Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Kerekes Kálmán

A Pitagorasz-tétel néhány bizonyításának összevetése

Szakdolgozat

Témavezető: dr. Vancsó Ödön

Budapest, 2018

Tartalomjegyzék:

1. Bevezetés …..... 2
2. A hindu bizonyítás 4
3. Áttologatós bizonyítás 5
4. Kétszeres nyírásos bizonyítás 6
5. Még egy kétszeres nyírásos bizonyítás ……..... 8
6. Mit mondhatunk az átrajzolós bizonyításokról ……..... 10
7. A háromszöget két, önmagához hasonló háromszögre felosztó bizonyítás …… 11
8. Az oldalakat átvetítgető bizonyítás ……... 12
9. Még egy bizonyítás, amelyben a háromszöget két, önmagához hasonló háromszögre bontjuk fel …..……. 16
10. A szép és a csúnya matematika – Az elegáns és a lényeget megmutató bizonyítások 19
11. Euklidész-féle bizonyítás az Elemekből …… 20
12. Bizonyítás az érintőtétellel ……... 21
13. Még egy bizonyítás az érintőtétel ábrájának felhasználásával ……... 22
14. Bizonyítás derékszögű háromszögbe írt körrel ……. 24
15. Második bizonyítás derékszögű háromszögbe írt körrel …….. 27
16. Bizonyítás két egybevágó derékszögű háromszöggel ……... 29
17. Második bizonyítás két egybevágó derékszögű háromszöggel …….. 31
18. A Pitagorasz-tétel általánosítása …….33
19. Összefoglalás …….. 35
Irodalmi hivatkozások ……... 38

1. Bevezetés

A Pitagorasz-tétel a matematika tanulásának folyamatában az első olyan tétel, amely rövid, egyértelmű nevet visel, nagyon egyszerű képlettel fejezhető ki, és állítása nem látható be „egyszerű ránézéssel”.
A tétel mindenki számára ismert és így szól:
A derékszögű háromszögben az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével. Vagyis:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (1.1)$$

A Pitagorasz-tételt nyugodtan tekinthetjük egy kivételesen fontos tételnek. Központi helyet foglal el a matematika tanulás folyamatában.
Vajon a Pitagorasz-tétel inkább területek, vagy inkább hosszúságok közötti összefüggést mond-e ki? Igen, tudjuk, mindkettőt, de hol vannak a „meghajtó erők”? Hol, hány dimenzióban van a Pitagorasz-tétel „igazi” természete: egy dimenzióban (szakaszhosszak közötti összefüggések) vagy kettőben (területek közötti összefüggések)? Ha ki tujuk deríteni, hogy melyik dimenziószámban létezik elsődlegesen ez az összefüggés, akkor a másik dimenziószámban fennálló összefüggés csak ennek az elsődlegesnek a folyománya, következménye.
Megjegyzés: A „régi görögök” területek közötti összefüggésről beszélnek. Pitagorasz és tanítványai, kortársai olyan szakaszokat, amelyeknek irracionális szám a hossza, el sem tudnak képzelni – pl. $\sqrt{2}$ hosszúságú szakasz számukra nem létezik. Olyan derékszögű háromszög sem, amelynek oldalhosszai pl. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ és $\sqrt{5}$. És nem azért, mert nem ismerték a gyökjelet. Zavarta a harmóniaérzéküket és világképüket az irracionális számok létezésének gondolata.

De szabad-e ilyesmivel egyáltalán foglalkoznunk, szabad-e ilyesmiről beszélnünk a matematikában, hogy mi egy tétel igazi természete, milyen dimenzióban áll fenn az elsődleges összefüggés, és melyikben csak egy másodlagos? Noha ezeknek a fogalmaknak nincs matematikai definíciója, mindannyian értjük őket, és bizonyos tanulók számára fontos lehet, hogy ilyen megvilágításban is lássák – jelen esetben – a Pitagorasz-tételt, de

további tanulmányaik során, ennek mintájára és ennek tanulságain felbuzdulva, más, számukra fontos tételeket is. .

Szabad-e szubjektív véleményeket bevinnünk az objektív matematikába?

E sorok szerzőjének meggyőződése, hogy igen. De csak kiegészítésként. Úgy, hogy az objektivitást, azaz a matematika axiomatikus felépítését és egzakt következtetési mechanizmusait nem befolyásolhatja a szubjektivitás. Abban viszont teret engedhetünk a szubjektivitásnak, hogy kinek melyik bizonyítás tetszik jobban, melyiket dicséri, méltatja a tanulók előtt, melyik bizonyítást vagy bizonyításokat használja fel egy-egy tételhez a matematika tanítása során, vagy pedig a lehetséges alternatívák közül választva hogyan épít fel egy matematikai tárgykört, területet.

A Pitagorasz-tétel különböző bizonyításainak áttekintése és összehasonlítása kiváló lehetőséget nyújt arra, hogy mindenki számára érthetően, világosan, egy nagyon könnyen feldolgozható tárgykörre fókuszálva bemutassuk, milyen gátló vagy segítő energiákat – gyakran inkább így mondjuk: impulzusokat - adhat a szubjektivitás az objektív, precíz matematikai mechanizmusok mellé. Arról is kapunk egy benyomást, hogy ezek a segítő energiák – vagy impulzusok - milyen jól használhatóak a matematika tanításában, tanulásában, ill. alkalmazásában (pl. műszaki területek, fizika).

A matematikában nem létezik egyértelmű, mindenki által elfogadott módszer a bizonyítások összetettségének, komplexitásának mérésére, számszerűsítésére, rendezési reláció felállítására egy tétel különböző bizonyításainak bonyolultsága között. Talán lehetne súlyozni a lényegi lépések száma, a felhasznált matematikai „objektumok” száma, esetleg a bizonyítás ötleteinek nehézsége szerint. Ami mindenképp kézenfekvő, hogy legyen az egy kritérium a bizonyítások minősítésére, hogy kiderül-e az adott bizonyításból, hogy melyek a tétel mozgatórugói, mi az a „sine qua non”, ami nélkül a tétel nem létezne, nem lenne igaz.

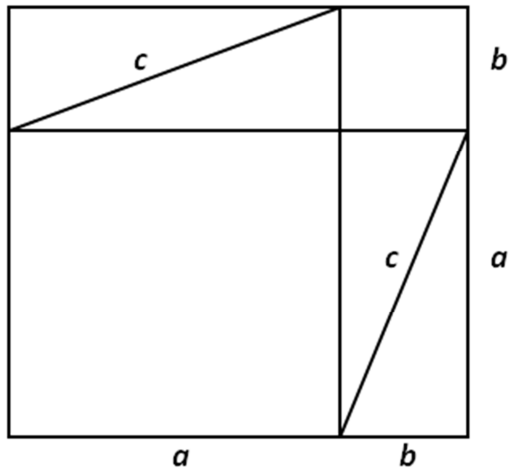
E Szakdolgozat előkészítése és megírása során folyamatosan előttem lebegett a kételkedő, kereső, tanácstalan tanuló alakja. Akinek meg kell tanulnia, meg kell értenie egy tételt – mondjuk, éppen a Pitagorasz-tételt – példák megoldása során használnia, alkalmaznia kell, rá kell építenie újabb matematikai tárgyköröket, területeket – és közben, vagy utólag szembesül azzal, hogy zavarja valami, amit esetleg ki sem tud mondani, meg sem tud fogalmazni: az, hogy nem hiteles számára a bizonyítás, mert csak a felszínt, az eredményt

mutatja – hogy egy tétel állítása igaz-e vagy nem igaz, összhangban van-e a matematikai környezet egyéb tételeinek állításaival – és nem kap semmilyen támpontot azt illetően, hogy valójában miért is igaz a tétel állítása, mik a mozgatórugók, mozgató erők, hol vannak a működtető energiák.

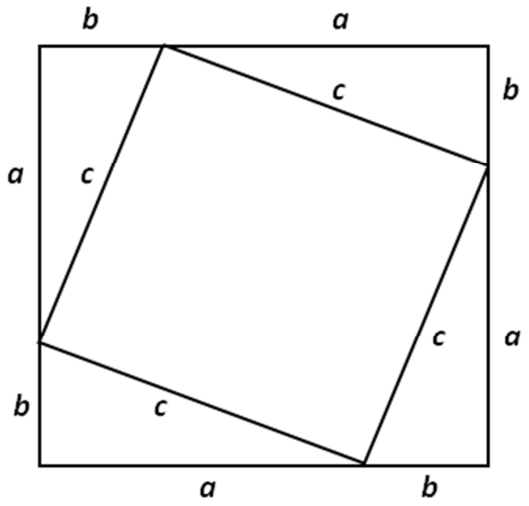
A Szakdolgozatban bemutatott bizonyításokat ezért olyan helyekről vettem, amelyekhez egy magyarázatot, támpontokat keresgélő tanuló a legkönnyebben hozzáfér – az Internetről **[CUT]**, **[WIK-A]**, **[WIK-M]**, **[WIK-N]**, a még mindig népszerű Obádovics-könyvből **[OBÁ]** és az ettől újszerűbb Gerőcs-Vancsó: Matematika c. átfogó kézikönyvből **[GE-VA]**.

2. A hindu bizonyítás

Kezdjük a bizonyítások sorát a hindu bizonyítással **[WIK-M]**. Leggyakrabban ezt a bizonyítást használják az általános iskolában a Pitagorasz-tétel bizonyítására, és a tanulók jelentős hányada később sem találkozik a tétel más bizonyításával.



1. ábra



2. ábra

Az *1.* és *2. ábrán* egy-egy *a+b* oldalú négyzet látható, ezeknek értelemszerűen azonos nagyságú a területük. A két „nagy” négyzet a két ábrán különbözőképpen van felbontva diszjunkt alakzatokra. Mindkét „nagy” négyzet tartalmaz négy-négy egybevágó derékszögű háromszöget, ezeknek *a* és *b* a befogója, *c* az átfogója. Az *1. ábra* „nagy”

négyzete ezen a négy derékszögű háromszögön kívül egy *a* oldalú és egy *b* oldalú négyzetet tartalmaz, ez a hat alakzat együtt pontosan kiadja, diszjunkt felosztását adja a „nagy”, *a+b* oldalú négyzetnek. A *2. ábra* „nagy” négyzetének diszjunkt felbontását az említett négy derékszögű háromszögön kívül egy *c* oldalú négyzet adja. Két egyenlő területből egyenlő területet elhagyva egyenlő területet kapunk, így a két „nagy” négyzet területéből kivonva a négy darab derékszögű háromszög területét, a fennmaradó területek nagysága megegyezik, azaz az *a* és *b* oldalú négyzetek területének összege azonos a *c* oldalú négyzet területével.

Amint látjuk, a hindu bizonyítás is terület-szemléletű, nem pedig szakaszhossz-szemléletű.

