SZÁMKÖRBŐVÍTÉS ÉS MŰVELETEK AZ ISKOLÁBAN

SZAKDOLGOZAT

Németh Ádám

matematika tanári szak

Témavezető: Szeredi Éva főiskolai docens † és Török Judit adjunktus

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2017

NYILATKOZAT

Név: Németh Ádám

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika tanári szak

ETR azonosító: NEANACT.ELTE

Szakdolgozat címe: Számkörbővítés és műveletek az iskolában

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2017. május 29.

_____

a hallgató aláírása

BEVEZETÉS 7

1 TANULÁSPSZICHOLÓGIAI ÉS DIDAKTIKAI HÁTTÉR 8

1.1 FOGALMAK 8

1.2 A SZKÉMÁK 12

1.3 REPREZENTÁCIÓK 13

2 A TERMÉSZETES SZÁMOK REGULÁRIS FÉLGYŰRŰJE 15

2.1 TERMÉSZETES SZÁMOK A MATEMATIKÁBAN 15

2.2 TERMÉSZETES SZÁMOK AZ ÓVODÁBAN 20

2.3 TERMÉSZETES SZÁMOK AZ ISKOLAI MATEMATIKÁBAN 22

2.4 JÁTÉK 25

3 AZ EGÉSZ SZÁMOK INTEGRITÁSTARTOMÁNYA 28

3.1 EGÉSZ SZÁMOK A MATEMATIKÁBAN 29

3.2 EGÉSZ SZÁMOK AZ ISKOLAI MATEMATIKÁBAN 33

3.3 JÁTÉK 39

4 A RACIONÁLIS SZÁMOK TESTE 40

4.1 RACIONÁLIS SZÁMOK A MATEMATIKÁBAN 40

4.2 RACIONÁLIS SZÁMOK AZ ISKOLAI MATEMATIKÁBAN 42

4.3 JÁTÉK 46

5 A VALÓS SZÁMOK TESTE 49

5.1 VALÓS SZÁMOK A MATEMATIKÁBAN 49

5.2 VALÓS SZÁMOK AZ ISKOLAI MATEMATIKÁBAN 52

5.3 JÁTÉK 56

6 KITEKINTÉS ÉS ÖSSZEGZÉS 59

6.1 KITEKINTÉS 59

6.2 ÖSSZEGZÉS 64

6.3 KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS 66

IRODALOMJEGYZÉK 67

BEVEZETÉS

A „matematika törzsfejlődésében” kultúránként hosszan végbemenő fejlődési utak kellettek, mire például a negatív szám léte valódi polgárjogot nyert a számok világában. Tudvalevő az is, hogy a görög matematika milyen hosszan „emésztette” az összemérhetetlen szakaszpárok felfedezését. A feltételezésem, hogy a számkörbővítések nemcsak a matematikatudomány-történetben igényeltek hosszan tartó érési folyamatokat, hanem az új elfogadása a matematikát tanulóktól is energiát, érési időt és olykor „gondolkodásbéli gátszakadást” kíván.[1] Szakdolgozatomban a természetes számoktól a valós számokig mutatom be a számkörbővítések felsőbb matematikai mikéntjét, a rajtuk értelmezett műveleteket, és ezek tulajdonságait. Ezzel párhuzamosan követem nyomon a számkör-bővítéseket az iskolai matematikában. Szakdolgozatomban e kettő viszonyára fókuszálok.

Ami a szakdolgozat szerkezetét illeti…

A számkörök és a rajtuk értelmezett műveletek esetében a fogalmi struktúrák alakulása a tanulás kulcskérdése, ezért az első fejezetben a tanuláspszichológia és a matematikadidaktika idevágó részeinek összefoglalása mellett döntöttem. Ezt követően fejezetenként foglalkozom a közoktatásban megjelenő számkörökkel: a fejezetek első felében tisztázva az axiomatikus, absztrakt algebrai vagy éppen analízisbeli hátteret, melyet az adott számkörhöz tartozó iskolai matematika követ. A teljesség kedvéért a kitekintésben ismertetem a komplex számokon túl a kvaterniókat és Frobenius nevezetes tételét a testbővítésekről.

Módszertani szakdolgozat lévén…

Amikor a számkörök és a rajtuk értelmezett műveletek közoktatásbeli tárgyalásával foglalkozom, elidőzöm a felsőbb matematikával közös pontokon. Izgalmas kérdéssorozat, hogy ezen összefüggésekre, szükséges vagy érdemes-e rávezetni a diákokat. A rávezetés szükségessége és érdemessége persze a gyerekek életkori sajátosságainak, motivációinak, tanterveknek, a megfelelő módszerek ismeretének, a matematikára szánt (vagy szánható) időnek is függvénye. Véleményem szerint azonban erre a dilemmára időt áldozni a tudatos algebratanítás kulcsa.

[1] V.ö. Ernst Heackel biogenetikai alaptörvényével. Ez egy 1866-ban kimondott – és a biológiában alapvetésnek tekintett – állítás, miszerint az élőlények egyedfejlődésük során megismétlik a törzsfejlődés főbb állomásait.

1 TANULÁSPSZICHOLÓGIAI ÉS DIDAKTIKAI HÁTTÉR

„Egy-egy jó ötlet a tanulók aktivizálására, és az ötlet ügyes kivitelezése, nagyon megkönnyíti az utat az absztrakt gondolkodáshoz.” Varga Tamás [1]

A számfogalmak és az egyes számkörökben értelmezett műveletek fogalmának kialakításakor nemcsak matematikai ismeretekkel dolgozunk, hanem matematikadidaktikai és a matematikatanítás pszichológiájának eredményeivel is. A matematikai fogalomalkotás folyamata és a szellemi struktúrákról, szkémákról szóló szakasz a diplomamunka későbbi fejezeteiben ugyanúgy hivatkozási alap lesz, ahogy a matematikai reprezentációkról szóló szakirodalmi összefoglaló. E témaköröket Varga Tamás [1], Jerome Bruner [2], Richard Skemp [3], Vásárhelyi Éva [4], Ambrus András [5], valamint Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva és Wintsche Gergely közös művére [6] támaszkodva dolgoztam fel.

1.1 FOGALMAK

1.1.1 Fogalomalkotás

Életünk során különböző objektumokról, beleértve egy kialakítandó fogalom reprezentációit is, tapasztalatokat gyűjtünk. Amikor felismerjük tapasztalatainkban a lényeges és közös vonásokat, akkor ezek alapján osztályokba soroljuk az objektumokat. A tanítási folyamatban az objektumok leggyakrabban példák, melyeket a tanító vagy a tanár olyan módon választott ki, hogy rendelkezzenek azokkal a közös tulajdonságokkal, melyek a kialakítandó fogalom szempontjából lényegesek, s lehetőség szerint ne rendelkezzenek más közös tulajdonsággal.

A kiépítendő fogalom szempontjából irreleváns tulajdonságokra kezdetben ugyanis nem szabad, hogy nagy figyelem jusson. Ha ezeket a figyelemelterelő, megtévesztő, lényegtelen tulajdonságokat zajnak nevezzük, akkor mondhatjuk, hogy a fogalmak kialakításának kezdeti szakaszában a minél kevesebb zaj a kívánatos. Azonban, ahogy a fogalom egyre jobban kifejlődik, a tanulónak egyre nagyobb zajra van szüksége ahhoz, hogy a fogalom tulajdonságait egyre „nehezebb” példákból vonatkoztassa el. Ha elég sok ilyen objektumról szerzünk tapasztalatot, akkor a meghatározó, közös jegyet el tudjuk

választani az objektumoktól: a folyamatot absztrakciónak, elvonatkoztatásnak hívjuk, az eredménye pedig a fogalom.

Elsőrendű fogalom esetén a külvilággal való érzékleti és mozgásos tapasztalatokból történik meg az elvonatkoztatást, másodrendű fogalmak esetén pedig az elsőrendű fogalmakból, stb. Ha egy elsődleges fogalmat megalkottuk, akkor a fogalomra vonatkozó példák között ott találjuk azokat az érzékleti és mozgásos tapasztalatokat is, melyekből a fogalmat absztraháltuk.

Egy magasabb rendű fogalom esetében pedig a megalkotásához sok olyan fogalomra van szükség, melyet elég jól ismerünk, hogy tisztán lássuk, mi bennük a közös. Ha pedig egy magasabb rendű fogalmat megalkottunk, akkor a fogalomra vonatkozó példák között azokat az alacsonyabb rendű fogalmakat is megtaláljuk, melyek segítségével az illető fogalmat absztraháltuk.

Az egész számok fogalmának kialakításakor a gyerekekkel megállapíthatjuk, hogy tapasztaltunk már 5 Celsius fok hideget, és ha valaki mégsem, megmutathatunk neki mélyhűtőbe rejtett, többféle típusú hőmérőt, és a kezébe adhatóunk egy tasak – ugyaninnen származó – mirelit zöldborsót és egy zacskó szedret is.

Eljátszhatjuk, lerajzolhatjuk, elmondhatjuk továbbá, hogy a 2 játékpénzt tartalmazó pénztárcába 7 pénz elvesztése esetén 5 adósságcédula marad. Érzékleti és mozgásos tapasztalatokból absztraháljuk tehát az egész számok elsődleges fogalmát.

Azt gondolom, hogy több hőmérőt és zöldséget „behűtve”, és a pénztárcával sokféleképpen manipulálva elkerülhető, hogy az egész számfogalom szempontjából irreleváns tulajdonságokra kezdetben nagy figyelem jusson.

Magasabb rendű fogalomra példaként a valós szám fogalmát említem meg: absztrahálásához ugyanis szükség van például a szakaszpárok, a mérés, a végtelen tizedes törtek, vagy a számegyenes fogalmára.

1.1.2 A fogalmak elnevezése, felismerése és felidézése

Az emberi nyelv szoros kapcsolatban áll a fogalmakkal. Míg a fogalom tulajdonképpen egy eszme, addig a fogalom jelölésére használt, rendezett betű *n*-es a fogalom neve vagy

szimbóluma. A számok például matematikai fogalmak, míg a számjegyek pedig a számok nevei.

Ha megnevezünk egy tárgyat, akkor egyszersmind besoroljuk valamilyen osztályba. A gyors osztályba sorolás lehet előny és hátrány is. Hátrány, hiszen, ha egy objektumot valamilyen módon osztályba soroltunk, kevésbé vagyunk hajlamosak arra, hogy más szempont szerint is gondolkodjunk róluk. A megnevezés viszont hasznos az osztályok elkülönítésénél, ugyanis, ha különböző neveket asszociálunk egymástól kevéssé különböző osztályokhoz, akkor ez segít a megkülönböztető jegyek felismerésében és ugyancsak segítség a későbbi példák osztályozásakor.

A különböző számkörök nevei szolgálhatnak a különböző tulajdonággal bíró algebrai struktúrákba tartozó számok elkülönítésére is, azonban keveset gondolunk a 13-ra, mint valós számra, vagy a π-re, mint komplex számra, vagy a $-\sqrt{2}$-re, mint kvaternióra.[2]

1.1.3 A fogalmak átadása, tanulása-tanítása

Egy fogalom kialakulása olykor magától értetődik és a folyamat gyorsan lezajlik, olykor pedig nehézségekbe ütközik. Ekkor egy – a fogalmat ismerő – személy részéről szükség van a fogalom átadására. Richard Skemp ehhez kapcsolódóan két alapelvet fektet le.

I. alapelv: „Definíció segítségével nem közvetíthetünk a befogadó által ismert fogalmaknál magasabb rendű fogalmakat. Ezt csakis oly módon tehetjük meg, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.” [3]

Az I. alapelvhez kapcsolódó két megjegyzést írok le:

1. megjegyzés: A definíció sem hasztalan; pontosíthatja a fogalmat, világossá téve annak határait, és megadja a „környezetében lévő” fogalmakhoz való viszonyát.

2. megjegyzés: A mindennapi életben előforduló új fogalmak elég alacsonyrendűek, s általában rendelkezünk elég sok nála magasabb rendű fogalommal, melynek az új fogalom egy példája, s akár definíció segítségével is könnyen közvetíthető.

[2] További példaként írom le az osztályba sorolás hátrányával kapcsolatos szilveszteri élményemet. A társaságunk egyik tagja Activity játékban a munkaeszköz szót húzta, melyet el kellett mutogatnia. Eszközhasználati tilalom okán szegény ember jobb híján a két kézfejét kezdete el lóbálni maga előtt. Reakcióiban a társaság nem tudott elszakadni előbb a számnevek, majd a különböző köszönések bekiabálásától. (Az illető később egy csákánnyal dolgozó ember mozdulatait utánozva ért célt.)

Skemp II. alapelve: „Mivel a matematikai fogalmak döntő többségében az I. alapelvben írott példák is magasabb rendű fogalmak, ezért mindenekelőtt arról kell meggyőződni, hogy a befogadó – speciálisan a tanuló – rendelkezik-e ezekkel a fogalmakkal.” [3]

Maguk az alapelvek egyszerűek, de az alkalmazásuk a matematikatanítás során munkát igényel. Képzeljük el egy 9.-10. osztályos tankönyvben a valós számok témakörének első mondataként a következő definíciót: *Valós számokon egy olyan arkhimédészien rendezett testet értünk, melyben teljesül a Cantor-axióma.* Ez a matematikatanár számára persze kellően tömör, csodálatosan pontos és tökéletesen világos lenne. Alkalmazásakor persze a tanuló számára a valós számfogalom továbbra is teljesen értelmezhetetlen volna, viszont a fogalomhoz – sok hasonló élmény esetén pedig magához a matematikához – az inkompetencia és valószínűleg a félelem érzése kapcsolódna.

A II. alapelv után pedig két következményt emelek ki:

1. következmény: egy új fogalom közvetítése előtt meg kell találnunk a kiépítendő fogalomnál alacsonyabb rendű fogalmakat, melyekből a tanulók az illető fogalmat absztrahálhatják. Majd ezek mindegyikéhez meg kell találnunk a hozzájuk tartozó fogalmakat, és így tovább egészen az elsődleges fogalmakig, melyeket adottnak tekinthetünk.

2. következmény: ha felépítünk egy fogalmat, mint az egyre fokozódó szintű absztrakciók struktúráját, és közben a tanuló egy bizonyos közbülső szintet nem ért meg, a rendszer egész további része veszélyben van.

C. Neményi Eszter hasonlatával élve: „olyan [ez], mint egy óriási várkastély. Az építkezést is a teljes alap kialakításával kell kezdeni, s aztán minden falat, minden szinten folyamatosan összekapcsolva, együtt húznak fel.” [7]

Egy gyermekvédelmi intézmény vezetőjeként az a tapasztalatom, hogy még azok a gyerekek is, akik előnyös feltételekkel indulnak el az iskolai életben, ha – hiányzás, figyelmetlenség miatt – elmulasztják a szükséges alapvető fogalmak kialakítását, akkor sohasem vagy csak nagy nehézségek árán tudják majd megérteni azokat a későbbi fogalmakat, melyek megértése ezektől függött. A helyzet akkor nem reménytelen, ha a tanulási folyamatot úgy tervezték meg, hogy legyen elegendő idő az ismétlésre.

1.2 A SZKÉMÁK

1.2.1 A szkéma integráló szerepe

A fogalmak közötti gazdag és változatos kapcsolatok egymással összefonódó struktúrákat eredményeznek. „A struktúrák tanulmányozása a matematika fontos részét képzi, a struktúrák felépülésének és működésének tanulmányozása pedig a matematikatanulás pszichológiájának lényege.” [3] A pszichológiában a szellemi struktúrákat szkémáknak nevezik, melynek két fő funkciója van: integrálja a meglévő tudást, és eszközként szolgál az új tudás elsajátítására.

Amikor egy objektumról felismerjük, hogy egy fogalmat példáz, akkor a kérdéses dolgot kétféle szinten tudatosíthatjuk: önmagaként és az illető osztály tagjaként. Egy osztályfogalom pedig szkémáinkon keresztül óriási mennyiségű más fogalommal áll kapcsolatban. A fogalmak közti szövedékes kapcsolatok rendszerének felderítése lehetetlen vállalkozás lenne, azonban leírható, hogy egyrészt minél több szkémánk van a matematikatanulásban, annál inkább képesek leszünk az új tananyag integrálására, másrészt minél több szkémával rendezünk az életben, annál jobb problémamegoldók vagyunk. [3]

1.2.2 A szkéma, mint a tanulás eszköze

Skemp könyvében [3] részletesen ismertet egy kísérletet, melynek eredménye rávilágít, hogy milyen mértékű különbséget okoz a megfelelő szkéma megléte vagy hiánya az elsajátított anyag mennyiségében.[3] A szkémák szerinti tanulás esetén a vizsgálati személyek kétszer annyi objektumra emlékeztek közvetlenül a tanulás befejezése után, mint a magolás esetén. Az arány 4 hét múlva 7 : 1 lett.

[3]A kísérlet végrehajtói mesterséges szkémát terveztek, melynek jelei egy indiánnyelvhez hasonlítottak. A vizsgált személyek megtanulták az alapjelek jelentését, majd a kísérletvezetők két, három szimbólum együtteséhez rendelek hozzá jelentést, melyben az egyes szimbólumcsoportok jelentése kapcsolatban van a szimbólumcsoportot alkotó egyedi szimbólumok jelentésével. A megtanulandó csoportok növekedtek, de a nagyobb jelcsoportok jelentése továbbra is kapcsolatban állt a kisebb jelcsoportokéval. Végül a vizsgálati személyeknek meg kellett tanulniuk kétoldalnyi (oldalanként 100-100) szimbólumot, melyben az egyik oldalon lévő szimbólumok „bővítményei” voltak a már ismert szimbólumcsoportoknak, míg a másik oldalon olyan jelcsoportok álltak, amelyek egy másik csoport, a kontrollcsoport számára bírtak értelmes jelentéssel, a kísérleti csoport számára nem. Mindkét csoport tehát épp egyik oldalt tudta értelmes módon megtanulni, a másik oldalt nem. A két csoport bár ugyanazokat a jeleket sajátította el, különböző jelentést asszociáltak hozzájuk: mindkét esetben felépült egy-egy szkéma, melyek különböztek egymástól.

A szkémák szerint megtanult anyagot a kísérleti személyek tehát nemcsak jobban megtanulták, de tovább meg is tartották emlékezetükben. Elmondható, hogy a szkémák, melyeket egy tantárgy tanulásának a kezdetén felépítünk, döntő jelentőségűek lesznek abban, hogy könnyen vagy nehezen fogjuk-e később elsajátítani a kérdéses területet.

1.2.3 A szkémák szerinti tanulás előnyei és hátrányai

Ha szkémák szerint tanulunk, ami ebben az összefüggésben azonos az értelmes tanulással, akkor

- hatékonyabban tudjuk megtanulni azt, amivel éppen foglalkozunk,
- olyan szellemi eszközt dolgozunk ki a magunk számára, amellyel megkönnyíthetjük az adott területen a későbbi tanulást,
- ha következetesen használjuk ezt az eszközt, akkor a szkéma korábban elsajátított részeit is megszilárdíthatjuk.

Van azonban néhány hátrány is, amit érdemes figyelembe venni.

