egyetlen pontban sincs érintője. Ezt sündisznó függvénynek szokták nevezni, mert a grafikonja csupa tüske:



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n cos(b^n \pi x)$$

ahol $0 < a < 1$ és b pozitív páratlan egész, és

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

A korszak legtöbb matematikusa elfogadta, hogy ezek a különös halmazok valóban megmutatták, a klasszikus analízis alkalmazhatóságának határait.

Ugyanakkor teljesen természetes volt számukra, hogy továbbra is ezeken a határokon belül dolgozzanak, és csak kevesen érezték, hogy a "patologikus" eseteket érdemes lenne önmagukért tanulmányozni. Ezeket mesterséges objektumoknak tekintették, és valószínűtlennek tartották, hogy a tudományban, vagy a matematikában fontos szerepük lehetne. Poincaré "a szörnyűségek panoptikumá"-nak nevezte őket. Az igazsághoz hozzátartozik, hogy az ilyen új halmazok minden különösebb cél nélkül történő indokolatlan túlburjánzása, csak hasztalan tornamutatványnak tűnik. Értő rálátásban viszont észre kell vennünk, hogy hogyan kezd a matematika megbirkózni a fraktálok szerkezetével.

2. Dimenzió a matematikatörténetben

Dimenzió: latin szó, jelentése: méret, kiterjedés. A testek három dimenziója: hosszúság, szélesség, magasság.

A dimenzió témája már a görög kultúra fénykorában is foglalkoztatta nem csak a matematikus Ptolemaioszt, Euklelideszt, hanem a filozófusokat:

Arisztotetélszt és Platont is.

Ptolemaiosz tanulmányt is írt "A dimenzionalitásról" címmel, melyben azt állította, hogy nem lehetséges három dimenziónál magasabb dimenziójú tér, vagyis három féle kiterjedésnél több irányban nem terjedhet ki egy test.

Platon szerint a valóság álarca mögött egy állandó tökéletes világ húzódik, az ideák világa.

Ez a nézet reneszánszát élte a 17. században, amikor a platonista Henry More, aki először használta a negyedik dimenzió fogalmát. Az "Ancgiridon Metaphysicum" című művében (1671) nem a tér kiterjedésének képzelte a negyedik dimenziót, hanem egy titokzatos helynek, ahol Platon ideái léteznek.

A matematikusok közül először d'Alembert használta a negyedik dimenzió elképzelést majdnem 100 évvel később, ő az idővel azonosította azt. A dimenziókról való gondolkodás nagyot változott a matematika egyik legnagyobb felfedezésével, amelyet Bólyai János, Nicolai Lobachevsky, és Karl Friedrich Gauss tett egymástól függetlenül, mégpedig hogy Euklidesz ötödik posztulátuma független, és ha kicseréljük a komplementerére, akkor is "értelmes geometria építhető".

Ennek hatására Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) egy előadásában egy újfajta differenciálgeometria bevezetését javasolta, mely a tér tetszőleges görbületét is megengedi. Ezekre a felfedezésekre alapozta később Einstein is az általános Relativitáselméletet,mely leírja a gravitáció jelenségét.

David Hilbert volt az első, aki komoly lépést tett a geometria tapasztalástól független megalapozásában , és egy új axiómarendszert vezetett be a geometriában. Hilbert, a Grundlagen der Geometrie (magyarul: A geometria alapjai) 1899-ben megjelent művében egy formális axiómarendszert javasolt a hagyományos euklidészi axiómák helyett.

Hilberttől függetlenül, de vele egyidőben egy 19 éves amerikai diák, Robert Lee Moore is publikált egy ekvivalens axiómarendszert. A két axiómarendszer között a különbség csak annyi, hogy bizonyos axiómák az egyik rendszerben tételként vezethetők le és fordítva, bizonyos tételek a másik rendszerben axiómaként vannak kimondva. Hilbert elgondolása a modern axiomatizálási eljárás megjelenését jelentette. Az axiómákat nem tekintette magától értetődő igazságoknak. A geometria olyan dolgokkal foglalkozik, amelyekről igen erős intuíciónk van, de nem kötelező hétköznapi jelentést hozzárendelni a geometriai fogalmakhoz. Az olyan elemeket, mint amilyen a pont, egyenes és sík, Hilbert szerint helyettesíthetnénk asztalokkal, székekkel, söröskorsókkal és más tárgyakkal is. A köztük lévő kapcsolatok állnak a vizsgálat középpontjában.

Hilbert először felsorolja az alapfogalmakat, melyek között a következő relációkat vezeti be:

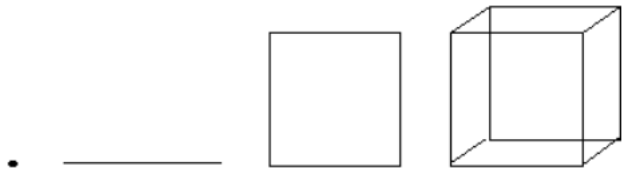
- illeszkedés (bináris reláció, egy pont és egy egyenes, egy pont és egy sík, egy egyenes és egy sík között állhat fönt);
- elválasztás, két pont között lenni (háromváltozós reláció);
- egybevágóság (bináris reláció, szakaszok, ill. szögek között)

Az ezután megadott axiómák egyetlen rendszerben egyesítik az euklidészi síkgeometriát és térgeometriát.

3. A dimenzióról

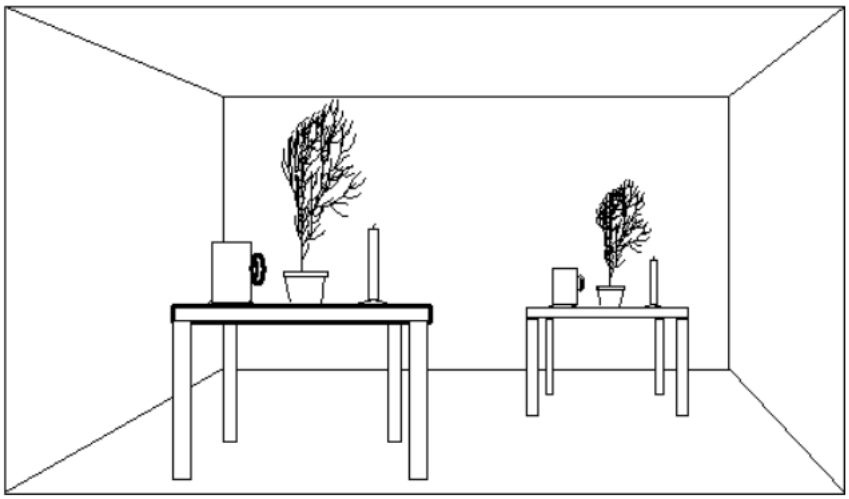
3.1. A hagyományos dimenzió fogalom

A klasszikus geometriában az idomoknak egész dimenziója van. A pontnak 0, a vonalnak 1, egy területtel rendelkező idomnak(pl négyzet) 2, egy térfogattal rendelkezőnek, mint amilyen egy kocka, illetve az összes valóságban létező testnek hétköznapi tapasztalataink alapján 3 dimenziója van. Az ilyen egész dimenziós alakzatokból építjük föl a klasszikus geometriát: háromszögek, négyzetek, körök, kúpok, kockák, gömbök...

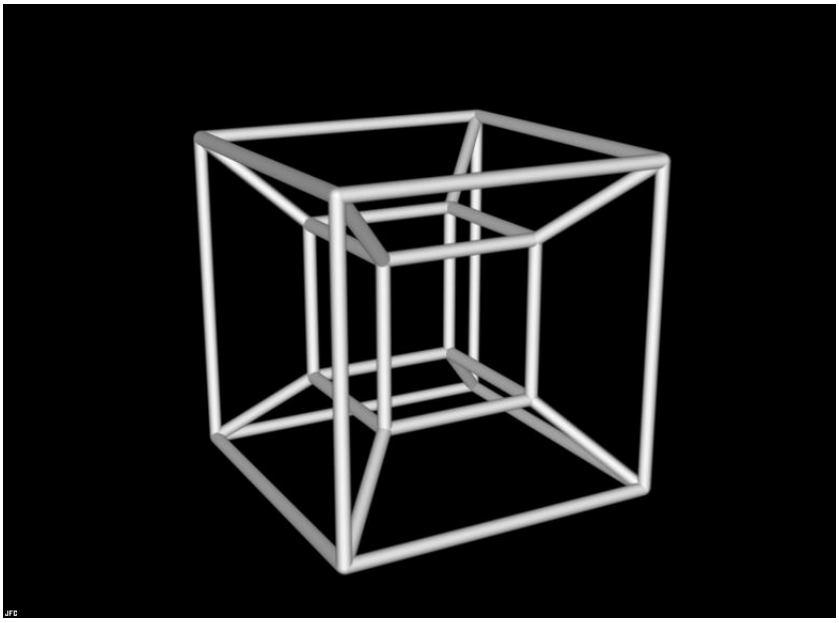


Egyes tárgyak dimenzióját nem-térbeli dimenzióval növelhetjük, mint amilyen az idő, a szín és perspektíva. Például egy 2 dimenziós rajz lehet 3-dimenziós megjelenésű. Ennek köszönhetően vagyunk képesek például 3-dimenziós valóságot ábrázolni a 2 dimenziiós képernyőn. Ettől élethű egy videójáték, vagy térhatású egy mérnöki CAD program, amellyel végigvezetnek minket egy még meg sem épült ház folyosóin. A valóságot mi is csak 2 dimenzióban érzékeljük, de 3 dimenzióban észleljük. A 2 szem kicsit eltérő szögben egy-egy 2 dimenziós képet alkot, és az agyunk rakja össze 3 dimenziós képpé a 2 dimenziós képek, eltérései, és élettapasztalatok eredményeként.

Érdekes lenne eljátszani a gondolattal, hogyan látszódna a világ, ha valóban 3 dimenzióban látnánk. Persze ezt hasonlóan nehéz elképzelni, mint egy 4-dimenziós testet. Mindenesetre valószínűleg nem lehetne élethű képet festeni 2 dimenzióban, amely a valódi 3-dimenziós látványt adná vissza.



A nem-térbeli dimenziók segítségével lehetséges - persze bizonyos korlátok között - a magasabb dimenziós testek ábrázolása is. Ilyen például a 4-dimenziós kocka, a tesseract.



Ez a test 3 dimenzióra vetítve 8 "kocka" uniójának látszik. Ezek a tesseract 3-dimenziós határfelületei. A középső kocka, a 6 db csonka gúlának látszó kocka, és a nagy kocka. Ezzel analóg alakzatot kapunk, ha a fenti

csonka gúlák egyikét vetítjük 2 dimenzióba az egyik lapjának a síkjára. Itt a z alap, és a fedőlap négyzetnek fog látszani, az oldallapok pedig "csonka háromszögeknek", és 6 db lesz belőlük, mint a kocka határoló lapjaiból.

