A 2-es számrendszer tanítása interaktív módon

órán és szakkörön

Készítette: Ránkyné Szalay Rita

Témavezető: Dr. Fried Katalin

Eötvös Lóránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematika tanári szak

2016.

NYILATKOZAT

Név: Ránkyné Szalay Rita

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika tanár

NEPTUN azonosító: FKPR9N

Szakdolgozat címe: A 2-es számrendszer tanítása interaktív módon

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2016. május 9.

_____

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Fried Katalin tanárnő témavezetőmnek, hogy lehetőséget biztosított munkám sikeres elvégzéséhez és dolgozatom megírásához. Köszönöm segítőkész támogatását és dolgozatom alapos és kritikus átnézését. Külön köszönöm, hogy rávezetett arra, hogy ez a téma lesz számomra a megfelelő, nagyon nagy örömmel dolgoztam rajta.

Köszönöm a családom türelmét, férjem, Ránky Miklós segítségét a fordításban és az átnézésben, gyermekeimnek pedig azt, hogy időnként hagytak nyugodtan dolgozni.

Tartalomjegyzék

Bevezetés 5
A szakdolgozat célja 6
Rövid történeti áttekintés 7
Kína, Kr. e. 3000 körül 7
Egyiptom, Kr. e. 1750 körül, a Rhind papirusz 7
Thomas Harriot (1560-1621) 8
Francis Bacon (1561–1626) 9
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) 9
Pierre (vagy Petr) Dangicourt (1664-1727) 9
A 2-es számrendszer alkalmazása 10
A 2-es számrendszer tanításának szokásos módja 11
Általános iskolában 11
Középiskolában 14
Tizedestörtek átváltása 15
Alapműveletek a 2-es számrendszerben 17
Az elkészített programok felépítése, ismertetése és alkalmazása az oktatásban 20
Átszámító program 20
Korong-bedobós program 21
Demonstrációs eszköz-bemutató program 23
Ujjakon számlálós program 24
Trükkös szorzás a 10-es számrendszerben 25
Trükkös szorzás a 2-es számrendszerben 27
Összegzés 29
Melléklet 30
Irodalomjegyzék 37

„Mondd el és elfelejtem; mutasd meg és megjegyzem; engedd, hogy csináljam, és megértem.” (Konfuciusz)

Bevezetés

Az általános- és középiskolákban jelenleg a 2-es számrendszerrel kapcsolatos tananyag nagyon szerény helyet kap. Ugyanakkor, mai világunkban – különösen a számítógépek rohamos terjedésével – a 2-es számrendszer és alkalmazásai jobban áthatják életünket, mint valaha. Érdekes módon, a 10-es számrendszerrel szemben a 2-es számrendszer gyakorlati megértése nagyobb nehézséget okoz a diákság körében, mint gondolnánk.

Jelen dolgozat abban kíván segítséget nyújtani, hogy átgondolt interaktív módszerekkel könnyebbé, gyorsabbá és mélyebbé tegye ezen terület megértését és elsajátítását a tanulók számára. Az anyag szöveges részeit kiegészítendő, működő és Internetről közvetlenül hozzáférhető oktatási programokkal egészítettem ki. Ezen programok és rajzok saját készítésűek.

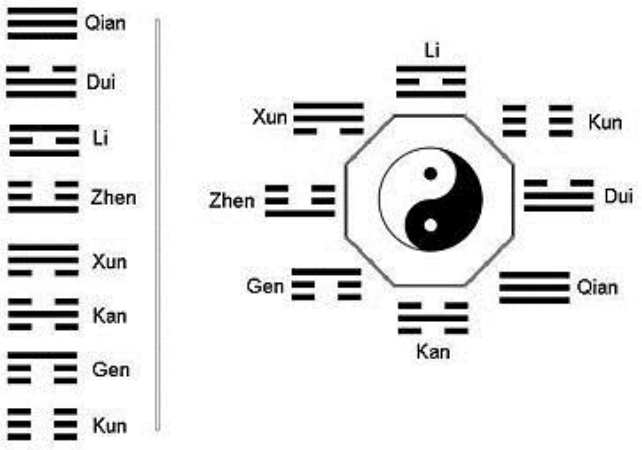
A szakdolgozat célja

A számítástechnikai eszközök fejlődése és egyre szélesebb körű hozzáférése okán az interaktív oktatóprogramok jelentősége egyre nagyobb. A tanulók ilyen irányú előzetes tapasztalatai is elősegítik azt, hogy az ilyen jellegű oktató anyagokat nagyon jó hatásfokkal tudják használni. Dolgozatomban többek között arra akartam rámutatni, hogy mennyire élményszerűvé lehet tenni egy-egy tananyagrész elsajátítását. Egyben bátorításnak szánom, hogy a jövőben mennél több ilyen jellegű tananyagrész készüljön.

Rövid történeti áttekintés

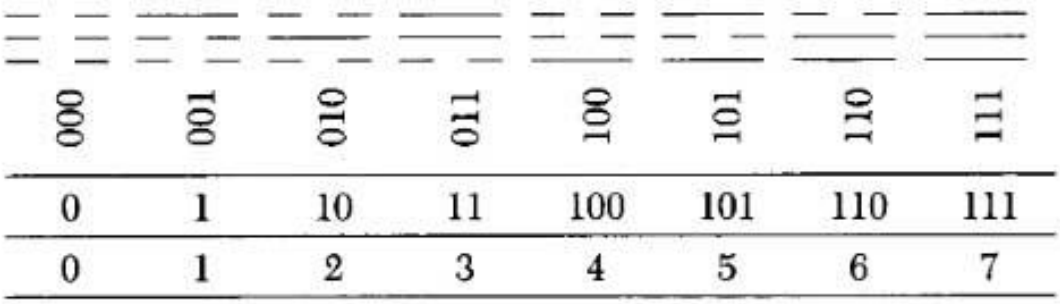
Kína, Kr. e. 3000 körül

A konfucianizmus egyik szent könyve, a Ji Csing, Kr. e. 3000 környékén íródott. Alapjelei, a nyolc kua létrehozását Fu-Hszi császár nevéhez kötik.



[1]

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) német polihisztor az Explication de l'arithmétique binaire című művében is foglalkozik ezekkel a jelekkel, melyek a 2-es számrendszer alapjának tekinthetők, ahol a zárt vonal jelenti az 1-et és a törött vonal a 0-t.



[2]

Egyiptom, Kr. e. 1750 körül, a Rhind papirusz

1858-ban Henry Rhind skót régiségkereskedő Egyiptomban megvásárolt egy papiruszt (amit ma Rhind papirusz néven ismerünk), mely kb. Kr. e. 1750-ben íródhatott. Írója Ahmesz királyi írnok volt, és a papirusz a mindennapi élettel kapcsolatos matematikai feladatokat tartalmazott megoldásokkal együtt. Az egyiptomiak a négy alapműveletet mind az összeadásra próbáltak visszavezetni. Az az érdekes, hogy az egész számok szorzását a kettőzés műveletével hajtották végre. Így számolták a 12·12-t:

[1] A kép a https://hu.wikipedia.org/wiki/Ji_csing weboldalról származik.
[2] A kép Gottfried Wilhelm Leibniz: Explication de l'arithmétique binaire című művéből származik.

$1 \cdot 12 = 12$
$2 \cdot 12 = 24$
$\mathbf{4 \cdot 12 = 48}$
$\mathbf{8 \cdot 12 = 96}$

Itt észrevették, hogy a 12·12 az a 4·12 és a 8·12 összege, ezeket a sorokat megjelölték és összeadták. Az egyik általam készített programnak is ez a „trükkös szorzás” az alapja, mely mind a 10-es, mind pedig a 2-es számrendszerben is alkalmazható.

Thomas Harriot (1560-1621)

Thomas Harriot angol matematikus és asztronómus után több ezer oldal publikálatlan kézirat maradt. Az egyiken mindenféle magyarázat nélkül ez állt:

1	1
2	2
3	2+1
4	4
5	4+1
6	4+2
7	4+2+1
8	8
9	8+1
10	8+2
11	8+2+1
12	8+4
13	8+4+1
14	8+4+2
15	8+4+2+1

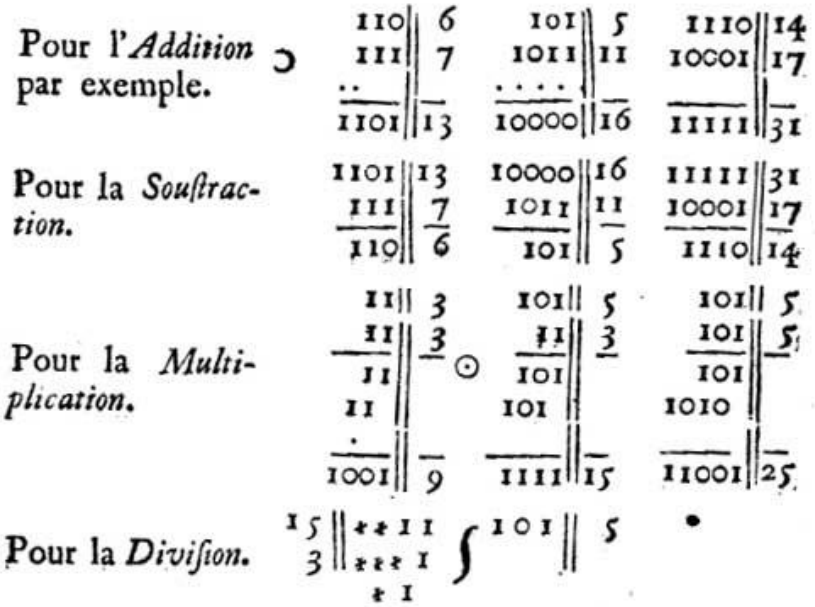
16	16
17	16+1
18	16+2
19	16+2+1
20	16+4
21	16+4+1
22	16+4+2
23	16+4+2+1
24	16+8
25	16+8+1
26	16+8+2
27	16+8+2+1
28	16+8+4
29	16+8+4+1
30	16+8+4+2
31	16+8+4+2+1

Francis Bacon (1561–1626)

Francis Bacon brit filozófus létrehozott egy – önmaga által „bi-literal”-nak nevezett – kódot[3], melyben az akkori ábécé 24 betűjét feleltette meg egy összesen 2 karakterből (A és B) álló, 5-jegyű jelrendszernek. Az A-t 0-nak, a B-t pedig 1-nek véve Bacon matematikailag pontos egymásutániságban írta le a számokat a 00000-tól 10111-ig.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz 1703-ban az Explication de l'arithmétique binaire művében leírta a 2-es számrendszer számainak alakját, és példákat adott a négy alapművelet használatára a 2-es számrendszerben:



Leibniz ugyanúgy 0-t és 1-et használt számjegyeknek, ahogyan ma is használjuk.