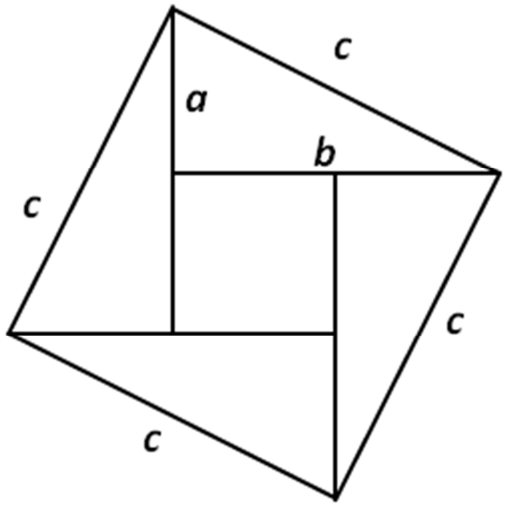
Betűaritmetikával leírva az *1.* és *2. ábra* alapján:

$$(a+b)^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 + b^2 + 4\cdot(a\cdot b)/2 = c^2 + 4\cdot(a\cdot b)/2 \qquad / - 4\cdot(a\cdot b)/2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

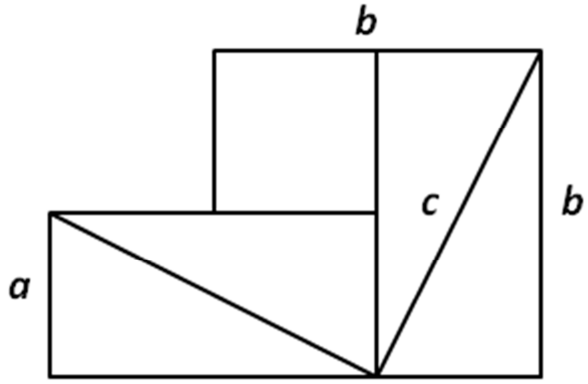
Tegyük hozzá, hogy ez a betűaritmetika - általános esetben - csak azok számára értelmezhető, akik elfogadják az irracionális számok létezését. Így Pitagorasz és kortársai számára sajnos nem.

3. Áttologatós bizonyítás

A 3. és 4. ábra egy áttologatós bizonyítást mutat be, a Wikipédia német nyelvű Pitagorasz-tétel szócikke alapján **[WIK–N]**. (Megjegyzés: Léteznek ún. átdarabolós bizonyítások is: azok, amelyek „ollóval feldarabolják” a befogókra illeszkedő két négyzetet, és ezekből az apróbb darabokból összerakják az átfogóra illeszkedő négyzetet. Ezek az Interneten általában Java-alkalmazásos animációként lejátszhatók, nyomtatott formában viszont bonyolult a bemutatásuk – ezért jelen Szakdolgozatban nem szerepelnek. Az is megjegyzendő, hogy az átdarabolás általános esetben matematikailag is bonyolultan kezelhető.)



3. ábra



4. ábra

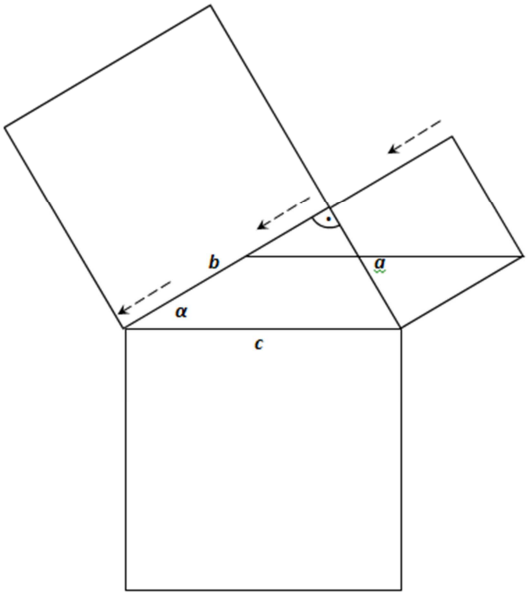
A *3. ábrán* négy darab, *a* és *b* befogójú, *c* átfogójú derékszögű háromszög van elhelyezve úgy, hogy egy *c* oldalú négyzetet alkotnak, középen pedig körülvesznek egy *b-a* oldalú kisebb négyzetet. (Eltérés a hindu bizonyítás *2. ábrájától*, hogy ott nagyobb, *a+b* oldalú a nagy négyzet, a négy darab *a, b,* és *c* oldalú derékszögű háromszög pedig szintén egy nagyobb, *c* oldalú négyzetet vesz körül, valamint az is, hogy a hindu bizonyítás *2. ábráján* a négy említett háromszög derékszöge a nagy külső négyzet csúcsaiban van, itt pedig a derékszögek befelé van fordulva, a kis négyzet mellé.)

A *3. ábrán* a négy derékszögű háromszög és az általuk közrefogott *a-b* oldalú négyzet területeinek összege c^2. Ha a felső háromszöget 90°-kal elforgatjuk az óramutató járásával ellentétes irányban, és eltoljuk az alakzat jobb alsó sarkába, a bal oldali háromszöget pedig az óramutató járásával megegyező irányban forgatjuk el 90°-kal és az alakzat bal alsó sarkába toljuk el, megkapjuk a *4. ábrán* látható alakzatot, melynek területe $a^2 + b^2$. Az alkalmazott műveletek során az alakzatok területe változatlan maradt, ezért $c^2 = a^2 + b^2$.

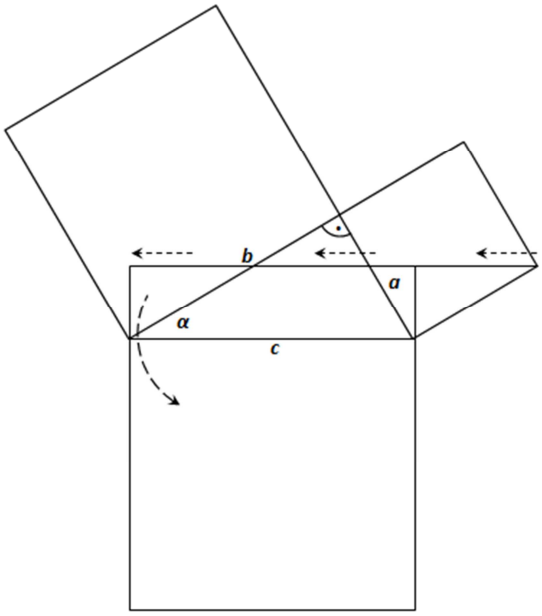
4. Kétszeres nyírásos bizonyítás

Az *5. – 8. ábrák* kétszeres nyírásos bizonyítást mutatnak be, a Wikipédia német nyelvű Pitagorasz-tétel szócikke alapján **[WIK–N]**.

Az *5. ábrán* az *a* befogóra illeszkedő négyzetet első nyírásként a *b* befogó mentén nyírjuk úgy, hogy a nyírás előtti négyzet bal alsó oldala a nyírás után immár romboid oldalaként egybeessen a *c* átfogóval.



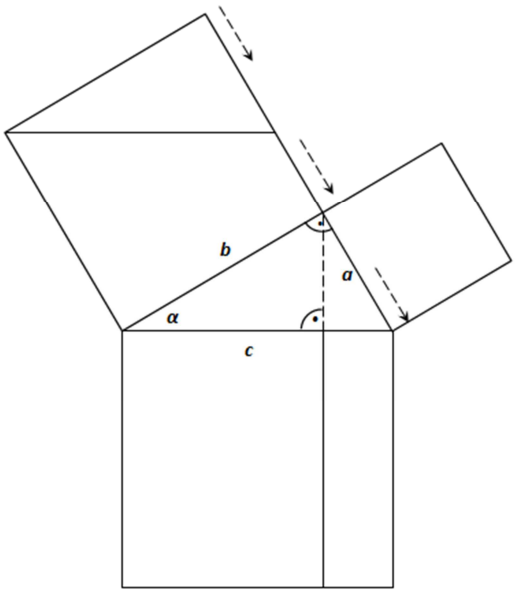
5. ábra



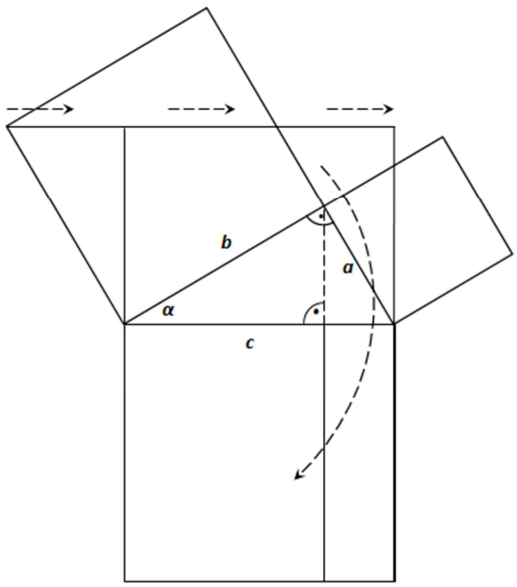
6. ábra

Második nyírásként a négyzetből kapott romboidot a felső vízszintes oldala mentén nyírjuk úgy, hogy téglalapot kapjunk (6. *ábra*). Ennek a téglalapnak a vízszintes oldala *c* hosszúságú, mivel az átfogóra illeszkedik, függőleges oldalának hossza (azaz a magassága) pedig a^2/c (mivel az eredeti, *a* oldalú négyzet, a romboid és a téglalap területe változatlanul a^2). $a = c \cdot \sin\alpha$ miatt a függőleges oldal hossza $c \cdot \sin^2\alpha$. A kapott téglalapot a jobb alsó csúcsa körül 90°-kal elforgatjuk az óramutató járásával ellentétes irányban, s így az átfogóra illeszkedő *c* oldalú négyzet egy részét képezi (*6. ábra*).

A *7. ábrán* a *b* befogóra illeszkedő négyzet első nyírása látható, ami az *a* befogó mentén történik úgy, hogy a nyírás előtti négyzet jobb alsó oldala a nyírás után immár romboid oldalaként egybeesen a *c* átfogóval. Második nyírásként itt is a négyzetből kapott romboidot téglalappá alakítjuk át (*8. ábra*). A téglalap vízszintes oldala itt is *c* hosszúságú az átfogóra illeszkedés miatt, a függőleges oldal hossza (a téglalap magassága) pedig b^2/c, mert az eredeti, *b* oldalú négyzet, a romboid és a téglalap területe is változatlanul b^2. $b = c \cdot \cos\alpha$ miatt a függőleges oldal hossza $c \cdot \cos^2\alpha$. Ezután a téglalapot a bal alsó csúcsa körül 90°-kal elforgatjuk az óramutató járásának irányában, így ez a téglalap is a *c* oldalú négyzet egy részét képezi.



7. ábra



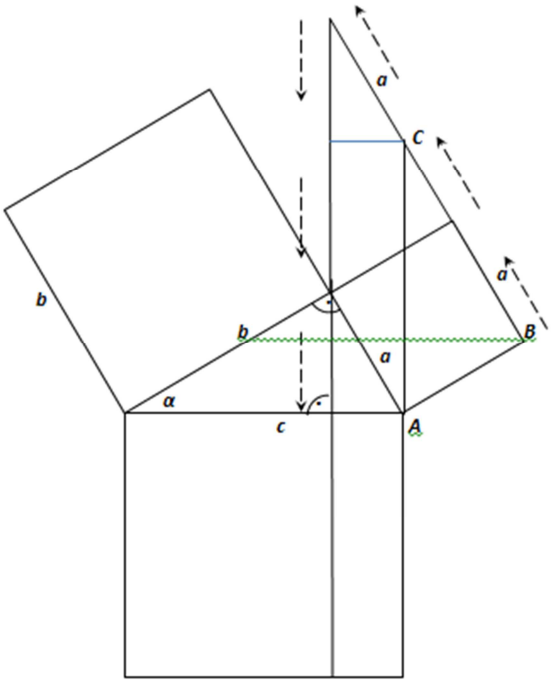
8. ábra

A két elforgatott téglalap együtt pontosan lefedi a *c* oldalú négyzetet, például azért, mert $c \cdot sin^2\alpha$ a derékszögnél levő csúcsnak a szemközti oldalra – az átfogóra – emelt magasság talppontjától az *a* befogó és a *c* átfogó metszéspontjában levő csúcsig terjedő szakasz. Ugyanígy, $c \cdot cos^2\alpha$ az előbb említett magasság talppontjától az átfogón a másik irányba, a *b* befogó és *c* átfogó metszéspontjában levő csúcsig terjedő szakasz. E két szakasz pontosan lefedi a *c* átfogót.