Ugyan a valóságban nem érzékelhetünk 3 nál több dimenziót, a tudomány nagy hasznát veszi a több dimenziós tereknek, és matematikai modelleket sokszor ilyen terekben alkotnak, mivel sok könnyebbséget jelent a számolásoknál. Rengeteg valós életbeli problémának a matematikai reprezentációja magasabb dimenzióba vezet minket. Ilyen problémák:

- Egy hálózatban 2 pont közötti legrövidebb út megkeresése
- Fizikai részecskék állapotainak reprezentálása az állapottérben - gyakran több mint 10 dimenzióban történik.

Edwin A. Abbott megpróbálja érzékeltetni a magasabb dimenziót. Itt idézek egy kis illusztrációt a "Flatland" című könyvéből, ahol nagyon plasztikusan sikerült a szerzőnek vizualizálni a különböző dimenziók közötti mozgásokat.

"A világunk laposország. Nem csupán azért, mert mi így hívjuk, hanem azért is, hogy a természetét tisztábban lássad, kedves olvasóm, akinek megadatott a térbeni létezés. Képzelj el egy hatalmas papírlapot, amelyen egyenesek, háromszögek, négyzetek, ötszögek, hatszögek, és mindenféle más alakzatok ahelyett, hogy egy helyben állnának, szabadon mozognak a papír felületén anélkül, hogy képesek lennének fölé emelkedni, vagy alá süllyedni, hasonlóan, mint az árnyékok - csak határozott, és fényes széllel -. Így már határozott elképzelésed lehet országom lakóiról.

Pár éve még azt mondtam volna, hogy "az univerzumomról", de immár a tudatom kinyílt a dolgok "magasabb" szemlélésére.

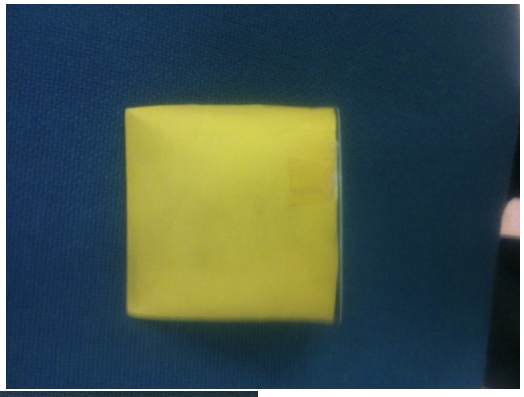
Egy ilyen országban egyből ráébredsz, hogy nem létezik olyan tárgy, amit te "szilárd"-nak neveznél a te értelmezésed szerint, de azt hiszem, feltételeznéd, hogy azért a háromszögeket, négyzeteket, köröket meg tudjuk különböztetni egymástól. Pedig épp ellenkezőleg: Fogalmunk sincs ezekről a dolgokról, ugyanis mi, ebben az országban semmit nem látunk vonalakon, szakaszokon, és pontokon kívül. Hadd demonstráljam neked!

Helyezz egy pénz érmét az asztalra, és tekintsd meg fölülről! Egy körnek fog látszani, ha minden igaz. Most kezdjél el a szemeddel az asztal széléhez közelíteni, így helyezheted bele magad laposország lakóinak a nézőpontjába. Ahogy fokozatosan közelíted a szemed, a kör mindinkább oválissá válik, majd amint az asztal síkjába érsz, teljes egészében elveszti az ovalisságát, és csupán egy egyenes szakasszá válik, pont olyanná, amilyennek a laposországiak látják.

Ugyanez történne, ha mindezt egy kartonból kivágott háromszöggel, négyszöggel, vagy egyéb alakzattal játszanád el: Amint az asztal szélére ér a szemed, csupán egy szakaszt látnál."

Nehéz elképzelni, hogy ennek az analógiájára, amennyiben mi egy tesseractot látunk, illetve feltételezzük, hogy a tárgyak, amiket látunk a valóságban: a szék, az asztal, a labda, igazából legalább 4-dimenziós tárgyak, és 2 egyforma labdának látszó tárgy valójában lehetséges, hogy egyáltalán nem hasonlóak, csupán a mi 3-dimenziós tapasztalásunkban tűnik annak.

Ha már árnyékokról beszéltünk, érdekes, hogy lehetséges olyan tárgyakat készíteni 3 dimenzióban, melyeket három különböző irányból világítunk meg, akkor akár 3 egészen tetszőleges árnyékot kapunk, melyek függetlenek egymástól.



Érdekes abba is belegondolni, hogy a síkban zártnak tűnő alakzatok, mint például egy kör, ha a saját dimenziójából közelítenénk meg, akkor a teret 2 külön részre osztja, és kívülről nem tudunk a belsejébe jutni. Viszont a térből könnyen rábökünk a síkba rajzolt kör belsejére. Ennek az analógiája valahogy úgy nézne ki, hogy például egy 3-dimenziós labda 4-dimenziósként egyáltalán nem lenne zárt alakzat, és egy 4-dimenziós szuperlény bele tudna nyúlni a belsejébe anélkül, hogy kilyukasztaná azt.

3.2. Toplogikus dimenzió

Egy tér dimenziójának sokféle megfogalmazása közül az egyik a topologikus dimenzió. A mérnkök szemében például a "szabadsági fokok" száma. A topológusoknak pedig

Topologikus dimenzió:
Ha az euklideszi tér felületeinek megfelelőit tekintjük magasabb dimenziós

terekben, akkor nevezhetjük dimenziónak a független paraméterek számát.

Az analitikus kezelés miatt szokás differenciálhatósági feltételeket megfogalmazni. Ha például feltételezzük, hogy sima sokaságról van szó, akkor jelentősen leszűkítjük a vizsgálható sokaságok körét, de kizárjuk a peano görbével kapcsolatos problémákhoz hasonlókat is.

A Gömb felület például 2 dimenziós, mert a "földrajzi" hosszúság és szélesség 2 változós koordinátarendszert szolgáltat. Világos, hogy ebben az értelmezésben a dimenzió csak pozitív egész szám lehet. Poincaré ezt a fogalmat tetszőleges topologikus térre a következőképpen általánosította:

- Az üres halmaz dimenziója -1
- Ha a tér valamennyi pontja körül a kis környezet határai n-1 dimenziósak, akkor a tér n dimenziós.

Ez egy induktív definíció, 0- dimenziós teret a -1 dimenziós tér segítségével definiálja, majd az 1 dimenzióst a 0- dimenziós révén, és így tovább. Az így kapott értéket nevezzük topologikus dimenziónak. Természeténél fogva ez egy topologikus invariáns(topologikus leképezéseknél változatlan marad), és ismét csak pozitív egész lehet.

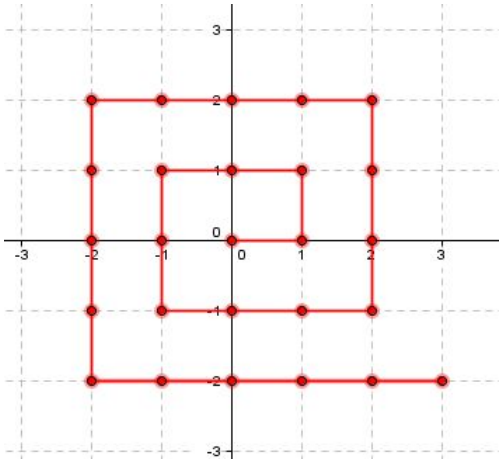
A fraktálok jellemzésére a topologikus dimenzió nem alkalmas, hiszen például a hópehely görbe topológiailag a körrel azonos. Ha finomabb megkülönböztetést akarunk, akkor a metrikus struktúrát is figyelembe kell venni. Olyan definíciót kell keresni a dimenzióra, amely sokaságokra a szokásos értéket adja, azonban nem topologikus, hanem metrikus tulajdonságokon alapul. Ez motiválta a más típusú dimenzió fogalom bevezetését.

3.3. Dimenzió az iskolában

Az általános iskolában a gyerekek hamar közel kerülnek a hagyományos vektortér fogalmon alapuló dimenzió fogalomhoz. 5. osztályban kezdik el a síkot felfedezni, megismerkednek a koordinátarendszerrel. A pontok meghatározása "természetesen" 2 paraméter segítségével történik ilyenkor, mely lehet sakktáblához hasonló módon egy betű és egy szám, vagy egész számpárok, vagy később akár valós számpárok is. Általában elsiklunk afölött

a kérdés fölött, hogy miért pont 2 adat szükséges a síkon vagy gömbfelületen való tájékozódáshoz. Az ugyan egyértelműen kiderül, hogy ennyi adat elégséges, de már az sem kerül megtárgyalásra, hogy vajon szükséges-e, azt pedig nem is érintjük, hogy min alapul a szükséges és elégséges mivolta a 2 adatnak. A földrajzban a földgömbön való tájékozódásnál hamar felfedezik, hogy ugyanazon pontot többféleképpen is ki lehet fejezni

Rengeteg gondolkodtató, fejtörő kérdésre térhetünk ki már ilyen korán is, amely nagyban elősegíti a gyerekek analitikus gondolkodásának kialakítását, fejlesztését. Amennyiben még csak az egész számpárokon értelmezzük a Descartes koordinátarendszert, fel lehetne vetni, hogy az általunk használt 2 paraméter még sok is, ha az origótól kezdve "csiga vonalban" összekötve a rácspontokat, egy töröttvonalra föl tudjuk fűzni az összes általunk kifejezhető pontot a síkon. Így a pontok meghatározásához elég csupán annyit tudni, hogy a "pontfüzérünkön" hányadik pontról van szó, ezzel a 2 adatot egy adattá csökkentettük.



Ez persze messze túlmutat az általános iskolás tananyagon a halmazelmélet és a számosságok irányába.

Továbbmenve, amennyiben megengedjük, hogy valós értékeket is fölvehessenek az egyes koordináták, így a teljes síkot be tudjuk járni. Játszhatunk azzal, hogy a sík tartományait bijektíven leképezünk a számegyenes eggyes intervallumjaira. Ez csupán annyit jelent persze, hogy a két halmaznak ugyanannyi pontja van, semmi többet.

A dimenzió fogalmát az iskolában rengeteg helyen érintjük. A síkidomoktól kezdve a testeken, poliédereken keresztül, egészen a geometriai transzformációkig. Ezek a témakörök újból,és újból előkerülnek az iskolai gyakorlatban. A megismert geometriai alakzatokon keresztül sok tapasztalatot szerzünk a dimenzióról is, terület, térfogat, kerület.

A geometriai transzformációk hatása a geometriai alakzatokra, valamint a transzformációk csoportosítása, és jellemzői ugyancsak szorosan kapcsolódnak a dimenzió fogalmához. A dimenzió fogalmának egyik megközelítése, amellyel talán szorosan kötődik a vektortérhez, és kimondva vagy kimondatlanul a gimnáziumban is előkerül:

Definíció: Egy vektortér dimenziója a bázisának az elemszáma.

Ehhez a területhez tartozik a generátorrendszer, függetlenség és egyéb fogalmak. Ezen az úton szigorúan véve vektorterek és lineáris altereik dimenzióját határozzuk meg.

A dimenzió azonban másik oldalról nem csupán magának a vektortérnek a tulajdonsága, hanem a vektortérben lévő ponthalmazé, idomé is. Bár nem teljesen független egymástól a két értelmezés, lényegesen el kell különítenünk, hiszen sok halmaz dimenzióját nem lehet valamely bázis elemszámával definiálni.