- Ha egy feladatot elszigetelten nézünk, akkor a szkémák szerinti tanulás hosszabb időt vesz igénybe.
- Mivel sokkal jobban emlékezünk azokra az új tapasztalatokra, melyek beleillenek egy bizonyos meglévő szkémába, a szkémáknak erős szelektív hatásuk van a friss tapasztalatainkra. Vagyis, ami nem illik bele a szkémáinkba, azt nem tanuljuk meg, és ha időlegesen mégis, akkor hamar elfelejtjük.

1.3 REPREZENTÁCIÓK

1.3.1 Bruner tanuláselméletének lényege

Bruner [2] olyan megismerési folyamatokat is tanulmányozott, mint az esetünkben izgalmas fogalomalkotás. Szerinte minden tantárgy anyagának az adott tudomány fundamentális struktúráira kell épülnie, így a matematikaoktatásnak is olyan alapelvekre, amelyek feltárják a valóság és a matematika kapcsolatát, és lehetővé teszik annak magyarázatát.

Alaphipotézise, hogy a matematika – és valamennyi tantárgy – alapvető elvei minden gyermek számára érthető reprezentációs mód segítségével taníthatók. Ezt kortól és szociális környezettől függetlenül érvényesnek tartja, de kiemelt jelentőséget tulajdonít a kultúrának, mely meghatározója a kognitív folyamatoknak, s melynek a gyermeket érő hatásrendszerét az oktatás szempontjából is kiaknázandónak tartja.

A tananyag megértéséhez alapvetően szükséges, hogy a tanuló a neki megfelelő formában, korai fázisokban, intuitív módon már feldolgozza azt. Életkori fejlettségének megfelelően pedig újra és újra előkerüljön az adott tananyag, s ezt a tanuló számára érthető formában kell közölni. Ezt az elvet a spiralitás elvének nevezzük.

Bruner szerint abból a célból, hogy a fogalmakkal dolgozni tudjunk, szükséges, hogy valamilyen módon reprezentáljuk azokat. A kognitív pszichológia külső és belső reprezentációkról beszél, melyeket az alábbiakban röviden vázolok.

1.3.2 Külső reprezentációk

Míg a külső reprezentációk a fogalom elsajátításának fő eszközei, addig a belső reprezentációkat az egyén maga alakítja ki tapasztalatai és ismeretei alapján. A matematikaoktatásban a külső reprezentációk Bruner szerinti [2] mindhárom szintje szerepet játszik:

1. A tárgyi vagy enaktív reprezentációs sík esetén konkrét cselekvések révén megy végbe az ismeretszerzés. A tárgyi síkot használjuk, amikor a műveletek és a műveleti tulajdonságok fogalmának kialakításakor korongokkal, pálcikákkal, színes rúd készlettel, fogpiszkálóval, az ujjaival stb. manipulál a gyermek.
2. A képi vagy ikonikus sík esetén az ismeretszerzés képek és elképzelt szituációk segítségével történik. A szemléltetés a közoktatás teljes spektrumán szerepet játszik a matematikatanulásban, például az egész számok bevezetésekor már említett modellek is ezen a síkon segítik a fogalomalkotást.
3. A szimbolikus sík esetén a matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével történik az ismeretszerzés. A szimbolikus sík a matematikatanulás teljes spektrumán végigkísér bennünket.

A tanulói aktivitás során az egyes reprezentációs síkok egymásba mennek át, egymást kölcsönösen kiegészítik és erősítik. „A három reprezentáció együttes használata segíti a

megértést és tanulást. Egyik reprezentációról a másikra való áttérés pedig növeli a problémamegoldás hatékonyságát és a rugalmasságot.” [8]

1.3.3 Belső reprezentációk

A belső reprezentációk nem a külső reprezentációk másolatai, hanem az egyén formálja ki ezeket tapasztalatai és tudása alapján. A tárgyi, képi, szimbolikus belső reprezentációk rendszere együttesen alkotja meg a fogalmak mentális képét, míg a köztük lévő kapcsolat az ismeretek hálója.

Egy fogalmat akkor értünk meg, ha előbb a külső reprezentációk segítségével az absztrakció megtörténik, majd a fogalom belső reprezentációja a reprezentációs hálózatunk részévé válik. A megértés fokát ezen kapcsolatok száma, erőssége és stabilitása jellemzi. [5]

2 A TERMÉSZETES SZÁMOK REGULÁRIS FÉLGYŰRŰJE

„Lehet 5 gombot háromszorozni, de nem lehet a 3-at 5-gombszorozni.” [9]

2.1 TERMÉSZETES SZÁMOK A MATEMATIKÁBAN

A XIX.-XX. század fordulóján a matematika tárgyalását a kor matematikusai precíz alapokra kívánták helyezni. A természetes számok halmaza is logikai, axiomatikus vizsgálatok tárgya lett, mely fejlődési vonal legszélesebb körben ismert eredménye a természetes számok Peano-féle axiómarendszere.[4] Egy másik elképzelés halmazelméleti alapfogalmakra hivatkozik, és erre építi fel a természetes számok körét. Az absztrakt bevezetési mód pedig előbb az egész számokat definiálja két művelettel és bizonyos műveleti tulajdonságokkal, majd ezek alkalmas részhalmazaként állítja elő a természetes számokat. További felépítések is lehetségesek: Fried, Korándi és Török [10] jegyzetében egy negyedik úton halad.

[4] Itt jegyzem meg, hogy különböző konvenciók vannak abban a tekintetben, hogy a 0 természetes szám-e. Peano nem tekintette természetes számnak a 0-t, az ő korában a legkisebb szám az 1 volt. A legkisebb természetes szám kijelölése azóta is szokás vagy megállapodás kérdése. Módszertani szakdolgozat lévén a 0-val a (magyar) közoktatásban elfogadottak szerint bánok, és természetes számnak tekintem.

Közoktatásbéli jelentősége miatt dolgozatomban a Peano-féle axiómarendszerből kiinduló építkezést és a halmazelméleti bevezetést vázolom fel.

2.1.1 A Peano[5]–féle axiómarendszer

Alapfogalmai a nulla (0), az n szám (természetes szám), és a rákövetkezés / továbbszámlálás egyváltozós algebrai művelete[6] (').

1. $0 \in \mathbb{N}$, (a 0 természetes szám,)

2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$, (ha n természetes szám, akkor a rákövetkezője is az,)

3. $n' = m' \Rightarrow n = m$, (a rákövetkezés egyértelmű,)

4. $\forall\, n: n' \neq 0$, (a 0 egyik természetes számnak sem rákövetkezője,)

5. $A \subseteq \mathbb{N}, 0 \in A, (n \in A \Rightarrow n' \in A) \Rightarrow A = \mathbb{N}$. (A teljes indukció axiómája.)

Az axiómarendszerben nem szerepel a kijelentés, hogy pontosan ezek a természetes számok, de így kell érteni. Megfeleltetve a Peano-axiómák jelrendszerét a szokásosnak: $0' := 1, (0')' := 2, \dots, (\dots((0')')' \dots)' :=$ n, ahol n db rákövetkezés műveletet végeztünk. [10]

2.1.2 Műveletek értelmezése a Peano–féle axiómarendszer alapján

Az axiómák rögzítése után az építkezés az alapműveletek definiálásával indul:

$\forall n\ \forall m \in \mathbb{N}$: $n + 0 = n$, ill. $n + m' = (n + m)'$,

$\forall n\ \forall m \in \mathbb{N}$: $n \cdot 0 = 0$, ill. $n \cdot m' = n \cdot m + m$.

Az így definiált + összeadásról és · szorzásról belátható, hogy

$\forall n\ \forall m\ \forall k \in \mathbb{N}$: $(n + m) + k = n + (m + k)$, az + asszociatív,

$\forall n\ \forall m \in \mathbb{N}$: $n + m = m + n$, a + kommutatív,

[5] Giuseppe Peano 1889-ben jelentette meg a természetes számokra vonatkozó, az aritmetika axiomatikus alapját képező axiómarendszerét, mely máig a nevét viseli.
[6] A 3.1.1 fejezetben tekintem át az algebrai struktúrákhoz kötődő fogalmak: az algebrai művelet fogalma is ott kerül precíz bevezetésre.

$\forall n\ \forall m\ \forall k \in \mathbb{N}$: $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$, a · is asszociatív,

$\forall n\ \forall m \in \mathbb{N}$: $n \cdot m = m \cdot n$, a · kommutatív is,

$\forall n\ \forall m\ \forall k \in \mathbb{N}$: $(n + m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k$,

vagyis a · disztributív az +-ra nézve. Jelentőségük miatt szokás az iméntieket alapazonosságoknak is nevezni. [11] A dolgozatban a továbbiakban így hivatkozom ezekre. Továbbá fennáll

$\forall n \in \mathbb{N}$: $n \cdot 1 = n$.

A természetes számok halmaza az összeadásra és a szorzásra nézve nem alkot gyűrűt, hiszen egyik művelet sem invertálható. Ezt az algebrai struktúrát kommutatív félgyűrűnek nevezzük, és a 3.1.1. fejezetben részletesen ejtek róla szót.

A Peano-axiómákból való építkezés eredményeképpen minden természetes számkörben megszokott eredmény és tulajdonság levezethető. Példaként az

$a + b = c + b \Rightarrow a = c$

egyszerűsítési szabályt látom be:

$a + b \neq 0$ és $c + b \neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists x: x' = a + b$ és $\exists y: y' = c + b$.

Tudjuk, hogy $x' = y'$. A 3. axiómát használva $x = y$ is fennáll. Ezt végrehajtjuk, amíg tudjuk, s b lépésben arra jutunk, hogy $a = c$. [10]. Ezzel a tulajdonsággal bíró félgyűrűt reguláris félgyűrűnek szokás nevezni.

A Peano-axiómák segítségével a $\leq$ reláció[7] az alábbi módon definiálható:

$m \leq n$ fennáll, ha $\exists\, k\ (m + k) = n$.

A $\leq$ relációra belátható, hogy $m \leq m$, azaz reflexív; hogy $m \leq n$ és $n \leq m$ esetén $m = n$, azaz $\leq$ antiszimmetrikus; illetve $m \leq n$ és $n \leq k \Rightarrow m \leq k$, azaz tranzitív: tehát $\leq$ reláció rendezés.[8]

[7] Kétváltozós relációnak nevezzük egy halmaz elempárjainak egy S nem üres részhalmazát.
[8] A reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációkat rendezésnek vagy rendezési relációnak hívjuk.

2.1.3 A halmazelméleti modell

A Zermelo-Fraenkel halmazelmélet a téma gyakran alkalmazott, axiomatizált elmélete, melyet a szakirodalom ZF-halmazelméletként rövidít. A vázolt ZFC elmélet a kiválasztási axiómával bővített ZF elmélet, melyet sztenderd halmazelméletnek is neveznek. Alapfogalmai a halmaz, az elem, és az elemnek a halmazhoz való tartozása.

1. Meghatározottsági axióma: Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor a két halmaz megegyezik.

2. Pár axióma: Bármely két halmazhoz van olyan halmaz, melynek ezek a halmazok az elemei és nincs más eleme.

3. Unió axióma: Halmaznyi sok halmaz uniója is halmaz.

4. Hatványhalmaz axióma: Egy halmaz összes részhalmazainak a halmaza is halmaz.

5. Részhalmaz axióma: Egy halmaz bizonyos tulajdonságú elemei halmazt alkotnak.

6. Végtelenségi axióma: Van végtelen halmaz.

7. Pótlás axiómája: Egy halmaz operációnál[9] vett képe is halmaz.

8. Jólfundáltsági axióma: Minden nem üres halmaznak van tőle diszjunkt eleme.

9. Kiválasztási axióma: Nem üres halmazok nem üres rendszerének Descartes-szorzata nem üres. [12]

Az axiómák ismeretében a cél a számosság fogalmának precíz bevezetése.

Ha két véges halmaz elemei között létezik kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, bijekció, akkor azt mondjuk, hogy a két halmaz között az „ugyanannyi” reláció áll fenn.

Erre teljesül az imént emlegetett reflexivitás és tranzitivitás, valamint szimmetrikus is, hiszen ha *A*-nak ugyanannyi eleme van, mint *B*-nek, akkor *B*-nek is ugyanannyi eleme van, mint *A*-nak.

[9] f halmaz függvény, ha minden eleme rendezett pár és minden x-hez legfeljebb egy olyan y van, amellyel (x, y) ∈ f. Az eddig fölsorolt axiómákból következik, hogy egy függvény értelmezési tartománya és értékkészlete is halmaz. Vannak olyan hozzárendelések, amik nem függvények, mert az értelmezési tartományuk nem halmaz: ezeket operációknak nevezzük.

Az „ugyanannyi” tehát ekvivalenciareláció[10]. Az „ugyanannyi” ekvivalenciareláció szerinti osztályba sorolás során pedig megkapjuk az összes véges halmaz egy osztályozását. [11]

Az egy osztályba sorolt, ekvivalens halmazok közös tulajdonságát a halmazok számosságának hívjuk, s egy-egy természetes számmal jelöljük. Az A halmaz számosságának jele $|A|$, az üres halmaz számossága *0*.

2.1.4 A műveletek értelmezése a halmazelméleti modellben

A, B, C véges halmazok, $a := |A|, b := |B|, c := |C|$. Az összeadás és a szorzás műveletét és tulajdonságaik igazolását halmazműveletekre vezetjük vissza:

$a + b := |A \cup B|$, feltéve, hogy $A \cap B = \{\emptyset\}$,

$a \cdot b := |A \times B|$.[12]

Az így definiált + összeadásról belátható, hogy

$\forall A\, \forall B: a + b = b + a,$ hiszen $A \cup B = B \cup A$, valamint

$\forall A\, \forall B\, \forall C: (a + b) + c = a + (b + c),$ ugyanis $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

A · szorzás terén

$\forall A\, \forall B: a \cdot b = b \cdot a,$ bár $A \times B \neq B \times A$, de $|A \times B| = |B \times A|$,

$\forall A\, \forall B\, \forall C: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$

ha ugyanis α, β, γ rendre az A, B, C halmazok egy-egy eleme, akkor az $((\alpha, \beta), \gamma) \leftrightarrow (\alpha, (\beta, \gamma))$ kölcsönösen egyértelműen rendeli egymáshoz az $(A \times B) \times C$ és $A \times (B \times C)$ halmazokat. Tehát elemszámuk egyenlő. Továbbá fennáll, hogy

[10] A reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat ekvivalenciarelációnak hívjuk.

[11] Ha egy nem üres halmazt felírunk diszjunkt részhalmazainak egyesítéseként, akkor a halmaz egy osztályozását nyerjük. Ha *A* halmazon adott egy ekvivalenciareláció, akkor az egy-egy osztályba sorolt elemek, mint *A* részhalmazai az *A*-nak egy osztályozását adják meg.

[12] *A* és *B* halmaz $A \cap B$ metszetén azoknak az elemeknek a halmazát értjük, melyek *A*-nak és *B*-nek is elemei, $A \cup B$ uniója azon elemek halmaza, melyek *A* és *B* halmaz közül legalább egyiknek elemei, $A \times B$ Descartes-szorzaton pedig az összes olyan *(a, b)* rendezett számpár halmazát hívjuk, ahol $a \in A$ és $b \in B$.

$$\forall A\ \forall B\ \forall C\colon (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c, \qquad (A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$$

miatt. Az alapazonosságokon túl beláthatjuk a további, a természetes számkörben megszokott azonosságok helyességét is.

2.2 TERMÉSZETES SZÁMOK AZ ÓVODÁBAN

2.2.1 A Peano-féle axiómarendszer felbukkanása

A számfogalom kialakulásának 0. stációját Ambrus [6] értelmezésében a számokkal kapcsolatos iskola előtti tapasztalatok jelentik. Tomi fiamnak 4 éves korában kettővel több kocka csokit adtam, mint a nővérének. Felháborodva kérte, hogy adjak a testvérének egyet, meg még egyet! Kérdésemre: „Kettőt?”, kikérte magának: „Egyet, meg még egyet!” Ennél többet árul el az óvodás korú gyermek műveletfogalmáról az a szituáció, amikor az asztalon lévő négy drazsé mellé, melyek összességét számlálással meghatározta, odateszünk még kettőt. A 4-ig történő számlálás után akármilyen gyorsan is tesszük le a 2 drazsét, a számlálást elölről kezdi.

A továbbszámlálás egyváltozós művelete az óvodás korú gyermekek első algebrai művelete, ami pedig nem más, mint a Peano-axiómarendszerben szereplő rákövetkezés. A matematikatanítás szempontjából ez rendkívül szerencsés egybeesés! Az *n*-szer ismételt továbbszámlálással ugyanis az összeadás egyik fontos műveletértelmezését, az *n* hozzáadását nyerjük (az *n*-szer ismételt hozzáadása ugyanannak a számnak pedig az *n*-nel való megszorzás, míg az *n*-szer ismételt megszorzás ugyanazzal a számmal az *n*-edik hatványkitevőre emelés).

Figyelembe véve a spiralitás elvét és a fent detektált egybeesést, az óvodai matematikai nevelésnek érdemes a műveletfogalmak előkészítésével foglalkozni. A műveletfogalom kiépítésének első állomása rávezetni a gyermekeket a környezetükben lévő változások detektálására. Erre a munkára C. Neményi Eszter a Mi változott meg? nevű játék megannyi variációját javasolja nagycsoportban és első osztályban is. [7] Ugyanezt a célt szolgálhatják egyébként olyan népszerű és modern társasjátékok, mint a Dobble és a Difference, de olyan klasszikus feladványok is, mint a következő:

1. ábra - Példa a Mi változott meg? elnevezésű játék egy klasszikus típusára.

(A kép forrása: M. Kuruczné Borbély: Az én matematikám 1. évfolyam, Apáczai Kiadó, Celldömölk, 2010.)

2.2.2 A halmazelméleti modell megjelenése

Daróczy Erzsébet az óvodai matematikai nevelésről szóló művében [13] ebben a sorrendben jegyzi a természetes számok bevezetését:

1. a halmazok összehasonlítása tulajdonságaik (szín, alak, helyzet, stb.) szerint,[13]

2. a halmazok összehasonlítása becsléssel,

3. a halmazok összehasonlítása párosítással,

4. a halmazok számosságának megállapítása, a tőszámnevek bevezetése,

5. a halmazok rendezése számosságuk szerint,

6. halmazok képzése,

7. halmazok bontása részhalmazokra,

8. halmazok elemeinek csoportosítása tulajdonságaik szerint,

9. halmazok egyesítése,

10. halmazok tulajdonságainak változtatása hozzátevéssel, elvétellel

[13] Alsó tagozaton a logikai készlet óvodai megfelelője is létrehozható - formájának pedig csak a képzelet szabhat határt. Török Judit tanárnő tanúsága szerint egy hallgatói csoport ebből a célból készített különböző színű, nyakkendőjű, arcú bohócfejeket, de varrtak olyan különböző színű és anyagú kis zsákokat is, melyek különböző szemcsenagyságú anyagokat tartalmaztak.

Látható, hogy az 1. és 2. az érzékleti tapasztalatszerzés, a 3. a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, a 4. pedig a halmazok számosságának megfeleltetése a számlálás során megismert tőszámnevekkel. Az 5. a rendezési reláció alkalmazása, míg a 6.-10. a műveletvégzés halmazokkal.

A 3. pontban szereplő bijekció számtalan módon, életkori sajátosságokhoz adekváltan elvégezhető (párkereséssel, színezéssel, összekötéssel stb.), mely nemcsak megmutatja a fogalom lényegét, hanem a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésre konstrukciót is ad.