Pierre (vagy Petr) Dangicourt (1664-1727)

Pierre Dangicourt francia matematikus 1710-ben publikált a Miscellanea Berolinensia folyóirat első számában. Leibniz-cel ellentétben – aki nem használt hatványokat az Explication de l'arithmétique binaire művében – Dangicourt az alábbi kijelentést tette a 2-es számrendszerben: az fedcba kifejezés megfelel az

$$f\cdot 2^5 + e\cdot 2^4 + d\cdot 2^3 + c\cdot 2^2 + b\cdot 2^1 + a\cdot 2^0$$

összegnek, ahol a betűk 0-k vagy 1-ek lehetnek.[4]

[3] Francis Bacon: De Augmentis Scientarum, 1623.

[4] Anton Glaser: History of Binary and Other Nondecimal Numeration (Tomash Publishers, 1924), 53. oldal

A 2-es számrendszer alkalmazása

Bár mi a 10-es számrendszert használjuk mindennapi életünkben, mivel ez nekünk „testhezálló” a tíz ujjunk miatt, de a számítástechnikában sokkal egyszerűbb az adatok tárolására és továbbítására, ha azokhoz csak kétféle jelet használunk. A kapcsolók, relék, majd később ezek elektronikus utódai, a kapcsolóáramkörök csak két állapotban lehetnek: zártan vagy nyitottan (illetve a tranzisztorok esetén alacsony illetve magas feszültségről van szó).

Bár ma már a számítástechnika miatt teljesen egyértelműek a 2-es számrendszer előnyei, azonban Leibniz szerint a korai időkben is számos előnye lett volna az alkalmazásának:

„Mert, ez olyan, mintha valaki azt mondaná, hogy például az 111 vagy 7 az a 4-nek, 2-nek és 1-nek az összege, vagy pedig az 1101 vagy 13 a 8, 4 és 1 összege. Ez a felismerés lehetővé teszi, hogy a becsüsök a különféle tömegek meghatározását kevesebb súly felhasználásával tudják elvégezni. Továbbá pénzérméket lehet úgy megtakarítani, hogy az adott értékeket kisebb számú érmével lehet megadni.”[5]

Francis Bacon az általa megalkotott „bi-literal” kódot rejtjelezésre használta.

Azonban napjainkban is él egy olyan népcsoport, aki a mindennapi életben használ egy 2-es számrendszerhez hasonló számlálási módot. Ők a Pápua Új-guineai Morobe Tartományban élnek, és egy speciális ausztronéz nyelvet beszélnek, a „Middle Watut” nyelvet. Így számlálnak:

1 = morots
2 = serok
3 = serok a morots (= 2 + 1)
4 = serok a serok (= 2 + 2)
5 = serok a serok a morots (= 2 + 2 + 1).

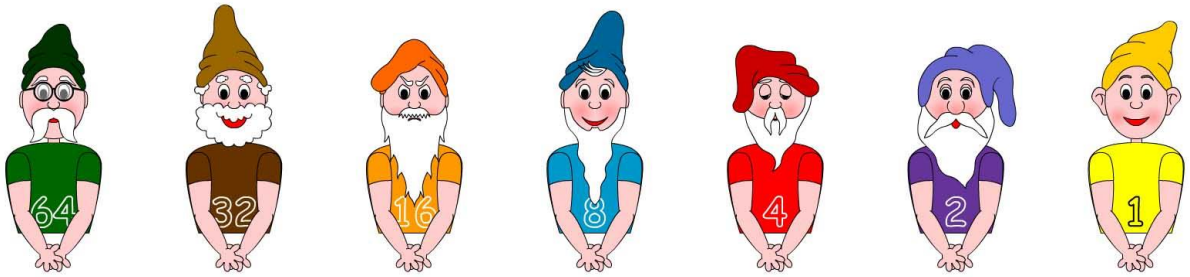
Ebben a megközelítésben jól felismerhetők a 2-es számrendszer egyes elemei, bár nem használják a kettő hatványait, de nem is számolnak olyan nagy számokkal, hogy erre szükségük lenne.

[5] „Car ici, c’est comme si on disait par exemple, que 111 ou 7 est la somme de quatre, de deux et de un, et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre et un. Cette propriété sert aux Essayeurs pour peser toutes sortes de masses avec peu de poids et pourrait servir dans les monnaies pour donner plusieurs valeurs avec peu de pièces.” (részlet Gottfried Wilhelm Leibniz: Explication de l'arithmétique binaire című művéből) Ford: Ránky Miklós

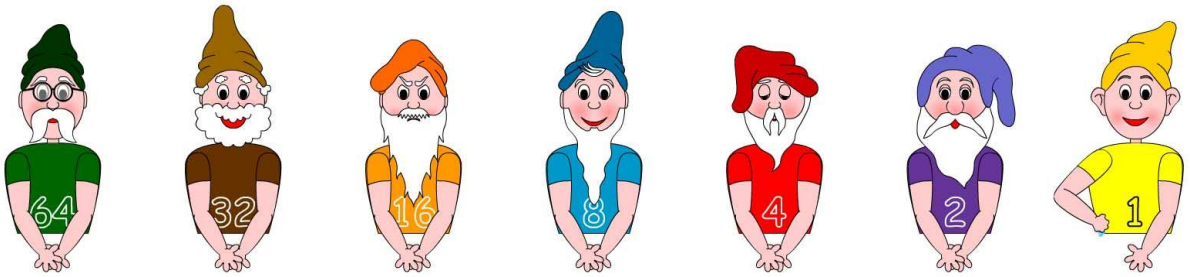
A 2-es számrendszer tanításának szokásos módja

Általános iskolában

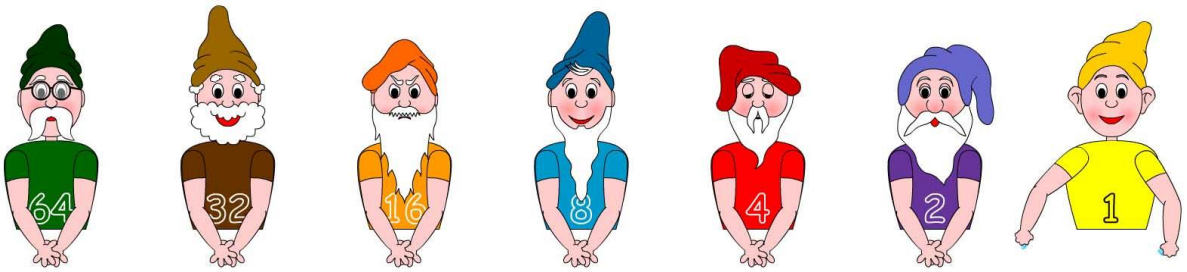
Általános iskolában a 2-es számrendszert csoportosításos módszerrel tanítjuk. Például: Hófehérke hét törpéje a kibányászott gyémántokat csomagolja. A folyamat mögött az a hallgatólagos megegyezés áll, hogy a törpék mindig csak egy gyémántot vagy zsákot tart a kezében, és ha közben kap még egyet, akkor azt összecsomagolja a másik kezében lévővel és továbbadja.



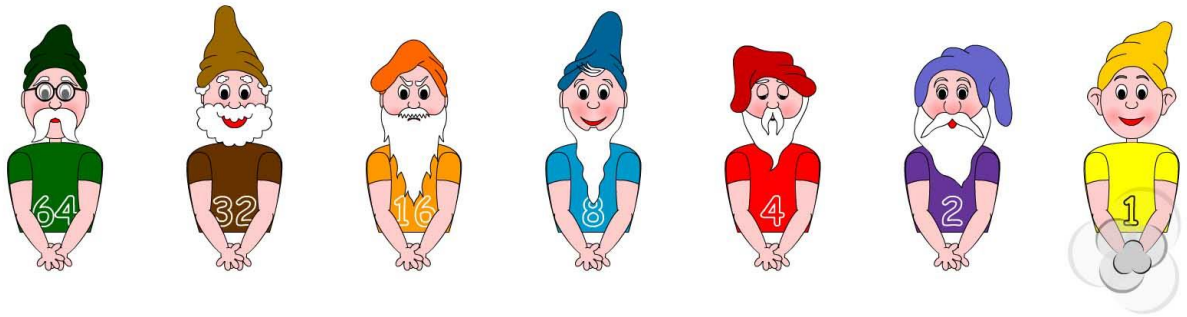
Az első törpe (Kuka, sárga ruhában) az első gyémántot az egyik kezébe rakja,



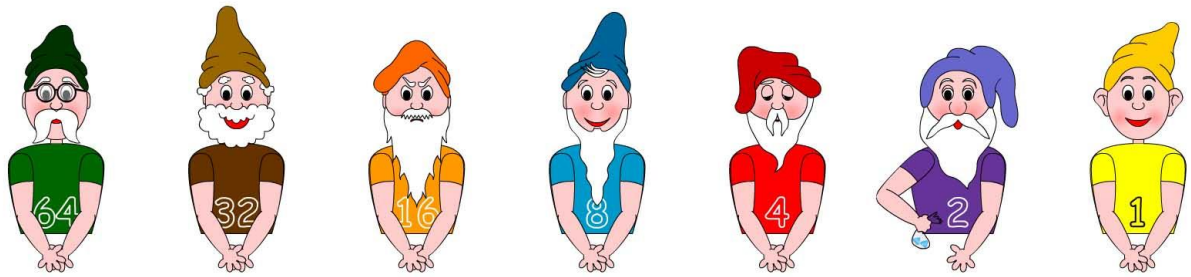
de miután kapott még egyet,



a két kezében lévő két gyémántot összecsomagolja,



és átadja a második törpének (Hapci, lila ruhában).