Az egyes térelemek dimenzió próbáját a Hausdorff-dimenzió segítségével könnyű elvégezni, mely egyben azt is szemlélteti, hogy az idomok dimenzió tulajdonsága a lineáris nemelfajuló transzformációkra invariáns, tehát nem változik a dimenziójuk ezek hatására.
Példaként megvizsgáljuk néhány hagyományos síkidom és térelem dimenzióját a Hausdorff-dimenzió számítási módszere alapján.

A kör dimenziója:

A kör kerülete:

$$K = 2r\ \pi$$

Területe:

$$T = r^2\ \pi$$

Nézzük meg, hogy ha a méretét λ-szorosára változtatjuk, hogy változik a területe és a kerülete.

A hasonlósággal kapott idom kerülete:

$$K_\lambda = 2\lambda r\pi = \lambda K$$

Terület pedig:

$$T_\lambda = (r\lambda)^2\pi = \lambda^2 T$$

ezekből az adatokból a

$$\frac{log(meret\ novekedes)}{log(nagyitasi\ arany)}.$$

formulával lehet meghatározni a körvonal, illetve a körlap dimenzióját:

$$dim(korvonal) = \frac{log(\lambda)}{log(\lambda)} = 1$$

$$dim(korlap) = \frac{log(\lambda^2)}{log(\lambda)} = 2$$

Vizsgáljuk meg a háromszöget is, ami azért fontos, mert véges sok háromszög uniójából felépíthetjük a sokszögeket.

$$K = \sum a_i$$

$$T = a\frac{m}{2}$$

a hasonlósági transzformáció után:

$$K_\lambda = \sum \lambda a_i = \lambda \sum a_i = \lambda K$$

valamint a területre

$$T_\lambda = \lambda a \lambda \frac{m}{2} = \lambda^2 T.$$

Véges sok háromszög uniójára: S sokszögre:

$$K_\lambda(S) = \sum \lambda K_i = \lambda \sum K_i.$$

a területre:

$$T_\lambda(S) = \sum \lambda^2 T_i = \lambda^2 \sum T_i$$

Tehát háromszög és a sokszög dimenziójára ugyanaz elmondható, mint a körnél, vagyis a kerület dimenzója 1, a területé 2.

A térben is vizsgálhatunk olyan halmazokat, melyeknek van és olyat is amelynek nincs belső pontjuk.

Például: Egy gömb felülete nem lineáris altere a térnek, mégis 2 dimenziós alakzat.

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}$$

$$A = 4r^2\pi$$

ez hasonlósági transzformáció után:

$$V_\lambda = \frac{4(r\lambda)^3\pi}{3} = \lambda^3 V$$

$$A_\lambda = 4(r\lambda)^2\pi = \lambda^2 A.$$

Tehát a dimenzió a Hausdorff-dimenzió alapján itt is könnyen kiszámítható:

$$dim(\text{gömb}) = 3 \; es \; dim(\text{gömbhéj}) = 2.$$

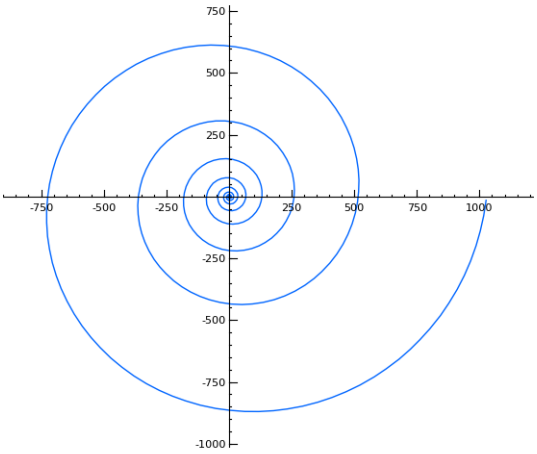
4. Ismertebb fraktálok dimenziójának vizsgálata

Röviden áttekintjük azokat a matematikai eszközöket, melyek segítenek a fraktálok megértésében.

4.1. Végtelen hossz és skálázhatóság: a fraktálok "előszele"

A fraktálgeometria sok alapvetése megtalálható a korábbi matematikában. Például a nagyíthatóság, a vonalak hossza elengedhetetlen fogalmak már a hagyományos geometriában is.

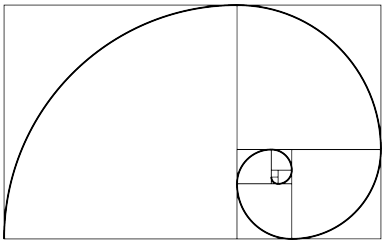
Euklidész (ie. 330-275) az Elemekben a párhuzamosok fogalmának bevezetéséhez, illetve illusztrálásához a végtelen fogalmát, valamint az ön-hasonló háromszögeket használta.



1. ábra. logaritmikus spiral

Arkhimédész (ie. 287-212) egy spirált használt az ismételhető transzformáció illusztrálására. Ez egy egyenes vonalú egyenletes mozgás, és egy állandó szögsebességű körmozgás kompozíciója.

Később, Jacob Bernoulli (1654-1705) kiterjesztette ezt a gondolatot, és megmutatta, hogy létezik olyan spirál, melynek végtelen a hossza (mindkét irányban). Ezek közül a logaritmikus spirál a legismertebb. Másik ismert spirál, melynek végtelen a hossza, az arany- (Fibonacci) spirál,



2. ábra. arany spirál

mely az ősi aranymetszés arányát használja:

$$1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Szembetűnő a hasonlóság az arany spirál és a csigaházas polip háza között.

3. ábra. nautilus

4.2. A logaritmus

John Napier (1550-1617) fedezte föl a logaritmust, hogy leegyszerűsítse a szorzást. A két számot a logaritmusukká transzformálta, összeadta őket, majd az adott alapot hatványozta az összeggel. Megmutatta, hogy könnyen kaphatunk közelítőleg helyes eredményt. Mielőtt a computer megjelent, a logaritmus elengedhetetlen eszköz volt a nagy számok szorzásánál, osztásnál, , hatványozásnál, és gyökvonásnál. A középiskolában is ismertek a logaitmus azonosságai:

$$log_a mn = log_a m + log_a n$$

$$log_a \frac{m}{n} = log_a m - log_a n$$

$$log_a m^r = r log_a m$$

$$log_a \sqrt[r]{m} = \frac{1}{r} log_a m$$

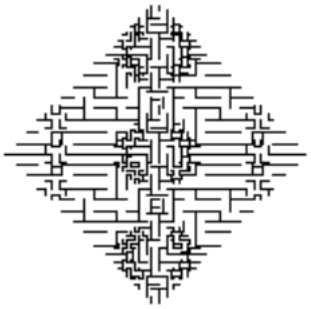
Évszázadokkal később a logaritmus nélkülözhetetlen volt a fraktál dimenzió számításánál. A középiskolában ma is tanítjuk a logaritmus azonosságait, bár a numerikus számolásban csökkent a jelentősége.

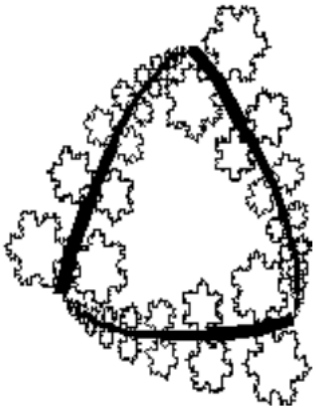
4.3. Út a Hausdorff-dimenzió felé

"Ameddig a matematika törvényei utalnak a valóságra, addig nem bizonyosak, amikor azonban bizonyossá válnak, elvesztik a kapcsolatot a valósággal."

Albert Einstein

Felix Hausdorff (1868-1942) és Abram Besicovitch (1890-1970) forradalmasították a matematikát a nem egész értékű dimenziók bevezetésével. Megmutatták, hogy bár egy egyenes 1 dimenzióval bír, a négyzet 2-vel, sok görbének "köztes" dimenziója van, melyet az ő tiszteletükre Hausdorff-Besicovitch dimenziónak hívnak.

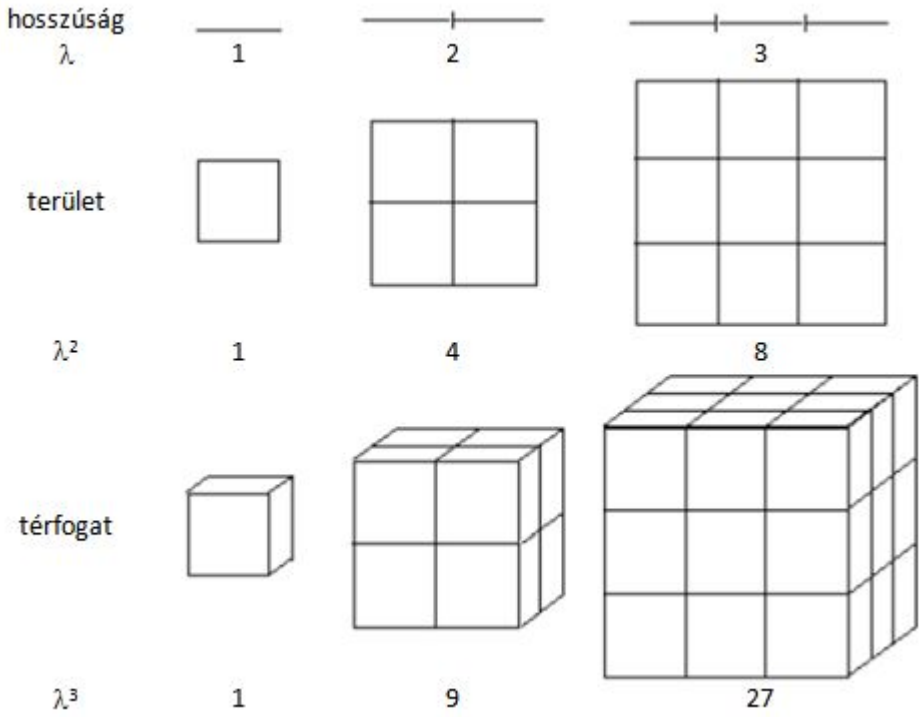




Hogy megértsük a Hausdorff-Besicovitch dimenziót, először alkalmazzuk ismert alakzatok "klasszikus" dimenziójának kiszámítására! a dimenzió számítására 3 különböző módszert szokás használni.

- Az önhasonló alakzatokra vonatkozó képlet;
- Richardson-módszer a dimenzionális "lejtő" számítására;
- A doboz-számláló módszer a fraktál terület, valamint térfogat arányának számítására

Ezek közül az elsőt ténylegesen bemutathatjuk az iskolában.
Hogy a fraktál dimenzió számítását bevezessük, egyszerűen a hagyományos dimenzió számolását kiterjesztjük. Egyszerű formulával kezdünk! Érdemes megvizsgálni, hogy egy szakasz, egy négyzet , és egy kocka milyen kapcsolatban van egymással.