2. ábra - A bijekció jelölése összekötéssel

(A kép forrása: I. Árvainé Libor, Sz. Lángné Juhász, A. Szabados: Sokszínű Matematika 1. első félév, Mozaik Kiadó, Szeged, 2016.)

2.3 TERMÉSZETES SZÁMOK AZ ISKOLAI MATEMATIKÁBAN

2.3.1 Tantervi elvárások és módszertani alapelvek

A természetes számfogalom kialakításakor a tankönyvek alapvetően a halmazelméleti bevezetési módot követik, míg a Peano-axiómák szemlélete markánsan a műveletfogalmak esetében bukkan fel. Ezekre „az eredetkérdésekre” a későbbiekben rámutatok.

Piaget [14] kutatásai igazolják, hogy egy első osztályos gyermek gondolkodása még erősen kötődik a tárgyi valósághoz, cselekvések segítségével, cselekvésbe ágyazottan gondolkodik. „Az absztrakció alapja a sokszínű, sokféle konkrétum megismerése.” – írja a Kerettanterv [15] is.

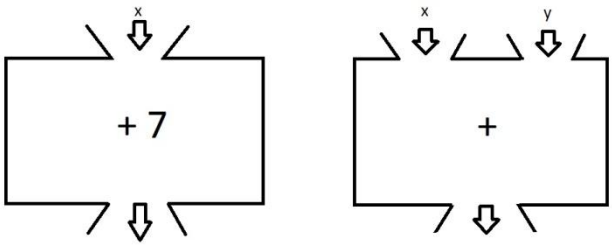
A Kerettanterv az 1-2. évfolyam fejlesztési céljai között szerepelteti a „tárgyak, személyek, dolgok összehasonlítása, válogatása, rendezése, csoportosítása, halmazok képzése közös tulajdonságok alapján.” [16] A fejlesztés várt eredményei között 4. évfolyam végére a következőket fogalmazza meg: ”Halmazok összehasonlítása az elemek száma szerint. Halmazalkotás. Összehasonlítás, azonosítás, megkülönböztetés. Közös tulajdonság felismerése, megnevezése.” [16]

A műveletek fogalmának kialakításához Skemp [3] szerint azokat a történéseket és cselekvéseket kell összegyűjteni, melyek „a művelet elvégzését” jelentik. A példák kínálatából előbb olyanokat érdemes választani, melyek kevés zajjal[14] rendelkeznek. Ezekből a gyermek képes elvonatkoztatni, s létrejön egy absztrakció, mely többé-kevésbé a kívánt műveletfogalom. Majd egyre „zajosabb” példákkal kínálva meg a gyermeket, egyre körülhatároltabb lesz az absztrakció és megerősödik a fogalom. Végül a műveletfogalom megszilárdításához hozzátartozik a fordított út sokszori bejárása is.

Hogy meddig kell csinálni? „Néhány tanulónak esetleg 2-5 hasonló szituáció elegendő, hogy a bennük közös lényeget meg tudják ragadni, mások még második osztályban is rászorulnak a konkretizálásra. Az utóbbiakat azzal segíthetjük, ha sok alkalmat biztosítunk az út kétirányú bejárására: az absztrahálásra és a konkretizálásra.” [7]

2.3.2 Összeadás, kivonás

Lényegileg más szituáció meglévő 7 gyümölcsfához 5-öt venni, mint az egyik kertészetben 7, a másikban 5 gyümölcsfát vásárolni. Az első eset egyváltozós algebrai művelet, a hozzáadás, melynek a 7 a „kiindulópontja”, a +5 a „szabálya”. A második eset kétváltozós algebrai művelet, ahol a két szám viselkedése szimmetrikus.



3. ábra

A gyerekek számára is jól szemlélteti a változók szerepét a Varga Tamás nevéhez köthető műveletgép.

[14]Zaj itt: a kiépítendő fogalom szempontjából irreleváns, figyelemelterelő, sőt megtévesztő tulajdonságok.

A hozzáadás a Peano-axiómák struktúráját mutatja, míg a kétváltozós összeadás a halmazelméleti modellt követi. Amennyire a két modell jellege eltér, annyira e két műveletfogalmat külön kezeljük a matematikatanításban. A hozzáadás esetében a kommutativitásnak már a felvetése is értelmetlen, míg az összeadásnál a gyerekek hamar észreveszik, melyet az összeadandók és a tagok elnevezéssel meg is erősítünk.

Az összeadás harmadik értelmezése az egyesítés, összeöntés, összetoldás, míg a negyedik értelmezése halmazok, mennyiségek egymással való összehasonítása alapján történik. [7] Tisztázásra szorul, hogy ha az egységes műveletfogalom kialakítása a cél, akkor miért szükséges a különböző értelmezéseket tanítani. A konkrét élethelyzetek különféle értelmezéseket szolgáltatnak, így kényszerpályán vagyunk: ezeket sorra kell venni; azonban ez egyben lehetőség is a műveletfogalom szilárd alapjainak lefektetésére.

Csupán megemlítem a kivonást, mely bár nem algebrai művelet a természetes számokon, a közoktatás okkal foglalkozik vele. A kivonás értelmezései illeszkednek az összeadás különböző műveletfogalmaihoz.

2.3.3 Szorzás, osztás, hatványozás

Mivel a második osztályos tanulóknál is konkrét helyzetekhez kell kapcsolnunk a műveletet, a szorzás bevezetése ismételt összeadásként jelenik meg. Ez tulajdonképpen nem „számít” új műveletnek, csupán egy praktikumnak, mely nem más, mint csupa egyenlő tagokból álló összeg rövidítése. Ez a Peano-axiómákból definiált szorzásfogalmon alapul, és megszorzásnak nevezzük. Itt a gyermekek szemében nincs jelentősége a 2-vel történő megszorzásnak, és értelmetlen a 0-val és az 1-gyel való megszorzás. Emellett egy fontos szemléletmódbeli gát is kialakul: a tanulókban fel sem merül a megszorzás résztvevőinek[15] felcserélése, hiszen a szorzandó az, amit ismételten összeadunk, a szorzó pedig ahányszor összeadunk. Erre szemléletes példát a fejezet elején látható idézet szolgáltat.

Ezzel párhuzamosan érik a gyerekeket impulzusok a hétköznapi életből, melyek a kétváltozós műveletfogalom kiépítését kívánják meg. A kétváltozós összeszorzás a Descartes-szorzat „szellemében” gondol a szorzótényezőkre, ahol a műveleti tulajdonságok is látványosabbak. A cél ennek a műveletfogalomnak is a kiépülése, majd

[15] Okkal nem a tényező szót használom.

pedig a két műveletfogalom egységesítése. Az egységesedett műveletfogalom műveleti tulajdonságait pedig érdemes gondosan körüljárni.[16]

A természetes számkörben tanított osztásfogalmat előbb kétféleképpen, bennfoglalásként és egyenlő részekre osztásként értelmezik a gyerekek. A bennfoglalás során egyenlő elemszámú csoportokat készítünk, s azt szeretnénk megállapítani, hogy a rendelkezésre álló elemekből hány csoport kerül ki. Az egyenlő részekre osztás során adott, hogy hány egyenlő darabszámú csoportot kell létesíteni, s a kérdés, hogy a rendelkezésre álló elemekből hány elem kerül egy csoportba. Világos, hogy egyik sem művelet a természetes számok halmazán, azonban a két fogalom miután (pontos[17]) osztásfogalomként egységesedik, kiterjeszthető lesz az egész számokra, a racionális számkörben pedig műveletté is válik. Harmadik osztályban ugyancsak természetes számokon értelmezik a gyerekek a maradékos osztást is.

A hatványozás fogalma a halmazelméleti modellben a hatványhalmazok számosságából, míg a Peano-féle aritmetika szerint ismételt megszorzásból ered. A közoktatás a hatványozás műveletét ez utóbbi szerint vezeti be a 7.-8. évfolyamon. [17] Ami az alapazonosságokat illeti: nem kommutatív és nem asszociatív, de $(a \times b)^c = a^c \times b^c$ fennáll $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$-re. A hatványozás további közismert azonosságai[18] a hatványozás definícióból közvetlenül következik, segítségükkel (és a permanencia elv mentén) további számkörök hatványozás-értelmezései nyerhetők.

2.4 JÁTÉK

2.4.1 A készlet bemutatása

E fejezet tervezése során célul tűztem ki, hogy óvodai és általános iskolában egyaránt használható játékot készítsek. Egy műveleteket előkészítő játék mellett döntöttem. A korábban említett Mi változott meg? című játék ezzel a céllal a változás detektálására hívja meg a gyermeket. Az általam kitalált játék ennek „komplementere”: egy izgalmas játékszituációban kell tetten érni a hasonlót.

[16] Nem magától értetődő, hogy 3 tányéron 2 szem cseresznye ugyanannyi, mint 2 tányéron 3-3 darab. Ahogy az sem, hogy 3 lap wc papírt egymásra, majd félbehajtva ugyanolyan vastag lesz az eredmény, mintha egy ugyanekkora darabot először hajtunk félbe, s utána a harmadoló pontoknál egymásra.
[17] A maradékos osztástól való megkülönböztetésül.
[18] Azonos alapú hatványok szorzása és osztása, azonos kitevőjű hatványok szorzása és osztása, valamint a hatvány hatványozása.

A játék 9 kártyalapból áll, melyek mindegyikén 8-8 kép található olyan objektumokról melyek felismerése az óvodás korosztálynak sem jelent problémát.

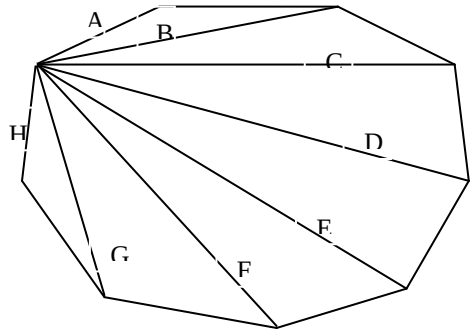
4. ábra - A játékkártyák

Hogy könnyebb legyen bemutatni a kártyák tartalmát, megfeleltetem a képeket az ABC betűinek: A = alma, B = banán, C = cica, D = dió, E = egér, F = fa, G = gitár, H = ház. I = indián, J = jégcsap, K = kincsesláda, L = labda, M = mézes csupor, O = óra. P = pénz, Q = kukorica, R = retek, S = saláta, T = torta, U = uborka. V = vár, W = wc papír, X = xilofon, Y = yeti / szörny, Z = zászló. a = asztal, b = béka, c = csiga, d = dinnye, e = eper, f = fokhagyma. g = gomba, h = horgony, i = iránytű, j = jegygyűrű.

A kártyák közti összefüggést az alábbi mátrix mutatja. Leolvasható, hogy bármely két kártyán a 8-8 kép közül pontosan egy közöset találunk. (Kék színű betűvel az ismétlődő objektumokat jelöltem.) Kézenfekvő továbbá az objektumokat egy gráf éleinek, a kártyákat a gráf csúcsainak megfeleltetni, így egy 9 csúcsú teljes gráfban az egy csúcsba futó élek pontosan az ugyanazon kártyához tartozó objektumokat adják. (Az áttekinthetőség kedvéért csupán egy kártya esetét ábrázolom.)

A	B	C	D	E	F	G	H
A	I	J	K	L	M	N	O
I	B	P	Q	R	S	T	U
J	P	C	V	W	X	Y	Z
K	Q	V	D	a	b	c	d
L	R	W	a	E	e	f	g
M	S	X	b	e	F	h	i
N	T	Y	c	f	h	G	j

6. ábra - A kártyán található információk mátrixa



5. ábra - Szemléltetés gráffal

2.4.2 A játék menete

A játékot két személy játssza. A pakli kártyából a legfelsőt középre helyezzük, a maradék 8-at kettéosztjuk és minden játékos előzetes vizsgálódás nélkül maga előtt helyezi el a 4 kártyát – fejjel lefelé, egymáson.

Egyszerre fordítják meg a legfelső lapot, és keresik a középen lévő kártya és a sajátjuk között az ugyanolyan objektumot. Aki előbb észreveszi, az beteheti a saját kártyáját középre, és már fordítja is fel a maga előtt lévő kártyák közül a legfelsőt. Majd indul a második kör. A játék 4-7 körben véget ér: az győz, akinek előbb elfogynak a kártyái.

2.4.3 Tapasztalatok és variációk

A játékot egy gyermekvédelmi intézménybe, a Szent Imre Iskolaházba[19] járó 4 gyermekkel próbáltam ki: közülük 1 nagycsoportos és 3 első osztályos. Közülük persze mindig két-két gyermek játszott. A tapasztalatom az volt, hogy a játékszabályokat

[19] A Szent Imre Iskolaház a Dévai Szent Ferenc Alapítvány gyermekvédelmi intézménye Székesfehérváron, ahol 3-20 éves korig kapnak támogatást - napközbeni ellátás során - a helyi, nehéz helyzetben élő fiatalok.

könnyen megértették, a játékhoz motiváltan fogtak hozzá, és nagy hévvel játszották. A játék során a rövid fürkésző szakaszokban erősen koncentráltak a gyerekek, míg az „elkapások” izgalmassá, reflexszerűvé teszik a játékot. Néhány objektum a gyerekek számára nem volt felismerhető, ezt (a dolgozatban rögzített verzióban) javítottam. Erős élményem, hogy a játék hamar véget ér, és nagyobb szabadságot adna az alkalmazására, ha nem csak páros játéklehetőség lenne.

Ennek orvoslására egy háromszemélyes, nem legfeljebb 7 körig tartó verziót találtam ki. A három játékos között egyenlően osztjuk ki a kártyákat (és középre nem teszünk). Ugyancsak lefordítva helyezik el egymáson a játékosok a kártyákat. A játék akkor indul, amikor egyszerre felfordítják a legfelső lapjaikat, és a másik két játékos kártyáján lévő objektumok közül a sajátjukkal közös objektumot keresik. Aki előbb megtalálja, az odaadja a kártyáját annak, akinél ezt észrevette.

A játék győztese az, akinek elfogynak a lapjai. A játék így legalább 3 körös és „akármeddig” eltarthat.

3 AZ EGÉSZ SZÁMOK INTEGRITÁSTARTOMÁNYA

„Az egész szám tehát egy absztrakt fogalom, a 2+2 = 4 pedig egy absztrakt tétel.” Kiss Emil [18]

Nagyobbik lányom nagy szemekkel meredt rám, amikor először felmerült, hogy mennyi $3 - 5$. Más gyermek játékpénzzel és adósságkártyával dolgozik, amikor szembesül azzal, amit precízen úgy mondanánk, hogy az $a + x = b$ egyenletnek nincs megoldása $\forall a, b \in \mathbb{N}$-re a természetes számok halmazán.

A cél, olyan kétműveletes algebrai struktúrát létrehozni, mely tartalmazza a természetes számokat, létezik minden elemének additív inverze, és ez a legszűkebb ilyen. De vajon a bővebb számkörben minden korábban megszokott műveletfogalom és műveleti tulajdonság ugyanaz maradhat?

3.1 EGÉSZ SZÁMOK A MATEMATIKÁBAN

3.1.1 Az egész számok az algebrai struktúrákban

Egy $\mathcal{H}$ halmazon értelmezett (n változós) algebrai műveleten egy $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \ldots \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ leképezést értünk (ahol a Descartes-szorzat n-szeres).

Ahhoz, hogy az egész számok megkonstruálásáról érdemben írni lehessen, szükséges áttekinteni az idevágó algebrai struktúrákat.

Az algebrai struktúrának hívunk egy $(S,\oplus,\odot,\ldots)$ legalább kéttagú rendszert, ahol S nemüres halmaz, a $\oplus,\odot,\ldots$ pedig ezen a halmazon értelmezett művelet.

$(\mathcal{R},\oplus,\odot)$ félgyűrű, ha

- $\oplus$ asszociatív,
  kommutatív,
- $\odot$ asszociatív,
- és $\forall a,b,c \in \mathcal{R}: a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$, ill. $(b \oplus c) \odot a = b \odot a \oplus c \odot a$, melyre a továbbiakban kétoldali disztributivitásként hivatkozok.

Kommutatívnak nevezzük a félgyűrűt, ha $\odot$ kommutatív. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbb{N}$ az iménti fejezetben definiált összeadás- és szorzásműveletre nézve kommutatív félgyűrűt alkot. Sőt reguláris félgyűrűt, hisz' $\forall a,b,c \in \mathbb{N}: a \oplus b = c \oplus b \Longrightarrow a = c$ fennáll.

$(\mathcal{R},\oplus,\odot)$ gyűrű, ha

- $\oplus$ asszociatív,
  kommutatív,
  $\forall a \in \mathcal{R}$-re $\exists n \in \mathcal{R}$ hogy $a \oplus n = n \oplus a = a$, azaz létezik a $\oplus$ -ra nézve egységelem[20],
  $\forall a \in \mathcal{R}$-re $\exists a^{-1} \in \mathcal{R}$, hogy $a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = n$, azaz minden elemhez létezik (egy tőle függő) inverzelem[21],
- $\odot$ asszociatív,

[20] melyet összeadás esetén nullelemnek, vagy nullának hívunk, és 0-val jelölünk.
[21] melyet az összeadás művelete esetén az a elem ellentettjének nevezünk, és ^{-}a-val jelölünk.

és a $\odot$ mindkét oldalról disztributív. [19]

Ha $\odot$ kommutatív, akkor kommutatív gyűrűről beszélünk. Ha $\forall a \in \mathcal{R}$-re $\exists e \in \mathcal{R}$, hogy $a \odot e = e \odot a = a$, (azaz, ha $\odot$ műveletre nézve is létezik egységelem,) akkor $\mathcal{R}$ egységelemes gyűrű.[22] Végül $\mathcal{R}$ nullosztómentes, ha nem létezik olyan a nemnulla eleme, mellyel egy b nemnulla elemre $a \odot b = b \odot a = 0$ fennáll – használva itt a hivatkozásban rögzített 0 jelölést.

Integritástartománynak nevezzük a kommutatív, nullosztómentes gyűrűket. Ellenőrizhető, hogy $\mathbb{Z}$ egységelemes integritástartomány.

Megemlítem, hogy vannak, akik az *egységelemes,* kommutatív, nullosztómentes gyűrűt értik integritástartomány alatt - függően attól, hogy mennyire akarják, hogy a struktúra (didaktikailag) hasonlítson az angolul interger-nek nevezett egész számok struktúrájára. A dolgozatban az integritástartománynak az iménti bekezdésben rögzített definícióját használom, és külön jelölöm, ha egységelemes integritástartományról írok.

Az $(\mathcal{R},\oplus,\odot)$ gyűrű izomorf az $(\mathcal{R}', \circ, *)$ gyűrűvel, ha létezik olyan $\phi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ bijektív leképezés, amelyre $\forall a, b \in \mathcal{R}$ esetén $\phi(a \oplus b) = \phi(a) \circ \phi(b)$ és $\phi(a \odot b) = \phi(a) * \phi(b)$.