Ily módon, a törpék akkor csomagolnak, amikor mindkét kezükben van valami.

Ezzel a módszerrel elszámolunk addig, amíg minden gyerek meg nem érti a módszert. Ehhez átlátszó zsákokat rajzolunk, hogy látszódjon, melyik zsákban mennyi gyémánt van összesen (és mennyi zsák). Példa a 14-re:

A gyerekek felismerik, hogy a törpék mellkasán lévő számok azt mutatják, amennyi gyémánt van egy kezükben, illetve azt is, hogy a következő szám mindig az előzőnek a kétszerese.

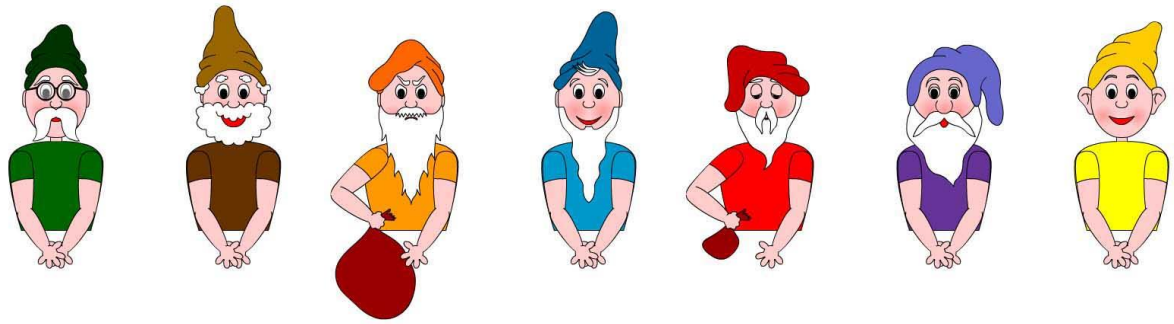
Példa: 125 gyémánt hogyan osztódik el ilyen módon a törpék kezében?

Mivel a 125 nagyobb, mint a 64, ezért a zöld törpe (Tudor) kezében lesz egy zsák (abban 64 gyémánttal). Maradt 125 - 64 = 61 gyémánt. Az nagyobb, mint a 32, ezért a barna törpe (Vidor) kezében is lesz egy zsák (32 gyémánttal). Már csak 61 - 32 = 29 gyémántot kell

elosztanunk. A narancssárga ruhás (Morgó) törpe kezében is lesz zsák, hiszen a 29 nagyobb, mint a 16. Marad 29 - 16 = 13 gyémánt. Így folytatva a feladat végéig, az eredmény ez lesz:

Ezek után már adhatunk olyan feladatot, amiben csak azt határozzuk meg, hogy mely törpék kezében van zsák, és ebből kell kiszámolniuk a diákoknak, hogy ez összesen mennyi gyémántot jelent.

Például:



Ebben a példában kiszámolják, hogy a narancssárga ruhás törpe (Morgó) kezében lévő zsákban 16 gyémánt van, a piros ruhásában (Szundi) pedig 4. Összesen tehát 20 gyémánt van.

Középiskolában

Középiskolában a 2-es számrendszer tanítását a 10-es számrendszer bemutatásával kezdjük. Észrevesszük, hogy – amit már az általános iskola 2. osztályában tanultunk – a helyiérték táblázat a 10-es számrendszer alapja. Az egyes helyiértékek a 10 hatványait jelentik, és hogy a 10-es számrendszerben 10 számjegyet használunk.

Példa: $32547 = 7\cdot1 + 4\cdot10 + 5\cdot100 + 2\cdot1000 + 3\cdot10000$, azaz

$32547 = 7\cdot10^0 + 4\cdot10^1 + 5\cdot10^2 + 2\cdot10^3 + 3\cdot10^4$.

A 10-es számrendszer analógiájára bemutatjuk, hogy a 2-es számrendszerben összesen 2 számjegy van, ezek a 0 és az 1, és a 2-es számrendszerbeli számok is egy helyiérték táblázat szerint íródnak.

Példa:

Mit jelent a 10010101 2-es számrendszerbeli szám?

$10010101_2 = 1\cdot2^0 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^3 + 1\cdot2^4 + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^6 + 1\cdot2^7$, azaz

$10010101_2 = 1\cdot1 + 0\cdot2 + 1\cdot4 + 0\cdot8 + 1\cdot16 + 0\cdot32 + 0\cdot64 + 1\cdot128 = 149_{10}$.

Azt már látjuk, hogy a 2-es számrendszerből hogyan tudunk átszámolni egy számot a 10-es számrendszerbe, de hogy működik ez fordítva?

Példa: Írjuk le a 213_{10} 2-es számrendszerbeli alakját (az alsó indexben lévő szám a számrendszer alapját jelöli)!

1. módszer (hatványozós)

A legnagyobb 2-hatvány, ami megvan ebben a számban, a 128. $128 = 2^7$, azaz a szám, amit keresünk, 8-jegyű. Ennek első számjegye 1. (A keresett szám: 1xxxxxxx.)

$213 = 1\cdot128 + 85$.

A következő 2-hatvány a $2^6 = 64$. A 64 megvan a 85-ben egyszer, tehát a következő számjegy is 1 lesz. (A keresett szám: 11xxxxxx.)

$213 = 1\cdot128 + 1\cdot64 + 21$.

A következő 2-hatvány a $2^5 = 32$. A 32 nincs meg 21-ben, ezért a következő számjegy értéke 0. $2^4 = 16$, ami megvan a 21-ben, tehát a következő számjegy értéke 1 lesz. (A keresett szám: 1101xxxx.)

$213 = 1\cdot128 + 1\cdot64 + 0\cdot32 + 1\cdot16 + 5$.

A következő hatvány: $2^3 = 8$, ami nincs meg az 5-ben, tehát a következő számjegyünk is 0. Nézzük a következő hatványt: $2^2 = 4$, ez megvan az 5-ben, tehát a következő számjegyünk 1. (A keresett szám: 110101xx.)

213 = 1·128 + 1·64 + 0·32 + 1·16 + 0·8 + 1·4 + 1.

2^1 = 2 nincs meg az 1-ben, így a következő számjegyünk 0, 2^0 = 1 marad a végére, az utolsó számjegyünk 1 lesz. A keresett szám: 11010101.

Tehát: $213_{10} = 11010101_2$.

2. módszer (osztásos)

A 213-mat 2-vel osztva 1 maradékot kapunk, ez lesz a keresett számunk utolsó számjegye (páros számnál 0 kerülne a végére), azaz a végére a 2-vel való osztási maradék kerül. Marad a 213 felének egészrésze, azaz 106. Ennek a 2-vel való osztási maradéka 0, ez lesz hátulról a következő számjegyünk. 106/2 = 53, ezt osztva 2-vel megint 1 maradékot kapunk, ez hátulról a következő számjegy, marad 26. Így folytatva megkapjuk a keresett számot, ami az 11010101.

Egy látványosabb ábrázolás:

213	1
106	0
53	1
26	0
13	1
6	0
3	1
1	1

Itt a nyíl a szám kiolvasásának irányát mutatja.

Ezt a módszert könnyebb megérteni, ha 10-es számrendszerből 10-esbe próbálnánk meg egy számot „átírni”.

Vegyünk a 3245-öt. A 3245-nek a 10-zel való osztási maradéka 5. Ez lesz az utolsó számjegyünk. Marad a 324. Ennek a 10-zel való osztási maradéka 4, ez lesz az utolsó előtti számjegyünk. A 32-t 10-zel osztva 2 maradékot kapunk, ez lesz hátulról a 3. számjegy. Végül megkapjuk a 3-mat, ez lesz az első számjegy.

Tizedestörtek átváltása

10-es számrendszerbeli tört átváltása 2-es számrendszerbeli törtté:

Egy törtszám egészrészét valamelyik fenti módszerrel számoljuk ki, a törtrészét azonban az alábbi módszerrel:

Leírjuk a törtrészt. Húzunk egy függőleges vonalat a jobb oldala mellett, és melléírjuk az egészrészt (ami az elején természetesen 0). Ezután a bal oldali szám törtrészét megszorozzuk 2-vel, aláírjuk, majd emellé leírjuk ennek az egészrészét. Ezt addig ismételjük, amíg a bal oldalon 1-et nem kapunk vagy egy olyan törtet, ami már szerepelt. Az első esetben véges, a másodikban végtelen szakaszos tizedestört lesz az eredmény, amit úgy kapunk, hogy a jobb oldalon lévő számokat egymás mellé írjuk, az első szám (a 0) után írjuk a tizedesvesszőt.