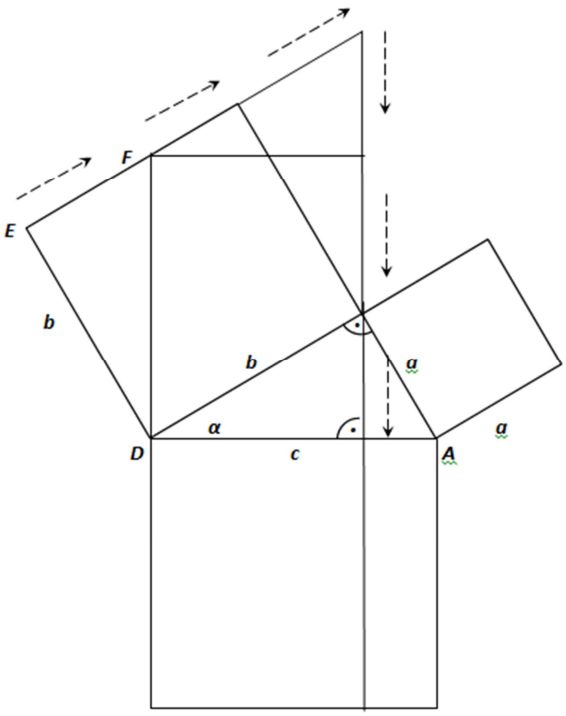
5. Még egy kétszeres nyírásos bizonyítás

A *9.* és *10. ábra* egy másik kétszeres nyírásos bizonyítást mutat be. A bizonyítás első felét e sorok szerzője valahol látta – annak idején nem írta fel, hogy hol – a második felét pedig maga találta ki hozzá, mert az eredetileg látott megoldásmenet végét hibásnak ítélte meg.

A *9. ábrán* az *a* befogóra illeszkedő négyzet felső jobb oldalát a saját hordozóegyenese mentén nyírással eltoljuk úgy, hogy a nyírással eltolt oldallal szomszédos két oldal – immár nem négyzeté, hanem romboidé – merőleges legyen a *c* átfogóra. A romboid e két oldalának hossza *c*, mert az *ABC* háromszög egybevágó a vizsgálódásunk tárgyát képező derékszögű háromszöggel. (Belső szögeik páronként merőleges szárúak, tehát páronként egyenlőek, és egyenlő az *a* befogójuk.)



9. ábra



10. ábra

A romboidot függőleges nyírással téglalappá alakítjuk (magassága *c*), majd letoljuk a *c* átfogóra illeszkedő négyzetbe úgy, hogy három oldala illeszkedjen a négyzet három oldalára.

A *10. ábrán* az előbbiek analógiájára most a *b* befogóra illeszkedő négyzet bal felső oldalát toljuk el nyírással a saját hordozóegyenese mentén úgy, hogy a nyírással eltolt oldallal szomszédos két oldal - immár szintén egy romboid oldalai - merőleges legyen a *c* átfogóra. E romboid két oldalának hossza szintén *c*, mert a *DEF* háromszög is egybevágó a „főszereplő” derékszögű háromszöggel. (Egyenlő három szögük és a *b* befogójuk.) Ezt a romboidot is függőleges nyírással téglalappá alakítjuk (magassága *c*), majd letoljuk a *c* átfogóra illeszkedő négyzetbe úgy, hogy komplementálja az előbbi téglalapot.

A *c* oldalú négyzetbe letolt két téglalap pontasan lefedi ezt a négyzetet, mert egyik oldaluk (az ábrán magasságuk) *c*, másik oldaluk (az ábrán szélességeik) összege pedig szintén *c*. Eltolásokkal és nyírásokkal a terület nem változik, tehát az *a*, ill. *b* oldalú négyzetből kapott két téglalap területe külön-külön a^2, ill. b^2, együtt pedig: $a^2 + b^2 = c^2$.

6. Mit mondhatunk az átrajzolós bizonyításokról

A hindu, áttologatós, átdarabolós és nyírásos bizonyításokat nevezzük közös megnevezéssel átrajzolós bizonyításoknak.

„Elegáns” bizonyításnak szokták minősíteni a hindu bizonyítást. Szimpatikusnak, könnyednek, egyszerűnek.

De lehetünk-e esetleg más véleményen? E sorok szerzője szerint: Igen, sőt!

Először is: Nagyon sok segédvonal kellett hozzá. Az *1.* és *2. ábrán* összesen tizenhat vonal szerepel (háromszögek, négyzetek oldalai) – s ebből csak három a főszereplőé, az eredeti derékszögű háromszögé. Tehát tizenhárom segédvonal. Rossz előérzeteink vannak – és nem a tizenhárommal kapcsolatos babona miatt. Ugyanis, ha a geometriának ez az alaptétele ilyen körülményesen, kerülő utakon bizonyítható, akkor milyen egyszerűséget, áttekinthetőséget, megérthetőséget várhatunk a többi tételtől, például éppen azoktól, amelyek a Pitagorasz-tételre épülnek?

Másodszor: Ebben a bizonyításban semmi nem látszik abból, hogy miért is igaz a Pitagorasz-tétel.

Csak annyi látszik belőle, hogy a Pitagorasz-tétel összhangban van (nincs ellentmondásban) a matematika többi tételével, illeszkedik a matematikai kánonba.

Lehet olyan szemlélettel, felfogással foglalkozni a matematikával, hogy annyit értsek belőle (csak annyit értsek belőle), hogy mi az, ami összhangban van a többi tétellel, és mi az, ami ellentmond nekik.

De lehet olyan szemlélettel is, hogy nem csak azt szeretném megérteni, hogy egy adott állítás igaz-e vagy hamis, hanem azt is, hogy pontosan miért is igaz, vagy pontosan miért is hamis.

Az előbbi szemlélettel jelen sorok szerzője nem tud azonosulni, az utóbbival azonban annál inkább.

Világos, hogy az utóbbi szemlélet sokkal mélyebb tudásra való törekvést, sokkal mélyebb megértésre irányuló igyekezetet tükröz, s ez mindenképp dicséretes. A tanulóknál ez utóbbi szemlélet kialakulását kell segíteni, előmozdítani.

Egy matematikával foglalkozni szerető egyén fontos ismérve a problémaérzékenység. A hindu bizonyításban nyoma sincs problémaérzékenységnek.

Az ilyen felületes, csak az összhangra rámutató bizonyítás olyan, mint a vízbe, futóhomokba írt szöveg, ami eltűnik, nem is emlékszünk rá másnap, harmadnap, vagy a jövő héten.

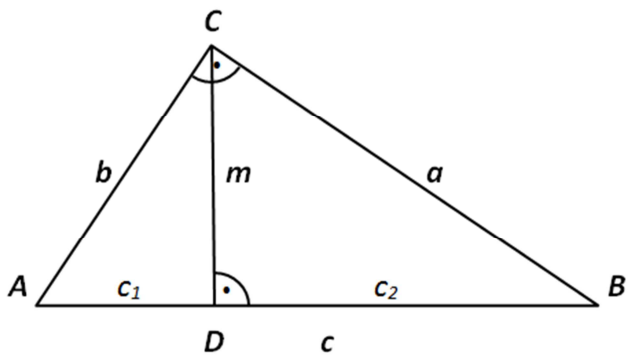
A hindu bizonyítást végigkövetve, és igyekezve magukévá tenni, a tanulókban könnyen kognitív disszonancia léphet fel. Korábbi matematika tanulásuk során ugyanis az új ismeretek olyanok voltak, hogy azokat közvetlenül meg lehetett érteni, nyilvánvalóak voltak a „mozgató erők”, látszott, hogy pontosan mi az ok és mi a következmény. (Pl. műveletek negatív számokkal, műveletek törtekkel, háromszög belső szögeinek összege, szerkesztési feladatok körzővel és vonalzóval, stb.) A hindu bizonyításnál nem láthatóak, nem érthetőek az ok-okozati összefüggések, a mozgató erők. Nem világos, hogy valójában mi is az, ami miatt igaz a derékszögű háromszögre a $c^2 = a^2 + b^2$ összefüggés, és miért csak a derékszögű háromszögre igaz.

Valójában nagyon meglepő, hogy ahány átrajzolós bizonyítás, annyiféleképpen tudunk elsétálni a Pitagorasz-tétel lényege mellett. Lényegen nem a $c^2 = a^2 + b^2$ összefüggést értem, hanem ennek az összefüggésnek a legmélyebben megérthető okát.

Tovább keressük az igazi, meggyőző bizonyítást.

7. A háromszöget két, önmagához hasonló háromszögre felosztó bizonyítás

Az Obádovics-könyv közismerten egyszerű, világos, átlátható stílusához hűen, a Pitagorasz-tétel bizonyításaként is egy direkt, egyenesen előre haladó és építkező bizonyítást mutat be (**[OBÁ]** 298. old.), a *11. ábra* szerinti jelölésekkel.



11. ábra

Csak a derékszögű háromszög rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy két, önmagához hasonló háromszögre osztható fel. Az *ABC* derékszögű háromszög *C* csúcsából merőlegest húzunk a szemközti *AB* oldalra, ennek talppontját jelöljük *D*-vel.

Ekkor egyrészt:

$$ADC\,\Delta \sim ABC\,\Delta$$

$$b : c_1 = c : b$$

$$b^2 = c_1 \cdot c$$

Másrészt:

$$BCD\,\Delta \sim ABC\,\Delta$$

$$a : c_2 = c : a$$

$$a^2 = c_2 \cdot c$$

Ezekből pedig:

$$a^2 + b^2 = c \cdot (c_1 + c_2)$$

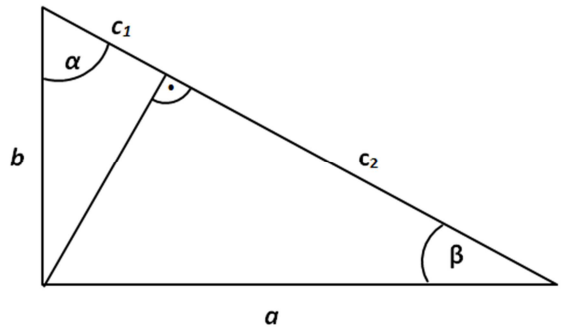
$$a^2 + b^2 = c^2$$

A bizonyítás menete nagyon egyszerű, összesen egy segédvonal kellett hozzá (az *ABC* háromszög *DC* magasságvonala), és három lépésből áll, amelyekből kettő az aránypárok felállítása (és ezekből az a^2 és b^2 befogóhossz négyzetének kifejezése az átfogó és a két komplementer átfogó-részszakasz szorzataként), ill. a négyzetösszeg előállítása egyszerű betűaritmetikaként.

Az egyszerűség ellenére hiányérzetünk van.

8. Az oldalakat átvetítgető bizonyítás

Az alábbi bizonyítást a szerző sehol sem látta, saját ötletként fejlesztette ki. Ettől még természetesen lehet, sőt nagyon valószínű, hogy máshol, mások is levezették ugyanezt vagy egy nagyon hasonló bizonyítást.