3.1.2 Reguláris félgyűrű beágyazása integritástartományba

Az egész számokat a természetes számpárok segítségével állítom elő: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon legyen értelmezve $\square$ és a $\blacksquare$ művelet a következőképpen:

$$(a, b)\square(c, d) := (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \blacksquare (c, d) := (a \cdot c + b \cdot d, b \cdot c + a \cdot d),$$

ahol + és · a természetes számokon korábban értelmezett összeadás és szorzás. Ezek műveleti tulajdonságait felhasználva:

$$(a, b)\square(c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) \square (a, b)$$

$$(a, b)\square((c, d)\square(e, f)) = (a + c + e, b + d + f) = ((a, b)\square(c, d))\square(e, f)$$

[22] A szorzás művelete esetén az egységelemet e-vel vagy 1-gyel jelöljük, (míg a szorzás esetén egy elem inverzét – melyről a gyűrű esetében még nincsen szó – reciproknak nevezzük). [19]

fennáll. Hasonlóképpen belátható ■-ről is, hogy kommutatív, asszociatív, és ■ disztributivitása □-re nézve. Így $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a két, frissen definiált műveletre nézve kommutatív félgyűrűt alkot.

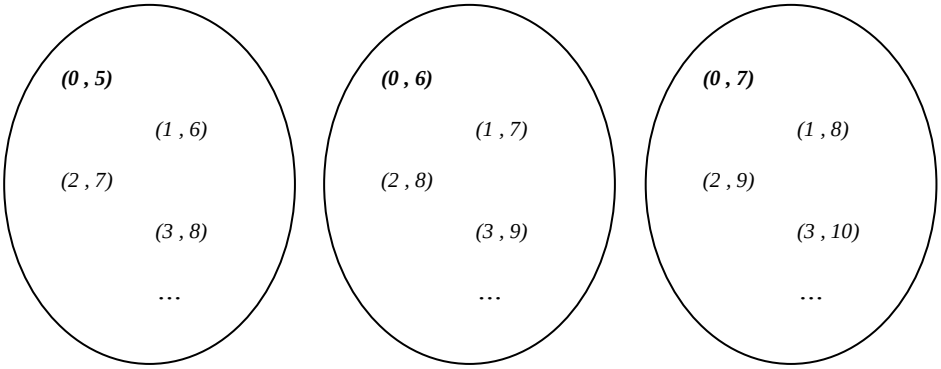
Tekintsük az alábbi relációt: $(a, b)\mathfrak{R}(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Az $\mathfrak{R}$ reláció

reflexív, hiszen $a + b = a + b$,

szimmetrikus, ugyanis ha $a + d = b + c$, akkor $b + c = a + d$,

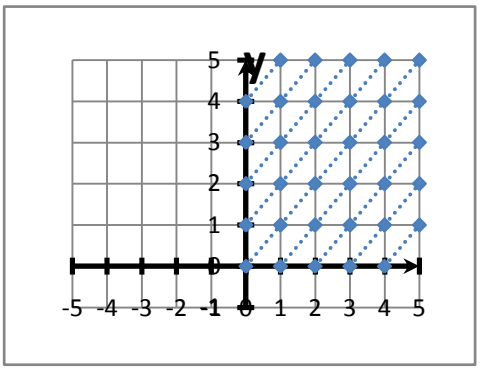
tranzitív, hiszen ha $a + d = b + c$ és $c + f = d + e$, akkor $a + b + c + f = b + c + d + e$. Felhasználva, hogy $\mathbb{N}$ reguláris félgyűrű, kapjuk, hogy $a + f = b + e$.

Elvégezve $\mathfrak{R}$ szerinti osztályba sorolást, megkapjuk $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ egy osztályozását.



7. ábra – Példák ekvivalenciaosztályokra

Az osztályokat szemlélteti, ha az (a, b) számpárnak megfeleltetjük a derékszögű koordinátarendszer (a, b) koordinátájú rácspontját. Az első síknegyedben a szögfelezővel párhuzamos egyeneseken azon elemek találhatók, melyek egy osztályba tartoznak.



9. ábra - Az ekvivalenciaosztályok szemléltetése

Ha (a, b) egy osztályban van (c, d)-vel, és (e, f) egy osztályban van (g, h)-val, akkor (a, b) □ (e, f) egy osztályban lesz (c, d) □ (g, h)-val, és (a, b) ■ (e, f) egy osztályban lesz (c, d) ■ (g, h)-val.[23] Vagyis az osztályozás kompatibilis a frissen definiált, két műveletre.

Az osztályozás kompatibilitása miatt értelmezhetjük az osztályok között műveleteket a következőképpen:

$$\underline{(a, b)} \text{ ☺ } \underline{(c, d)} := \underline{(a, b)} \text{ □ } \underline{(c, d)},$$

$$\underline{(a, b)} \text{ ☻ } \underline{(c, d)} := \underline{(a, b)} \text{ ■ } \underline{(c, d)},$$

ahol az aláhúzott számpárok azt az osztályt képviselik, melyben benne vannak.

☺ és ☻ kommutatív, asszociatív, közöttük fennáll a disztributivitás, az összeadás invertálhatósága, a ☻ egységelemének lézetése, és hogy a kapott gyűrű zérusosztómentes. Az osztályok halmaza ☺, ☻ műveletekre nézve tehát egységelemes integritástartományt alkot.

Tekintve a φ: $(\underline{n, 0}) \to n$ izomorf leképezést, kimondható, hogy a kapott gyűrű tartalmaz a természetes számokéval izomorf részfélgyűrűt. Így a gyűrűben kicserélhetők a $(\underline{n, 0})$ alakú elemek a nekik megfelelő természetes számokra.

Látható, hogy a gyűrű minden eleme előáll egy természetes szám és egy természetes szám additív inverzének összegeként: $(\underline{a, b}) = (\underline{a, 0})$ ☺ $(\underline{0, b}) = a$ ☺ $(\underline{0, b})$, ahol $(\underline{0, b})$ a b természetes szám additív inverze. A $(\underline{0, b})$ helyett $^{-}$b-t írunk, és felhasználjuk, hogy $\underline{(a, b)}$=a+(-b), akkor az egész számok (ℤ, ☺, ☻) gyűrűjét kapjuk.

3.1.3 Megjegyzések és következmények

Megjegyzem, hogy a fenti eljárással nem csak a természetes számokból készíthetőek el az egész számok, hanem bármely reguláris félgyűrűből készíthetünk olyan legszűkebb gyűrűt, amely tartalmazza az eredeti félgyűrűt.

Szeretném azt is megjegyezni, hogy ezzel az eljárással akkor kapunk integritástartományt, ha egyrészt az eredeti félgyűrűben kommutatív a szorzás, másrészt a félgyűrű $\forall\, a, b, c, d$ elemeire $a \cdot c + b \cdot d = b \cdot c + a \cdot d$ csak akkor áll fenn, ha $a = b$ vagy $c = d$. (Az

[23] Ennek belátásakor újra szükséges kihasználni, hogy a félgyűrű, melyből kiindultunk, reguláris.

előbbi a gyűrű kommutativitását, az utóbbi a nullosztómentességét biztosítja.) Ahhoz pedig, hogy a kapott gyűrű egységelemes legyen, elégséges, ha a félgyűrűben van egységelem. [19]

Látható, hogy a kapott gyűrű műveleti tulajdonságai megegyeznek a félgyűrűben lévő műveletekével. Speciálisan a $\mathbb{Z}$ ☺, ☻ műveletére igazak az $\mathbb{N}$ $+, \cdot$ műveletének azonosságai, így mostantól áttérek az egész számok gyűrűjének megszokott, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ jelölésére.

Az egész számok halmazán értelmezhetjük a kivonás nevű algebrai műveletet: $a - b := a + ({}^{-}b)$, mely tehát az elem additív inverzének hozzáadása. Alaptulajdonságait illetően nem kommutatív és nem asszociatív.

A szorzás előjelszabályainak levezetése:

$a \cdot {}^{-}b = {}^{-}(a \cdot b)$, ugyanis $a \cdot {}^{-}b + a \cdot b = a \cdot ({}^{-}b + b) = a \cdot 0 = 0$,
${}^{-}a \cdot {}^{-}b = {}^{-}({}^{-}(a \cdot b)) = a \cdot b$, ugyanis ${}^{-}a \cdot {}^{-}b + {}^{-}(a \cdot b) = {}^{-}a \cdot {}^{-}b + a \cdot {}^{-}b = {}^{-}b \cdot ({}^{-}a + a) = {}^{-}b \cdot 0 = 0$,
${}^{-}a \cdot b$ következik az elsőből és a szorzás kommutativitásából,
$a \cdot b$ pedig már értelmezve volt.

Egy egész szám abszolútértéke: $|a| = a, ha\ a \geq 0\ és\ |a| = -a, ha\ a < 0$.

A gyűrűben továbbra sincs minden elemnek inverze a $\cdot$ műveletére nézve, azaz az egészek körében sem algebrai művelet az osztás.

3.2 EGÉSZ SZÁMOK AZ ISKOLAI MATEMATIKÁBAN

3.2.1 Tantervi elvárások és módszertani alapelvek

A Nemzeti Alaptanterv [19] és a Kerettanterv [16] egyaránt harmadik és negyedik osztályban kéri az egész számok fogalmának tapasztalati úton való előkészítését. A tanítói kézikönyv szerint is a gyerekek első számkörbővítéséhez 3. osztályban célszerű hozzákezdeni, amikor a tanulók természetes számfogalma a 100-as számkörben megszilárdult, és megfelelő jártassággal rendelkeznek az alapműveletek végzésében. [20]

„A mínusszor mínusznál aztán végképp elvesztettem a fonalat” – jegyzi Varga Tamás arra a tapasztalatára hivatkozva, miszerint olykor az iskolázott emberek is így emlékeznek meg matematikai tanulmányaikról. [1] A nehézséget az okozza, hogy a megszokott számfogalom mellett a tanulóknak szakítani kell azokkal a műveletértelmezésekkel is, melyeket korábban megismertek, vagyis az első fejezetben írottak szerint: a meglévő szkémáknak szükséges átrendeződni az új számfogalom és műveletfogalmak hatására.

Lényegében kétféle úton járhatunk:

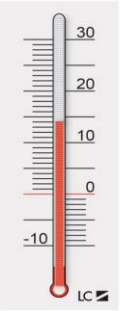
1. Választhatjuk az absztrakt algebrai tartalmat formájában is követő utat, mely olyan nyitott mondatok feldolgozását jelenti, melyek megoldása nem természetes szám (pl.: $9 + \quad = 5$). Ez formális jellegéből adódóan nem felel meg a 3. osztályos gyermek életkori sajátosságainak, és a fogalomalkotáshoz érdemi példát nem szolgáltat. [24]
2. Alapozhatunk arra, hogy a negatív egész számok használata a köznyelvi szóhasználatban elterjedt és a gyermek életében megtapasztalható. Választható egy szemléletes, tapasztalati út is, mely a természetes számpárokat tartalommal ruházza fel. Ez elismeri a gyermek szám- és műveletfogalmaival kapcsolatos szkémák alakíthatóságának fontosságát is.

3.2.2 Modellek az egész számok bevezetésére

Az egész számfogalom bevezetésére olyan modelleket keresünk, melyekben könnyű fellelni a természetes számokat, tartalmazzák azok additív inverzét, és elvégezhető benne valamennyi művelet is. A tanulók jól ismerik például az időt (múlt, jelen, jövő), az irányított utat, a hőmérsékletet, a pince-földszint-emelet viszonyt. Az irányított mennyiségeket tartalmazó modellek között találni kézzel foghatót és eljátszhatót, melyek az enaktív és az ikonikus sík reprezentációi.

Hőmérő modell

A motiváció, hogy szeretnénk megmondani a levegő hőmérsékletének értékét akkor is, ha 0 fok alá hűl le. Az $(1, 4) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$-ről a következőket mondhatjuk: 1°C-ról 4°C-ot csökkent a hőmérséklet, azaz 3°C



10. ábra - Hőmérő

(A kép forrása: www.mindenkiaruhaza.hu)

[24] 1958-ig hazánkban is ezt a bevezetési utat tartották indokoltnak. [38]

hideg van. A pozitív számok és a negatív számok színezésével kiküszöbölhető a műveleti jelek és az előjelek azonosságából fakadó kezdeti zavar. [25]

Vagyon-adósság modell

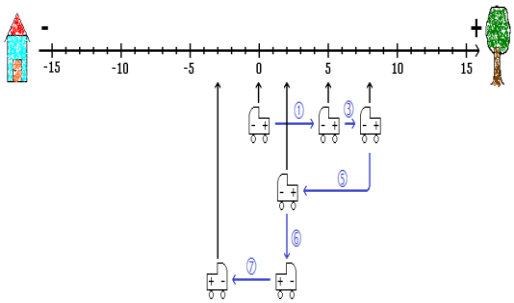
Ebben a modellben a vagyoni helyzetet szeretnénk megmondani akkor is, ha több az adósság, mint a készpénz. A tanulók már a számkörbővítések előtt hozzászoktak a játékpénzek használatához, a tartozás pedig tárgyiasítható adósságcédulák bevezetésével.

11. ábra – Játékpénz

(A kép forrása: www.argep.hu)

A kisautós modell

Egy kisautó helyét szeretnénk megadni egy számegyenesen akkor is, ha a 0-tól balra helyezkedik el. A természetes számpár első tagja az autó helyzetét adja meg, a második az előrehaladás / tolatás mértékét. A kisautó összeadás esetén a pozitív irányba, kivonás esetén a negatív irányba fordul. Az előjel megadja, hogy az autó előre megy vagy tolat.



12. ábra – A kisautós modell

(A kép forrása: http://matematikasegito.blogspot.hu)

A modellek további tulajdonságai az alábbi táblázatba szedettel láthatók:

Szempont \ Modell	Hőmérő modell	Vagyoni helyzet	Kisautós modell
Ekvivalenciaosztályokat megjelenít-e?	igen	igen	igen
Számpárok jelentése (……, …….)	(állapot, változás)	(készpénz, adósság)	(helyzet, haladás)
Korlátja	Nem mutatható meg rajta szám és additív inverzének összege.		Nem mutatható meg rajta szám és additív inverzének összege.
Előnye	Előjelek helyett piros és kék színű számok használata.	Szám és additív inverze „megsemmisíti egymást”.	

[25] A műveleti és előjelek azonosságának célszerűsége később persze kiderül, de az egész számokkal való ismerkedés során a megértést nagyon megnehezíti.

Variánsa	Lépkedés függőleges számegyenesen.	Kék-piros korongokkal, piros-kék dobókockákkal.	Sétálás a terem padlójára rajzolt számegyenesen.
Lehetséges közös pont	Kék-piros színkód.		

Megjegyzem, hogy a három részletesen ismertetett modell mellett további alkalmas modellek is alkalmazhatók; ilyen a rúdmodell, mélyedés-púp modell, vagy a variánsok között említett kék-piros korong és kék-piros dobókocka modellje. [21] [24] Arra a kérdésre pedig, hogy melyik alkalmazandó, Varga Tamás a következőket írja: „Ha azt akarjuk, hogy a tanulók igazán absztrakt, vagyis sok konkrét helyzetben alkalmazható fogalmakhoz jussanak, akkor sok különféle modell útján kell elvezetnünk őket ugyanahhoz az absztrakt struktúrához…” [1].

3.2.3 Összeadás, kivonás

A gyerekek már szereztek tapasztalatot a modelleken végzett műveletekről: alsóbb osztályokban végeztek összeadást és kivonást is készpénzzel, és lépegettek számegyenesen is – a természetes számkörben maradva.

Szempont \ Modell	Hőmérő modell	Vagyoni helyzet	Kisautós modell
+ pozitív szám	hőmérséklet-emelkedés	vagyongyarapodás	az autó a pozitív irányba fordul, és előre halad
+ negatív szám	----------	adósság-növekedés	az autó a pozitív irányba fordul, és hátra halad
– pozitív szám	hőmérséklet-csökkenés	eladósodás	az autó a negatív irányba fordul, és előre halad
– negatív szám	----------	adósság-elengedés	az autó a negatív irányba fordul, és hátra halad

Látható, hogy az összeadás értelmezési lehetőségeit gazdagon szolgáltatják a modellek. Az összeadás során – a számok előjelét következetesen elülső-fölső indexbe írva – hangsúlyozható, hogy más a műveleti jel, és más az előjel. A különbözőséget a szokásos zárójeles jelölésnél jobban érzékelteti ez a jelölési mód. [21] Az összeadásfogalom kialakítására és műveleti tulajdonságainak érzékeltetésére mutatok be egy játékot a témakör végén.

A kivonás az egészek körében algebrai művelet lett, ami a gyerekek számára is megmutatható. A kivonás a hiányzó összeadandó keresését jelenti (pl.: a $2-5$ az a szám, melyhez 5-öt adva 2-t kapunk). A művelet elvégzésének begyakorlásához a modellek ajánlkoznak: továbbra is lényeges a rajtuk végzett, cselekvés során történő tapasztalatszerzés. Megemlítem, hogy kiemelten fontos, hogy a tanulók valóban megértsék, miként lehet összeadást kivonással helyettesíteni, és fordítva.

3.2.4 Szorzás, osztás, hatványozás

Lényegesen szegényebb a modellek nyújtotta értelmezési lehetőség a szorzásra, mint amit az összeadás és a kivonás tanításakor bemutattam. A gyerekek azonban a szorzás megszokott jelentése alapján értelmét látják annak a két esetnek, amikor a szorzó pozitív szám. A negatív egész számmal való szorzást azonban nem tudjuk összeadásra visszavezetni, ennek a műveletnek szükséges értelmet adni.

A definiálás azonban nem önkényes, ugyanis szeretnénk, hogy azok a műveleti tulajdonságok, melyek a természetes számok körében érvényesek voltak a szorzásra, továbbra is érvényben maradjanak. Ennek érdekében egy szorzatokból képzett számsorozatot tekintünk, melyre azt szeretnénk, hogy a természetes számokon értelmezett szorzás monotonitása érvényes maradjon. [22] A negatív számmal való szorzást erre a szükségletre[26] alapozva vezetjük be teljesen elszakadva a szemléletességtől. Nem véletlen, hogy mindez már az 5., 6. osztály anyaga. [17]

A szorzás tanításakor nagy a kísértés, hogy a szorzás előjeltáblázatát bemagolandó anyagként tárjuk a gyermek elé, vagy a jól ismert frázisokat („mínusszor mínusz az plusz”,...) skandáljuk. Amennyiben dogma funkciót kap az előjeltábla, akkor legjobb esetben is csak az alkalmazás válik automatikussá, megértés nem következik be. Alkalmazható az előjeltáblázat azonban az ismeretek rendszerezésére és felelevenítésére.

Az osztás az egészek halmazán továbbra sem művelet. Az egységesedett (pontos)osztás mellett a gyerekek ismerik a maradékos osztást is. Az egészek körében az osztásfogalom változatlanul értelmezhető abban az esetben, ha az osztó pozitív szám. Értelmezési probléma akkor lép fel, ha negatív számmal osztunk. Azonban még sincs szükség definícióra: az osztás ugyanis az szorzás próbája, azt a szorzás egyértelműen

[26] Ezt kéri a következő alfejezetben bemutatott permanencia elv.

meghatározza (a $^{-}8 : {}^{-}4$ az a szám, melyet $^{-}4$ -gyel megszorozva $^{-}8$-at kapok), melyből pedig következik, hogy az előjelek az osztásnál ugyanúgy viselkednek, mint a szorzásnál. [24]

A hatványozásfogalom kiterjesztését – hasonlóképpen a szorzáséhoz – azzal az igénnyel végezzünk el, hogy a hatványozás azonosságai érvényben maradjanak. [11] Ennek értelmében az a^{-n} az a szám, melyet a^n–nel szorozva $a^n = 1$-et kapunk. Mindezt a gimnáziumok számára írott Kerettanterv 9. és 10. osztályban kéri, ahogy a kiterjesztés során iránymutató permanencia elv bemutatását is. [23]

Minden új műveletfogalom esetében a gyerekekkel együtt érdemes körüljárni a korábban megszokott műveleti tulajdonságok érvényben maradását. Ezekre a kitérőkre hangsúlyt helyezve érthetik meg a gyerekek, hogy (1) új műveletfogalomról van szó, (2) a matematikai definíciók nem önkényesek, (3) joggal alkalmazhatjuk ezeket a jövőben.