Ha szakaszokkal akarok "kirakni" egy λ- szorosan nagyított szakaszt, akkor λ-szor annyi szakaszra van szükségem. Ha négyzetekkel akarok "kirakni" egy λ- szorosan nagyított négyzetet, akkor λ^2-szer annyi négyzetre van szükségem. Ha pedig kockákkal akarok "kirakni" egy λ- szorosan nagyított kockát, akkor λ^3-ször annyi kockára lesz szükségem. Valójában az egyetlen, ami változik a példákban, az a nagyítás hatványkitevőjét, is nevezhetnénk dimenziónak.

$$n = \lambda^d$$

mindkét oldal logaritmusát véve:

$$logn = log(\lambda^d) = dlog(\lambda)$$

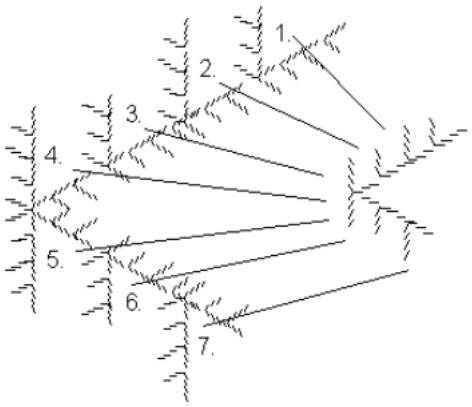
tehát a fraktál dimenziója:

$$d = \frac{log(n)}{log(\lambda)}$$

A dimenziók kiterjeszthetőek ilyen módon, de ezek mind egész dimenziók maradnak. A fraktálok azonban itt nyitnak kaput új világok felé.

4.4. Önhasonló fraktálok dimenziója

Az önhasonló alakzatok dimenziójának számítása elég egyszerű. Ez a módszer azonban csak olyan fraktáloknál működik, amelyek matematikai módszerekkel megjósolhatóak, és önhasonló részalakzatok vannak benne.



Az előbb definiált új dimenzió ugyan egész szám volt, de nem kötöttük ki, hogy minden esetben annak kell lennie. Ahhoz, hogy a dimenzió általánosítható legyen, ki kell fejezni, meg kell tudni, hogy valójában mi is az. Ezért átalakítjuk egy kicsit a

$$n = \lambda^d$$

egyenlőséget. Arról van szó, hogy n azt fejezi ki, hogy a λ arányú hasonlósággal nyert alakzat mértéke hányszorosa a kiindulási alakzat (ugyanannyi dimenziós) mértékének. Tehát n valójában

$$n = \frac{V(\lambda U)}{V(U)}$$

4.5. A Hausdorff-dimenzió

Mit tehetünk, ha a halmazunknak nem lehet a fenti módon megállapítani a dimenzióját? Ebben az esetben általánosítható ez a fogalom a következő gondolatmenettel.

- Definiáljuk a halmaz átmérőjét
- Definiáljuk a halmaz Hausdorff mértékét
- Definiáljuk a halmaz Hausdorff-dimenzióját

A Hausdorff-dimenzió definiálása a Hausdorff-mérték segítségével történik.

Először definiáljuk egy halmaz átmérőjét a következőképpen.

Definíció: egy halmaz átmérője legyen $U \subset \mathbb{R}^n$, nem üres halmaz. Ekkor az átmérője:

$$|U| = sup\{|x - y| : x, y \in U\}$$

Ez szemléletesen a következőt jelenti: Ha veszünk 2 egyenest, amelyek egymással párhuzamosak, és az adott halmaz két "szélére" illesztjük, mintha egy tolómérővel fognánk közre, akkor az összes irányban mért távolságuknak a suprémuma.

Definíció: Az U_i megszámlálható halmazrendszert F halmaz δ fedésének nevezzük, ha $0 \leq |U_i| < \delta$, és

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

Definíció: Az s-dimenziós δ-fedés:

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}\text{egy } \delta \text{ fedése} - F - nek\Big\}.$$

Definíció: tekintsük a $\delta \to 0$ határértéket!

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F),$$

ezt az F halmaz s - dimenziós Hausdorff-mértékének nevezzük.

A Hausdorff-mérték néhány tulajdonsága:

1.tulajdonság: Ha S egy hasonlósági transzformáció λ aránnyal, akkor

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

Tehát a halmaz s dimenziós Hausdorff-mértékét a nagyítási arány s-edik hatvány szorosra változtatja a hasonlóság. Pont ezt használjuk ki az önhasonló halmazok dimenzió-számítására.

2.tulajdonság: Legyen $F \subset \mathbb{R}^n$ és $f : F \to \mathbb{R}^m$ leképezés, ami teljesíti a Hölder-feltételt, tehát ha

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

egy $c > 0$ és $\alpha > 0$ számára, akkor minden s esetén

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$$

3.tulajdonság: Ha U_i egy δ-fedése F-nek, akkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

Magyarázat: az első egyenlőtlenség, mivel itt valós számokról van szó, az azonos alapú hatványok hatványkitevőire vonatkozó tételből következik, a második pedig a δ-fedés definíciójából következő felső becslés a halmazok átmérőire.

Következmény:

$$\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F).$$

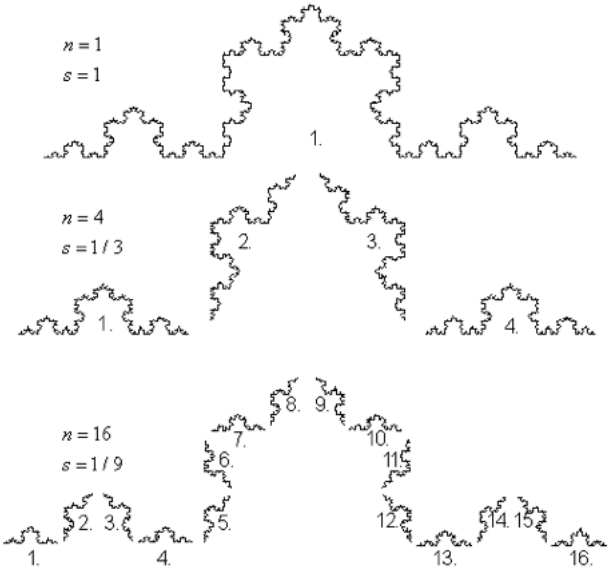
Ha vesszük a $\delta \to 0$ határátmenetet,
és ha $\mathcal{H}^s(F)$ korlátos, akkor $\mathcal{H}^t(F) = 0$ minden $t > s$ esetén. Azaz egyértelműen létezik olyan s, ahol $\mathcal{H}^s(F)$ 0-ra vált.

Definíció: F halmaz Hausdorff-dimenziója

$$dim_H F = inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\}.$$

4.6. A Koch görbe dimenziójának kiszámítása

A Koch görbe egy hópehely alakú fraktál, melynek magja egy egyenlő oldalú háromszög 2 szára, és néhány kezdő lépése a következő:



Hogy is kaptuk ezt a görbét? Mint már említettem, a maggal helyettesítünk minden lépésben minden szakaszt.

Alkalmazzuk a formulát, amit a fentiekben kaptunk a Koch görbére! Ez nagyszerű illusztrációnak, mivel igen egyszerűen konstruálható, és a dimenzióját is könnyen meg lehet állapítani.

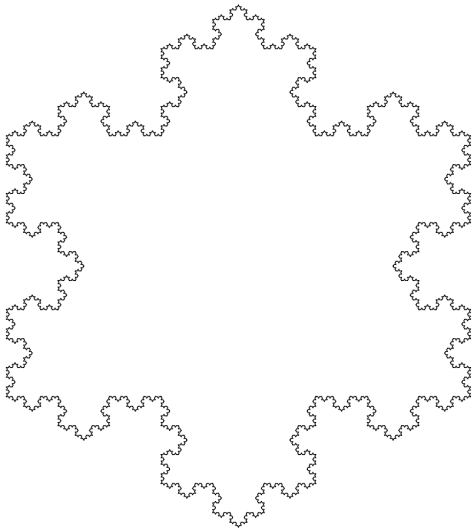
A Koch görbe 4 szakaszból áll, és minden szakaszt helyettesítünk az eredeti alakzat, $\frac{1}{3}$- ára kicsinyített képével.

A dimenzió kiszámításához az eredeti formulát használjuk, és mivel $s = \frac{1}{3}d = 4$, a formula alakja jelen esetben

$$4 = \frac{1}{(\frac{1}{3})^d} = 3^d.$$

Ebből kifejezzük d-t:

$$d = \frac{log(4)}{log(3)} \approx 1.26$$



ugyanezt a módszert használjuk a Koch hópehely dimenziójának kiszámítására: Mivel a Koch hópehely pontosan 3 Koch görbe összefűzve, ezért a Koch görbével megegyező értéket kapunk.
Számoljuk ki a Koch görbe dimenzióját a Hausdorff-dimenzió definíciójának segítségével! Ehhez szükség lesz egy olyan a_i halmazrendszerekből álló sorozatra, ahol a_i halmazrendszer δ_i fedése a Koch görbének, és

$$\lim_{i\to\infty} \delta_i \to 0$$

ezeknek a halmazrendszereknek az elemeinek a halmazai legyenek az $(\frac{1}{3})^i$ átmérőjű körök. Ekkor, mivel a Koch görbe i. iterációjában szereplő szakaszok hosszai megegyeznek ezen körök, átmérőinek hosszaival, ezért az i. iterációban szükséges halmazok száma 4^i.

Ezért a Koch görbe s-dimenziós Hausdorff mértéke:

$$\mathcal{H}^s(Koch) = 4^i((\frac{1}{3})^s)^i = (\frac{4}{3^s})^i$$

Hogy a dimenziót ebből megkapjuk, azt az s-t kell megkeresnünk, amire a fenti sorozat $i \to \infty$ határértéke "először kisebb" mint végtelen. Ez pont

akkor lehetséges, ha

$$\frac{4}{3^s} = 1,$$

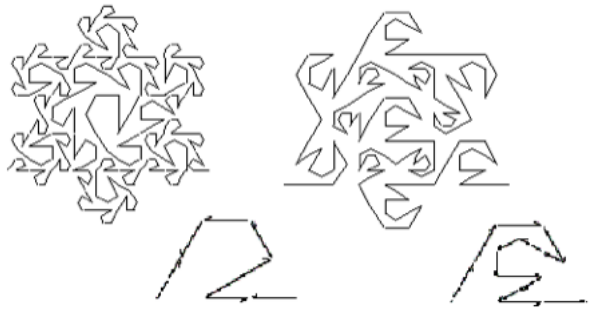
amit átrendezve kapjuk, hogy

$$s = \frac{log(4)}{log(3)}.$$

Tehát ugyanazt az eredményt kaptuk, mint a másik módszerrel.

A Koch hópehely görbe érdekessége, hogy végtelen hosszúságú görbével véges területet határol. A görbe ugyan folytonos, de semelyik pontjában nincsen érintője.

A Koch hópelyhet másképp is generálhatjuk. Ennél a technikánál a hópelyhet egy magból indítjuk, amelyet többféleképpen lehet megválasztani.