12. ábra

Húzzunk a derékszögnél levő csúcsból merőlegest az átfogóra (*12. ábra*). Jelöljük c_1-gyel és c_2-vel a két komplementer átfogó-résszakaszt. Jelöljük α-val az *a* oldallal, és *β*-val a *b* oldallal szemközti szöget.

c_1-et úgy kapjuk meg, hogy a *c* átfogót kétszer egymás után α szög alatt merőlegesen vetítjük - azaz megszorozzuk cosα·cosα-val :

$$b = c \cdot \cos\alpha$$

$$c_1 = b \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos^2\alpha$$

Hasonló módon, c_2-t a *c* átfogó kétszer egymás után *β* szög alatti merőleges vetítésével - azaz $\cos\beta \cdot \cos\beta$ -val történő szorzással - kapjuk:

$$a = c \cdot \cos\beta$$

$$c_2 = a \cdot \cos\beta = c \cdot \cos^2\beta$$

Az átfogó a c_1 és c_2 összege:

$$c = c_1 + c_2 \qquad (8.1)$$

$$c = c \cdot \cos^2\alpha + c \cdot \cos^2\beta \qquad (8.2)$$

Ha a *(8.2)* egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk *c*-vel:

$$c = c \cdot \cos^2\beta + c \cdot \cos^2\alpha \qquad / \cdot c$$

$$c^2 = c^2 \cdot \cos^2\beta + c^2 \cdot \cos^2\alpha$$

$$c^2 = (c \cdot cos\beta)^2 + (c \cdot cos\alpha)^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (8.3)$$

És megkaptuk a Pitagorasz-tétel állítását.

Ennek a bizonyításnak a lényege egy dimenzióban történik, azaz szakaszhosszak közötti összefüggéseken alapul (lásd *(8.2)* egyenlet). A kétdimenziós szemléletre, két dimenzióban fennálló összefüggésekre csak annyiban van szükségünk, hogy tudnunk kell, mi az α és β szög. A *(8.2)* egyenlet mélyebb értelmű, sokkal jobban megmutatja az összefüggéseket, mint a *(8.3)*. Utóbbi az előbbihez képest csak egy finomkodó, púderes forma, amely ránézésre egyszerűbb, de a gondolatmenet- és a paraméterek közötti összefüggések lényegét pont elrejti.

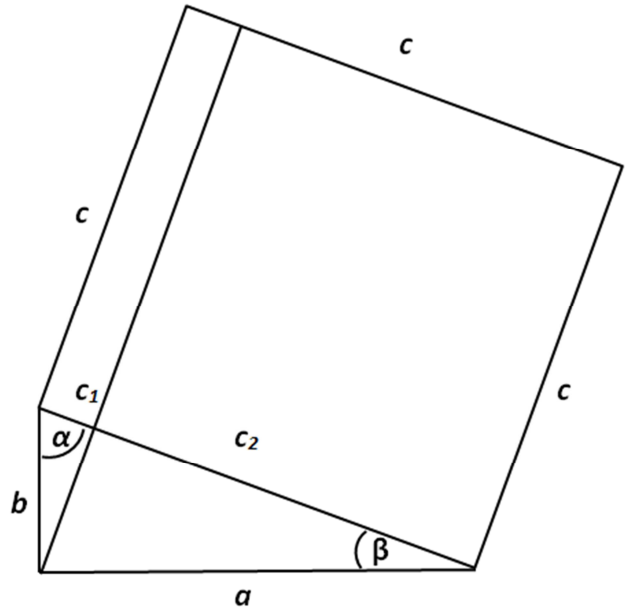
A *(8.2)* egyenlet azt mondja, hogy az átfogó α és β szög alatti kétszer egymás után történő vetítésével és a kapott (c_1 és c_2) szakaszok összeadásával újra megkapjuk az átfogót - és ez egy nagyon világos, az ábrából közvetlenül belátható állítás.

A *(8.3)* egyenlet tömören csak annyit állít, hogy az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével. Ez az állítás „merészebb”, nagyobb információtartalmú (az ábrára ránézve eszünkbe sem jutna valami hasonló), közvetlenül nem belátható, kicsit még misztikus is – hiszen a hétköznapi, megszokott szemléleti eszköztárunkkal nem tudjuk könnyen, egy lépésben feltörni a titkát. Meglepő, hogy ekkora ugrást jelent az, amikor a világos beszédet (azaz a *(8.2)* egyenletet) *c*-vel beszorozzuk és a bonyolult $c \cdot cos\beta$, ill. $c \cdot cos\alpha$ helyett *a*-t, ill. *b*-t írunk.

Érdemes megvizsgálnunk, hogy mi történik akkor, ha a *(8.1)* és az utána következő egyenleteken végzett műveletek folyamán felcseréljük a $c_1 = c \cdot cos^2\alpha$ és $c_2 = c \cdot cos^2\beta$ behelyettesítés, ill. az egyenlet mindkét oldalának *c*-vel való beszorzása sorrendjét. Tehát nem a *(8.2)*, hanem már a *(8.1)* egyenletet szorozzuk be *c*-vel:

$$c = c_1 + c_2 \ / \cdot c$$
$$c^2 = c_1 \cdot c + c_2 \cdot c \qquad (8.4)$$

Az *(8.4)* egyenlet jelentését nagyon szemléletesen a *13. ábra* mutatja be. A *c* átfogóra emelt négyzet területe egyenlő a c_1, ill. c_2 átfogó-részszakaszokra emelt *c* oldalhosszúságú téglalapok összegével – ez evidens.



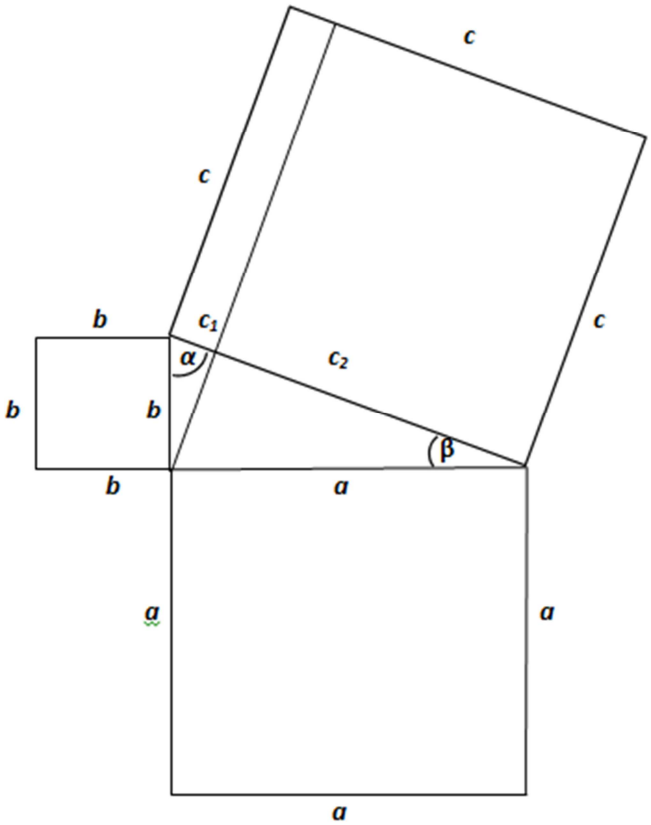
13. ábra

A $c_1 = c \cdot cos^2\alpha$ és $c_2 = c \cdot cos^2\beta$ behelyettesítéseket elvégezve:

$$c^2 = c_1 \cdot c + c_2 \cdot c$$
$$c^2 = c^2 \cdot cos^2\alpha + c^2 \cdot cos^2\beta$$
$$c^2 = (c \cdot cos\alpha)^2 + (c \cdot cos\beta)^2$$
$$c^2 = b^2 + a^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Vagyis azt kaptuk - lásd *14. ábra* -, hogy a $c_1 \cdot c$ téglalap területe egyenlő az egyik befogóra emelt négyzet b^2 területével, a $c_2 \cdot c$ téglalap területe pedig a másik befogóra emelt négyzet a^2 területével, s ezért egyenlő az átfogóra emelt nágyzet c^2 területe az átfogóra emelt négyzetek területének összegével – vagyis ezért igaz a Pitagorasz-tétel állítása.

Ez a bizonyítás azt sugallja, hogy a Pitagorasz-tétel mélyebb értelme, mozgató rugói két dimenzióban vannak – jelesül az, hogy a c_1 és c_2 átfogó-részszakaszokra emelt c oldalhosszú téglalapok területe külön-külön egyenlő a befogókra emelt két négyzet területével, s mivel a két említett téglalap együtt kiadja az átfogóra emelt négyzetet, így igaz a $c^2 = a^2 + b^2$ állítás.



14. ábra

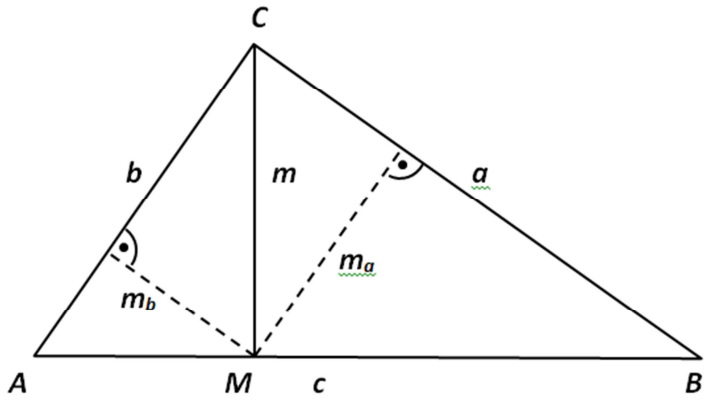
Érdemes észrevennünk, hogy noha mindkét utóbbi bizonyítás ugyanabból a

$$c = c_1 + c_2$$

azonosságból indul ki, az egyik egy, a másik két dimenzióba teszi azt a legmélyebben azonosítható okot, amely a Pitagorasz-tétel alapjául szolgál.

9. Még egy bizonyítás, amelyben a háromszöget két, önmagához hasonló háromszögre bontjuk fel

A szerző ezt a bizonyítást sem látta sehol, ezt is saját ötletként fejlesztette ki. Természetesen nagyon valószínű, hogy máshol, mások is levezették ugyanezt vagy egy nagyon hasonló bizonyítást.



15. ábra

A háromszögek közül csak a derékszögű rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy felosztható két, az eredetihez hasonló háromszögre. A *15. ábrán* ezt a tulajdonságot használjuk fel:

$$T_{ABC\,\Delta} = T_{CBM\,\Delta} + T_{ACM\,\Delta}$$

és

$$ABC\,\Delta \sim CBM\,\Delta \sim ACM\,\Delta \ ,$$

mert a szögeik egyenlőek.

Húzzuk meg a *C* csúcsból a *c* átfogóra merőleges *m* magasságvonalat, ennek M talppontjából pedig az *a*, ill. *b* befogókra merőleges m_a, ill. m_b magasságvonalakat a *CBM*, ill. *ACM* háromszögben.

$$\frac{cm}{2} = \frac{am_a}{2} + \frac{bm_b}{2} \qquad (9.1)$$

Hasonló háromszögeknél nem csak az oldalak, hanem a magasságvonalak is azonos mértékben aránylanak egymáshoz:

$$\begin{aligned} m &= k \cdot c \\ m_a &= k \cdot a \qquad (9.2) \\ m_b &= k \cdot b \ . \end{aligned}$$

Így a háromszögek területeire *(9.1)* és *(9.2)* alapján érvényes:

$$\frac{ckc}{2} = \frac{aka}{2} + \frac{bkb}{2}$$

$$\frac{k}{2}c^2 = \frac{k}{2}a^2 + \frac{k}{2}b^2 \quad .$$

A *k* arányossági tényező értékétől függetlenül

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad .$$

Ez a bizonyítás is két dimenzióba teszi a Pitagorasz-tétel alapjául szolgáló, legmélyebben azonosítható okot – nevezetesen azt, hogy a derékszögű háromszög felosztható két önmagához hasonló (derékszögű) háromszögre.