3.2.5 A permanencia elv

A matematikában az ismeretek bővülése során az új fogalmakat a permanencia elv alapján értelmezzük[27]. A cél, hogy egy új, bővebb számkörben értelmezett fogalom minél inkább hasonlítson a korábbi számkörben értelmezettre. Ha egy új, bővebb számkörben bevezetünk egy műveletfogalmat, akkor annak meghatározását úgy kell elvégezni, hogy a szűkebb számkörben érvényes azonosságok a bővebb számkörben is érvényben maradjanak.

A Peano-axiómák vagy a halmazelméleti modell alapján bevezetett összeadásnak és szorzásnak nevezett művelet azonosságai teljesen érvényben maradtak az egész számokon. Az egészek integritástartományának megkreálásakor ugyanis a természetes számpárokon olyan műveleteket definiáltunk, mellyel az (új típusú) összeadás és szorzás megőrizhette a korábbi, természetes számokon tapasztalt műveleti tulajdonságait. Azonban a permanencia elv – amely nem követelés, hanem a háttérben meghúzódó elvárás – nem mindig „ússza meg” sérülés nélkül: a kvaterniók komplex számokból való bevezetésekor például fel kell adni a szorzás kommutativitását. Hamilton csak ennek az áldozatnak árán tudta úgy definiálni a szorzásműveletet, hogy az visszavezethető legyen a komplex számok szorzására.

[27] melyet Peacock fogalmazott meg 1830 körül.

3.3 JÁTÉK

3.3.1 A játékkészlet bemutatása és a játék menete

A játék ötletét a [21] könyv 28. oldaláról merítettem, átalakítottam és kiegészítettem. A most következő játék tantermi szituációra tervezett, a tanítási órába gördülékenyen (teremrendezés nélkül) beilleszthető. A játékhoz egy dobókockára, kinek-kinek a saját füzetére és írószerszámára van szüksége.

A játék során a játékvezető/tanító dobókockával dob egymás után 6-szor. Többiek a számegyenesen 0-ból indulnak és a dobásnak megfelelő számút lépnek azzal a szabadsággal, hogy dobásonként mindenki eldöntheti, hogy ezt melyik irányba teszi. Az nyer, aki a dobássorozat után a leginkább megközelíti a 0-t.

13. ábra

A tanító a táblára felírja egymás alá a dobott számokat (műveleti jel és előjel nélkül, sőt ezek „emlegetése” nélkül). A gyerekektől pedig azt kéri, hogy a lépegetést a választásának megfelelő irányú nyíllal ábrázolja a számegyenesen.

A feldolgozás során megbeszéljük, hogy ki milyen műveletet végzett, és milyen előjelű számokkal. Kinek mi volt a stratégiája? Melyik a legkisebb és legnagyobb szám, ahová a dobássorozattal eljuthatunk?

3.3.2 Tapasztalatok és variációk

A játékot a Szent Imre Iskolaház 2 harmadik osztályos gyermekével játszottam el. Azt tapasztaltam, hogy a feldolgozás elején adta magát annak a megbeszélése, hogy ki, milyen műveletet végzett és milyen előjelű számokkal. Ekkor érdemes volt utalást tenni az előjelek a műveleti jelek megkülönböztetésének hasznosságára.

A feldolgozás során – a tervezetteken túl – izgalmas volt megvizsgálni, hogy

- melyik számon kötöttünk volna ki, ha az utolsó két dobás felcserélve történt volna?
- melyik számon kötöttünk volna ki, ha bármelyik két szomszédos dobás felcserélve történt volna?
- melyik számon kötöttünk volna ki, ha bármelyik két dobás felcserélve zajlott volna?

- ha a 6 dobás ismeretében utólag dönthetnéd el, hogy melyik számnak milyen előjelet adsz, akkor is az imént megbeszélt jó stratégiát követnéd?

Ami a variációkat illeti… számegyenes nélkül, műveleti sorral lejegyezve szolgálhat a játék a művelet gyakorlására (de a műveletfogalom absztrahálása nem).

4 A RACIONÁLIS SZÁMOK TESTE

„A racionális számoknak és a valós számoknak a mennyiségek mérése alapján való tárgyalása semmivel sem kevésbé tudományos, mint például a racionális számoknak „párok" formájában való bevezetése. Az iskola számára meg sok szempontból kétségkívül előnyösebb." [24] *Kolmogorov*

Az egész számok gyűrűjének megkonstruálásakor az a szituáció húzódott meg a háttérben, hogy az $a + x = b$ egyenletnek nincsen megoldása a természetes számok halmazán $\forall a, b \in \mathbb{N}$ esetén. Ezúttal a $b \cdot x = a$ egyenlet megoldásait vizsgáljuk. $b \neq 0$ esetén az egész számok halmazán pontosan akkor van megoldása, ha b osztója a-nak.

Ettől eltérő esetekben pedig az egyenlethez egy a és b által meghatározott $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halmazból való rendezett számpárt rendelek, mellyel az a szándékom, hogy valamiképp mégis megoldása legyen az egyenletnek.

4.1 RACIONÁLIS SZÁMOK A MATEMATIKÁBAN

4.1.1 Az racionális számok az algebrai struktúrákban

Az egész számokból a racionális számok felépítése általánosságban úgy fogalmazható meg, hogy a már megkonstruált I integritástartományhoz keressük a legszűkebb olyan testet, amely tartalmaz I-vel izomorf részt. Rövid fogalmi áttekintés következik.

$(T, +, \times)$ test, ha

$+$ (1) asszociatív,

(2) kommutatív,

(3) $\forall a \in T$-re $\exists 0 \in T$, hogy $a + 0 = a$,

(4) $\forall a \in T$-re $\exists\, {}^{-}a \in T$, hogy $a + {}^{-}a = 0$,

$\times$ (5) asszociatív,

(6) kommutatív,

(7) $\forall a \in T$-re $\exists 1 \in R$, hogy $a \times 1 = a$,

(8) $\forall a \in T$-re $\exists a^{-1} \in R$, hogy $a \times a^{-1} = 1$,

(9) a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

Azt az algebrai struktúrát, melyre a (6) kivételével teljesülnek az imént rögzítettek, ferdetestnek nevezzük.[28]

4.1.2 Integritástartomány beágyazása hányadostestbe

A 3.1-es fejezet metodikájához hasonlóan az $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I} \setminus \{0\}$ számpárok halmazán értelmezem az □ és a ■ műveletet:

$$(a\,, b) \,\square\, (c\,, d) := (a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d),$$

$$(a\,, b) \,\blacksquare\, (c\,, d) := (a \cdot c, b \cdot d),$$

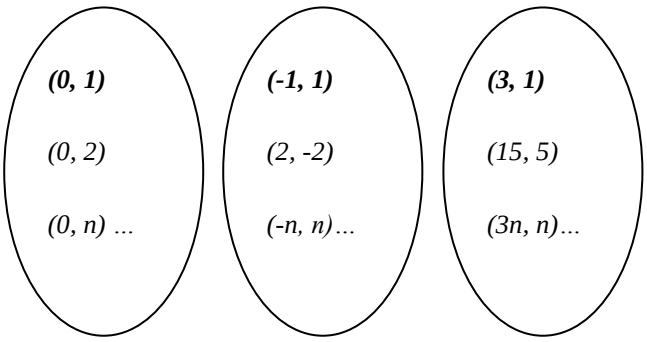
ahol + és · az I-n értelmezett összeadás és szorzás. Ezek műveleti tulajdonságainak ismeretében belátható, hogy

□ kommutatív,	■ kommutatív,
□ asszociatív,	■ asszociatív,
$\forall(\mathrm{a}, \mathrm{b})$: $(\mathrm{a}, \mathrm{b})\square(0, 1) = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$,	$\forall(\mathrm{a}, \mathrm{b})$: $(\mathrm{a}, \mathrm{b})\blacksquare(1, 1) = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$
viszont □ nem invertálható,	■ sem invertálható,

és nem áll fenn, hogy ■ disztributív a □-ra nézve. [25]

Tekintsük az $\mathrm{I} \times \mathrm{I} \setminus \{0\}$ halmazon az $\mathfrak{R}$ relációt: $(\mathrm{a}, \mathrm{b})\ \mathfrak{R}\ (\mathrm{a}', \mathrm{b}') \Leftrightarrow \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}' = \mathrm{a}' \cdot \mathrm{b}$.

Belátható, hogy $\mathfrak{R}$ ekvivalencia-reláció. Így az egymással ekvivalens elemeket egy osztályba gyűjtve a számpárok osztályozását kapjuk.



14. ábra – Példák ekvivalenciaosztályokra

[28] Megjegyzem, hogy vannak, akik az × kommutativitását nem követelik meg a testnek nevezett algebrai struktúrától. Ők a test fogalma mellett kommutatív testről beszélnek.

Az osztályozásról belátható, hogy kompatibilis, így az osztályokon az alábbi két művelet definiálható:

$$\underline{(a\,,b)} \;☺\; \underline{(c\,,d)} = \underline{(a\,,b) \;\square\; (c\,,d)}$$

$$\underline{(a\,,b)} \;☻\; \underline{(c\,,d)} = \underline{(a\,,b) \;\blacksquare\; (c\,,d)}$$

Belátható, hogy a ☺ kommutatív, asszociatív, a $\underline{(0,\,1)}$ neutrális elem, az $\underline{(a,\,b)}$ osztály additív inverze pedig a $\underline{(^{-}a,\,^{-}b)}$ osztály. A ☻ is kommutatív, asszociatív, az $\underline{(1,\,1)}$ osztály az egységelem, az $\underline{(a,\,b)}$ osztály inverze pedig a $\underline{(b,\,a)}$ osztály. Továbbá a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

Az osztályok a frissen definiált két műveletre tehát testet alkotnak.

A φ: $(n, 1) \rightarrow n$ leképezés bijektív és művelettartó, így izomorf módon képezi le az $(n, 1)$ alakú osztályok részhalmazát az egészek halmazára. Így az új test részeként valóban az egész számokkal izomorf részgyűrűt kapunk.

Mivel $\underline{(a,\,b)} = \underline{(a,\,1)}$ ☻ $\underline{(1\,,b)} = \underline{(a,\,1)}$ ☻ $(\underline{(b\,,\,1)})^{-1}$, ezért $\underline{(a,\,b)}$ helyett írható $a \cdot b^{-1}$, vagy a szokásos jelölésnek megfelelően $\frac{a}{b}$. Megfeleltetve továbbá a fenti jelöléseket a szokásosnak, a $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ racionális számtesthez jutunk.

A fenti eljárással tetszőleges integritástartományhoz megkonstruálható a vele izomorf részt tartalmazó test, melyet az integritástartomány hányadostestének nevezünk. [19]

4.2 RACIONÁLIS SZÁMOK AZ ISKOLAI MATEMATIKÁBAN

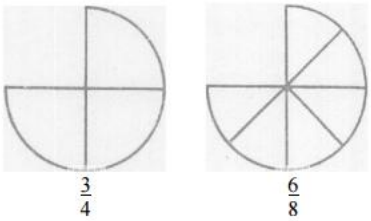
4.2.1 Tantervi elvárások és módszertani alapelvek

A racionális számok tárgyalását a Kerettanterv az 5.– 6. osztályban kéri. Ekkorra elvárásként rögzíti a törtek szerepének ismeretét a mindennapi életben, valamint a 2, 3, 4, 10, 100 nevezőjű törtek nevének és jelentésének ismeretét.[29] Elsajátítandó ismeretként ugyanezen az évfolyamokon kéri a közönséges tört fogalma és a rajtuk végzett műveletek elsajátítása mellett a tizedes törtek értelmezését, kiolvasását és leírását is. [17]

[29]Mindkettő jogos „bemeneti feltétel”, ugyanis elvárásként megtaláljuk a 3.–4. osztályos Kerettanterv elsajátítandó ismeretei között.

Itt jegyzem meg, hogy jelen fejezetben a törtfogalom alatt közönséges törteket értek. A tizedes törteket a valós számokról szóló fejezetben fogom érinteni.

A törtfogalom tanításában nagy szerepet játszanak a reprezentációs síkok. „Hogyan tanulja például a legtöbb gyerek a törtek bővítését? Mutatnak neki egy ilyen rajzot. Hall róla valami tortáról szóló történetet. Elmagyarázzák neki, hogy a két tört ugyanakkora, pedig a másodiknak a számlálója is, a nevezője is kétszer akkora, mint az elsőnek. Lát, vagy esetleg rajzol is még néhány példát, ahol 2-szeres helyett 3- vagy 4-szeresére nő a számláló és a nevező. Ezekből a tapasztalatokból leszűrik a szabályt: << A tört értéke nem változik, ha a számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a számmal szorozzuk >>.(…) A szabályok megvannak, de érett fogalmak nélkül!” [1]



15. ábra – Két tört egyenlőségének szemléltetése

(A kép forrása: T. Varga: A matematika tanítása. Budapest, Tankönyvkiadó, 1969.)

Az absztrakt algebrai megközelítéstől eltérően, a tanítási gyakorlat, hogy mennyiségekkel kapcsolatos tapasztalatokból absztrahálják a gyerekek a törtfogalmat, melyet a következő fejezetekben tárgyalok.[30]

4.2.2 A számfogalom és a mennyiségek

A természetes számok a diszkrét mennyiség matematikai tükröződései, mégis alsó tagozaton megkezdődik a folytonos mennyiségekkel való barátkozás is: a tanulók időt mérnek, űrtartalmat, tömeget és távolságot.[31] Ennek egyik funkciója a törtek előkészítése. A törtek azonban nem olyan közvetlenül absztrahálhatók belőlük, mint a diszkrét mennyiségből a természetes számok, így az előkészítés több szálon fut:

1. osztályban a gyerekek az idő mérésekor találkoznak a pozitív törtekkel: megtanulják használni a negyed, fél, háromnegyed fogalmakat. Ehhez természetszerűleg tárgyi és képi reprezentációk[32] társulnak.

2. osztályban a törtfogalom előkészítése (az osztás kétféle értelmezése közül) az egyenlő részekre osztás „műveletéhez” kapcsolódik. Sok valóságos egyenlő részekre osztást

[30] V.ö.: a fejezet eleji Kolmogorov-idézet.
[31] A különböző mennyiségfajtákat le is képzik ez utóbbira, mely absztrakcióval a távolság az összes folytonos mennyiségfajta modelljévé válik.
[32] Pl.: kivágott körlapok hajtogatása, játékórával történő manipulálás, mutatók berajzolása az óralapokra.

végezve természetes módon eljutnak a tanulók az 1 feldarabolásához is, mely által később az egységtörtek lesznek értelmezhetők. [26]

3. osztályban a mérés témakör kapcsán terelődik át a tanulók figyelme a diszkrét mennyiségekről a folytonos mennyiségek tulajdonságai felé. A gyermekek érzékelik, hogy a folytonos mennyiség bármely darabja felezhető, harmadolható, stb. A részképzés során pedig az egység viszonylagos voltát érzékelik: az asztal hossza lemérhető ceruzával és radírral is – sőt a radír egy darabjával is.

4. osztályban pedig hozzákapcsoljuk a fogalomhoz a jelöléseket és az elnevezéseket. Tisztázandó, hogy a törtek között megbújnak az egészek, valamint az is, hogy egy törtszámot több számpár is jelöl.

4.2.3 A törtek tanítása

A törtszámok tanítását 3 szakaszra bontva mutatom be. [27] Az 1. szakaszban a törteket mennyiségek mérőszámaként vezetjük be – két úton, kétféle értelmezés szerint.

Az egyik értelmezésben egész mennyiségnek az alapegységet (pl.: 1 métert) tekintjük, és részképzéssel nyerjük az $\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ törzstörteket, mint az alapegység mérőszámait: 1 méter 9-ed részének mérőszáma $\frac{1}{9}$. Ezután a törzstörtek többszöröseként kapjuk meg az összes törtet.

A másik értelmezés szerint az egész mennyiségnek az alapegység többszöröseit (pl.: 3 métert) tekintjük, és ezek mérőszámaiként vezetjük be a törteket: 3 méter felének mérőszáma a $\frac{3}{2}$. Persze ebben az esetben is megkapjuk az összes törtet.

A törtek tanítása ötödik osztályban az előbbi értelmezés szerint indul, s ehhez idővel hozzáveszik az utóbbit. Peller [28] művében javasolja, hogy a gyerekek figyelmét a két megközelítés közötti kapcsolatra irányítsuk.

A törtek tanításának 2. szakaszában az a cél, hogy a gyerekek eltájékozódjanak a törtek világában, s rájöjjenek az egyszerűsítés-bővítés lehetőségeire. Ahogy a módszertani alapelvek részben írott Varga Tamás idézet is mutatja, a különböző külső reprezentációs síkok alkalmazásának a törtek tanításának jelen szakaszában is nagy szerepe van (körcikkek vágása, gyümölcs szeletelése, tábla csoki törése, színes rudak kirakása,

szakaszok darabolása, papír hajtogatása, síkidomok részeinek színezése – többféleképpen stb.).

A törtek tanításának 3. szakaszát, a törtekkel való műveletek végzését a következő két alfejezetben vázolom fel.

4.2.4 Összeadás, kivonás

Két racionális szám között értelmezett $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot b+c\cdot d}{b\cdot d}$, valamint az $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot b-c\cdot d}{b\cdot d}$ összeadás és kivonásfogalmakat továbbra is konkrét számpéldákon keresztül, olyan egyszerű és kis nevezőjű törtekkel érdemes bevezetni, melyeket könnyű szemléltetni és elképzelni. Ezek összeadásakor és kivonásakor akár segítség nélkül megtalálhatják a gyerekek a közös nevezőt ránézésre vagy próbálgatással. A felfedezett módszert további, nem egyszerű, majd nem kis nevezőjű törtekre alkalmazva kialakul a két kívánt műveletfogalom.

A kivonás nem kíván új gondolatot: szóról szóra ugyanúgy járunk el, mint az egész számok kivonásműveletének bevezetésekor.

Pálfalvi Józsefné [28] szerint gyakori, hogy a különböző nevezőjű törtek összeadásakor és kivonásakor tanáraik a legkisebb közös nevezőt akarják megkerestetni a tanulókkal, holott a közös nevező szerepét végtelen sok más szám is betöltheti. Javaslata szerint nem a legkisebb közös többszörös megtalálása az érték, hanem az, ha a gyermek nem sablont követ. Felismerve, hogy többféle megoldási út van, tudatosan választható az egyik, talán még a legpraktikusabb is.

Miután a tanulók elég sok tapasztalatot szereztek a műveletek elvégzésében, sor kerülhet az eljárások megfogalmazására is.