Mivel az egész hópehely egyetlen ilyen magból indul ki, ezért ez meghatározza az egész görbe dimenzióját. Tekintsük a 7- szakaszos (baloldali) hópelyhet! Mint látható, nem minden szakasz egyforma hosszú, úgyhogy az eddig használt egyenlőséget nem tudjuk közvetlen használni a dimenzió kiszámításához. Tudjuk, hogy mag 7 szakaszból áll, ebből 6 darabot $\frac{1}{3}$-ára csökkentünk, és egyet pedig $\sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0.577$ részére. Amennyiben minden szakaszt $\frac{1}{3}$ ára csökkentettünk volna, a dimenzió

$$d = \frac{log(7)}{log(3)}$$

lenne. Azonban van egy szakaszunk, amit hosszabbnak hagytunk. Ezért a dimenziónak nagyobbnak kell lennie. Az eredeti metódust általánosítjuk, a

dimenziót szakaszonként összegezve írjuk le.

$$\sum_i = 1^n s_i^d = 1$$

Ez pedig a mi 7 szegmenses hópelyhünk esetében a következőt jelenti:

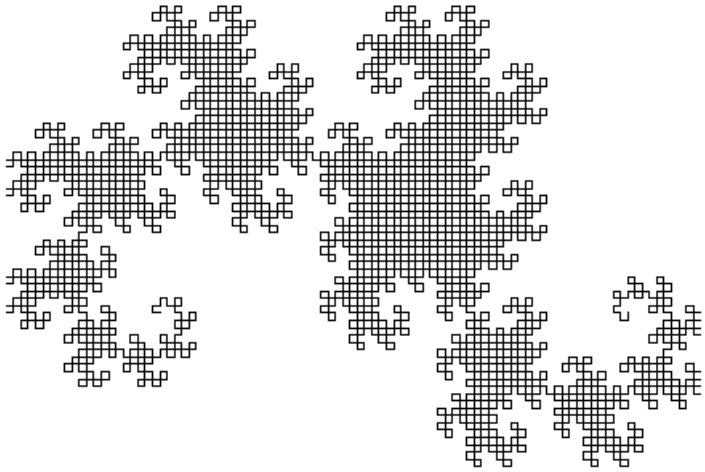
$$6(\frac{1}{3})^d + (\sqrt{\frac{1}{3}})^d = 1$$

Ha ezt az egyenletet megoldjuk, a dimenzióra d=2 eredményt kapjuk

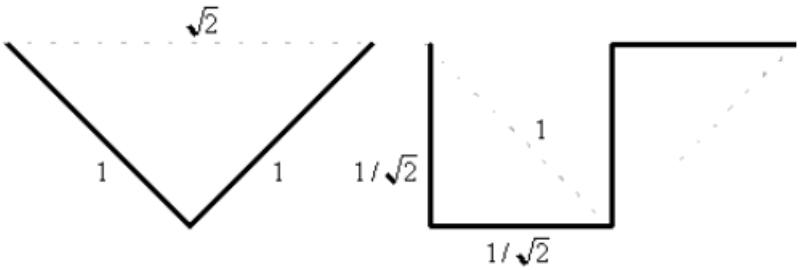
Ez az érték megegyezik a megfigyelt értékkel, miszerint a sík egy nemnulla területű részének minden pontját felfűzi.

5. Egyéb fraktálok vizsgálata

5.1. A sárkánygörbe



Az egyik legismertebb fraktál a sárkány görbe, melyet úgy kapunk, hogy szakaszra egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget emelünk, majd így teszünk minden kapott szakasszal.

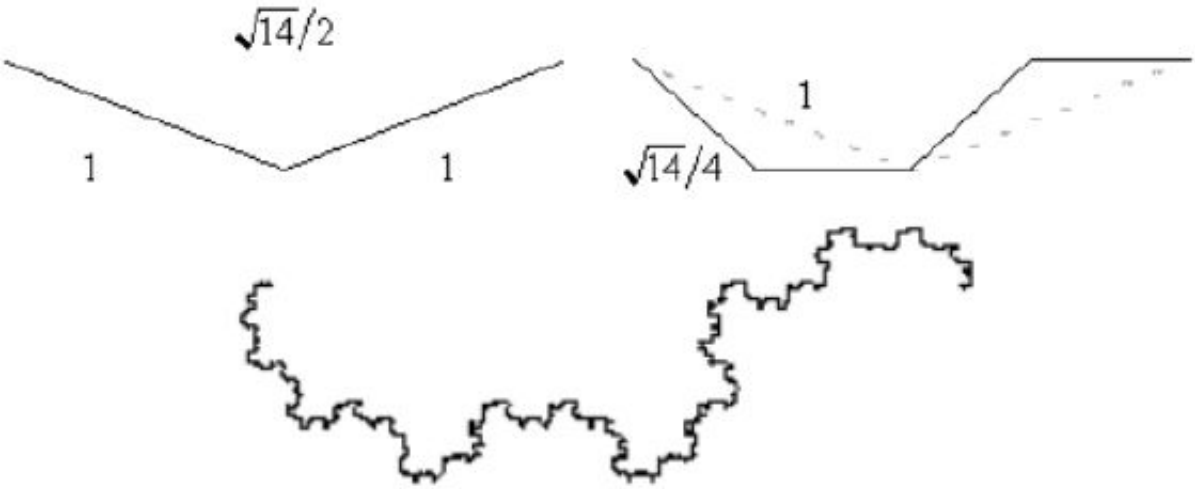


Ennek a görbének a dimenzióját kiszámíthatjuk a következő módon: két egység hosszú szakaszt helyettesítünk egyenként 2 db $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arányú hasonló képével. Ilyenkor egy szakaszt helyettesítő töröttvonal hossza $\sqrt{2}$-szöröse az eredeti szakasznak így a dimenzió:

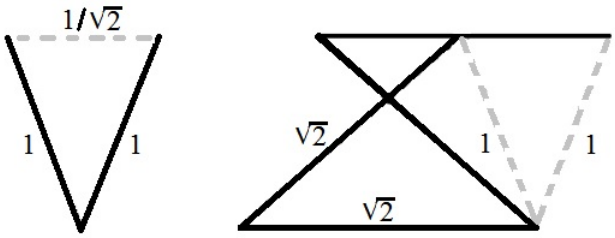
$$dim(U) = \frac{log(onhasonlo\ reszekszama)}{log(hasonlosag\ aranya)}$$

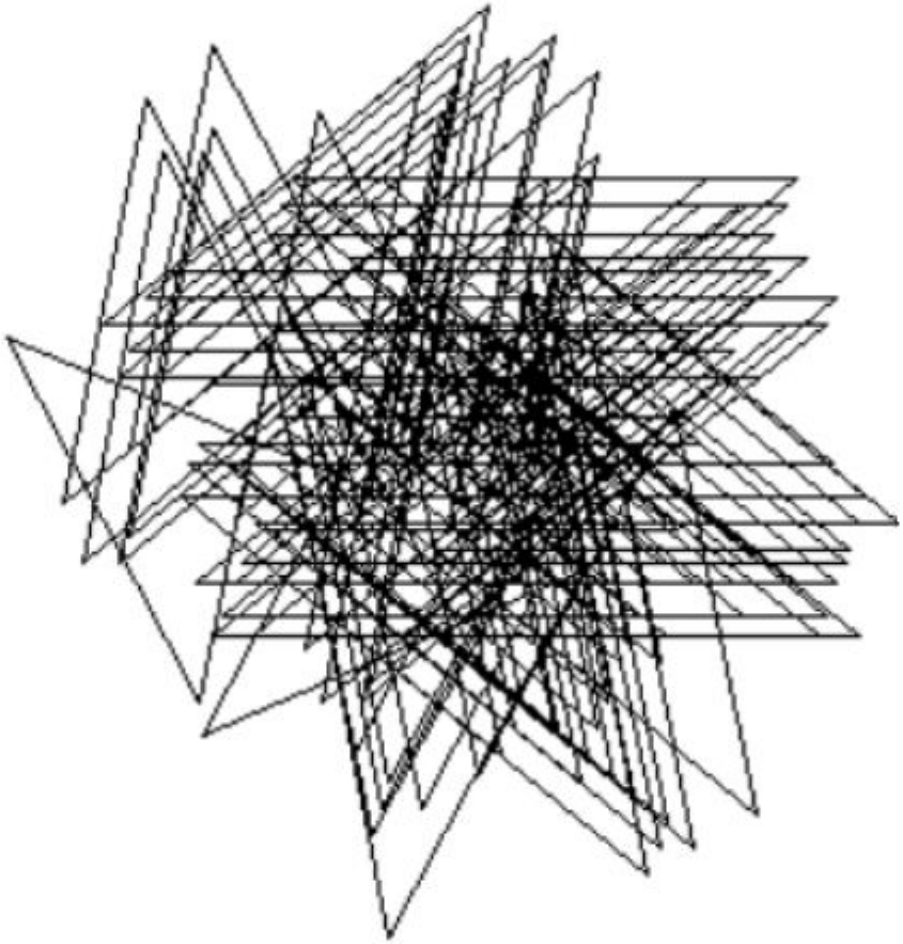
$$d = \frac{log(2)}{log(\frac{2}{\sqrt{2}})} = 2$$

ez pontosan azt jelenti, hogy a sárkánygörbe pontjai kiadnak egy 2 dimenzióban pozitív mértékű tartományt, illetve hogy nagyításra pont úgy viselkedik, mint egy 2 dimmenziós alakzat. A sárkánygörbében még az az érdekesség, hogy a kezdeti szögtől függően nagyon különböző görbéket kaphatunk. Például, ha a szakaszra állított háromszög szárak nagyobb szöget zárnak be.

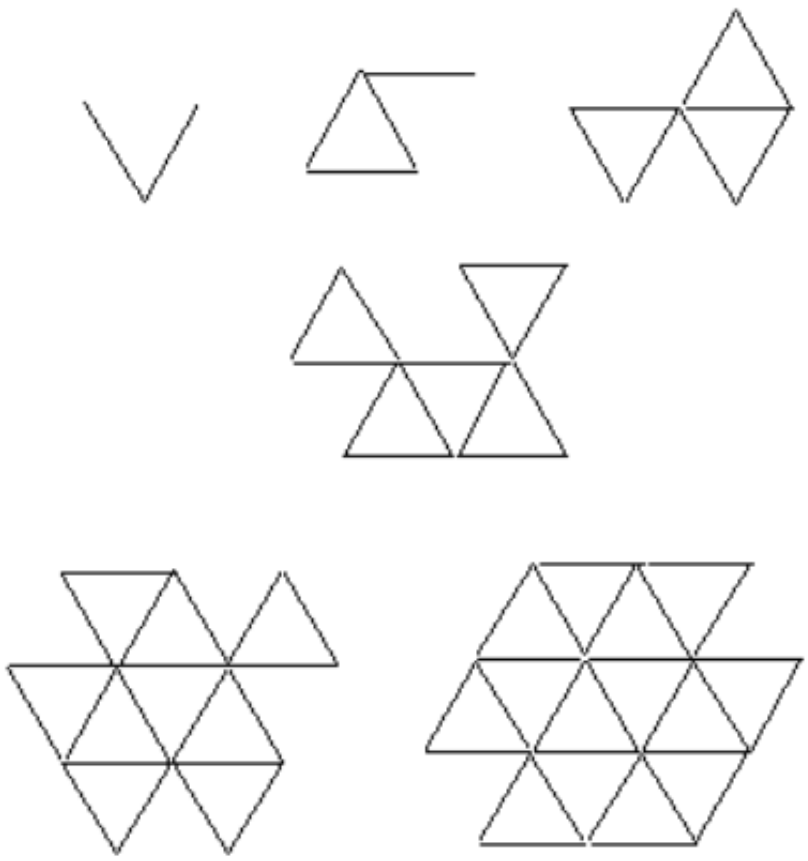


Így egy olyan görbét kapunk, melynek a dimenziója 2-nél kisebb. Most nézzük meg, hogy mi történik a sárkánygörbével, ha ezt a szöget, és így a háromszög alapját lecsökkentjük?