Egyszerűségével, közvetlen jellegével és átláthatóságával ez a bizonyítás mutatja meg legjobban azokat az okokat, összefüggéseket, amelyek a Pitagorasz-tétel alapjául szolgálnak.

A matematikai állítások bizonyításai sokszor olyan üresek, csak annyi tartalmuk van, hogy bemutatják, az állítás összhangban van (nincs ellentmondásban) matematikai környezetének más állításaival, amelyek szintén rendelkeznek bizonyítással. Nem mutatják meg a meghajtó erőket, örök homály fedi azt, hogy miért is igaz az állítás. Csak annyival leszünk bölcsebbek belőlük, hogy megtudjuk, igaz-e vagy nem igaz az állítás, de annyival már nem, hogy megtudjuk, miért is igaz vagy miért is nem igaz.

Ez, a jelen 9. fejezetben bemutatott a bizonyítás a szó valódi értelmében okfejtés, ami megfejti, megmutatja azt az okot, azt az alapot, a „sine qua non”-t, amely nélkül nem működne, nem lenne érvényes a Pitagorasz-tétel.

Végigkövetése, megértése, végiggondolása megnyugtató, magabiztos tudást ad. Ennek a bizonyításnak a birtokában a Pitagorasz-tétel egy továbbépíthető, stabil konstrukcióvá válik – ellentétben az eddig látott áttologatós, nyírásos bizonyításokkal vagy a hindu bizonyítással, amelyek nem adnak okot megmagyarázó, hanem csak tényállást rögzítő választ. (A jelen Szakdolgozatban be nem mutatott, csak megemlített átdarabolós bizonyítások is, lévén ők is az átrajzolós bizonyítások egy fajtája, szintén nem okot megmagyarázó, hanem csak tényállást rögzítő bizonyítások.)

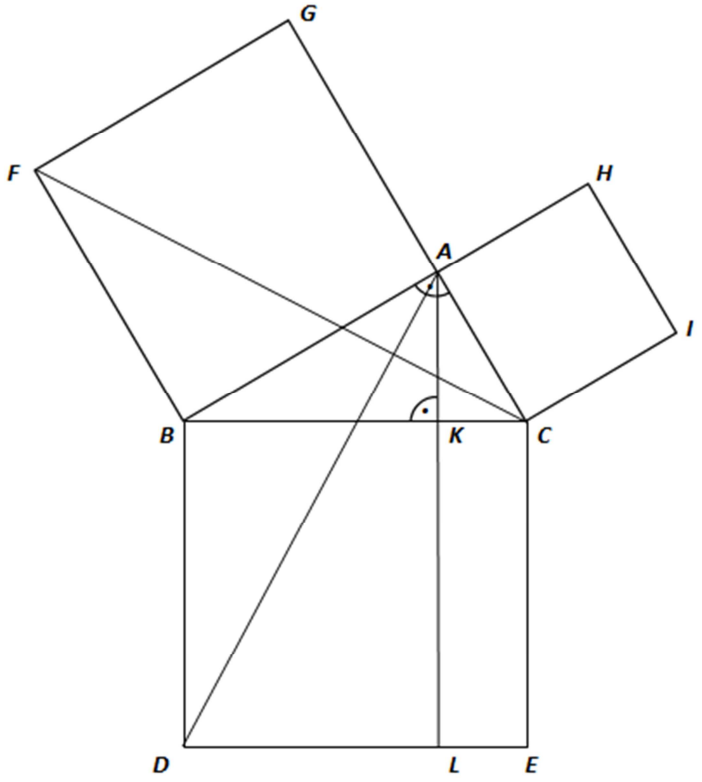
10. A szép és a csúnya matematika – Az elegáns és a lényeget megmutató bizonyítások

Sokszor és sokan hivatkoznak pontosan vagy pontatlanul G. H. Hardy angol matematikusra, azt az állítást idézve tőle, hogy csak a szép matematikának van létjogosultsága. Teszik ezt a hindu bizonyításhoz hasonló „elegáns” bizonyítások kapcsán, amikor elegancián leginkább valami olyat értenek, hogy sikerül elkerülni a részletekkel, az állítás matematikai környezetével való foglalkozást, nincs fáradságos, „izzasztó”, nagy odafigyelést igénylő, a részletekhez közel hajoló munka, hanem a bizonyító csak könnyedén megjelenik, és a bizonyítás tárgyával sokszor nem is rokon matematikai területről indulva, váratlan fordulattal, kellemes meglepetés jelleggel, „kalapból nyuszi”-szerűen, mosolyogva előhúz egy bizonyítást. Az előadást szemlélők (bizonyítást követők) pedig a váratlan fordulattól lelkesen tapsolnak: „Milyen jópofa, kijött!” Sokkal visszafogottabbak azok a kevesek, akik a lényeg észrevehetetlensége miatt csalódottan és kissé megszeppenve (jaj, mi történik itt láthatatlanul a háttérben, a felszín alatt, a szemünk és az értelmünk elől elrejtve, és mi jöhet itt még, szintén kivonva magát mindenféle kontroll, megnyugtató logikus belátás és a lényeg nyomon követhetőségének lehetősége alól) csendben maradnak és azon gondolkodnak, hogy a saját korlátozott képességeik miatt nem tudják-e észrevenni a bizonyítás lényegét, vagy valami egyéb ok miatt. A bizonyítás lényege ugyanis nem látszik, nem tudunk rámutatni arra az egy vagy több okra, amelyeknek köszönhetően fennáll a Pitagorasz-tétel állítása, és amely vagy amelyek híján a Pitagorasz-tétel állítása sem lenne igaz. Ha ekkor jelentkeznének ezek a visszafogottabbak, és megkockáztatnák a tanárnak azt mondani: „Nem értem!”, akkor sem a tanár, sem ők maguk nem tudnák megmondani, a viselkedésüket furcsálló osztálytársak pedig végképp nem, mi is az, amit nem értenek a nem-értők. Az a helyzet, az az állapot állt be az imént visszafogottabbaknak nevezetteknél, hogy azt érzik, hogy amikor eddig igazán megértettek valamit, akkor nem úgy érezték magukat, mint most. Kognitív disszonancia lép fel - amit eddig megértésnek neveztek, az egy egészen más, mélyebb és megnyugtatóbb élmény volt ennél a „megértésnél”, amit most, a hindu bizonyításhoz kapcsolódóan tapasztaltak meg. Eddigi matematikai ismereteik elsajátítása során ugyanis folyamatosan szem előtt voltak, világosak voltak a mozgató erők. Ezzel szemben a hindu bizonyításon úgy megyünk végig, hogy noha semmi sem látszik a mélyebb okokból, mégis bizonyítást nyer a tétel. Az ilyen, lényeget eltakaró eleganciát pont nem lehet „szép matematikának” nevezni. Noha igazán lelkesedni csak a félig megértett dolgokért lehet, a matematika akkor

szép, akkor van tőle sikerélményünk, ha látjuk a mozgató rugókat, értjük, hogy „mitől is működik” egy matematikai jelenség. A hindu bizonyításhoz kapcsolódó „megértésélmény” nagyon közel van a becsapottság érzetéhez. Nem értjük, hogy mitől is működik. Pont a lényeg megérintése, bemutatása hiányzik belőle. Népi szóláshasonlattal élve, átvezeti a szomjas embert a vízen.

11. Euklidész-féle bizonyítás az Elemekből

Euklidész az Elemekben a következő bizonyítást adja a Pitagorasz-tételre **[WIK-A]**:



20. ábra

A *20. ábrán* az *ABC* derékszögű háromszög oldalaira megszerkesztjük az *FGAB*, *AHIC* és *BCED* négyzeteket. A háromszög derékszögénél levő *A* csúcsból merőlegest húzunk az átfogóra. Ez a merőleges az átfogóra illeszkedő *BCDE* négyzet *BC* és *DE* oldalait a *K* és *L* pontokban metszi, a négyzetet pedig a *BKDL* és *KCLE* téglalapokra osztja. Rajzoljuk meg az *FC* és *AD* szakaszt – ezzel megkapjuk az *FBC* és *ABD* háromszögeket.

A *CAB* és *BAG* szögek derékszögek, ezért a *G*, *A* és *C* pontok kollineárisak.

Ugyanez igaz a *B*, *A* és *H* pontokra is.

A *DBC* és *ABF* szögek derékszögek, ezért a *DBA* és *CBF* szögek egyenlőek, mivel mindkettő egy derékszögnek és az *ABC* szögnek az összege.

Mivel az *AB* szakasz egyenlő a *BF*-fel, és a *DB* egyenlő a *BC*-vel, ezért a *DBA* háromszög egybevágó a *CBF* háromszöggel. (Két háromszög egybevágó, ha két oldaluk és az általuk bezárt szög egyenlő.)

Mivel az *A, K és L* pontok kollineárisak, és hordozóegyenesük párhuzamos *BD*-vel, a *BKLD* téglalap területe kétszerese a *DBA* háromszög területének – mivel közös a *BD* alapjuk és egyenlő a *BK* magasságuk.

Mivel a *C, A* és *G* pontok kollineárisak, az *FGAB* négyzet területe kétszerese az *FBC* háromszög területének. (Itt is közös az *FB* alap és egyenlő a *BA* magasság.)

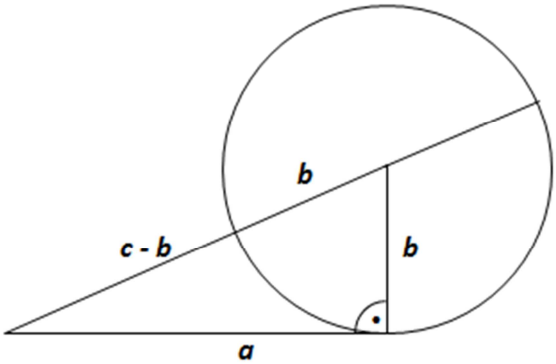
Mivel, mint beláttuk, az *FBC* háromszög egybevágó a *DBA* háromszöggel, a velük egyenlő területű négyzet, ill. téglalap területe is egyenlő, azaz az *FGBA* négyzet területe egyenlő a *BKLD* téglalap területével: $AB^2 = T_{BKLD}$.

Ugyanígy belátható, hogy az *AHIC* négyzet területe egyenlő a *KCLE* téglalap területével, azaz $AC^2 = T_{KCLE}$.