4.2.5 Szorzás, osztás, hatványozás

Hasonlóan dogmatikus állásfoglalás lenne az $\frac{a}{b}$ és a $\frac{c}{d}$ számok szorzataként a $\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ törtet megadni akár formálisan, akár „a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel” végződő szlogennel. A „szabálymagoltatós” tanítási eljárás nem ad szemléletes képet, a matematikaoktatás alapelveitől idegen, a gyerekek számára csak rövidtávú haszonnal jár.

A racionális számokon végzett szorzás magától értetődik, ha az egyik tényező egész szám, s a gyerekek azt is tudják, hogy a törttel való szorzásnak nem adhatunk értelmet összeadás útján. Továbbá arról is van tapasztalatuk, hogy milyen szempontok alapján lehet egy műveletet egy újabb számkörben értelmezni akkor, ha kénytelenek vagyunk elszakadni a valóságtól. [29]

A szorzást törtrészkeresésként értelmezzük, és visszavezetjük egy egészek körében végzett osztásra és szorzásra (t.i. valaminek a $\frac{2}{7}$ részét úgy képezzük, hogy előbb vesszük a hetedét, majd annak kétszeresét). Érdemes elérni, hogy mindezt – elegendő szöveges feladat megoldása, valamint elég sok következtetés végrehajtása után – maguk a tanulók absztrahálják, majd pedig belássák azt is, hogy a szorzás műveleti tulajdonságai továbbra is fennállnak.

A gyerekeknek arról is van tapasztalatuk, hogy az osztás olyan művelet, mely a szorzás által egyértelműen meghatározott. Ha a törttel való szorzás törtrészkeresés, akkor a törttel való osztás nem más, mint a törtrészből a szám keresése. Ugyancsak 6. osztályban megtapasztalják a gyerekek, hogy minden osztás helyettesíthető szorzással és fordítva[33], megismerik egy racionális szám multiplikatív inverzének fogalmát, s reciproknak szólítják. [22]

A hatványozás törtkitevőre történő kibővítésekor hasonlóképpen járunk el, mint az egészek körében: az a cél, hogy a korábbi műveleti tulajdonságok és azonosságok érvényben maradjanak. Ennek értelmében az $a^{p/q}$ az a szám, melyre $(a^{p/q})^q = a^p \ \forall p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$. A definícióból következik, hogy $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \ \forall p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$, vagyis a korábbi számhalmazon két műveletként értelmezett hatványozás és gyökvonás a racionális számhalmazon egyesül. Könnyű meggyőződni arról, hogy a 2.3.3. alfejezetben leírt műveleti tulajdonságok és az azonosságok mindegyike érvényben marad. Mindezt a gimnáziumok számára írott Kerettanterv 11. és 12. osztályban kéri. [23]

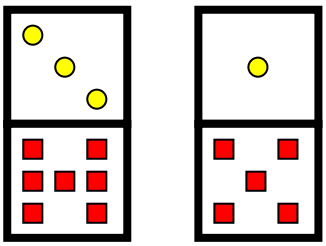
4.3 JÁTÉK

4.3.1 A játékkészlet bemutatása

[33] az egészek körében analóg módon.

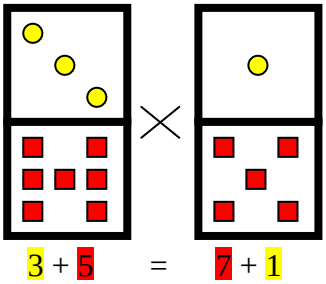
A játék alapgondolata Szeredi tanárnőtől származik, írásos nyomát azonban nem találtam. Csahóczi Erzsébet tanárnő vállalta a játék rekonstruálását Szeredi tanárnő egykori szakdolgozója, Kiss Anna segítségével.

A játékkészlet egy olyan dominókészlet, melyen sárga körök és piros négyzetek vannak 0-9-ig. A dominókat úgy helyezzük egymás mellé, hogy mindegyiken felül legyenek a sárga körök, alul a piros négyzetek.



16. ábra

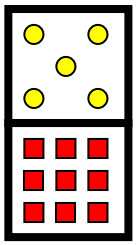
Ha a két-két átlósan elhelyezkedő négyzetben lévő sárga körök és piros négyzetek számának összege ugyanannyi, azt mondjuk, hogy a két dominó ugyanabba a dominócsaládba tartozik.



17. ábra

4.3.2 A játék menete

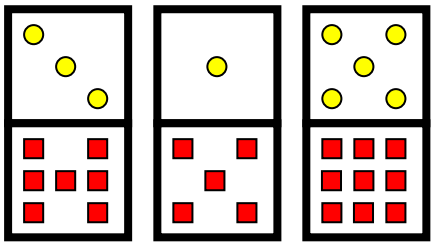
Páronként kapnak a gyerekek dominókat, melyeket a játék során együtt rakosgatnak. A játék nem „önjáró”, hanem kérdések és kérések által vezetett, melyeket lépésről lépésre megbeszélve haladunk előre.



18. ábra

1. A következő dominó beletartozik-e az iménti családba?

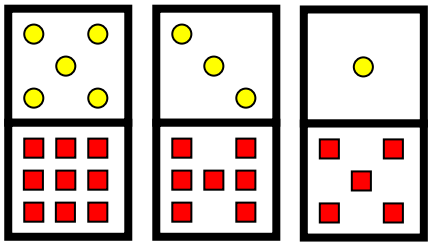
Az új dominót a korábbi dominópár mögé helyezve látjuk, hogy bal oldali szomszédjával egy családba tartozik.



19. ábra

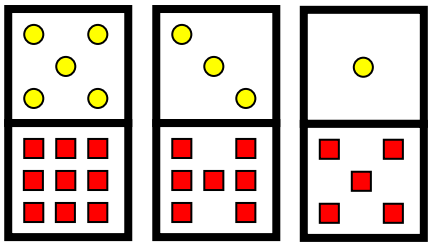
Az új dominót a korábbi dominópár elé helyezve látható, hogy jobb oldali szomszédjával is egy családba tartozik.

2. Cserélgessük a dominókat! Próbáljuk úgy változtatni a sorrendet, hogy egyik ne tartozzon bele a dominócsaládba!



20. ábra

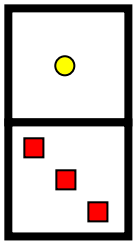
Ha az osztállyal mind a 6 esetet kipróbáltuk, akkor megfogalmazhatjuk, hogy akármilyen sorrendben helyezzük el azokat, a szomszédos dominókra igaz, hogy a két-két átlósan elhelyezkedő négyzetben lévő sárga körök és piros négyzetek számának összege egyenlő.



21. ábra

A továbbiakban egy családba tartozóknak tekintjük azokat a dominókat, amelyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy bármilyen sorrendben helyezzük el őket, a szomszédos dominókra igaz, hogy a két-két átlósan elhelyezkedő négyzetben lévő sárga körök és piros négyzetek számának összege megegyező.

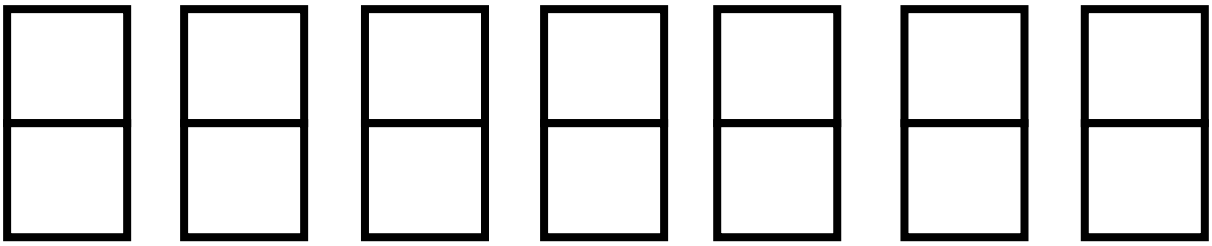
3. A következő dominó beletartozik ebbe a dominócsaládba?



22. ábra

4. Rajzolj a füzetbe olyan dominókat, melyek nem tartoznak bele ebbe a családba!

5. Alkoss dominócsaládokat!



23. ábra

4.3.3 Tapasztalatok és variációk

A korábbi játékokhoz hasonlóan a játékot a Szent Imre Iskolaházba járó gyerekekkel próbáltam ki. A három 6. osztályos és egy 7. osztályos gyermek a korábbi játéktapasztalatokhoz képest igen alulmotivált volt. Ennek fő okát abban látom, hogy az „ugyanabba a családba tartozás” (mint kulcsfogalom) megértését követően sem lett a játék élményszerű – pedig ezt várták. A foglalkozás menete, a kérdésekkel és kérésekkel vezérelt közös munka sem segített, hogy önfeledté a váljon a játék.

A 2. kérdés megválaszolása során egyedül a vizsgálódás váltott ki a csapatból érdeklődést. Nem jutottunk el a tervezet végéig, a 4. kérdésre közösen tudtunk csak választ adni, míg az 5. kérdést szépen kérték, hogy hagyjuk is…

A játék megértését követő közös feldolgozáson változtatnék. Egy többfordulós páros vetélkedő, egy lovagi torna alkalmasabb forma lenne. A kérdéseken a párok önállóan gondolkodnak, s amikor van válaszuk, odahívják a tanárt, s a fülébe súgják a választ. Ekkor a tanárnak lehetősége van hatszemközt röviden korrigálni. Jó válasz esetén a páros lovaggá válik: a többi páros megszólíthatja, s a tanár iménti funkcióját tölti be.

Az első páros, aki lovaggá vált elveszi a tanári asztalra készített 1-es számkártyát, a második a 2-es jelűt. A játék addig nem megy tovább, míg minden páros lovaggá nem vált. A kör végén persze így több páros segít egy-egy párt.

Ezt az összes kérdés során ugyanígy végezve minden párosnál 5 darab számkártya lesz. Az a pár a lovagok királya, akinek a kártyáin lévő számok összege a legkisebb számot adja.

5 A VALÓS SZÁMOK TESTE

„Ez itt most gyök, vagy a számok beálltak az eső elől?” Róka Sándor

5.1 VALÓS SZÁMOK A MATEMATIKÁBAN

A négyzetoldal és átló (vagy egy derékszögű háromszög két befogója) nem minden esetben összemérhető.[34] Ez azt jelenti, hogy nincs olyan aránszám a racionális számok körében, mely kifejezné a szakaszhosszok viszonyát. Szükséges tehát valamiképpen kibővíteni a racionális számok körét úgy, hogy bármely két szakasz összemérhető legyen: speciálisan bármilyen szakasz összemérhető legyen az egység hosszú szakasszal is. Azaz szeretnénk, hogy bármely szakasz hosszát ki lehessen fejezni egy számmal.

A valós számok megalapozására két utat követhetünk. A konstruktív megalapozás során kijelentjük, hogy ezentúl mit értünk valós számokon, míg az axiomatikus megalapozás során nem tisztázzuk, hogy mik a valós számok, csak azt, hogy milyen tulajdonságokat

[34] Az, hogy léteznek nem összemérhető szakaszpárok a matematika tudománytörténetben először a pitagoreusokat rendítette meg. Hozzájuk kötjük ennek felfedezését a Kr. e. V. században. [41]

kell, hogy kielégítsenek. Az axiomatikus megalapozás nem teszi feleslegessé a konstruktív felépítést, hiszen a megkövetelt alaptulajdonságok lefektetése után is jogos a kérdés, hogy van-e olyan struktúra, mely eleget tesz a követelményeknek. [30]

5.1.1 A valós számok axiomatikus felépítése

A három axiómacsoport mindegyike után rávilágítok az új test és $\mathbb{Q}$ viszonyára.

I. axiómacsoport

Egy $\mathbb{R}$ nem üres halmazon értelmezve van két $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ művelet, a +-szal jelölt „összeadás”, és a ·-tal jelölt „szorzás”, amelyek kielégítik a 4.1.1.-ben rögzített 9 feltételt. A két művelettől megkövetelt tulajdonságokat testaxiómáknak szokás nevezni, melyek persze fennállnak a racionális számkörben is.

II. axiómacsoport

Legyen értelmezve $\mathbb{R}$ -en “≤” rendezés, amelyre fennáll, hogy

(10.) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$: $x \leq y$ vagy $y \leq x$,

(11.) $\forall\, x, y, z, \in \mathbb{R}$: $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$,

(12.) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$: $0 \leq x$ és $0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Belátható, hogy az imént megkövetelt rendezési reláció tulajdonságai igazak a racionális számokra is, vagyis $\mathbb{Q}$ is rendezett. Az a < b jelölést használjuk arra az esetre, melyre $a \leq b$, de $a \neq b$. (Sajnos a < nem rendezési reláció, mert nem reflexív.)

A valós számok ”gazdagabb” volta a most következő felső határ axiómának köszönhető.

III. axiómacsoport

Legyen S egy T rendezett testnek egy nem üres részhalmaza. Ekkor $k \in T$ felső korlátja S halmaznak, ha S minden s elemére $s \leq k$. Az S halmazt akkor hívjuk felülről korlátosnak, ha van felső korlátja. Egy $h \in T$ elem pedig felső határa S halmaznak, ha h felső korlát, és h a legkisebb ilyen.

(13.) Felső határ axióma: minden, nemüres, felülről korlátos halmaznak van felső határa

Ha egy T rendezett testben teljesül a felső határ tulajdonság, akkor azt a rendezésre nézve teljesnek nevezzünk. [35]

Az axiomatikus felépítés szellemében a valós számok rendszerén olyan struktúrát értünk, mely kielégíti a 1-13. axiómákat.[36] [31]

5.1.2 Valós számok egy konstruktív felépítése

A valós számok konstruktív felépítése a racionális számokból az analízis eszközeinek felhasználásával történik. Az imént szerepelt, hogy a racionális számok testére nem teljesül a Cantor-axióma, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy vannak olyan végtelen, racionális számokból álló konvergens számsorozatok, amelyek határértéke nem racionális szám. Felmerül, hogy miként lehet olyan testet konstruálni, amely már tartalmazza minden konvergens sorozatának a határértékét, és amely tartalmaz egy, a racionális testtel izomorf résztestet.

A konstrukció lényege, hogy a valós számokat a racionális számokból álló konvergens sorozatok határértékeiként képzeljük el.

Egy (a_n) sorozat Cauchy-sorozat, ha kielégíti a Cauchy-kritérium feltételét, azaz, ha minden $\varepsilon > 0$ – hoz létezik olyan N, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$ minden $n, m \geq N$-re. [30]

Tekintsük a racionális számokból álló (a_n) Cauchy-sorozatok halmazát A-t, melyen értelmezhető az alábbi két (sorozatokra szokásos) művelet:

$$(\mathrm{a} \square \mathrm{b})_n := a_n + b_n,$$

$$(a \blacksquare b)_n := a_n \cdot b_n,$$

ahol + és · a racionális számkörben bevezetett összeadás és szorzás. Ezen műveletek tulajdonságainak ismeretében belátható, hogy $(A, \square, \blacksquare)$ egységelemes, kommutatív gyűrű, melynek nulleleme az $u_n \equiv 0$ sorozat, az egységeleme a $v_n \equiv 1$ sorozat.

[35] A felsőhatár axióma helyett az alábbi két axiómát használva az iméntivel ekvivalens axiómarendszerhez jutunk: Arkhimédeszi axióma:$\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, n \in N: n > x$, azaz minden valós számhoz található nála nagyobb természetes szám. Cantor-axióma: $\forall\, I_1 \supset I_{12} \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ zárt intervallumsorozathoz $\exists x \in \mathbb{R}$, hogy $x \in I_n\ \forall\, n$-re, vagyis az egymásba skatulyázott zárt intervallumoknak van közös pontja.

[36] A 13. helyett pedig a két (iménti lábjegyzetben rögzített) axiómát használva úgy is fogalmazhatunk, hogy a valós számokon egy olyan arkhimédészien rendezett testet értünk, melyben teljesül a Cantor-axióma.

Értelmezzük A -n $\mathfrak{R}$ relációt aszerint, hogy $a_n \mathfrak{R} b_n \Leftrightarrow a_n - b_n \to 0$, azaz ha $\forall \varepsilon > 0$ – hoz $\exists N$, hogy $|a_n - b_n| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq N$-re. A szokásos módon ellenőrizhető, hogy $\mathfrak{R}$ ekvivalenciareláció.

Az $\mathfrak{R}$ szerinti osztályozás során pedig pontosan azok a sorozatok kerülnek egy osztályba, melyek határértéke ugyanannyi.

Értelmezzük az osztályok között a ☺ és ☻ műveleteket:

$$\underline{(a_n)} \text{ ☺ } \underline{(b_n)} := \underline{(a_n) \square (b_n)},$$

$$\underline{(a_n)} \text{ ☻ } \underline{(b_n)} := \underline{(a_n) \blacksquare (b_n)}.$$

Belátható, hogy az így kapott osztályozás kompatibilis a frissen definiált osztályműveletekre nézve, és az osztályok halmaza ☺, ☻-val olyan testet alkot, mely kielégíti az 5.1.1. fejezetben vázolt axiómarendszert.

Azoknak az osztályoknak, amelyekben az osztályt alkotó sorozatok közös határértéke racionális szám, megfeleltetjük ezt a határértéket, és végrehajtjuk a beágyazást: a racionális testtel izomorf részt kicseréljük a racionális testre.

5.2 VALÓS SZÁMOK AZ ISKOLAI MATEMATIKÁBAN

5.2.1 Tantervi elvárások és módszertani alapelvek

A felső tagozatra írott Kerettantervben nem szerepel a valós szám kifejezés. Az irracionális számokról természetesen szó esik: a 7-8. évfolyamon példák bemutatását kéri irracionális számokra. [17] A tanítási gyakorlatban ezek a π (pl.: [33]) vagy a $\sqrt{2}$ (pl.: [34]) számok.

A 9.-10. évfolyam egyik nevelési-fejlesztési célja „a valós számok halmazának ismerete”, míg a 12. évfolyamon pedig elvárt a „valós számok halmazán értelmezett műveletek” ismerete és alkalmazása is. [23]

A valós számok axiomatikus és Cauchy-sorozatokkal történő bevezetése igen messze esik a valós számokról alkotott szemléletes elképzeléstől, valamint jóval meghaladja a középiskolásoktól elvárt absztrakciós gondolkodás szintjét. Helyette az 1. osztályos kortól folyamatosan fejlesztett mennyiségfogalomra és a mérésre alapozunk.

A számfogalom modelljéül kézenfekvő használni a gyerekek által számtalanszor látott, rajzolt és használt számegyenest. Hogy ezt joggal tehetjük, a geometriai valós szám axióma biztosítja: „Ha a hosszegység adott, akkor bármely A kezdőpontú félegyenesen egy és csak egy olyan B pont található, amelyre nézve AB távolság egy adott pozitív valós szám.” [35]

A gyerekek absztrakt gondolkodása középiskolás éveikre jóval fejlettebb, mint amivel a korábbi számfogalmak bevezetésekor dolgozhattunk; a valós számfogalom kialakítását mégis érdemes több oldalról, gondosan előkészíteni, valamint az előkészítéséhez bőséges érési időt hozzárendelni.