Példa 1.:

Írjuk fel a $0{,}59375_{10}$ 2-es számrendszerbeli alakját!

	0,59375	0,
0,59375·2 =	1,1875	1
0,1875·2 =	0,375	0
0,375·2 =	0,75	0
0,75·2 =	1,5	1
0,5·2 =	1	1

$$0{,}59375_{10} = 0{,}10011_2$$

Példa 2.:

Írjuk fel a $0{,}18_{10}$ 2-es számrendszerbeli alakját!

	0,18	0,
0,18·2 =	0,36	0
0,36·2 =	0,72	0
0,72·2 =	1,44	1
0,44·2 =	0,88	0
0,88·2 =	1,76	1
0,76·2 =	1,52	1
0,52·2 =	1,04	1
0,04·2 =	0,08	0
0,08·2 =	0,16	0
0,16·2 =	0,32	0
0,32·2 =	0,64	0
0,64·2 =	1,28	1
0,28·2 =	0,56	0
0,56·2 =	1,12	1
0,12·2 =	0,24	0
0,24·2 =	0,48	0
0,48·2 =	0,96	0
0,96·2 =	1,92	1
0,92·2 =	1,84	1
0,84·2 =	1,68	1
0,68·2 =	1,36	1
0,36·2 =	0,72	

$$0{,}18_{10} = 0{,}0\dot{1}01011100001010001111\dot{1}_2$$

Észrevesszük, hogy egy 10-es számrendszerbeli véges tizedestört 2-es számrendszerbeli alakja lehet végtelen szakaszos tizedestört is.

2-es számrendszerbeli tört átváltása 10-es számrendszerbeli törtté:

Itt is csak a törtrész átalakítását fogjuk vizsgálni, az egészrészt a fenti módszerrel lehet. A törtrész átalakítása kétféle módszerrel történhet:

1. módszer:

Tudjuk, hogy a tizedesvessző után a számjegyek a helyiérték-táblázat azon részén helyezkednek el, ami a 2 negatív hatványait tartalmazza, úgy mint ½, ¼ stb. Így csak annyi a teendőnk, hogy ahol 1 van írva, ott azokat a 2-hatványokat összeadjuk.

Példa:

Írjuk fel a $0{,}01101_2$ 10-es számrendszerbeli alakját!

$$0{,}01101_2 = \left(0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{1}{32}\right)_{10} = (0 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0 + 0{,}03125)_{10} = 0{,}40625_{10}$$

2. módszer:

Írjuk le a törtrész számjegyeit visszafelé írva a bal oldalra egymás alá. A jobb oldalon felül írjunk egy 0-t (a bal felső számmal egy vonalban), majd a két oldalt válasszuk el egy függőleges vonallal. A jobb oldal következő sorába mindig az a szám kerül, amit úgy kapunk, hogy az előző sor bal és jobb oldali számát összeadjuk, majd ezt osztjuk 2-vel. A végeredmény a legalsó kapott érték lesz.

Példa:

Írjuk fel a $0{,}01101_2$ 10-es számrendszerbeli alakját (az utóbbi módszerrel)!

1	0	
0	0,5	= (1+0)/2
1	0,25	= (0+0,5)/2
1	0,625	= (1+0,25)/2
0	0,8125	= (1+0,625)/2
	0,40625	= (0+0,8125)/2

Láthatjuk, hogy mindkét módszerrel ugyanaz lett az eredmény.

Alapműveletek a 2-es számrendszerben

A 2-es számrendszerben az alapműveleteket ugyanúgy végezzük, mint a 10-es számrendszerben.

Összeadás:

Példa:

Adjuk össze az 10110_2 és 1010_2 számokat!

Lépésenként:

$$\begin{array}{r} 10110 \\ +\ 1010 \\ \hline 0 \end{array}$$ 0+0 = 0

$$\begin{array}{r} 10110 \\ +\ 1010 \\ \hline 00 \end{array}$$ 1+1 = 10
leírjuk a 0-t, marad az 1

$$\begin{array}{r} 10110 \\ +\ 1010 \\ \hline 000 \end{array}$$ 1+1+0 = 10
leírjuk a 0-t, marad az 1

$$\begin{array}{r} 10110 \\ +\ 1010 \\ \hline 0000 \end{array}$$ 1+0+1 = 10
leírjuk a 0-t, marad az 1

$$\begin{array}{r} 10110 \\ +\ 1010 \\ \hline 100000 \end{array}$$ 1+1 = 10

Az eredményt leellenőrizhetjük a 10-es számrendszerben: 22 + 10 = 32.

Kivonás:

Példa:

Vonjuk ki az 10110_2 számból a 1011_2 számot!

$$\begin{array}{r} 10110 \\ -\ 1011 \\ \hline 1 \end{array}$$ 10-1 = 1
leírjuk az 1-et, marad az 1

$$\begin{array}{r} 10110 \\ -\ 1011 \\ \hline 11 \end{array}$$ 11-(1+1) = 11-10 = 1
leírjuk az 1-et, marad az 1

$$\begin{array}{r} 10110 \\ -\ 1011 \\ \hline 011 \end{array}$$ 1-(0+1) = 1-1 = 0

$$\begin{array}{r} 10110 \\ -\ 1011 \\ \hline 1011 \end{array}$$ 10-1 = 1

Az eredményt leellenőrizhetjük a 10-es számrendszerben: 22 - 11 = 11.

Szorzás:

Példa:

Szorozzuk össze a 10110_2 és 1011_2 számokat!

$$
\begin{array}{r}
\underline{10110} \cdot 1011 \\
10110 \\
00000 \\
10110 \\
+ \quad 10110 \\
\hline
11110010
\end{array}
$$

Osztás:

Példa:

Osszuk el az 10110_2 számot az 101_2 számmal!

$$
\begin{array}{l}
\underline{101'1'0'}/101 = 100,\dot{0}11\dot{0} \\
\quad 1 \\
\quad 10 \\
\quad 100 \\
\quad 1000 \\
\quad\quad 110 \\
\quad\quad\quad 10 \\
\quad\quad\quad 100
\end{array}
$$

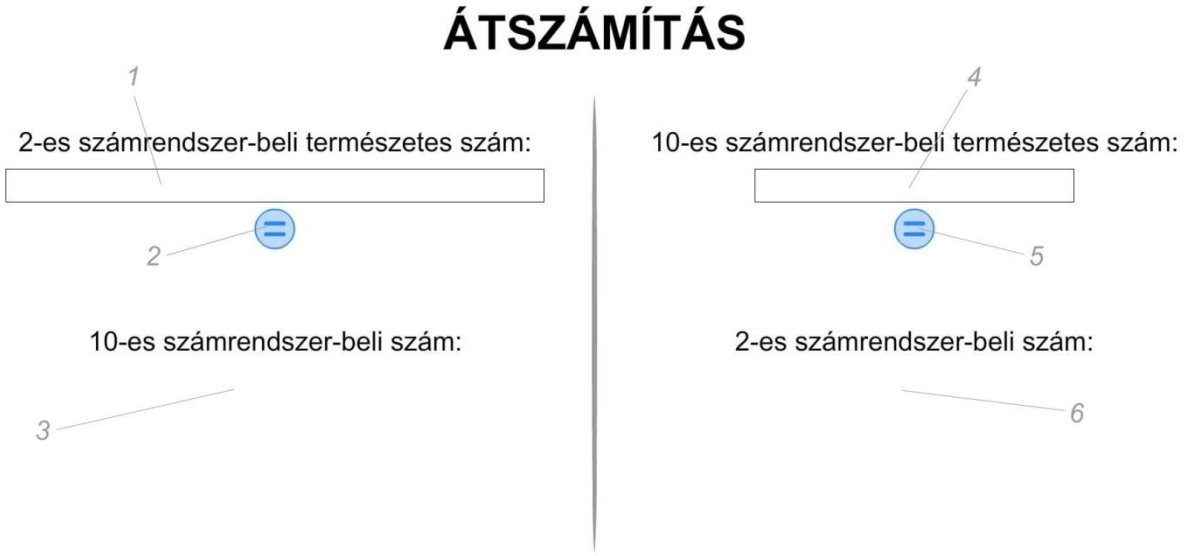
Az eredményt leellenőrizhetjük a 10-es számrendszerben: 22/5 = 4,4. Ez a szám a fenti 2-es számrendszerbeli végtelen szakaszos tizedestört 10-es számrendszerbeli megfelelője.

Az elkészített programok felépítése, ismertetése és alkalmazása az oktatásban.

Az általam elkészített programok a hagyományos módszereket kiegészítve segítik a 2-es számrendszer jobb megértését, egyben interaktív gyakorlási lehetőséget nyújtanak.

Átszámító program

http://rita.ranky.hu/egyetem/kettesszratszamitas.html



A program működésének leírása:

A függőlegesen kettéosztott program a 2-esből 10-es, illetve a 10-esből 2-es számrendszerbe történő átszámítást végzi el. Értelemszerűen, a bal oldali szövegmezőbe (*1*) beírva egy 2-es számrendszerbeli számot, majd az egyenlőségjelre (*2*) kattintva alatta (*3*) kijelzi az ahhoz tartozó 10-es számrendszerbeli számot. A jobb oldalon (*4, 5, 6*) pontosan fordítva történik mindez. A program a bal oldali szövegmezőbe csak 0 és 1-es karaktereket, míg a jobb oldaliba a 0-9 karaktereket engedi csak beírni.

A program használhatósága:

A programot leginkább ellenőrzésre készítettem.

Példafeladat 1.:

Adjuk meg a 10-es számrendszerbeli 635 szám 2-es számrendszerbeli alakját!