Mivel a *BKDL* és *KCLE* téglalapok együtt pont kiadják a *BCDE* négyzetet - amelynek területe BC^2 -, ezért $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

12. Bizonyítás az érintőtétellel

Az érintőtétellel egy nagyon rövid, tömör bizonyítást lehet adni a Pitagorasz-tételre (**[CUT]** 49. számú bizonyítás):



17. ábra

Jelöljük *a*, *b* és *c*-vel egy tetszőleges derékszögű háromszög két befogóját és átfogóját. Rajzoljunk a *b* befogó és *c* átfogó metszéspontjában elhelyezkedő csúcsból mint középpontból egy *b* sugarú kört (*17. ábra*). Az érintőtétel szerint:

$$(c-b)\cdot(c+b) = a^2$$

$$c^2 - b^2 = a^2 \quad ,$$

vagy átrendezve:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad .$$

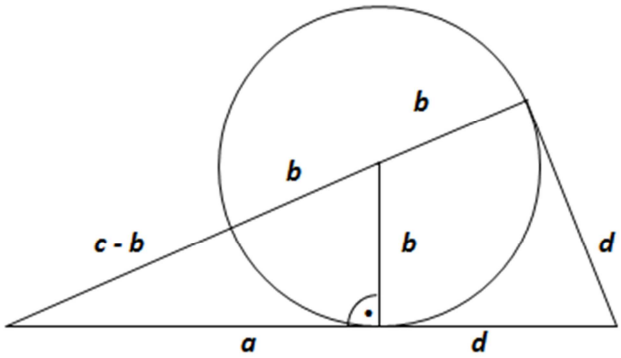
Mivel tetszőleges derékszögű háromszöget vettünk a bizonyítás elején, ezzel beláttuk, hogy tetszőleges derékszögű háromszögre igaz a $c^2 = a^2 + b^2$ összefüggés.
Lényegében két soros, nagyon rövid, nagyon tömör bizonyítás, mégsem érezzük azt, hogy feltárja a Pitagorasz-tétel legmélyebben megismerhető lényegét. (Felmerül a kérdés, hogy csak egyetlen, egyértelműen azonosítható ilyen lényeg van-e, vagy több különböző megközelítést is értékelhetünk úgy, hogy „sine qua non”-t („ami nélkül nem működik”) mutat meg?)
A bizonyítás rövidségébe azonban bele van rejtve az érintőtétel, amibe megintcsak bele van rejtve a háromszögek hasonlóságának tétele és az azonos köríven nyugvó kerületi szögek egyenlőségének tétele. Okkal érezhetjük úgy, hogy akármilyen rövid és velős is, „nem ez az igazi” – bármit is jelentsen ez – bizonyítása a Pitagorasz tételnek.

13. Még egy bizonyítás az érintőtétel ábrájának felhasználásával

A *17. ábrát* egy *b,b,d,d* oldalú deltoiddal kiegészítve kapjuk a *18. ábrát* (**[CUT]** 49. számú bizonyítás folytatása), melyhez a következő bizonyításmenet kapcsolódik:

A *c*, ill. *a+d* átfogójú derékszögű háromszögek hasonlóságából:

$$a : b = (b+c) : d$$



18. ábra

$$d = b\,(b + c)/a \quad .$$

A deltoid területe $2bd/2 = bd$. Ha ehhez hozzáadjuk a kis derékszögű háromszög területét (ami $ab/2$), megkapjuk a nagy derékszögű háromszög $(b+c)d/2$ területét:

$$bd + ab/2 = (b+c)d/2 \quad .$$

Átrendezve a következőket kapjuk:

$$ab/2 = (c - b)\,d/2$$

$$ab = (c - b)\,d \quad .$$

Behelyettesítve d képletét:

$$ab = (c - b)\,b\,(b + c)\,/a \qquad / : b$$

$$a = (c - b)(b + c)\,/a \qquad / \cdot a$$

$$a^2 = (c - b)\,(b + c)$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

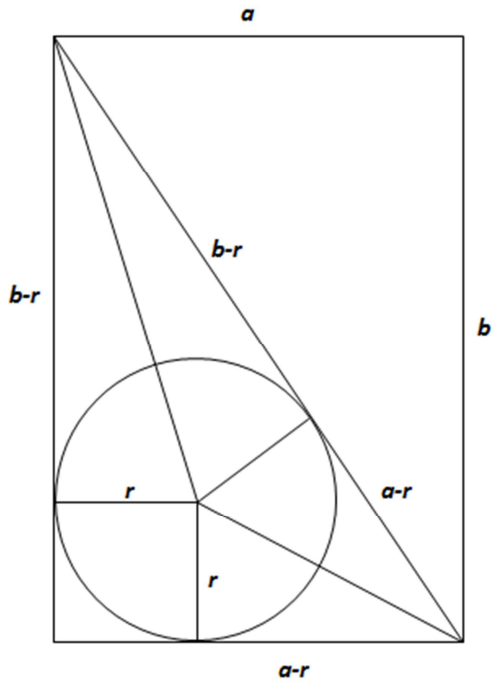
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad .$$

Noha a bizonyításhoz használt ábrát az érintőtételes bizonyítás ábrájának kiegészítésével kaptuk, a bizonyítás nem használja sem az érintőtételt, sem más tételeket a pont körre vonatkozó hatványának témaköréből, hanem csak háromszögek hasonlóságait. A kört csak a derékszögek létrehozására használtuk fel.
Sok betűaritmetika, sok unalmas lépés, kevés (nulla) lényeglátás.

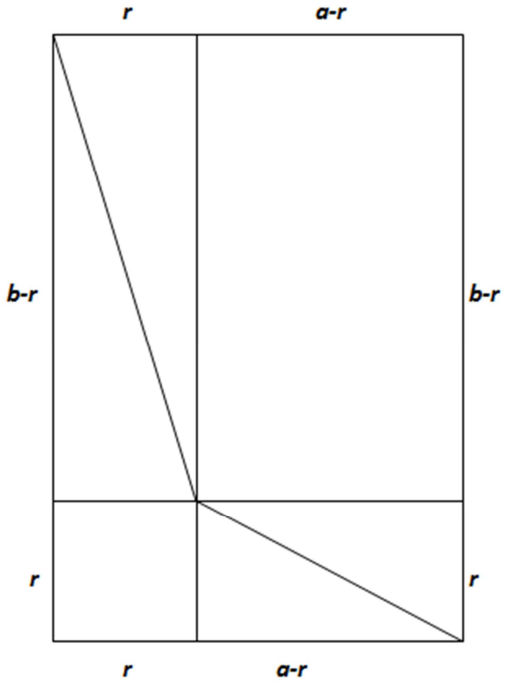
Most pedig következik két bizonyítás, amelyek azt mutatják meg, mire használható a derékszögű háromszögbe írt kör – például egy Pitagorasz-tétel bizonyításnál.

14. Bizonyítás derékszögű háromszögbe írt körrel

Az alábbi bizonyítás a **[CUT]** 33. számú bizonyítása.



19. ábra



20. ábra

A *19. ábrán* kihasználjuk azt, hogy a háromszögbe írt kör sugara az érintési pontokban merőleges a háromszög oldalaira. Az *a* és *b* oldalú nagy téglalap berajzolt átlója alatti háromszöget feldaraboljuk és a kapott kisebb részek területeinek összege egyenlő az említett (feldarabolatlan) háromszög területével:

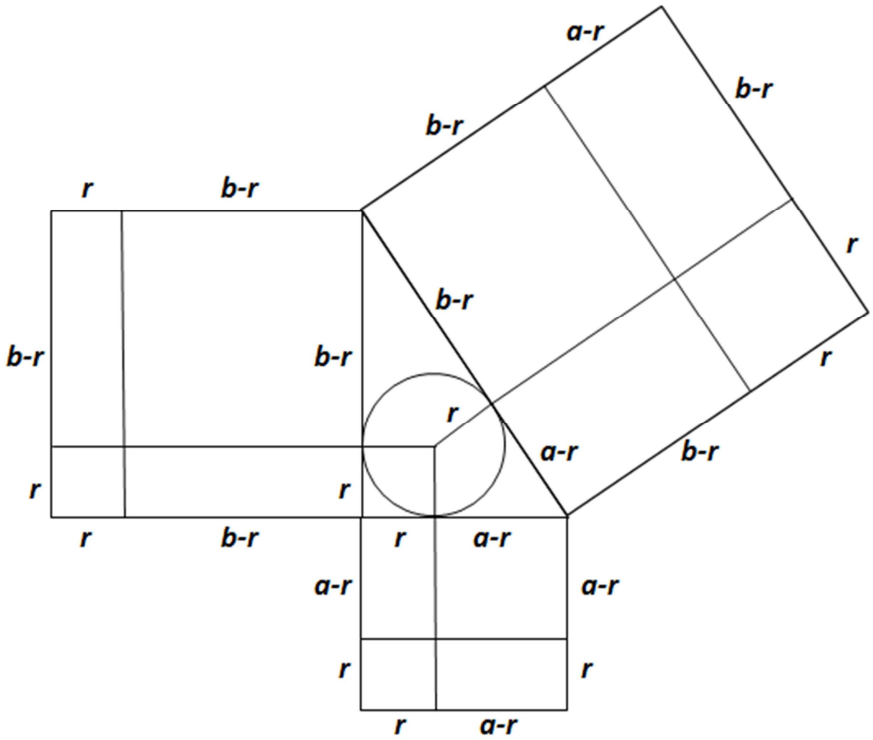
$$r^2 + r(a - r) + r(b - r) = ab/2 \quad ,$$

ahol az egyenlőség bal oldalának második és harmadik összeadandója a két derékszögű deltoid területe. Az összevonások után:

$$r(a + b - r) = ab/2 . \qquad (14.1)$$

A *20. ábrát* a *19. ábrából* úgy kapjuk, hogy a kört elhagyjuk, két deltoidot pedig a szimmetriatengelye mentén felvágjuk és a nagy téglalap belseje felőli két derékszögű háromszöget az átfogóik szimmetriatengelyére merőlegesen tükrözzük. Ezzel a két deltoidból két téglalap lesz *r* és *a-r*, ill. *r* és *b-r* oldalakkal. E két téglalap és az *r* oldalú négyzet uniójának komplementere most egy *a-r* és *b-r* oldalú téglalap, melynek területe változatlanul az *a* és *b* oldalú nagy téglalap területének fele:

$$(a - r)(b - r) = ab/2 \quad . \qquad (14.2)$$



21. ábra

A *21. ábrán* egy tetszőleges derékszögű háromszög átfogójára és két befogójára illeszkedő négyzeteket felosztottuk úgy, hogy a háromszögbe írt kör generálta két derékszögű deltoid és a kör húrjának hosszával egyenlő oldalhosszú négyzet határozza meg a felosztást.
Az átfogóra illeszkedő négyzet területe:

$$(a + b - 2r)^2 = (b - r)^2 + 2(a - r)(b - r) + (a - r)^2 \qquad (14.3)$$

Az *a* befogóra illeszkedőé:

$$a^2 = (a - r)^2 + 2r(a - r) + r^2 \quad . \qquad (14.4)$$

A *b* befogóra illeszkedőé:

$$b^2 = (b - r)^2 + 2r(b - r) + r^2 \quad . \qquad (14.5)$$

E három egyenlet jobb oldalán szereplő $(b - r)^2$ és $(a - r)^2$ tagokkal most első körben nem foglalkozunk. A *(14.3)* egyenlet jobb oldalának középső tagja a *(14.2)* miatt:

$$2\cdot(a - r)(b - r) = 2\cdot ab/2 = ab \quad . \qquad (14.6)$$

A *(14.4)* és *(14.5)* jobb oldalának második és harmadik tagjait összeadva, majd alkalmazva *(14.1)*-et:

$$2r(a - r) + r^2 + 2r(b - r) + r^2 = 2ra - 2r^2 + r^2 + 2rb - 2r^2 + r^2$$

$$= 2ra + 2rb - 2r^2$$

$$= 2r(a + b - r)$$

$$= 2\ ab/2$$

$$= ab\ . \qquad (14.7)$$

(14.6) és *(14.7)* miatt *(14.3)* jobb oldala egyenlő *(14.4)* és *(14.7)* jobb oldalának összegével. Ezért *(14.3)* bal oldala is egyenlő *(14.4)* és *(14.7)* bal oldalának összegével:

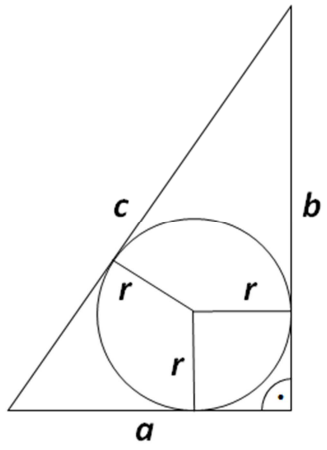
$$(a + b - 2r)^2 = a^2 + b^2 \quad ,$$

vagyis a *23.3 ábrán* az átfogóra illeszkedő négyzet területe egyenlő a két befogóra illeszkedő négyzetek területének összegével. Mivel tetszőleges derékszögű háromszögből indultunk ki, minden derékszögű háromszögre bizonyítást nyert az oldalakra illeszkedő négyzetek területe közötti összefüggés.