5.2.2 A számfogalom és a mennyiségek

Az előkészítő munkálatok első eleme - a racionális számhalmaz esetében részletesen bemutatott - folytonos mennyiségekkel kapcsolatos szemlélet fejlesztése. Közülük kitüntetetten a távolságfogalmat és tulajdonságait érdemes több oldalról körbejárni, melyre bőven adódik alkalom a függvények, a szerkesztési feladatok és a mértani helyes feladatok között is. [27]

Az előkészítés második sarokköve a méréssel kapcsolatos nézőpontváltás. A méréssel kapcsolatban a gyerekek rendszerint a mérendő objektum nagyságát tartják fókuszban, nem a mértékegység és a mérendő viszonyát. Meg lehet bennük a vágy, hogy a mérést minél pontosabban végezzék, de ezt a tanult mértékegységek erejéig tartják fontosnak, s miután ezek „elfogytak”, nem tudják a mérést eszmei szinten továbbfolytatni. Ennek pedig következménye az a felismerés, hogy általában a mérések közelítőek, és csupán kivételes esetekben – határhelyzetekben – abszolút pontosak.

Az előkészítés harmadik eleme a milliméteren túli realitás elfogadtatása. Más tantárgyakból a gyerekek már tudhatják, hogy léteznek milliméternél kisebb hosszúságú objektumok, melyek léte indokolja a mm-nél kisebb egységgel történő mérést. Az is elfogadható, hogy az élet különböző területei különböző pontosságú mérést kívánnak meg. A pontosság mértékét pedig a m, m/10, $m/10^2$, $m/10^3$-en túl folytatott $m/10^n$ mértékegységkészletben különböző n számmal jellemezhetjük.

A gyermekek számára ezek után már érzékelhető, hogy a mérések „olykor nem érnek véget”, és ebben az esetben eszközeinkkel, a mérhetővel minél jobban érdemes megközelítenünk a mérendőt.

5.2.3 A valós számok bevezetése

Az előkészítő munka eredménye, hogy a 9.-10. évfolyamos tanulók a valós számok bevezetésekor:

1) geometriai tapasztalataikból már tudják, hogy
   a) van olyan szakasz, mely nincsen a m, dm, cm, mm hosszú szakaszok többszörösei között,
   b) van olyan szakasz, melynek hossza nincsen a m, m/10, $m/10^2$, … , $m/10^n$, … halmaz többszörösei között sem.
2) algebrából ismerik, hogy
   a) léteznek végtelen tizedes törtek (pl.: $1/3$),
   b) bármilyen racionális szám felírható végtelen tizedes tört alakban,
3) ugyancsak geometriából tudják, hogy
   a) létezik a π, és tudják is származtatni,
   b) létezik a $\sqrt{2}$, és tudják is származtatni.

A tanítási gyakorlat a racionális számhalmaz definícióját tekinti alapnak, melyről megmutatható, hogy pontosan véges vagy végtelen szakaszos tizedes törtek lehetnek. A gyerekek azonban ismernek olyan számokat, melyek nem ilyen alakúak (pl.: $\pi, \sqrt{2}$), és tudnak konstruálni is ilyet (pl.: 0,1010010001...). A véges és végtelen szakaszos tizedes törteken túli végtelen, nem szakaszos tizedes törteket irracionális számoknak nevezzük el, a racionális és az irracionális számok uniójaként pedig bevezetjük a valós szám fogalmát. A továbbiakban pedig már minden szám elképzelhető úgy, mint végtelen tizedes tört. [32] [33] [34] [35] Némelyik tankönyv ezek után példaként bizonyítja a $\sqrt{2}$ irracionalitását.

Ezek után érdemes a valós számok és a számegyenes kapcsolatával foglalkozni.

5.2.4 A valós számok és a számegyenes

A gyerekek könnyen adnak módszert a számegyenes azon pontjainak megtalálására, melyek az egész számoknak feleltethetők meg. A racionális számok nevezők szerinti bejelölése is érthető szisztéma számukra, s belátható, hogy minden racionális számnak megfeleltethető egy pont.

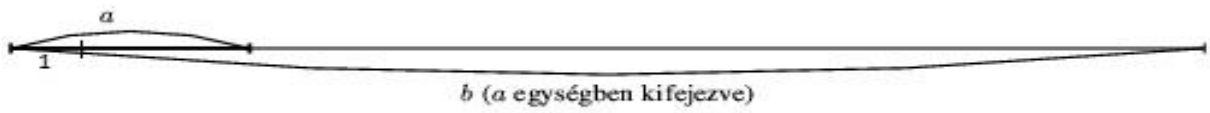
Hogy minden pontnak megfeleltethető-e racionális szám, kicsit hosszadalmasabb vizsgálatot igényel. Egy találomra kijelölt pontot előbb egészekkel, majd ezek tizedrészével stb. közelítve látható, hogy előfordulhat egyenlőség, azonban előfordulhat az is, hogy bár egyenlőség nem áll fenn, a kijelölt szám számjegyei egy idő után ismétlődnek. Ezekben az esetben tudjuk, hogy a kijelölt pont racionális számnak feleltethető meg, ha azonban a végtelen tizedes törtben nincsen ismétlődő számjegyszakasz, akkor viszont nem feleltethető meg egy racionális számnak sem. A racionális számok és a számegyenes pontjai között tehát nem létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

A már ismertetett geometriai valós szám axióma biztosítja, hogy a számegyenesen a 0 pontból induló, számegyenesre illeszkedő bármilyen vektor egy valós számra mutat. A gyerekeknek tehát elmondható, hogy a valós számok és az egyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn. A valós számok segítségével így koordináták vezethetők be az egyenesen, majd ennek felhasználásával a síkban és a térben is. [11]

5.2.5 Műveletek értelmezése a valós számokon

Mivel a 0 pontból induló, számegyenesre illeszkedő bármilyen vektor egy valós számra mutat, két valós szám összegét jól szemléltetik az egyállású (de természetesen akár különböző irányítású) csatlakozó vektorok. A kivonás az ellentettvektor hozzáadásaként illeszkedik a korábbi számkörökben kialakított kivonásfogalomra.

Két valós szám szorzásának értelmezését pozitív valósakra mutatom meg. Egyrészt két valós szám szorzata annak a téglalapnak a területe, melynek oldalhosszúságai az illető valós számok. Másrészt, ha két valós számot megtestesítő szakasz közül az egyiket (a) egységnek tekintjük, akkor ezen új egységhez viszonyítva megadható a másik (b) hosszú szakasz is.



24. ábra - A valós számok szorzásának egy geometriai modellje

(A kép forrása: http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/matematika-didaktikusan/ch02s02.html)

Az így kapott szakasz hossza az eredeti egységben kifejezve a és b mérőszámának a szorzata. [28]

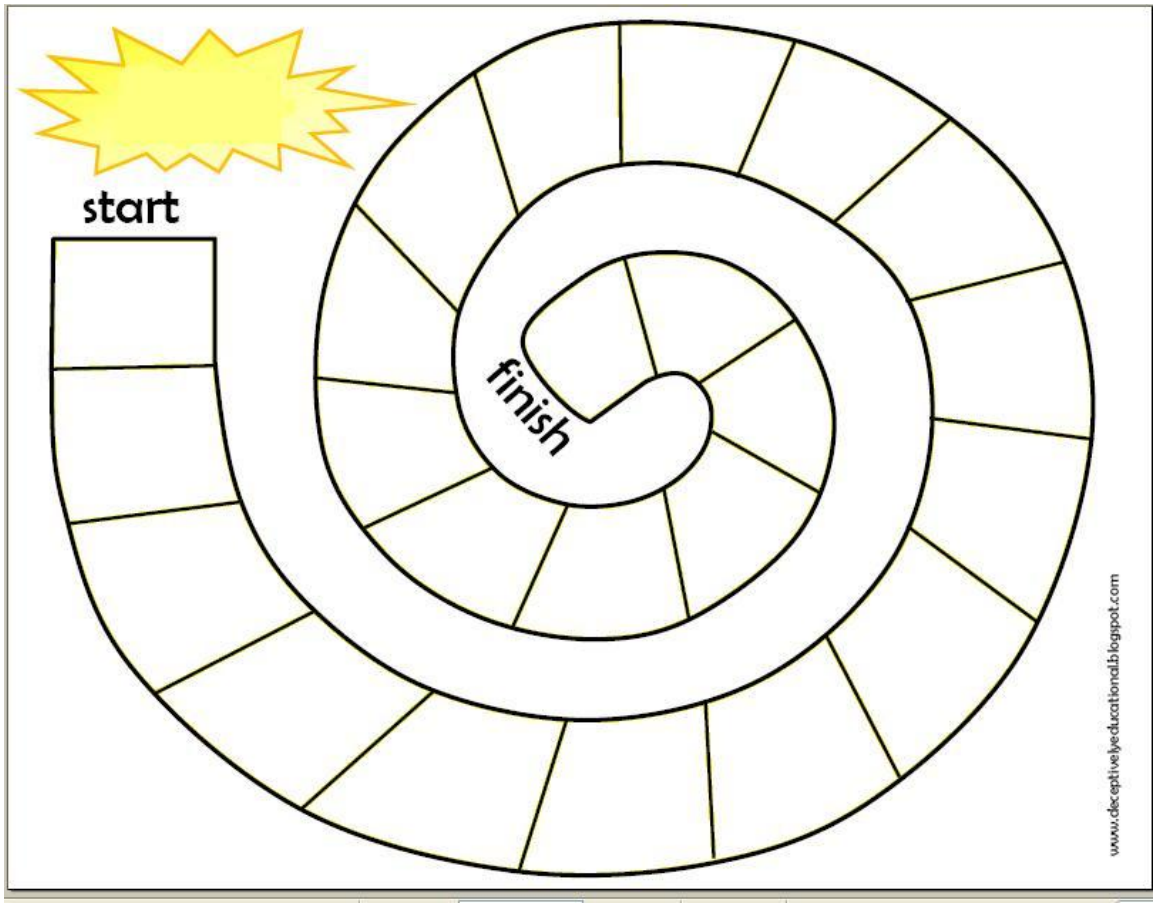
A hatványozással kapcsolatban… az irracionális kitevőjű hatványt úgy értelmezzük, mint a racionális kitevőjű hatványokkal megközelített számot. „Annak belátása, hogy a régi azonosságok most is igazak, annak alapján történhetik, hogy az irracionális kitevőjű hatványokat racionális kitevőjűekkel közelítjük meg, s ezen közelítő hatványok mindegyikére érvényes szabályok érvényben maradnak azon hatványokra is, amelyeket megközelítenek.” [11] Így a valós kitevőjű hatványokra is igazak a természetes számkörben ismertetett alapazonosságok.

5.3 JÁTÉK

5.3.1 A játékkészlet bemutatása

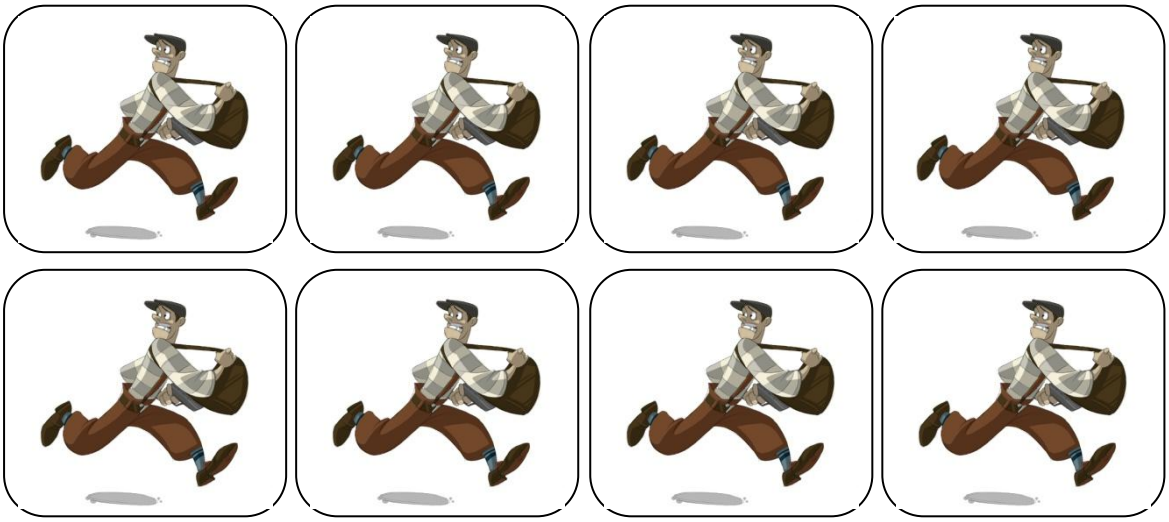
A játék - szándékom szerint - segíti a Kerettantervben [26] rögzített gondolkodási és bizonyítási módszerek elsajátítását, ösztökél a gondolatmenet világos kommunikálására, érvelni tanít, vitára és vitás helyzetek megoldására késztet. Célja rámutatni a valós számtest struktúrájára: láttatja a racionális számok zártságát a négy alapműveletre nézve, és segít megtapasztalni, hogy az irracionálisakra mindez nem igaz.

A játékot 2-4 játékos játssza középiskolában. A játékhoz szükség van egy pénzérmére, egy dobókockára, kettő-négy különböző bábura (esetleg radírra), az alábbi (vagy egy füzetbe rajzolt 20-25 mezőből álló) társasjátékpályára, valamint az alábbi rablókártyákra.



25. ábra - Egy lehetséges társasjátékpálya

(A kép forrása: http://sucika67.blogspot.hu/2012/11/)



26. ábra - Rablókártya

(A rabló alak forrása: http://ujszo.com)

5.3.2 A játék menete

Amint felsorakoztak a bábuk a startmezőn, indulhat a játék. Az első játékos egyszer dob a dobókockával, majd kétszer feldobja a pénzérmét. A dobókockán a számok 2-5-ig sorrendben az összeadás, kivonás, szorzás, osztás műveletét jelölik. A fej racionális számot, míg az írás irracionális számot jelöl.

A játékos feladata mutatni, hogy az általa dobott számok az általa dobott művelet elvégzésekor racionális vagy irracionális számot eredményeznek. Például 2-es dobás, fej, írás esetén a feladat megmutatni, hogy egy racionális számot összeadva egy irracionális számmal milyen számot kapok.

Amennyiben a játékos válaszának helyességét be is tudja látni, a szó a soron következő játékosé. Ő, mint bíráló nyilatkozhat, hogy egyetért-e az illető válaszával és bizonyításával. Véleménye elmondása után a soron következő játékosé (mint bírálóé) a szó, s így tovább a kör végéig. Miután minden bíráló sorban elmondta a véleményét a következő esetek lehetségesek:

1. Amennyiben a bírálók egyetértettek a játékossal (és egymással is), a játékos annyit lépet előre, amennyi a dobókockával dobott szám.
2. Amennyiben a bírálók egyetértenek egymással, de a játékossal nem, akkor vita keletkezik. Ha a vita végére a bírálók (közös) véleménye bizonyul igaznak a játékos véleményével szemben, akkor a játékos nem lép előre a bábujával.
3. Amennyiben a bírálók egyetértenek egymással, de a játékossal nem, akkor vita keletkezik. Ha a vita végére a játékos véleménye bizonyul igaznak a bírálók (közös) véleményével szemben, akkor a játékos annyit lépet előre, amennyi a dobókockával dobott szám plusz egy.
4. Amennyiben a bírálók nem értenek egyet egymással, vita támad közöttük, melyben a cél az egységes bírálói vélemény. Innen 1., 2. vagy 3. is érvénybe léphet.

Ha a játékos egyet dob, egy körből kimarad (de bíráló attól még lehet), ha hatot, nyer egy rablókártyát. A rablókártya feljogosítja a játékos utáni első bírálót, hogy 2. valamint 4. és 2. esetén is előrelépjen annyit, amennyit a játékos lépett volna – tehát első és helyes bírálatával elrabolja a dobott számot. Ebben az esetben a rablókártyáját felhasználta, így az újra visszakerül „a közösbe”.

5.3.3 Tapasztalatok és variációk

A játékot nem volt alkalmam kipróbálni, azonban úgy gondolom, hogy a gyakorlatban léteznek kritikus pontjai, melyet igyekszem megragadni:

- Azt gondolom, szükséges a játékot - matematikatudás szerint - heterogén csoportokban játszani, továbbá a játékosoknak tanári segítséget biztosítani.
- A viták után érdemes a konszenzust megosztani egy bíróval, aki a tanár. Ő bólint rá vagy cáfolja meg a konszenzust. Ugyanígy dönthet véget nem érő vita esetén is.
- A játék megrekedhet a két racionális számmal végzett művelet bizonyításakor, illetve egy racionális és egy irracionális számmal végzett művelet esetén az indirekt bizonyítás során.
- Sok tanári segítség esetén előfordulhat a játékélmény „meggyilkolása”. Érdemes minden csoportnak néhány segítségkérő kártyát adni, melyekkel limitálni lehet a segítség igénybevételének lehetőségét. (A tanár bírói funkciója a segítő funkciójától legyen független.)
- Azt gondolom, hogy nem minden középiskolás gyermeknél van meg a kultúrája annak, hogy egy állítás cáfolatául elegendő egyetlen ellenpélda. Ennek rutinszerű alkalmazása a játék egy újabb haszna lehet!

6 KITEKINTÉS ÉS ÖSSZEGZÉS

„Az egyenletek elméletében a gyökjelekkel való megoldhatóság feltételét kutattam; ez lehetővé tette, hogy […] leírjam egy egyenlet lehetséges szimmetriáit akkor is, ha az gyökjelekkel nem oldható meg.” [36]

Évariste Galois

6.1 KITEKINTÉS

A szakdolgozat iménti fejezetével lezártam a NAT és a Kerettanterv által rögzített, közoktatásban szereplő számkörök feldolgozását. Jelen fejezet részei közül középiskolai fakultációs órán, matematika tagozaton, illetve matematika vagy fizika szakkörön a testbővítések és a komplex számok tárgyalhatók. [39] A kitekintés további alfejezeteinek megírásával a célom a számkörbővítések bizonyos értelemben vett lezárása, absztrakt algebrai lekerekítése.

6.1.1 Testbővítések

K és L testek. Azt mondjuk, hogy K részteste L -nek, ha $K \subseteq L$, $K \neq \emptyset$, illetve K maga is test az L-beli műveletekre nézve. L bővítése K-nak, ha K részteste L –nek, melyet így jelölünk: $K \leq L$.

Például: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$.

T test egyetlen elemmel való $T(\alpha)$ bővítését egyszerű testbővítésnek nevezzük, ha $T(\alpha)$ a legszűkebb olyan test, mely tartalmazza T-t és α-t is.

Az α algebrai elem a T test felett, ha $\exists$ f(x) $\not\equiv 0 \in$ T[x]: f(α) $= 0$, és azt mondjuk, hogy az β transzcendens elem a T felett, ha $\nexists$ f(x) $\not\equiv 0 \in$ T[x]: f(β) $= 0$.

Az i komplex szám algebrai elem $\mathbb{R}$ felett, hiszen gyöke az $f(x) = x^2 + 1$ valós együtthatós polinomnak. Bővítve ezzel az algebrai elemmel $\mathbb{R}$ testet:

$$\mathbb{R}(i) = \{a + bi\}, \text{ ahol } a, b \in \mathbb{R},$$

azaz éppen a komplex számok halmazát kapjuk, melyről tehát elmondható, hogy bővítése a valós testnek (és a racionális testnek is), és a legszűkebb olyan test, mely tartalmazza az összes valós számot, és a fenti $f(x)$ polinom gyökét.

Ebben a gondolatmenetben ismertnek tekintettem a komplex számtestet és az $f(x) = x^2 + 1$ polinom egyik gyökét i-t.