Akár a hatványozós, akár az osztásos módszert használjuk, az eredmény 1001111011 lesz, ezt utána ezzel a programmal le is tudjuk ellenőrizni.

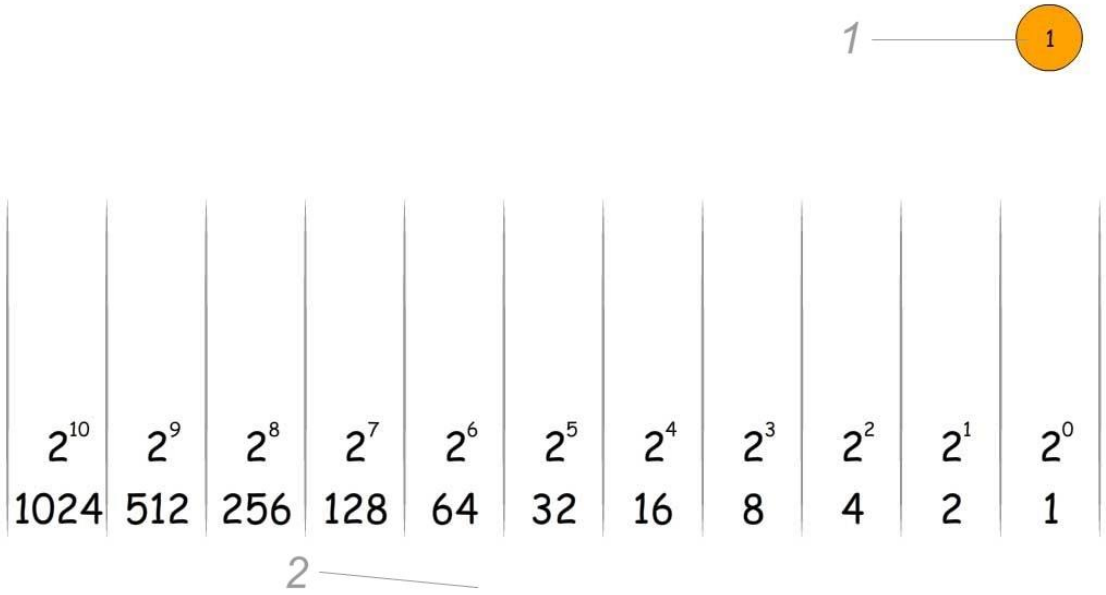
Példafeladat 2.:

Adjuk meg a 2-es számrendszerbeli 1010011101 szám 10-es számrendszerbeli alakját!

Itt is leellenőrizhetjük, hogy az eredmény a 669.

Korong-bedobós program

http://rita.ranky.hu/egyetem/kettesszrbemutato.html



A program működésének leírása:

A fenti villogó korongra (*1*) kattintva a korong bepottyan a gépbe, amely aztán lépésenként elrendezi a 2-es számrendszernek megfelelően. Amíg az elrendezés nincs készen, nem jelenik meg több bedobható korong. Amint a lépések végéhez érkezett, a program magyarázó szöveggel alul (*2*) kiírja az aktuális szám 2-es és 10-es számrendszerbeli alakját, és egy újabb bedobható korong jelenik meg. Amikor elértük a programban meghatározott legnagyobb számot (2^{11}-1 = 2047), már nem jelenik meg több bedobható korong.

A program használhatósága:

A program a 2-es számrendszer megértését segíti elő. A rendezés után látható, hogy melyik helyiérték-oszlopban van korong, azok 1-es értéket kapnak, az üresek pedig 0-t. A korongokon lévő szám mutatja 10-es számrendszerbeli értéküket, amelyiket az összeolvadásokból keletkeztek. A gépben lévő korongokon szereplő számok összege kiadja az aktuális szám 10-es számrendszerbeli értékét.

Példafeladat:

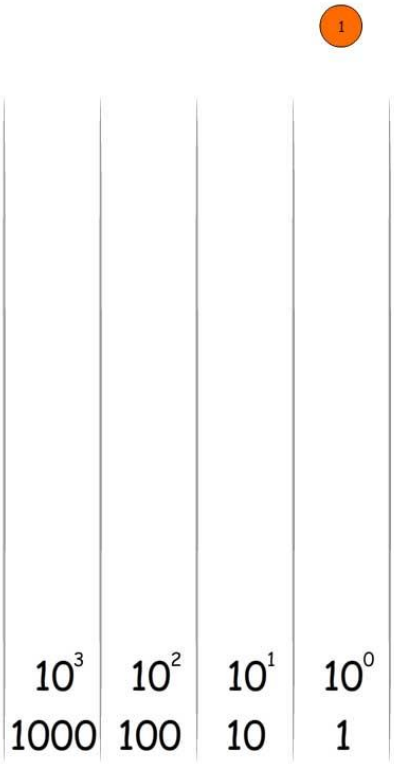
Számlálj a 2-es számrendszerben 10-ig, és írd le a számok 2-es számrendszerbeli alakját!

A programban tízszer a villogó korongra kattintva látszik, hogy a megoldás:

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010.

A program és a 2-es számrendszer könnyebb megértéséhez elkészítettem a program 10-es számrendszerbeli verzióját:

http://rita.ranky.hu/egyetem/tizesszrbemutato.html



A két program közül ajánlatos az utóbbit bemutatni először, hogy a diákok ráismerjenek az analógiára.

Demonstrációs eszköz-bemutató program

http://rita.ranky.hu/egyetem/ketteslapforgatas.html

A program működésének leírása:

Ez a program egy 2-es számrendszerbeli mechanikus számláló interaktív változata. Egy rúdra fel vannak húzva olyan lapkák (*2*), melyek egyik oldalára 0, a másikra 1-es van írva. A lapkák alsó felén – amikor a 0-s oldaluk látszódik – egy kallantyú (*3*) van, amely forgatásra – amikor a lapka 1-es állapotba kerül – a lapkák felső részén lesz és rácsapódik a tőle balra lévő lapkára. Emiatt a következő forgatásnál a lapka a tőle balra lévő lapkával együtt fordul el. A számlálót a nyíllal (*1*) jelzett lapkára történő kattintással lehet léptetni.

A program használhatósága:

A program az előző programhoz képest ugyancsak a 2-es számrendszer megértését segíti elő. Ebben a programban az is látható, hogy a 0 és 1 számokon kívül semmilyen más számot nem használunk.

Példafeladat:

Hány 5-jegyű szám van a 2-es számrendszerben?

Az eszközt eltekerjük addig, amíg jobbról az 5. lapkán 1-es áll, a többin pedig 0. Ez az első 5-jegyű szám. Az eszközt utána addig tekerjük, amíg jobbról a 6. lapkán lesz 1 és a többin, 0, ez már 6-jegyű szám, ez már nem tartozik a megoldáshoz. Láthatjuk, hogy a megoldáshoz tartozó számok:

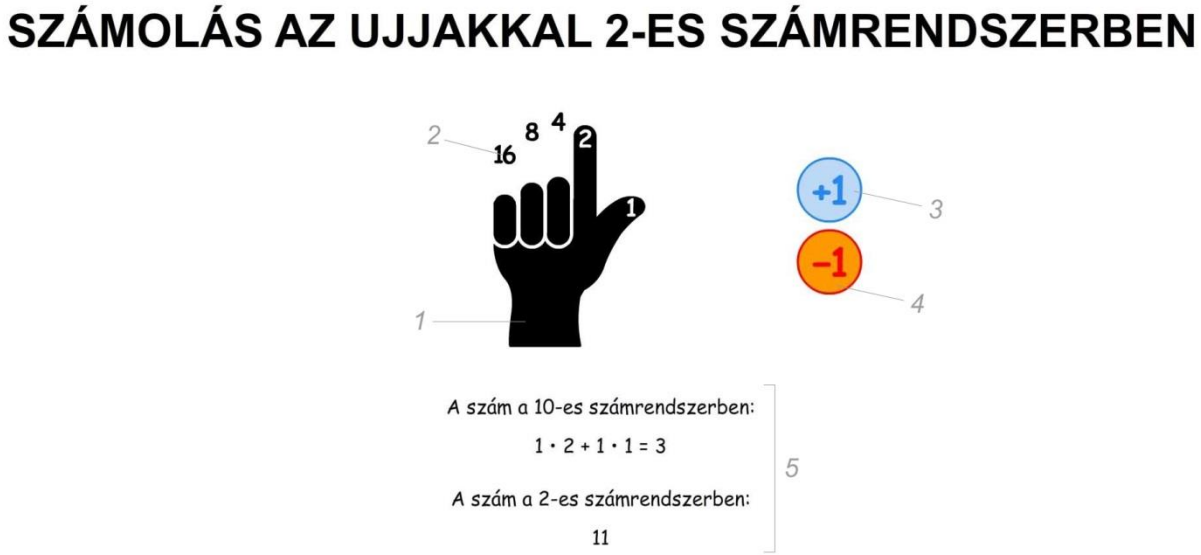
10000, 10001, 10010, 10011, 10100, 10101, 10110, 10111, 11000, 11001, 11010, 11011, 11100, 11101, 11110, 11111. Ez összesen 16 szám.

A „matekosabb” megoldás természetesen így néz ki:

az 1. helyre csak 1-es kerülhet, de a többi számjegy helyére kerülhet 0 és 1 is, tehát mindegyiknek 2-féle értéke lehet. Az eredmény így tehát: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Ujjakon számlálós program

http://rita.ranky.hu/egyetem/kettesujjszamolas.html



A program működésének leírása:

A program elindításakor egy ökölbe szorított kezet (*1*) látunk, az ujjak fölött a 2-es számrendszer hatványaival (*2*). Az ököl jobb oldalán lévő „+1” gombra (*3*) kattintva kezdhetjük a számlálást, az utána megjelenő „-1” gombbal (*4*) pedig visszafelé számolhatunk. Alul (*5*) a program kiírja a szám 10-es és 2-es számrendszerbeli alakját is.