Ezzel természetesen ellentétes eredményt érünk el, mint a szög növeléssel, tehát nagyobb lesz a dimenziója. Érdekes módon így a görbének akár 2 fölé is növelhetjük a dimenzióját annak ellenére, hogy síkban van. A sárkány görbe eredeti változata korlátos síkrészt fed le, viszont a módosított alakzatra igaz, hogy nem határolható be az általa elfoglalt sík terület. Nem nehéz ezt belátni a monoton növekvő szakaszok segítségével, hogy bármely átmérőjű körből ki fog lógni egy adott mennyiségű iteráció után. Speciális eset még, amikor a szakaszok egymással 60 fokos szöget zárnak be, mivel így gyakorlatilag egy háromszöghálót növesztünk, bár ennek a dimenziója nem meghatározott:



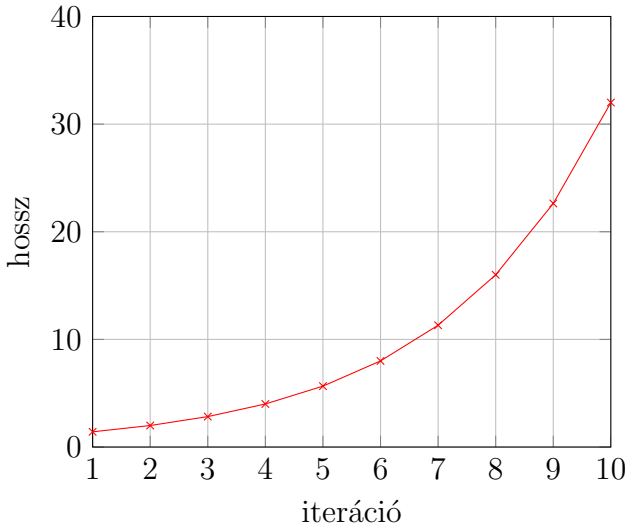
kérdés Mit jelent, hogy a görbének a dimenziója nem meghatározott?
MEGOLDÁS:
A fenti görbén egy egynelő oldalú háromszög 2 szárával helyettesítünk minden szakaszt, így a nagyítási arány 1, az új részek száma: 2 , tehát $d = \frac{log2}{log(1)}$

A kérdés most az, vajon nagyobb e a dimenziója ezeknek a fraktáloknak mint 2? A fizikai és matematikai válasz erre az, hogy nem, mivel 2 dimenziós térbe rajzolható. Elméletben azonban igen a válasz, bár ez inkább filozófiai értelmezés. A tény azonban az, hogy a sárkány görbe ezen változatai több "matematikai információt tartalmaznak", mint amennyivel a síkot meg lehetne tölteni. Ha találnánk módot arra, hogy felszabadítsuk ezt a fraktált a síkból, magasabb dimenziójú teret is meg tudna tölteni (csak úgy, mint a Hilbert-görbe szakaszai?). Valójában akár egy 4-dimenziós teret is megtölthetünk egy ilyen konstruált görbével, ha találnánk egy módot ahogy megkonstruáljuk.

feladat: Mennyi a sárkánygörbe n-ik iterációjának hossza?
MEGOLDÁS: minden szakasz helyére 2 db $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tehát az n-ik iterációban a hossz:

$$h_n = (\frac{2}{\sqrt{2}})^n h_0$$

feladat: Ábrázoljuk az egyes iterációkhoz rendelt görbe hosszát



feladat: Mekkora a görbe által lefedett terület(minél pontosabban becsülje meg)?

MEGOLDÁS:

Alsó becslés:

Alulról lehet könnyen becsülni a következőképpen: csak a háromszögeket számoljuk össze az n. iterációban, és ezeket adjuk össze. A legegyszerűbb gondolatmenet a következő: ha T_0 az első hajtásnál kapott háromszög területe, akkor minden hajtásnál 2 db fele akkora területű háromszöget kapunk, ha megfigyeljük, hogy az egyik kapott háromszöget tükrözzük az alapjára, akkor pont az előző iterációban lévő háromszöget kapjuk, tehát az eredmény T_0.

feladat:

Mennyi a dimenziója az 50° - os sárkánygörbének lásd általános eset

feladat:

Adjon képletet az α szögű sárkánygörbe dimenziójának kiszámításához!

MEGOLDÁS:

először is kiszámítjuk a nagyítási arányt a következő módon: (az egyenlő szárú háromszög alapját egységnek tekintve) a szár hossza a következő:

$$b = \frac{1}{2sin\frac{\alpha}{2}}$$

és mivel nagyítási arány $\frac{1}{b}$ mert egység az alap:

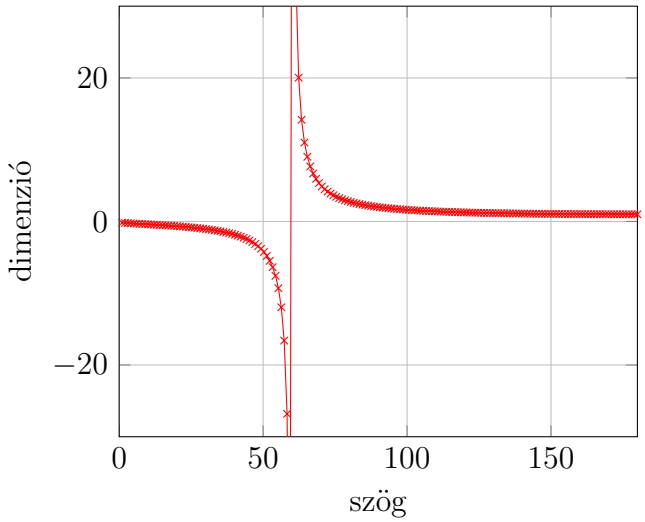
$$\lambda = 2sin\frac{\alpha}{2}$$

ez alapján a dimenzió:

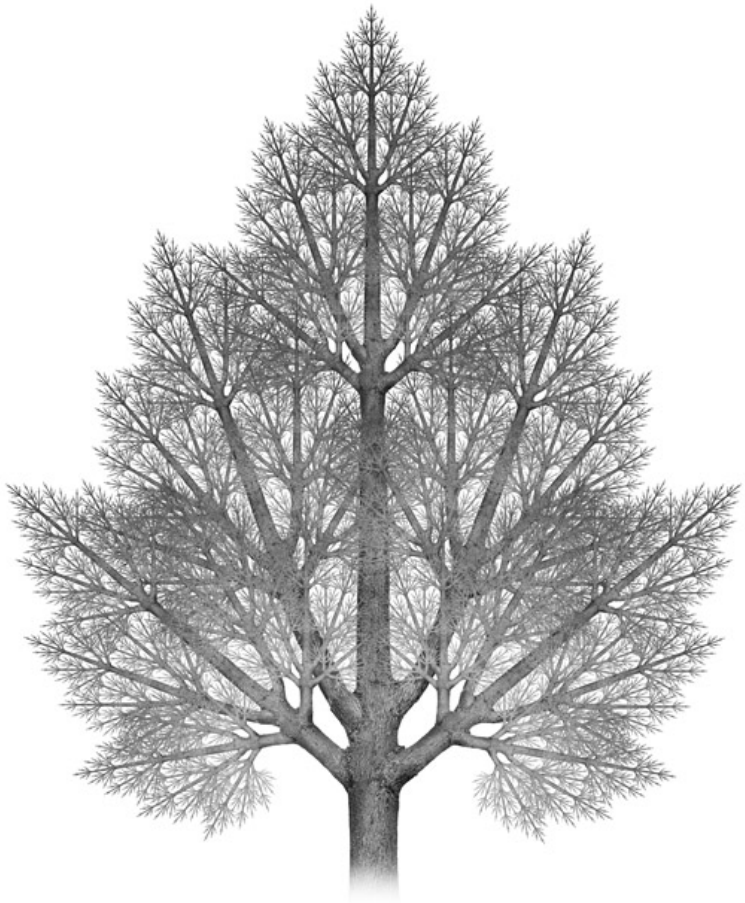
$$d = \frac{log(2)}{log(2sin\frac{\alpha}{2})}$$

feladat:

Ábrázolja a szög - dimenzió összefüggést grafikonon



5.2. L-rendszerek



Az Aristrid Lindenmayer által 1968-ban kidolgozott módszer eredeti célja a növényi fejlődés tanulmányozása volt. Az L-rendszer segítségével könnyen leírhatunk egy teknőcgrafika megalkotásának, vagy egy növény növekedésének lépéseit. Szimbólumai a toll mozgásirányát, lépéshosszait fejezik ki.

Lássunk egy példát az L-rendszer alkalmazására! Mivel növények növekedésének modellezésére szolgált, a vizsgálat tárgya egy fraktál fa lesz. A rajzolás leírása a következőkben összefoglalt elemek felhasználásával lehetséges.

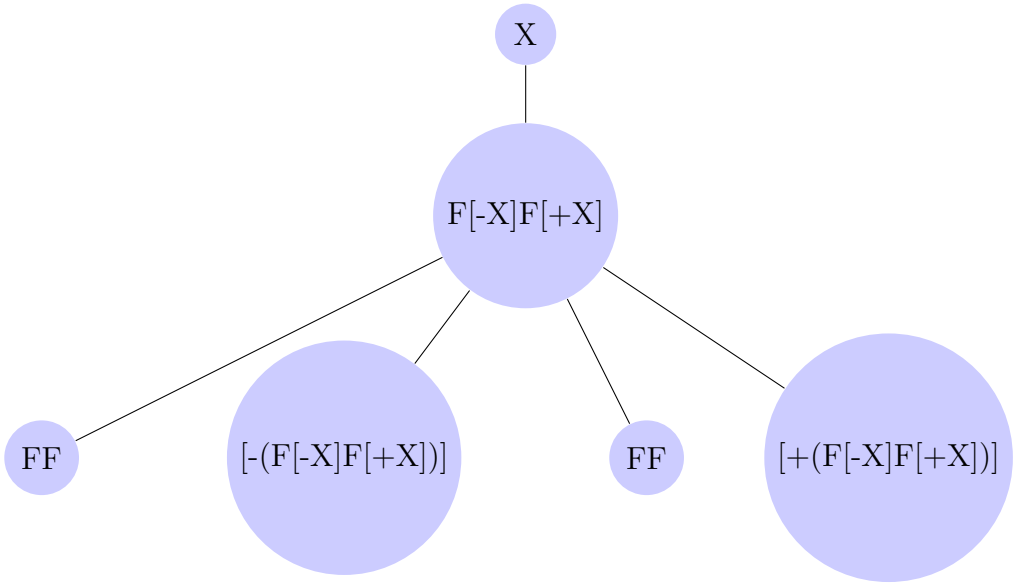
- F Előre mozgás
- + Jobbra fordulás
- - Balra fordulás