Abban az esetben, ha még nem ismert a komplex számtest, akkor az alábbiak szerint gondolkodhatunk. [25]

6.1.2 Komplex számok

A gyökvonás nem végezhető el mindig a valós számkörben, illetve nincs mindig valós gyöke egy valós együtthatós algebrai egyenletnek. A valós számok teste tehát bizonyos értelemben szűknek bizonyul, szeretnénk tovább terjeszkedni.

Hasonlóan az egész és a racionális számok bevezetéséhez, rendezett számpárokból indulunk ki. Az $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ számpárok halmazán értelmezem az □ és a ■ műveletet:

$$(x_1, y_1) \square (x_1, y_1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ és}$$

$$(x_1, y_1)\blacksquare(x_1, y_1) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$$

ahol + és · az ℝ-en értelmezett összeadás és szorzás. Ezek műveleti tulajdonságainak ismeretében belátható, hogy az $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \square, \blacksquare)$ test.

Az $\{(x, 0), \square, \blacksquare\}$ algebrai struktúra izomorf a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ testtel, azaz találtunk a valós számok testével izomorf résztestet.

Minden (a, b) számpár felírható $(a, 0) \square ((b, 0) \blacksquare (0, 1))$ alakban, ahol az (a, 0) párt kicserélve a valós számra, a $(b, 0)$ párt a b valós számra, □ helyett +-t, ■ helyett ·-t, a $(0, 1)$ helyett pedig i-t írva kapjuk a komplex számok $a + b \cdot i$ kanonikus alakját. [25]

Az így definiált számtestet komplex számoknak nevezünk, és ℂ-vel jelölünk.

A komplex számok valós számpárokkal történő bevezetése nélkülöz bárminemű szemléletességet, így még tagozaton, fakultációs matematika órán is absztrakt. Így vannak, akik a geometriai modellt követik: a tanuló ebben az esetben kétdimenziós vektorokként találkozik a komplex számokkal, melyben a vektorösszeadás művelete már ismert, a vektorok újfajta szorzásának bevezetése pedig megtehető. [12]

6.1.3 Kvaterniók

Felmerül a kérdés, hogy a komplex számkört lehet-e tovább bővíteni úgy, hogy a szokásos műveleti tulajdonságok érvényben maradjanak, és további hasznos számkörhöz jussunk. Először bevezetem a Hamilton által felfedezett Q kvaterniócsoportot.

A $(G, \cdot)$ algebrai struktúra csoport, ha G nemüres halmazon értelmezett · művelet asszociatív, létezik egységelem és minden elemnek van inverze.

Q kvaterniócsoport 8 elemű: $^{\pm}1$, $^{\pm}i$, $^{\pm}j$, $^{\pm}k$, melyen a · művelet a következőképpen értelmezett:

Q	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

27. ábra - A kvaterniócsoport művelettáblázata

(A táblázat forrása E. Kiss: Bevezetés az Algebrába, Typotex Kiadó, Budapest, 2007. 185.o.)

Ellenőrizhető, hogy Q -ra az így definiált művelettel fennállnak a csoporttól megkövetelt tulajdonságok.

A K-val jelölt kvaterniók halmaza az iménti $1, i, j$ és k csoportelemek valós számokkal vett lineáris kombinációja, azaz minden kvaternió egyértelműen felírható $z = p + qi + rj + sk$ alakban, ahol $p, g, r, s \in \mathbb{R}$.

Mivel a kvaterniókat láthatóan négy valós szám határozza meg, precíz bevezetésükhöz kézenfekvő számnégyeseknek tekinteni őket. A kvaterniók halmaza tehát egy olyan $(K, +, \cdot)$ algebrai struktúra, ahol $K = \mathbb{R}^4 = \{(p, q, r, s): p, q, r, s \in \mathbb{R}\}$, a két művelet pedig:

$(p_1, q_1, r_1, s_1) + (p_2, q_2, r_2, s_2) := (p_1 + p_2, q_1 + q_2, r_1 + r_2, s_1 + s_2)$,

$(p_1, q_1, r_1, s_1) \cdot (p_2, q_2, r_2, s_2) := (p_1 \cdot p_2 - q_1 \cdot q_2 - r_1 \cdot r_2 - s_1 \cdot s_2, p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 + r_1 \cdot s_2 - s_1 \cdot r_2, p_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot p_2 + s_1 \cdot q_2 - q_1 \cdot s_2, p_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot r_2 - r_1 \cdot q_2)$.

(Világos, hogy ebben a bevezetésben $1 = (1, 0, 0, 0), i = (0,1,0,0), j = (0, 0, 1, 0), k = (0, 0, 0, 1)$.)

Belátható, hogy $(K, +, \cdot)$ algebrai struktúra ferdetest, vagyis nem kommutatív test.

A $(p, 0, 0, 0)$ kvaterniók éppen a valós számokkal izomorf struktúra, míg a $(p, q, 0, 0)$ alakú kvaterniók izomorfia erejéig megegyeznek a komplex számokkal, azaz $\mathbb{R} \leq K$, illetve $\mathbb{C} \leq K$.

A kvaterniók teste a közoktatásban nem szerepel, az egyetemi tananyagban pedig elsősorban példaként olyan nem kommutatív testre, mely a valós test fölött véges dimenziós. A kérdés, hogy (izomorfia erejéig) van-e további ilyen?

6.1.4 Frobenius-tétel

Szükséges definiálnom a vektortér, majd a dimenzió fogalmát. Adott a $(T, +, \cdot)$ test, a T-beli összeadás egységeleme 0, a szorzás egységeleme 1. Valamint adott a (V, +) kommutatív csoport, a V-beli összeadás egységelemét pedig jelölje $\mathbf{0}$.

T és V között definiálunk egy műveletet, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\forall \alpha \in T$ és $\forall \boldsymbol{v} \in V$: $\exists \alpha \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$,

2. $\forall \alpha, \beta \in T$ és $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$: $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{u}$ (az egyik szorzótényezőre vonatkozó disztributivitásszerű tulajdonság),

3. $\forall \alpha, \beta \in T$ és $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$: $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{v}$ (a másik szorzótényezőre vonatkozó disztributivitásszerű tulajdonság),

4. $\forall \alpha, \beta \in T$ és $\forall \boldsymbol{u} \in V$: $\alpha(\beta \boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$ (egy asszociativitás-szerű tulajdonság)

5. $\forall \boldsymbol{u} \in V$: $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Ekkor azt mondjuk, hogy a V vektorteret alkot a T test felett. [37]

Az $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n} \in V$ a vektortér egy generátorrendszere, ha V minden eleme előáll ezek lineáris kombinációjaként. Bázison lineárisan független generátorrendszert értünk, míg egy V vektortér dimenziója egy bázisának elemszáma[37].

Azt mondjuk, hogy V algebra a T test fölött, ha

(1) V gyűrű,

(2) V vektortér T fölött,

(3) teljesül $(\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$ azonosság $\forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{V}$ és $\forall \lambda \in T$ esetén.

V nullosztómentes algebra, ha V nullosztómentes gyűrű.

[37] mely a kicserélési tétel szerint mindig ugyanannyi.

Látható, hogy K négydimenziós, nullosztómentes algebra $\mathbb{R}$ fölött.

Frobenius-tétel: Ha A egy $\mathbb{R}$ fölötti véges dimenziós, nullosztómentes, nem nulla algebra, akkor A izomorf a valós számok, a komplex számok, vagy a kvaterniók algebrájával.

E tétel tehát bizonyos szempontból lezárja a számfogalom bővítésének folyamatát.

6.2 ÖSSZEGZÉS

6.2.1 Ami a szellemi struktúrákat illeti…

A szakdolgozat megírása után igen természetesnek és jelentőségteljesnek tartom azokat a folyamatokat, amikor a tanulók fejében birkózás zajlik az új, „szkémadöngető" információ és a már kialakult szellemi struktúrák között. Éppen ezért roppant nagy tanulság számomra, hogy az új számkör fogalmának kiépítése és a rajta értelmezett műveletfogalmak bevezetése nagy gondosságot, elegendő időt, megfelelő modelleket és a külső reprezentációs síkok változatos és sokszori alkalmazását igénylő feladat.

6.2.2 Ami a számkör-bővítéseket illeti…

Szeretnék rámutatni, hogy a dolgozatban szereplő számkörbővítések tulajdonképpen ugyanazt a metódust követik:

1. A kiindulási struktúra felhasználásával értelmezünk egy alkalmas A halmazt (mely a valós számokat kivéve elempárok halmaza).

2. A halmazon - ugyancsak céljainkkal összhangban – értelmeztük az □ és a ■ műveleteket. Az $(A, \square, \blacksquare)$ egy elég sok tulajdonsággal bíró algebrai struktúra.

3. A-ban értelmezünk egy relációt A elemei között, melyről belátható, hogy elvivalenciareláció, mely így partícionálja A-t.

4. Az osztályok között úgy definiáljuk az ☺, ☻ műveleteket, hogy az osztályozás ezekre a műveletekre nézve kompatibilis legyen. Belátjuk, hogy ez a vágyott struktúrát eredményezi.

5. Megmutatjuk, hogy a kapott struktúra tartalmaz a korábbi halmazzal izomorf struktúrát, majd végrehajtjuk a beágyazást, vagyis az izomorf részt kicseréljük magára a kiindulási struktúrára.

A metódust annyiban képezi le az iskolai matematikaoktatás, hogy az egész számok és – fakultációs órán, szakkörön, tagozaton – a komplex számok bevezetésekor a gyerekek számára is tisztán kivehetők az egész, illetve a valós számkörökből képzett számpárok.

A racionális és a valós számok bevezetésekor más a helyzet. A racionális számkörbe való belépéskor nem egész számpárokon gondolkodunk, ám a tört alakjában (számlálójában és nevezőjében), valamint Szeredi tanárnő dominós játékában az egész számpárok mégis szépen megmutatkoznak.

A valós számkörben a racionális számból képzett sorozatok a gyerekek számára nem érzékelhetőek. Itt a geometriai valós szám axióma siet a segítségünkre, mely a témában olyan (felsőbb matematikai) alapvetés, mely a gyerekek számára is befogadható – és már jól ismert – modellt, a számegyenest biztosítja.

6.2.3 Ami a műveletértelmezéseket illeti…

A negatív számmal való összeadás és szorzás értelmezése az első műveletek, melyeket nem tudjuk a birtokunkban lévő műveletértelmezés szerint elvégezni. Ennek mi adunk értelmet. Hasonlóan az egyre bővülő számkörök összeadás- és szorzásműveletének bevezetésekor látható, hogy azokat definiálni szükséges. Mindez azonban nem önkényesen történik, hanem elsődleges szempont az alapvető műveleti tulajdonságok érvényben maradása, azaz a permanencia elv érvényesülése. [25]

Kifejezetten lényegesnek tartom a műveleteket értelmezésekor kísérletezni, s azt megpróbálni a gyerekekkel többféleképpen értelmezni.[38] Hamarosan persze együtt rájövünk, hogy az alapazonosságok mely esetekben maradnak érvényben. Ez a kitérő megmutatja a gyerekeknek, hogy valóban új műveletfogalom definiálása zajlik, s azt is, hogy nem önkényesen. [25]

[38] Az egész számok szorzása erre például csodálatos terep.

A kivonás és az osztás értelmezése – azokban a számkörben, ahol algebrai műveletek – az összeadás és a szorzás által egyértelműen meghatározott. Az összeadással és a szorzással ellentétben itt nem történik definiálás.

6.2.4 Ami a közös pontok feltárását illeti…

A felsőbb és az iskolai matematika kapcsolódási pontjainak feltárása közben több aha-élményem is volt. Csodálatosnak tartom a két világ közti dinamizmust: olykor közeledik egymáshoz, máskor eltávolodik egymástól. A távolodás okaira – már ahol ezeket egyáltalán tetten tudtam érni – igyekeztem rávilágítani.

A játékok kitalálása a szakdolgozat írásának különleges szakaszai voltak. Valamelyest az általam böngészett tankönyvek íróival azonosultam, hiszen egy felsőbb matematikai szándékot bújtattam bárányborba, és tettem a tanulók közé. Megtanultam, hogy nem triviális, hogy a bárányborba bújtatott farkas társasága inspiráló: átgondolt, kikísérletezett, kreatív megoldások szükségesek, hogy a játék valóban megmozdítsa a gyerekeket.

6.3 KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szakdolgozat írását meghatározta a kutatás, az újra és átfogóan értelmezés, a rácsodálkozás, a tanulás, sőt még az önismeret élménye is. Mindezekért hálával tartozom megannyi segítőmnek.

A diplomamunka témáját Szeredi Éva tanárnővel jelöltük ki nem sokkal halála előtt. Érdeklődési köröm feltérképezéséért és a támogató hozzáállásáért máig hálás vagyok.

Török Judit tanárnő, a Matematikatanítási és Módszertani Központ adjunktusa örökölt meg. Köszönöm szakértő gondoskodását, a munkával együtt töltött tartalmas órákat és türelmét irányomba.

Hálás vagyok Csahóczi Erzsébet és Kovács Mara nyugalmazott vezetőtanárok jó tanácsaiért és irodalmi ajánlásaiért.

Végül köszönet illeti családtagjaimat, akik szeretettel támogattak, míg elkészült a dolgozat.

IRODALOMJEGYZÉK

1. **T. Varga:** *A matematika tanítása.* Budapest : Tankönyvkiadó, 1969. 4. kötet.

2. **J. S. Bruner:** *Új utak az oktatás elméletéhez.* Budapest : Gondolat Kiadó, 1974. old.: 32-104.

3. **R. R. Skemp:** *A matematika tanulás pszichológiája.* Budapest : Edge 2000, 2005. 2. kötet. old.: 23-124.

4. **É. Vásárhelyi:** *Fogalomalkotás és reprezentációk.* ELTE Matematikatanítási és Módszertani Központ, 2006.

5. **G. Ambrus, K. Munkácsy, É. Szeredi, É. Vásárhelyi, G. Wintsche, Szerk.: É. Vásárhelyi:** *Matematika Módszertani Példatár.* Matematikatanítási és Módszertani Központ : TAMOP4.1.2.A/1-11/1-2011-0064, 2013.

6. **A. Ambrus:** *Bevezetés a matematikadidaktikába.* Budapest : ELTE Eötvös Kiadó, 1995. old.: 1-167.

7. **E. Cervenakné Neményi:** *A számolás tanítása, Matematikai Tantárgypedagógiai füzetek.* Budapest : ELTE, Tanítóképző Főiskola, 1999.

8. **É. Vásárhelyi:** *A vizuális reprezentáció fontossága a matematikaoktatásban.* [Online] https://dl.dropboxusercontent.com/u/100162898/vasar/vizualis.pdf .

9. **E. Cervenakné Neményi:** *„LEGYEN A MATEMATIKA MINDENKIÉ!" 25 éve halt meg Varga Tamás.* Budapest : Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2013., Gyermeknevelés, 1. kötet, old.: 12.

10. **K. Fried, J. Korándi, J. Török:** *Számelmélet (elektronikus jegyzet)*. [Online] 2000. http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/algebra1/algebra1-vegleges-utf8.pdf.

11. **L. Fuchs:** *Bevezetés a lineáris algebrába és a számelméletbe.* hely nélk. : Nemzeti Tankönyvkiadó, 1997. old.: 13.

12. **G. Pintér:** *A halmazelmélet axiómái.* Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. [Online] http://www.renyi.hu/~lapker/anyagok/zfc.pdf .

13. **E. Daróczy, és mtsai:** *Játékos matematika, matematikai játékok az óvodában.* Budapest : Országos Pedagógiai Intézet, 1984.

14. **J. Piaget:** *Az értelem pszichológiája.* Budapest : Kairosz Kiadó, 1997. old.: 167-215.

15. **Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet:** *Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára.* [Online] 2012. http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/2_tantervek/kerettanterv ek/kerettanterv_alsotagozat.pdf.

16. **Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet:** *Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára.* [Online] 2012. http://kerettanterv.ofi.hu/01_melleklet_1-4/1.2.3_matemat_1-4_u.docx.

17. **Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet:** *Kerettanterv az általános iskola 5.-8. évfolyamára.* 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 2. melléklete : ismeretlen szerző, 2012.

18. **J. Surányi:** *A számkör felépítése. Útközben (középiskolai matematikatanítási kísérlet).* Budapest: MTA Matematikai Kutató Intézet, 1974. 1. kötet.

19. **Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet:** *Nemzeti Alaptanterv, 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet.* Budapest : ismeretlen szerző, 2012., Magyar Közlöny.

20. **T. Török:** *Tanítói kézikönyv Általános iskola 1–4. osztály.* Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt, 2010.

21. **I. Eglesz, Cs. Kovács, J. Radnainé Szendrei, V. Sztrókayné Földvári:** *Tanári kézikönyv általános iskola - Matematika 5.* Budapest : Tankönyvkiadó, 1978.

22. **E. Csahóczi, K. Csatár, Cs. Kovács, É. Morvai, Gy. Széplaki, É. Szeredi:** *Matematika 6.* Budapest : Apáczai Kiadó, 2013.

23. **Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet:** *Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára.* 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 3. melléklete : EMMI, 2012.

24. **D.B. Elkonyin, V.V. Davidov:** *Életkor és ismeretszerzés.* Budapest : Tankönyvkiadó, 1972. old.: 116.

25. **K. Fried, J. Korándi, J. Török:** *A modern algebra alapjai.* Budapest : ELTE, 2013.

26. **Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola:** *Tanítók a Hálón, alsós tanítói portál.* [Online] Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola, 2016. 11 12. http://alsos.fazekas.hu/wiki/Matematika/Tanterv/Sz%C3%A1mtan,_algebra,_sorozatok,_f%C3%BCggv%C3%A9nyek/Sz%C3%A1mfogalom_-_a_sz%C3%A1mfogalom_tapasztalati_alapjai/T%C3%B6rtek.

27. **J. Peller:** *A számfogalom fejlesztésének szintjei az oktatási gyakorlatban.* Budapest : Tankönyvkiadó, 1974.

28. **J. Pálfalvi:** *Matematika didaktikusan.* Budapest : Typotex, 2000.

29. **I. Eglesz, Cs. Kovács, J. Radnainé Szendrei, V. Sztrókayné Földvári:** *Kézikönyv a matematika 6. osztályos anyagának tanításához.* Budapest : Tankönyvkiadó, 1980.

30. **M. Laczkovich, V. T. Sós:** *Analízis I.* Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.

31. **I. Dancs, és mtsai:** *Bevezetés a matematikai analízisbe.* Budapest : Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem, 1996.

32. **L. Koller:** *Matematika érettségire felkészítő tankönyv.* Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.

33. **S. Hajdu (szerk.):** *Matematika 8.* Budapest : Műszaki Kiadó, 2009.

34. **S. Hajdu (szerk.):** *Matematika 7. emelt szint.* Budapest : Műszaki Kiadó, 2000.

35. **S. Hajdu (szerk.):** *Matematika 9.* Budapest : Műszaki Kiadó, 2008.

36. **E. Kiss.** *Bevezetés az algebrába.* Budapest : Typotex, 2007.

37. **E. Cervenakné Neményi, J. Szendrei:** *A számolás tanítása. Szöveges feladatok.* hely nélk. : ELTE, Tanítóképző Főiskola, 1999.

38. **I. Gazsó, K. Mosonyi, Gy. Vörös:** *A matematika tanítása.* Budapest : Tankönyvkiadó, 1972.