A program használhatósága:

A program azon az elven alapul, hogy egy kézen nemcsak 5-ig számolhatunk el, hanem – a 2-es számrendszer használatával – akár 31-ig is. Ehhez az ujjainkat elnevezzük a 2-es számrendszer helyiértékeinek megfelelően (amint a programban az látható, 1,2,4,8,16 „nevet” kapnak). Minden kiegyenesedett ujj 1-et, a zártak 0-t jelölnek. Az előző – a 2-es számrendszert bemutató – programokhoz képest ez annyi pluszt nyújt, hogy ezzel visszafelé is lehet számlálni.

Példafeladat 1.:

Az ujjakon számlálással mutasd meg a kezeiden a 21_{10}-es szám 2-es számrendszerbeli képét és írd le a számot!

A program használatával látszik, hogy a megfelelő kéztartás a következő: A kis-, a középső- és a hüvelykujj kinyújtott állapotban van, a többi zártan. Értékük pedig: 10101_2.

Példafeladat 2.:

Vajon két kézzel meddig lehet elszámolni ezzel a módszerrel?

Vegyük észre, hogy egy kézen 2^4 = 16 az utolsó ujj értéke, ezért egy kézen 2^5-1 = 32-1 = 31-ig tudunk elszámolni (hiszen a 32-hez még egy ujjra lenne szükségünk, 31-ig viszont elég 5 ujjat használni – a 32 használatával jutnánk el a 6-számjegyű 2-es számrendszerbeli számokhoz).

Két kezünket használva az utolsó ujj a 2^9 = 512 „nevet" kapná, ami azt jelenti, hogy két kézen összesen 2^{10}-1 = 1024-1 = 1023-ig tudnánk elszámolni.

Trükkös szorzás a 10-es számrendszerben

http://rita.ranky.hu/egyetem/tizestrukkosszorzas.html

A program működésének leírása:

A program elindításakor a két szövegmezőbe (*1*) egy-egy 10-es számrendszerbeli pozitív egész számot kell írni, a program ezekkel a számokkal fog dolgozni a továbbiakban. Bal oldalt (*2*) megadható, hogy a felhasználó önmaga szeretné-e léptetni a sorokat vagy hagyja automatikusan futni. A trükkös szorzás könnyebb megértéséhez érdemes a kézi léptetést választani, mivel a program soronként magyaráz.

A program használhatósága:

A program a Rhind-papiruszon található matematikai számolásra épül. A pozitív egész számoknak azt a tulajdonságát használja ki, hogy a szám vagy osztható kettővel, azaz páros, vagy páratlan, ebben az esetben a számból 1-et kivonva páros számot kapunk, amely természetesen megint osztható 2-vel. Így tehát egy szorzatot úgy át tudunk alakítani, hogy a végén egy – viszonylag rövid – összeadást kapjunk. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a szorzót első lépésként megvizsgáljuk. Abban az esetben, ha páratlan, kivonunk belőle 1-et, és a szorzandót (azaz a szorzandó egyszeresét) leírjuk, ez lesz az összeg egyik tagja. Matematikailag:

$a \cdot b = (a-1) \cdot b + 1 \cdot b$.

Ezután folytatjuk tovább a számolást (már a páros szorzóval).

Abban az esetben, ha a szorzó páros, a szorzatot átalakítjuk, mégpedig olyan módon, hogy a szorzót elosztjuk 2-vel, a szorzandót megszorozzuk 2-vel. Matematikai leírásban:

$a \cdot b = (a/2) \cdot (b \cdot 2)$, ahol (jelen esetben) a, b $\in \mathbb{Z}^+$, és a páros szám.

Ez a folyamat addig folytatódik, amíg a szorzó 1 nem lesz. Ekkor a szorzandó lesz az összegünk utolsó tagja.

Végül az összeg tagjait összeadva megkapjuk a szorzás eredményét.

Példafeladat:

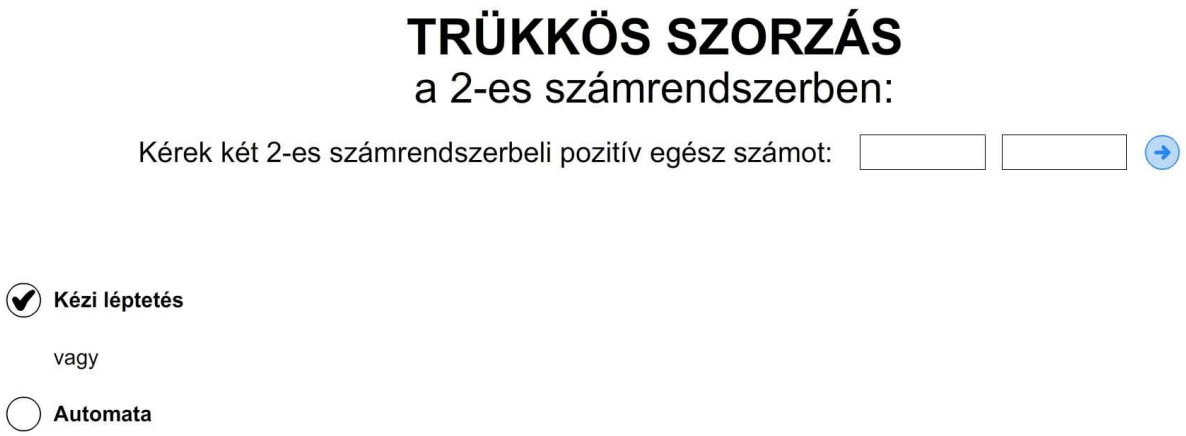
Számoljuk ki a 245·3124 szorzatot trükkös szorzással!

245 · 3124	3124 +
244 · 3124	
122 · 6248	
61 · 12496	12496 +
60 · 12496	
30 · 24992	
15 · 49984	49984 +
14 · 49984	
7 · 99968	99968 +
6 · 99968	
3 · 199936	199936 +
2 · 199936	
1 · 399872	399872
	765380

Ez a program bevezetője csak a következőnek, annak megértését segíti elő.

Trükkös szorzás a 2-es számrendszerben

http://rita.ranky.hu/egyetem/kettestrukkosszorzas.html



A program működésének leírása:

A program az előzőhöz hasonlóan működik, csak a 2-es számrendszerre átalakítva.

A program használhatósága:

Az előző feladathoz képest könnyebb dolgunk van, hiszen a 2-es számrendszerben az egész számok körében a duplázást úgy végezzük, hogy „hozzáírunk egy 0-t”, a felezést pedig úgy (páros számnál), hogy „leszedünk a végéről egy 0-t”.

(Megjegyzés: véleményem szerint a 2-es számrendszerben a trükkös szorzással megoldott és az általános módon megoldott szorzat kiszámításának nehézségében nincs különbség.)

Példafeladat:

Számoljuk ki a $110010_2 \cdot 100101_2$ szorzatot trükkös szorzással!

110010·100101	
11001·1001010	1001010 +
11000·1001010	
1100·10010100	
110·100101000	
11·1001010000	1001010000 +
10·1001010000	
1·10010100000	10010100000

110010·100101 = 1001010 + 1001010000 + 10010100000 = 11100111010

Mit veszünk észre?

A szorzat tényezői számjegyeinek összege állandó. Miért?

A feladatban összesen 2 műveletet végeztünk, az egyik, amikor a páratlan szorzóból kivontunk egyet, ez ugye nem jár számjegy csökkenéssel, hiszen az utolsó helyen lévő 1 helyett lesz 0, ebben az esetben a szorzandóhoz nem nyúltunk. A másik műveletben a páros szorzót felezzük, a szorzandót pedig duplázzuk, ebben az esetben – mint előbb már írtam – a szorzó végéről „leszedünk egy 0-t”, azaz eggyel kevesebb számjegye lesz, a szorzandó „végéhez hozzáírunk egy 0-t”, tehát ennek eggyel több számjegye lesz.

Összegzés

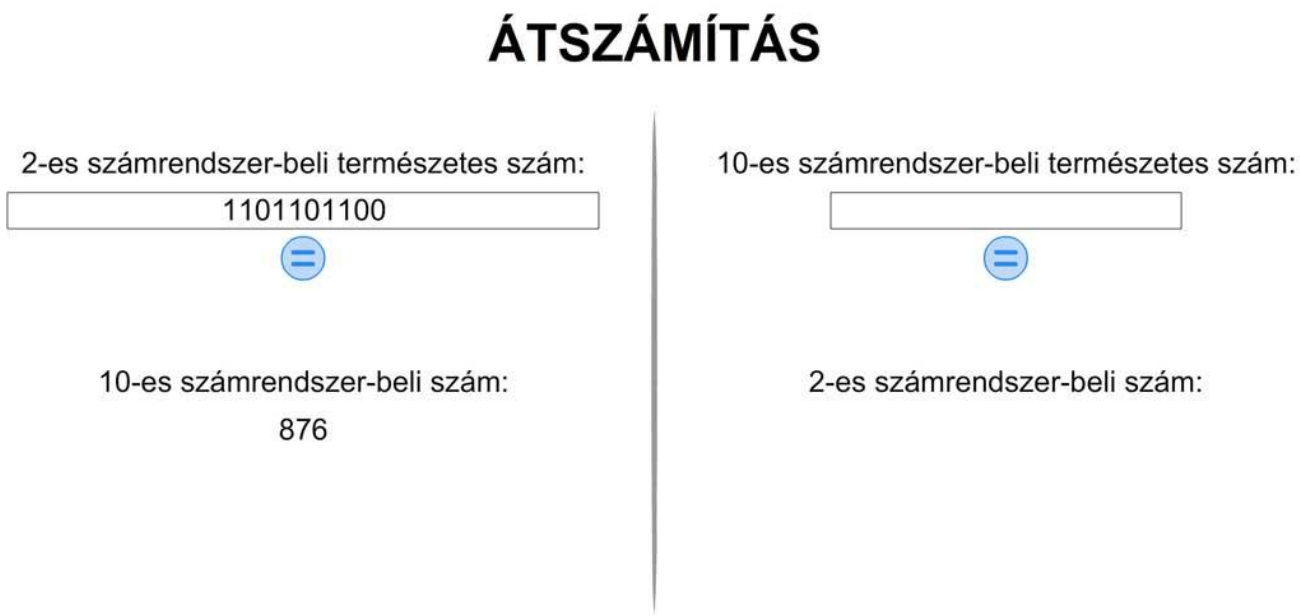
A dolgozat röviden áttekinti a 2-es számrendszer iskolai oktatásának jelenlegi helyzetét, és kísérletet tesz számítógépes interaktív programok létrehozása révén ezen terület elsajátíthatóságának javításában. A programok úgy vannak elkészítve, hogy az oktatásban és a szakkörökön jól beépíthetők a tananyagba.