Ez a bizonyítás is sok betűaritmetikai lépésből áll, mélyebb értelemmel viszont nem lettünk gazdagabbak. E bizonyítás is egy jó példája annak, hogy a legmélyebben megismerhető ok, mozgató erő, a „sine qua non" („ami nélkül nem megy") a háromszögön belül, a háromszög belső tulajdonságaiban keresendő, nem pedig a háromszögön kívül, a nagyszámú körérajzolt segédvonalban. Itt ugyanis jól láthattuk, hogy a háromszögön kívüli nagy mennyiségű szorgalmas munka, sok rajzolgatás és számolgatás egy lépéssel sem vitt bennünket közelebb a Pitagorasz-tétel legmélyebben megismerhető okának felfedéséhez.

15. Második bizonyítás derékszögű háromszögbe írt körrel

Ez a bizonyítás a **[CUT]** 34. számú bizonyítása.



22. ábra

A *22. ábrából* látszik, hogy a háromszög területe kifejezhető a beírt kör sugara és az oldalak segítségével (ez nem csak derékszögű háromszögekre igaz):

$$T_{\Delta} = r\,(a + b + c)/2$$

$$ab/2 = r\,(a + b + c)/2$$

$$ab = r\,(a + b + c)\ . \qquad (15.1)$$

A deltoidoknak köszönhetően az is látszik az ábráról, hogy

$$c = (a - r) + (b - r)\ . \qquad (15.2)$$

(Ez viszont csak derékszögű háromszögekre igaz – de ezek közül tetszőlegesre.)
Átrendezve:

$$c + 2r = a + b\ .$$

„Vegyük észre”, hogy ezt az egyenletet $(a + b + c)$-vel beszorozva a következőket kapjuk:

$$c + 2r = a + b \quad / \cdot (a + b + c)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc = ac + bc + c^2 + 2r(a + b + c).$$

$ac + bc$ mindkét oldalon van, így kiejtik egymást, *(15.1)* miatt pedig $2ab$ és a jobb oldal utolsó tagja is. Marad:

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad (15.3)$$

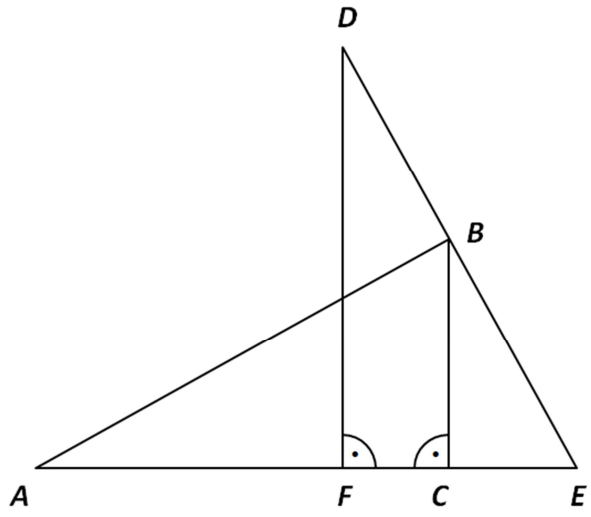
Mivel *(15.2)* tetszőleges derékszögű háromszögre érvényes, ezért *(15.3)* is. Ezzel a Pitagorasz-tétel ilyen úton is igazolást nyert.

Ez a bizonyítás sem ad olyan benyomást, hogy na igen, itt látszik, hogy mi is a Pitagorasz-tétel igazi, mély oka. Sok benne az algebra, márpedig ha egy geometriai tétel bizonyítása algebrával van megtömve, az nem egy közvetlen, egyszerű és erős bizonyítás. Még többet ront a helyzeten és a bizonyítás egyszerűségén és közvetlenségén a „vegyük észre" szófordulat, ami rendszerint azt jelzi, hogy az adott lépés alkalmazását vagy nem tudjuk logikusan megindokolni, vagy túl hosszadalmas lenne elmagyarázni (tehát nem egyszerű és nem közvetlen a bizonyítás), hogy miért is pont ezt a lépést alkalmaztuk.

16. Bizonyítás két egybevágó derékszögű háromszöggel

Az alábbi bizonyítás a **[CUT]** 32. számú bizonyítása.

Legyen *ABC* és *DEF* két egybevágó derékszögű háromszög úgy, hogy a *B* csúcs a *DE* befogón van, az *A, F, C* és *E* pontok pedig kollineárisak (lásd *23. ábra*). Vezessük be a $BC = EF = a$, $AC = DF = b$ és $AB = DE = c$ jelöléseket.



23. ábra

AB merőleges *DE*-re, mivel a *DEF* háromszög minden oldala az *ABC* háromszög megfelelő oldalának 90°-os elforgatottja.

Számítsuk ki az *ADE* háromszög területét kétféleképpen:

$$T_{\Delta ADE} = AB \cdot DE/2 = c^2/2 \qquad (16.1)$$

$$T_{\Delta ADE} = DF \cdot AE/2 = b \cdot AE/2 \qquad (16.2)$$

Továbbá

$$AE = AC + CE = b + CE \qquad (16.3)$$

CE-t ki tudjuk fejezni *a*-val és *b*-vel, felhasználva a *BCE* és *DFE* háromszögek hasonlóságát:

$$CE : BC = FE : DF$$

$$CE = BC \cdot FE/DF$$

$$CE = a \cdot a/b \quad . \qquad (16.4)$$

Felhasználva az *ADE* háromszög területének *(16.1)* és *(16.2)* szerinti kétféle alakját, valamint behelyettesítve *(16.3)* és *(16.4)* szerint:

$$T_{\Delta ADE} = T_{\Delta ADE}$$

$$c^2/2 = b \cdot AE/2$$

$$c^2/2 = b \cdot (b + CE)/2$$

$$c^2/2 = b \cdot (b + a \cdot a/b)/2 \qquad / \cdot 2$$

$$c^2 = b \cdot (b + a \cdot a/b)$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

A bizonyítás közepesen bonyolult, két ötleten alapul (a két egybevágó derékszögű háromszög egymáshoz képesti elrendezése, illetve az *ADE* háromszög területének kétféle módon történő kiszámítása), valamint algebrán, behelyettesítéseken. Semmiképpen nem

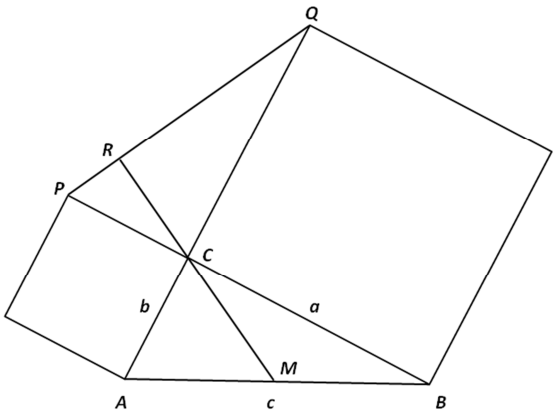
tekinthetjük közvetlen, a Pitagorasz-tétel lényegét, mozgató erőit megmutató bizonyításnak. Különösen annak fényében nem, hogy egy derékszögű háromszög adott tulajdonságának igazolásához szüksége van még egy ugyanilyen háromszögre. E sorok írójának meggyőződése szerint minden alapvető tulajdonság belülről jön, nem külső segédvonalakból, segédalakzatokból.

17. Második bizonyítás két egybevágó derékszögű háromszöggel

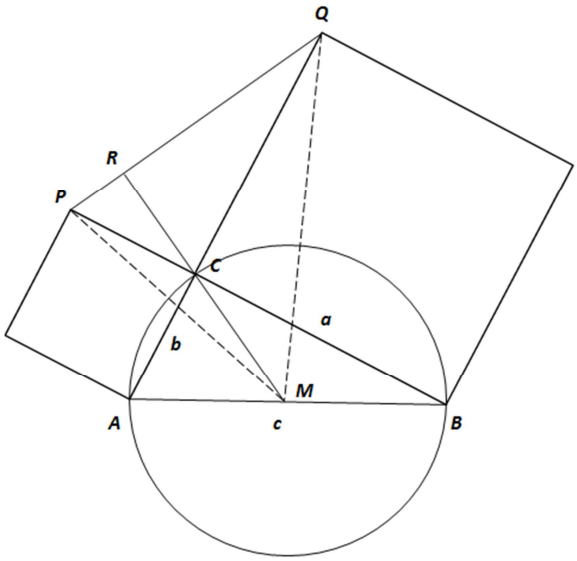
Ez a bizonyítás a **[CUT]** 31. számú bizonyítása.

Egy tetszőleges *ABC* derékszögű háromszögben jelöljük az *AC* és *BC* befogókat, ill. a *AB* átfogót rendre *b*-vel, *a*-val és *c*-vel. Szerkesszünk négyzeteket az *AC* és *BC* befogókra, amint a *24. ábrán* látható.

Jelöljük *M*-mel az *AB* átfogó felezőpontját. *MC* hordozóegyenese és a *PQ* átfogó metszéspontját jelöljük *R*-rel. Be fogjuk bizonyítani, hogy $MR \perp PQ$.



24. ábra



25. ábra

Az *ABC* és *PQC* háromszögek egybevágóak, mert egyenlő két oldaluk és az általuk bezárt szög. Ezért a *P* csúcsnál levő szög egyenlő az *A* csúcsnál levő szöggel, $QPC\angle = CAB\angle$.

P, *R* és *Q* kollineárisak, ezért a $QPC\angle$-*et* $RPC\angle$-nek is írhatjuk-nevezhetjük, s így az utóbbi szög-egyenlőséget $RPC\angle = CAB\angle$ alakban kapjuk.

Az *M* középpontú, *c/2* sugarú körön helyezkedik el nemcsak az A és B pont, hanem a C pont is - mert $ACB\angle = 90^o$ és így a Thálesz-tétel szerint *C* rajta van a körön (*25. ábra*).
Ezért a *CMB* háromszög egyenlő szárú, s ezzel $MCB\angle = MBC\angle$.
Emellett azonban $PCR\angle = MCB\angle$ is fennáll, így $PCR\angle = MBC\angle$, azaz $PCR\angle = ABC\angle$.