- [ ] A belső műveletek elvégzése után visszatérés az eredeti pozícióba
- Extra hosszú vonal

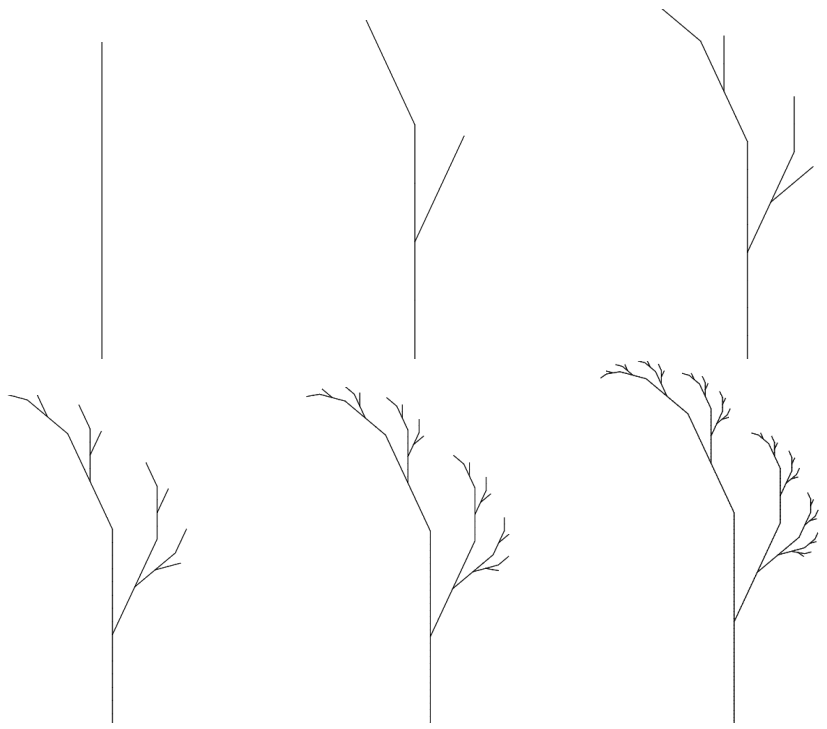
A szerkesztés tényleges végrehajtásához szükséges még a kiindulási állapot (axiómák), szabályok és konstansok definiálása.

1.példa: Tekintsük illusztrációul a következőt:
konstans:X
axióma:X
szabály1: F=FF
szabály2: X=F[-X]F[+X]

A konstrukció szemléletesen úgy történik, hogy kiindulunk az axiómából, és minden iterációban az előző formulában lévő konstansokat és változókat helyettesítjük a szabály alapján. A módszer jól látszik, a következő gráfon.



Egy fát építünk, amelynek az első 6 iterációja a következőképpen néz ki:



2.példa: konstans:X
axióma:X
szabály1: F=FF
szabály2: X=F-[[X]+X]+F[+FX]-X.

Ennek a fraktálnak már sokkal inkább buga virágzatra emlékeztető alakja van:

1.feladat:

Mi az l-rendszeres leírása a sárkánygörbének?

2.feladat:

Mi az l-rendszeres leírásaa Koch görbének?

3.feladat:

Fésülje össze a Koch, és sárkánygörbe szabályait!

4.feladat:

Mennyi a dimenziója a fenti a fraktálnak?

5.feladat:

Számít e az összefésülés sorrendje a dimenzió számításánál?

5.3. Az IFS (iterált függvényrendszerek) pontosabban

Mandelbrot szerint a fraktál egy olyan halmaz, amelynek Hausdorff-dimenziója nagyobb a topológiai dimenziójánál.

Egy IFS fraktál a következő tételek alapján állítható elő.

Tétel: Legyenek $S_1, ..., S_m$ hasonlóságok $\mathbb{R}^n$- ben, a hasonlóságok arányai legyenek 1-nél kisebb pozitív valós számok. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $F \subset \mathbb{R}^n$ nem üres kompakt halmaz, amire

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Ezt a halmazt nevezzük a hasonlósághalmaz attraktorának.

Definíció: Definiáljuk $\mathbb{R}^n$ nem üres kompakt részhalmazainak $\mathcal{K}$ halmazán az alábbi transzformációt: legyen $E \in \mathcal{K}$ esetén

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E).$$

Ezt hívjuk kombinált transzformációnak.
Ez lényegében egy idomon halmazon vagy halmazrendszeren végrehajtott többféle transzformáció által kapott halmazok uniója.

Jelölje S^k azt a transzformációt, amit úgy kapunk, hogy S-t egymás után elvégezzük k-szor, azaz $S^0(E) = E$, és $k \geq 1$ esetén $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$.

A fenti egyértelműen meghatározott F halmaz előállítható úgy, hogy ha $E \in K$ olyan halmaz, amire $S(E) \subset E$

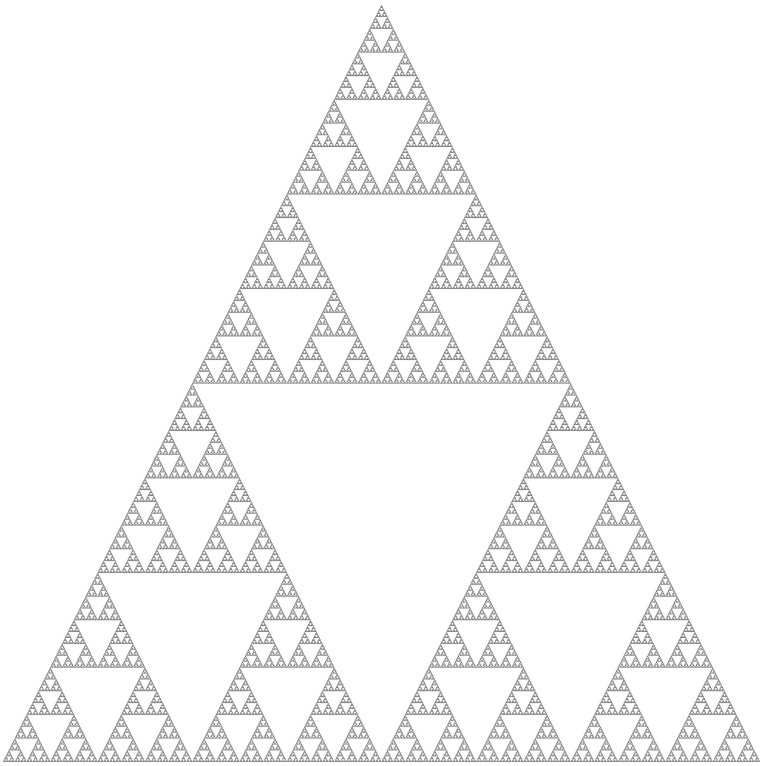
$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k(E).$$

6. Vegyes szakköri feladatok

A következőkben néhány ismert önhasonló alakzat általánosításával foglalkozunk. Megvizsgáljuk a dimenziójuat is.

Elsőként tekintsük a Sierpinski háromszöget és annak egy bővítését, a Sierpinski tetrix-et, mely 3-dimenziós térbe bővíti a Sierpinski háromszöget. Majd vizsgáljuk ennek a több dimenzióra való általánosítását. Az alábbiakban mindig az önhasonlóságot fogjuk felhasználni a feladatok megoldásában, általában a halmaz i. iterációjának jelölése U_i lesz.

1.1 Feladat: Mennyi a Sierpinski háromszög n-ik iterációjának kerülete? Mi jellemző a teljes Sierpinski háromszög területére és kerületére?



MEGOLDÁS: Az egyszerűség kedvéért TFH. a 0. iterációnak a kerülete:

$$K(U_0) = 1$$

. Mivel a következő iterációt úgy kapjuk, hogy 3 db $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyített halmazt helyezünk egymás mellé, így

$$K(U_1) = \frac{3}{2}K(U_0)$$

. Minden iterációban ugyanígy járunk el, ezért rekurzívan a kerület: $K(U_n) = \left(\frac{3}{2}\right)K(U_{n-1})$ tehát a zárt képlet a következő:

$$K(U_n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n K(U_0)$$

Hasonlóan gondolkozva a területről: egységnek tekintve az egyenlő szárú háromszög területét, mivel a terület nem a felére, hanem a negyedére csökken, így $T(U_n) = \frac{3}{4}T(U_{n-1})$ a zárt képlet pedig:

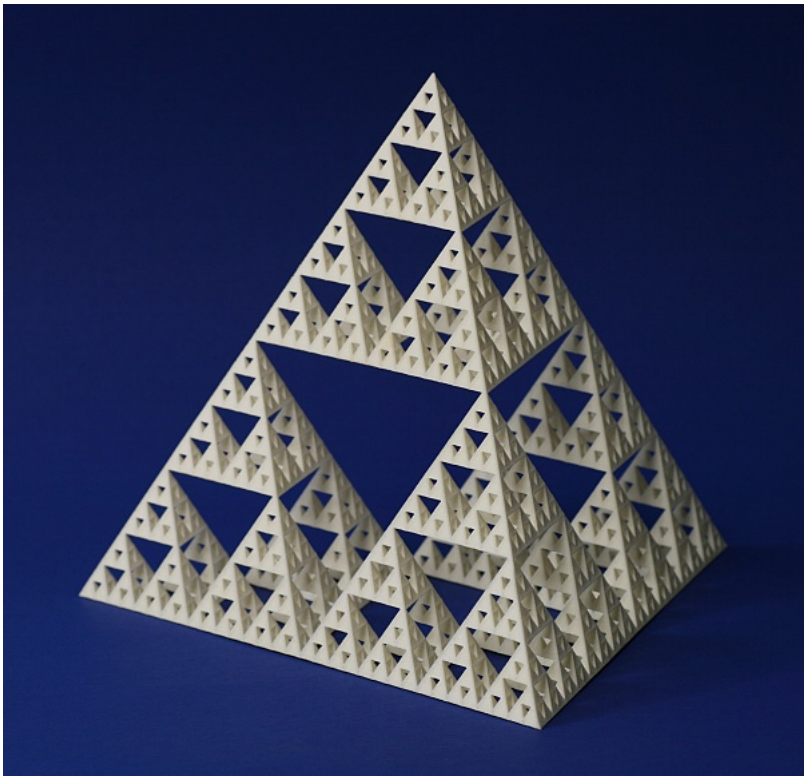
$$T(U_n) = (\frac{3}{4})^n T(U_0)$$

érdemes megfigyelni, hogy a sorozatok határértékeire:

$$\lim_{n\to\infty} T(U_n) = 0, \lim_{n\to\infty} K(U_n) = \infty$$

Tehát végtelen kerület és 0 terület.

1.2.Feladat: Mennyi a Sierpinski-tetrix n-ik iterációjának térfogata, felszíne? Mi jellemző a teljes Sierpinski-tetrix felszínére és térfogatára?