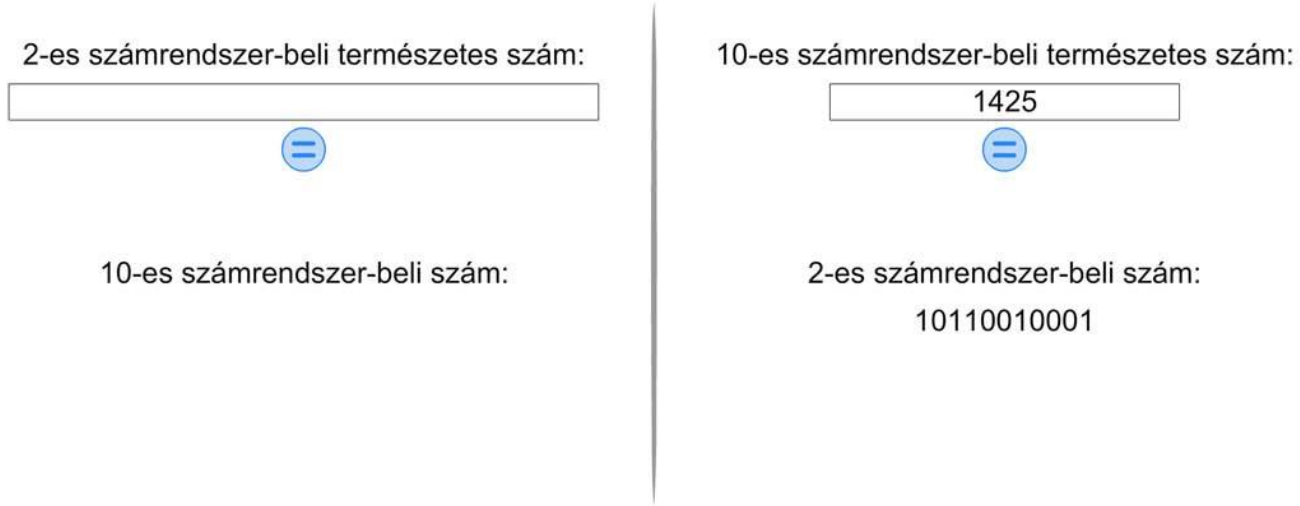
A programokat Adobe Flash CS6 programmal készítettem el, a forrásódokat és az .exe változatokat a szakdolgozatom hátuljában egy CD-n mellékeltem.

Melléklet

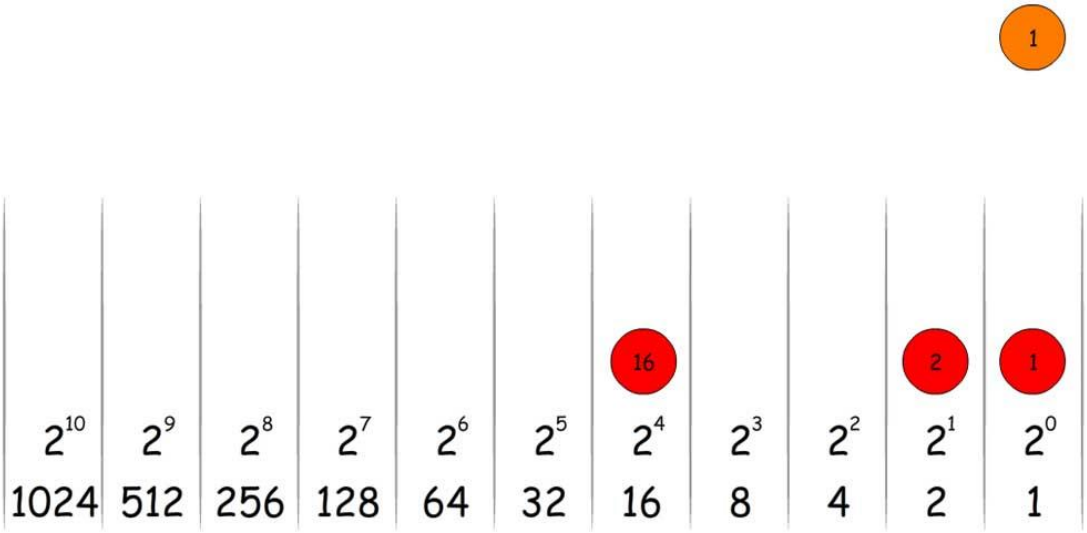
Mellékelem a programjaim működés közben készült vágóképét.

Átszámító program





Korong-bedobós program a 2-es számrendszerben

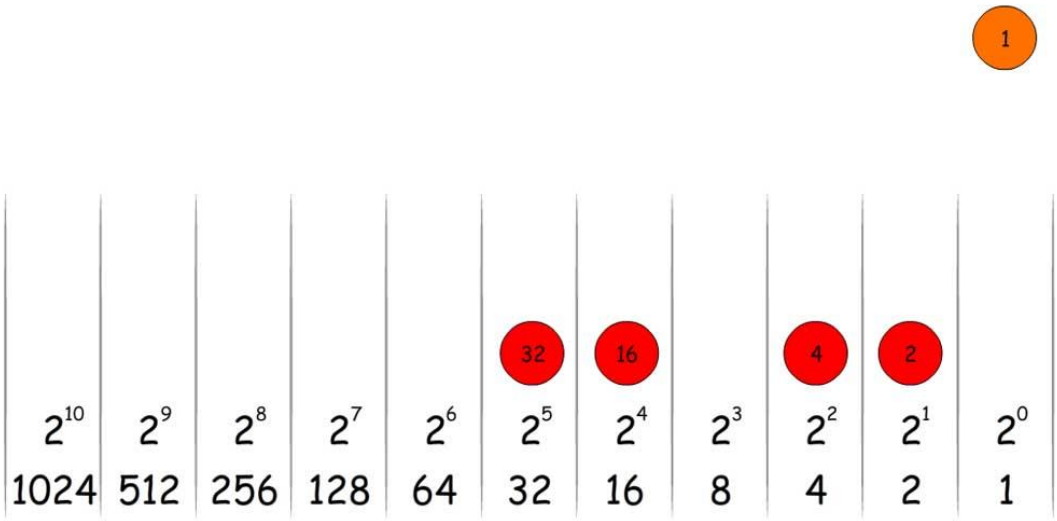


A szám a 10-es számrendszerben:

$1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 19$

A szám a 2-es számrendszerben:

10011



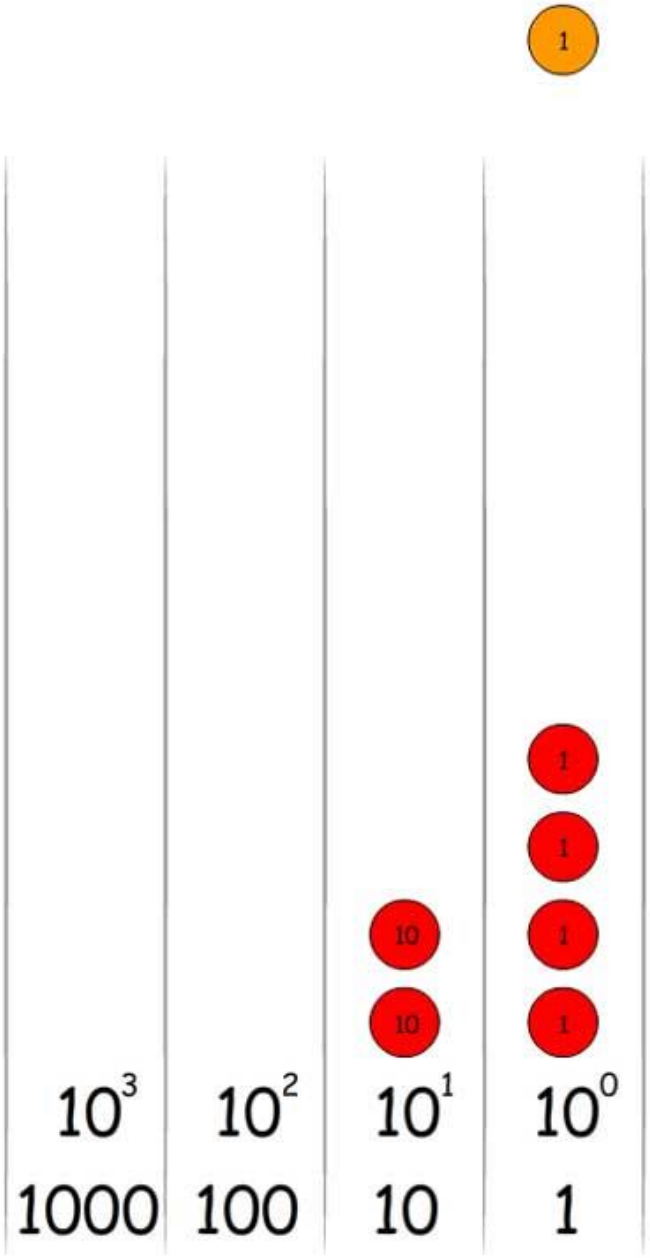
A szám a 10-es számrendszerben:

$1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 54$

A szám a 2-es számrendszerben:

110110

Korong-bedobós program a 10-es számrendszerben



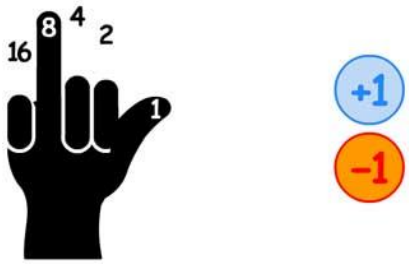
A szám a 10-es számrendszerben:

$$2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 24$$

Demonstrációs eszköz-bemutató program

Ujjakon számlálás program

SZÁMOLÁS AZ UJJAKKAL 2-ES SZÁMRENDSZERBEN



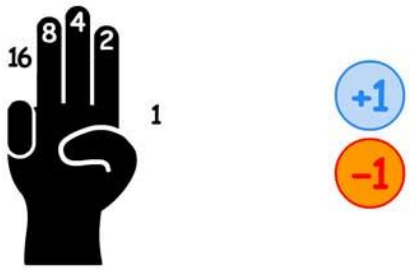
A szám a 10-es számrendszerben:

$1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 9$

A szám a 2-es számrendszerben:

1001

SZÁMOLÁS AZ UJJAKKAL 2-ES SZÁMRENDSZERBEN



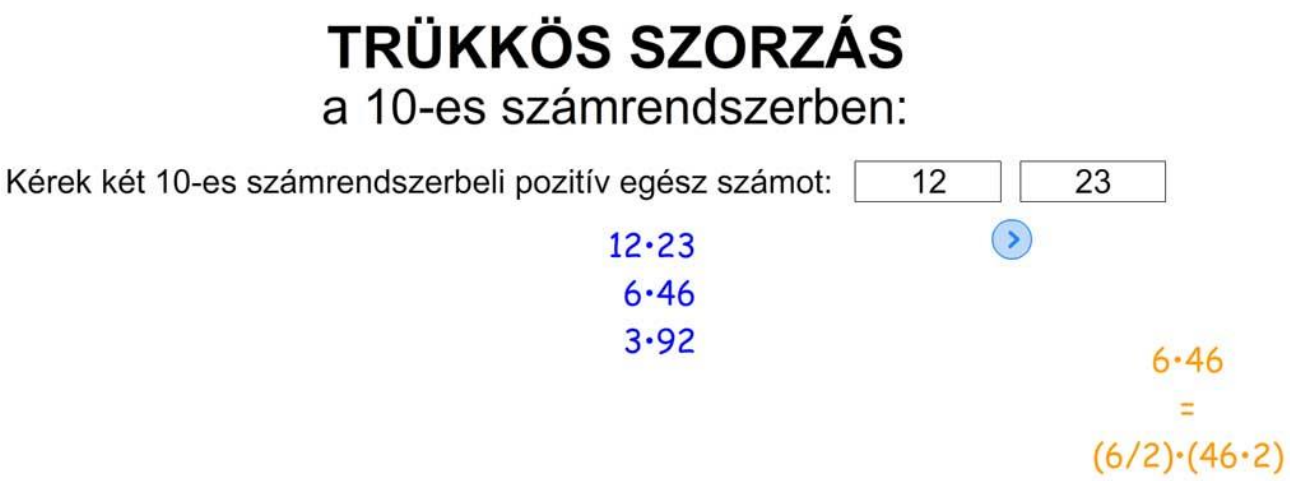
A szám a 10-es számrendszerben:

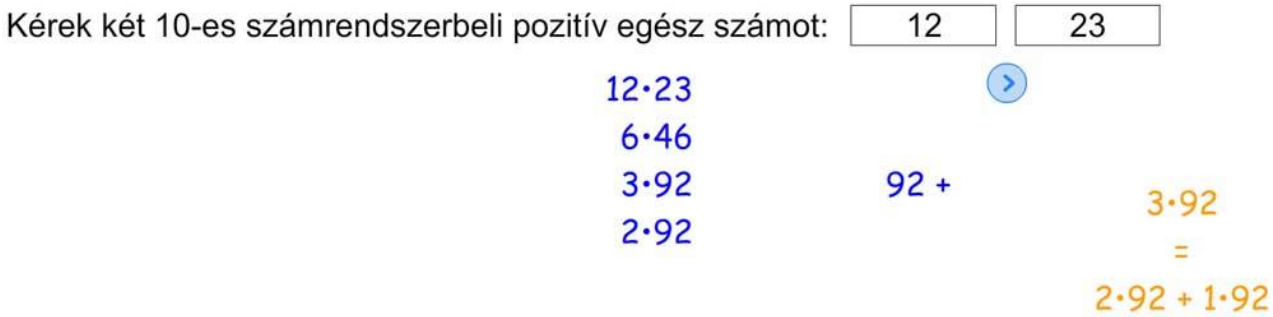
$1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 14$

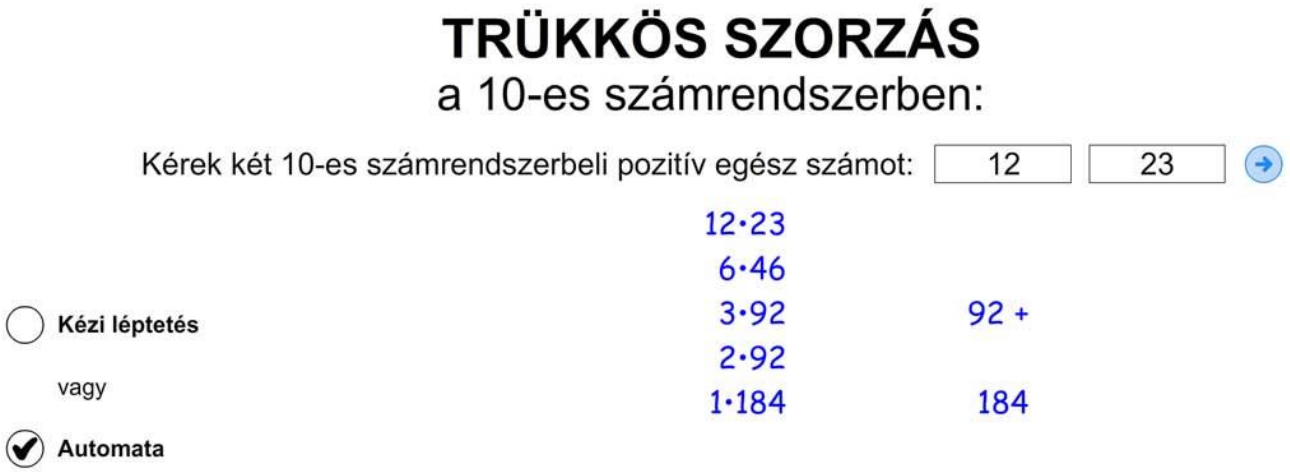
A szám a 2-es számrendszerben:

1110

Trükkös szorzás a 10-es számrendszerben







$12 \cdot 23 = 92 + 184 = 276$

Trükkös szorzás a 2-es számrendszerben

TRÜKKÖS SZORZÁS
a 2-es számrendszerben:

Kérek két 2-es számrendszerbeli pozitív egész számot: 1001 1101

1001·1101 1101 +

1000·1101

1001·1101
=
1000·1101 + 1·1101

TRÜKKÖS SZORZÁS
a 2-es számrendszerben:

Kérek két 2-es számrendszerbeli pozitív egész számot: 1001 1101

1001·1101 1101 +
1000·1101
100·11010
10·110100
1·1101000 1101000

Kézi léptetés

vagy

Automata

1001·1101 = 1101 + 1101000 = 1110101

Irodalomjegyzék

Sain Márton: Nincs királyi út! (Gondolat Kiadó, Budapest, 1986)

Varga Tamás: Játsszunk matematikát! (Móra Ferenc Könyvkiadó, 1976)

Anton Glaser: History of Binary and Other Nondecimal Numeration (Tomash Publishers, 1924)

http://csunplugged.org/wp-content/uploads/2014/12/unplugged-01-binary_numbers.pdf

http://www.garlikov.com/Soc_Meth.html

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Huyghens.pdf

www.pnas.org/content/111/4/1322.full

http://www.sciencemag.org/news/2013/12/polynesians-may-have-invented-binary-math

http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/BinaryHistory.shtml

http://binarytranslator.com/what-is-binary/

http://www.ancient-origins.net/news-general/creation-binary-code-inspired-5000-year-old-text-001468

http://www.livescience.com/41985-binary-math-invented-before-leibniz.html

http://gwydir.demon.co.uk/jo/numbers/binary/how.htm

http://www.circuitdesign.info/blog/2008/06/the-binary-number-system-part-2-binary-weighting/

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Binary_number

http://mony.web.elte.hu/konyvtar/

http://netpedia.hu/kettes-szamrendszer

https://hu.wikipedia.org/wiki/Ji_csing

https://en.wikipedia.org/wiki/Fuxi