MEGOLDÁS: Az előző megoldáshoz hasonlóan most is tetszőlegesen megválaszthatjuk a kiinduló tetraéder méretét, az egyszerűség kedvéért legyen ez $A(U_0)$ és $V(U_0)$. Ekkor a felszíne: $A(U_n) = A(U_{n-1})$, mivel 4 db $\frac{1}{4}$ felszínű tetraéder uniója, térfogata: $V(U_n) = \frac{1}{2}V(U_{n-1})$.

Zárt képletek tehát:

$$A(U_n) = A(U_0)$$

$$V(U_n) = (\frac{1}{2})^n V(U_0)$$

A határértékek:

$$\lim_{n\to\infty} A(U_n) = A(U_0), \lim_{n\to\infty} V(U_n) = 0.$$

1.3.Feladat: Mennyi a fenti halmaz 4-dimenziós általánosításának a dimenziója?

MEGOLDÁS: Tekintsük most a dimenzió változását! A Sierpinski háromszög dimenziója az önhasonló halmazok dimenziójára vonatkozó tétel alapján

$$dim(U) = \frac{log(onhasonlo\ reszekszama)}{log(hasonlosag\ aranya)}$$

a háromszögre:

$$d = \frac{log(3)}{log2}$$

a tetrixre:

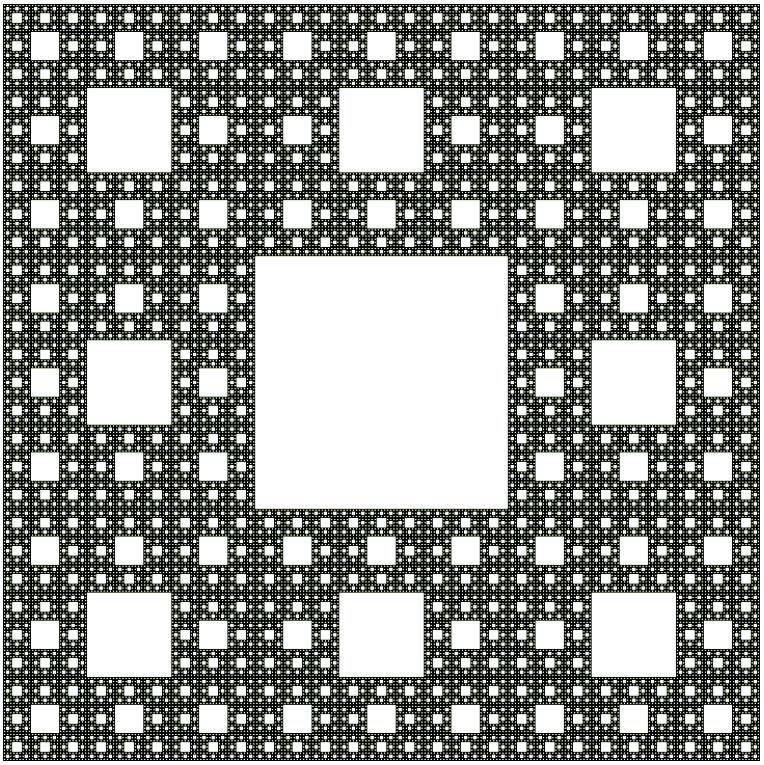
$$d = \frac{log(4)}{log2}$$

.

Nem nehéz megsejteni a halmaz konstrukciójából, hogy az alkalmazott hasonlóság aránya mindig $\frac{1}{2}$, illetve a tetraédernek csakúgy, mint a magasabb dimenziós megfelelőinek minden csúcsába kicsinyítünk egyet az előző iterációból, így a 4-dimenziós változat dimenziója $d = \frac{log(5)}{log2}$ lesz, általában az n-dimenziósnak pedig:

$$d = \frac{log(n)}{log(2)}.$$

2.1.Feladat: Mennyi a Sierpinski szőnyeg n-ik iterációjának kerülete, területe? Mi jellemző a teljes Sierpinski szőnyeg területére, és kerületére?



MEGOLDÁS: Hasonlóan járunk el, mint a Sierpinski háromszög esetében, az első iterációval $\frac{1}{3}$ ára csökkentjük az eredeti alakzatot, és 8 db vele egybevágót tolunk el a négyzet oldalai mentén. így a kerületre jellemző:

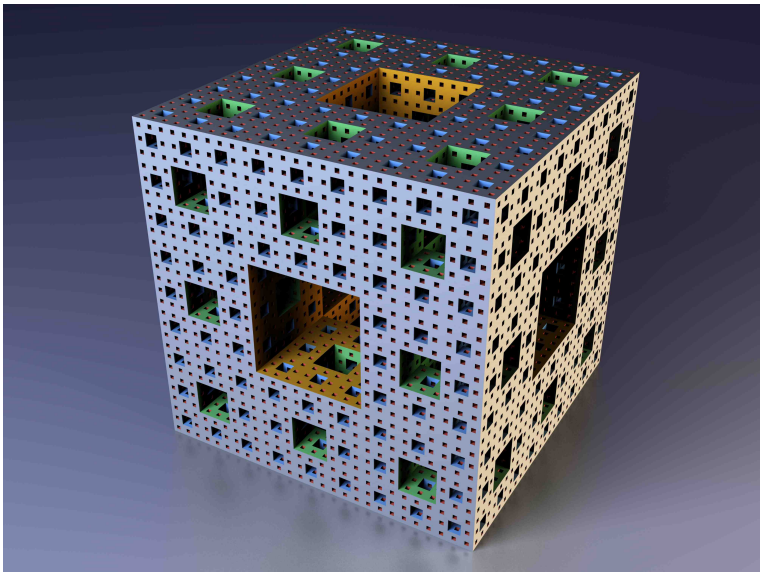
$$K(U_n) = K_0 + \frac{K_0}{3} + \sum_{i=2}^{n} (\frac{8}{3})^n,$$

ahol K_0 az egységnégyzet kerülete. Ennek a határértéke ismét ∞. A területekre a következő áll fent:

$$T(U_n) = \frac{8}{9} T(U_{n-1}) = (\frac{8}{9})^n T(U_0),$$

aminek a végtelenben vett határértéke: 0, tehát végtelen kerületű, 0 területű síkidom.

2.2.Feladat: Mennyi a Menger szivacs n-ik iterációjának térfogata, felszíne? Mi jellemző a teljes Menger szivacs felszínére és térfogatára?



MEGOLDÁS: A Menger szivacs esetében a felszín megint nehezebben kezelhető, mint a térfogat. Elmondható a Menger- szivacsról, hogy mindig 20 db kisebb önmagához hasonló alakzatból áll, így az i. iterációban 20^ikis kockának az összessége. Ezeknek a térfogata az eredeti kocka térfogatának$(\frac{1}{27})^i$ szerese .

A felszín meghatározása: Mivel minden lépésben a kis kockákban 24 db új négyzet keletkezik, ezért az i-ik lépésben keletkező új négyzetek összfelszíne:

$$\frac{(20(a_0^2))^{i-1}}{9^i}24.$$

Az elveszett négyzetek pedig az előző felszín $\frac{1}{9}$-ed része.
Az i. iterációban maradó rész:

$$(\frac{8}{9})A(U_{i-1})$$

, tehát ezt összesítve az i. iteráció utáni összfelszín:

$$A(U_i) = (\frac{8}{9})A(U_{i-1}) + \frac{(20(a_0^2))^{i-1}}{9^i}24.$$

A térfogat:

$$V(U_n) = V_0(\frac{20}{27})^n,$$

ahol V_0 a kezdő kocka térfogata.

2.3.Feladat: Mennyi a fenti halmaz 4-dimenziós általánosításának a dimenziója?

MEGOLDÁS: A Sierpinski szőnyeg dimenziója: $dim = \frac{log(8)}{log(3)}$. A Menger szivacs dimenziója: $dim = \frac{log(20)}{log(3)}$.
Érdemes észrevenni, hogy a Menger szivacs vetülete az oldalai síkjára Sierpinski szőnyegek. Ennek belátásához gondoljunk arra, hogy hogyan is áll elő a Sierpinski szőnyeg és a Menger szivacs! Mindkettőnél az egyes koordináták szerint a négyzet, illetve a kocka egyes oldalai 3 intervallumra vannak osztva, és az olyan kis négyzetek, illetve kockák lesznek elhagyva, amelyek pontjai legalább 2 koordináta szerint a középső intervallumba esnek. Legegyszerűbb úgy számolni, hogy összeszámoljuk azokat a kockákat, amelyeknek a pontjai egyik koordináta szerint sem esnek a középső intervallumba, majd azokat, amelyeknek a pontjai pontosan egy koordináta szerint esnek a középsőbe. Ez a 3-dimenziós Menger szivacsnál: 2*2*2 +2*2*3 = 20, míg 4 dimenzióban: 2*2*2*2 + 2*2*2*4 = 16 + 32 = 48.

Tehát a 4-dimenzióra általánosított Menger szivacs dimenziója:

$$d = \frac{log(48)}{log(3)} \approx 3.5237...$$

2.3.Feladat: Mennyi a fenti halmaz i-dimenziós térre való általánosításának a dimenziója?

Az általánosított Menger szivacs önhasonló részeinek száma az i. dimenzióban:

$$n_i = 2^i + 2^{i-1}i.$$

Ez alapján az i-dimenziós Menger szivacs dimenziója:

$$d_i = \frac{log(n_i)}{log(3)} = \frac{log(2^i + 2^{i-1}i)}{log(3)}.$$

3.1.Feladat: Egy szalagból könnyen lehet szabályos tetraédert hajtogat-

ni. Vajon hogyan?

MEGOLDÁS: Vegyünk egy kb 2 cm széles szalagot! A tetraéder oldallapjai szabályos háromszögek, tehát 60 fokosak az élszögei, így a szalagot úgy kell hajtogatni, hogy minden keletkező háromszög szabályos legyen, tehát a szalag oldalára illeszkedő csúcsnál három darab szabályos háromszög találkozik. Hajtogassuk tehát a szalagot a következő módon:

7. Összegzés

Ezzel a dolgozattal csak ablakot nyitottunk egy nagyon érdekes, és matematikailag is összetett világra, amelyben tudós, diák egyaránt találhat neki tetsző problémákat, és alkalmazásokat.

8. Felhasznált irodalom

http://www.math.bme.hu/ balazs/eampr10f/fraktalok_20101022.pdf
http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mattan/2012/beringer_dorottya.pdf
Ian Stewart: A matematika problémái - Oxford 1987
http://messzejaro.atw.hu/oldpages/fractal.html
Edwin A. Abott: Flatland 1884
Euklidész: Elemek
Sain Márton: Nincs királyi út! Matematikatörténet - Budapest 1986
Máté László: Fraktáldimenziókról egyszerűen
Kenneth FalconerFractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications , John Wiley, Second Edition, 2003.
Lakatos:Bizonyítások és cáfolatok
Reimann István: A geometria határterületei
Wikipedia

9. Ábrák forrása

http://www.kevs3d.co.uk/dev/lsystems/
http://www.geocities.co.jp/Technopolis-Mars/2607/SPR/spr/ASpr2.JPG
http://en.wikipedia.org/wiki/File:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg
http://www.daviddarling.info/images/tesseract.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/9/91/Logarithmic_spiral_each_rotation_double_the_las
http://www.revellphotography.com/blog/wp-content/uploads/2009/04/spiral.png