Tekintsük a *PCR* és az *ABC* háromszöget. Két szögük egyenlő, ezért a harmadik is:

$$RPC\angle = CAB\angle,\ RCP\angle = CBA\angle \Rightarrow PRC\angle = ACB\angle$$

azaz $PRC\angle = 90^o$, $MR \perp PQ$.
Tekintsük az *MCQ* és *MCP* háromszögeket. Kétféleképpen fogjuk kiszámítani a területüket.
Az *M* pont *PC*-hez viszonyított magassága $AC/2 = b/2$. Mivel azonban $PC = b$ is érvényes, ezért a *PCM* háromszög területe:

$$T_{\Delta PCM} = b^2/4.$$

Másrészt viszont

$$T_{\Delta PCM} = CM \cdot PR/2$$

$$T_{\Delta PCM} = c \cdot PR/4 \quad .$$

Hasonlóképpen, az *MCQ* háromszög területe egyrészt

$$T_{\Delta QCM} = a^2/4 \quad ,$$

másrészt pedig

$$T_{\Delta QCM} = CM \cdot RQ/2$$

$$T_{\Delta QCM} = c \cdot RQ/4 \quad .$$

Az *MCQ* és *MCP* háromszögek kétféleképpen kiszámított területének összege egyenlő egymással:

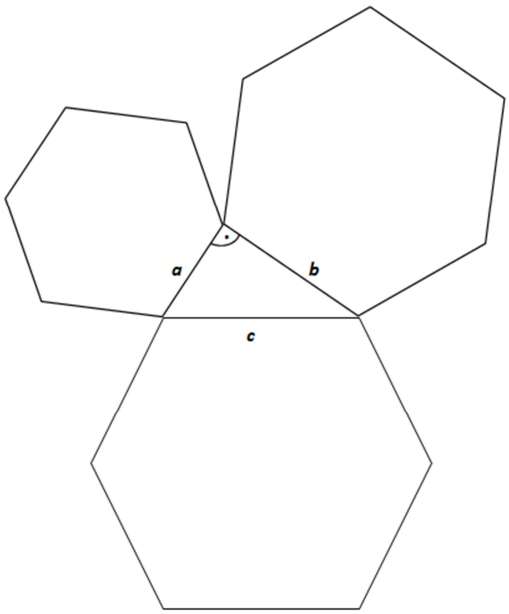
$$T_{\Delta PCM} + T_{\Delta QCM} = T_{\Delta PCM} + T_{\Delta QCM}$$

$$a^2/4 + b^2/4 = c \cdot PR/4 + c \cdot RQ/4 = c \cdot PQ/4 = c^2/4$$

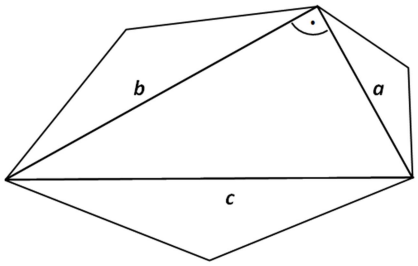
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad .$$

18. A Pitagorasz-tétel általánosítása

A Pitagorasz-tétel érvényességét biztosító okok megismerése után (lásd pl. 9. fejezet) az is belátható, hogy a Pitagorasz-tétel nem csak arról szól szűkszavúan és szigorúan, hogy a derékszögű háromszög oldalaira emelt négyzetek vannak egymással $c^2 = a^2 + b^2$ (azaz területüket tekintve egy nagyon közeli és egyszerű) viszonyban, hanem bármely három (egymáshoz) hasonló síkbeli alakzat, amely a derékszögű háromszög átfogójára és két befogójára van illesztve (lásd pl. *26.* és *27. ábra*), egyszerű és alapvető matematikai kapcsolatban áll egymással.



26. ábra



27. ábra

Ez az egyszerű és alapvető kapcsolat - a Pitagorasz-tétel egyik általánosítása - a következő:

$$T_c = T_a + T_b \qquad (18.1)$$

ahol T_c , ill. T_a és T_b a derékszögű háromszög átfogójára, illetve két befogójára illeszkedő, egymáshoz hasonló síkbeli alakzatok területei. Ez az összefüggés minden alakzatra a $c^2 = a^2 + b^2$ egyenletből formálisan, akár gondolkodás nélkül is, betűaritmetikával megkapható, például a derékszögű háromszög oldalaira illeszkedő félkörökre

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad / \cdot \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{c^2\pi}{8} = \frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi \qquad ,$$

ami azt mondja ki, hogy az átfogóra illeszkedő félkör területe egyenlő a befogókra illeszkedő félkörök területének összegével.

Álljunk meg itt egy pillanatra. A $c^2 = a^2 + b^2$ összefüggés helytállóságát, amint már eddig is láttuk, többféle módon lehet igazolni: akár a hindu bizonyítással, akár az előbbiek során bemutatott másik három egyszerű módszerrel, vagy valamelyikkel a bonyolultabbak közül. Ezek közül akármelyiket is használtuk, a $c^2 = a^2 + b^2$ összefüggés természetesen ugyanolyan jogosultsággal használható fel akár a *26.* vagy *27. ábrán* látható, akár egyéb, itt be nem mutatott alakzatok esetében a *(18.1)* azonosság igazolására. Szubjektív oldalról azonban (különösen a Pitagorasz-tétellel éppen ismerkedő tanulók számára) nem mindegy, hogy a hindu bizonyítással igazolt $c^2 = a^2 + b^2$ összefüggésre alkalmazunk egy „betűaritmetikai kezelést”, vagy pedig, mondjuk a 9. fejezetben bemutatott, érthető és okokozati összefüggéseiben átlátható módszerrel értettük meg jól és világosan, hogy miért is igaz a $c^2 = a^2 + b^2$ összefüggés, majd erre a minden lépésében megismert igazságra építjük akár a *26.* vagy *27. ábrán* látható, akár más síkbeli alakzatok bevonását a Pitagorasz-tétel egyik fajta általánosítását jelentő *(18.1)* egyenlet hatálya alá. Nagyobb a tanulóknak a $c^2 = a^2 + b^2$ összefüggés általánosításaiba vetett bizalma abban az esetben, ha már a $c^2 = a^2 +$

b^2 összefüggés bizonyítását is minden lépésében értik és átlátják, mint ha csak a „kalapból nyuszi” szinten magyarázó hindu bizonyítás szolgáltatja számukra az összefüggés igazába vethető hitet.

Kontrasztként és a teljesség kedvéért meg kell említeni, hogy a jelenlegi legátfogóbb magyar nyelvű matematikai kézikönyv, a **[Ge-Va]** a hindu bizonyítással igazolja a következő alakban kimondott Pitagorasz-tételt: „Bármely derékszögű háromszög befogói négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével, azaz (a vonatkozó ábra jelöléseivel) $a^2 + b^2 = c^2$.” Ezek után bemutatja azt is, hogy a derékszögű háromszög felosztható két, önmagához hasonló háromszögre (nem megemlítve azt a fontos tényt, hogy csak a derékszögű háromszög rendelkezik ezzel a tulajdonsággal), majd az itt felállított aránypárokat a magasságtétel és a befogótétel levezetésére használja.
Jelen Szakdolgozat szerzője szerint módszertanilag hasznosabb lenne, ha az önmagához hasonló két derékszögű háromszögre történő felosztáson keresztül bizonyítaná a Pitagorasz-tételt is, meg a magasságtételt és a befogótételt is, hiszen ez a feloszthatóság mindhárom tételnek az alapja. A hindu bizonyítás tulajdonképpen elhagyható lenne a bizonyítás szempontjából és módszertani szempontból is, csupán a minél nagyobb lexikális teljességre törekvés indokolná a jelenlétét.

19. Összefoglalás

A legegyszerűbb, legközvetlenebb igazolása a Pitagorasz-tételnek mindenképpen az, hogy mivel derékszögű háromszögnél az átfogóra emelt magasságvonal két olyan háromszögre osztja fel az eredeti háromszöget, amelyek hozzá is (és egymáshoz is, lévén a hasonlóság ekvivalencia-reláció) hasonlóak, e háromszögek területe pedig egyenlő az átfogó négyzete szorozva ugyanazzal a szorzó tényezővel (nullától különböző valós számmal) mindhárom háromszög esetében, a területekről szóló egyenlőségben ez a szorzó tényező kiejthető (beszorozzuk az egyenletet a reciprokával), és marad az átfogóra, ill. két befogóra illeszkedő négyzetek területéről szóló egyenlőség. (Lásd e Szakdolgozat 9. pontjában leírt bizonyítást.)

Fontos szem előtt tartani azt a szubjektív elemet, hogy a Pitagorasz-tétel elsősorban területek egyenlőségéről szól, nem pedig oldalhosszúságok négyzeteinek egyenlőségéről. Ez a szubjektív elem nagyban hozzá tud járulni a tanulók olyan szemléletének kialakításához, amely további tanulmányaik során jól segítheti őket a matematika különböző területein bizonyos problémákkal kapcsolatos eligazodásokban. (Pl. logaritmusok, az Euler-féle *e* szám definíciója és alkalmazásai, komplex számok Euler-féle alakja, Gauss-féle normális eloszlás sűrűségfüggvénye, stb.)

Fontos megjegyezni azt is, hogy ha a kettővel előbbi bekezdésben említett szorzó tényezőt nem 1-es szorzóvá alakítjuk a reciprokával történő egyenlet-beszorzással, hanem egy tetszőleges síkbeli alakzathoz társított valós számmá (arányossági tényezővé), akkor a „klasszikus” Pitagorasz-tétel helyett azt a tételt kapjuk, hogy derékszögű háromszög átfogójára illeszkedő tetszőleges síkbeli alakzat területe egyenlő a két befogóra illeszkedő, az előbbihez (és egymáshoz) hasonló alakzat területének összegével. A legegyszerűbb területképletű síkbeli alakzat a négyzet, ezért került bele pont ő a Pitagorasz-tételbe.

Ha egy tudásra vágyó, valamiféle bölcsességet kereső tanuló elolvassa a hindu bizonyítást vagy akármelyik másikat azok közül, amelyek simán elhallgatják a Pitagorasz-tétel lényegi okait, mozgatóit, energiaforrásait (lám, még megfelelő szavaink sincsenek ennek a fontos fogalomnak az egyértelmű, elfogadott megnevezésére), csalódott lesz, becsapottnak érzi magát, hiányérzete marad.

Nem lehetnek párhuzamos világok az elemi geometriában: egy olyan világ, amit a hétköznapi szemléletemmel, józan paraszti ésszel értek, és egy olyan, amit nem tudok lekövetni a józan logikámmal, mert mintha egy magasabb, összetettebb, transzcendens vagy nagyobb dimenziószámú világnak lenne a vetülete, amelyben „kalapból nyuszi” módjára hopp, előugrik az eredmény. Mindig világosan be kell mutatnunk a tanulóknak a kiváltó okokat, mozgatórugókat, a „sine qua non”-t – azt, hogy valójában mitől is működik egy bizonyítás, mitől is igaz egy tétel állítása.

Pedagógiai szempontból a legfontosabb az, hogy a Pitagorasz-tétel bizonyításaihoz (is) a tanulók egészséges kételkedéssel, kritikával merjenek hozzányúlni, próbálkozzanak saját megoldásokkal, kíséreljenek meg jobbakat találni, mint a „hivatalos” (amelyre őket

tanították vagy amellyel először találkoztak), merjék minősíteni és merjenek egymással vitatkozni a bizonyításokról a tetszés vagy nem tetszés foka szerint, és legfőképpen, hogy legyen számukra a Pitagorasz-tétel bizonyításainak sokfélesége egy minta és kézzelfogható példa arra, hogy milyen kritikus és kreatív szemlélettel fogadják a jövőben tanulandó matematikai tételeket, bizonyításokat. Sokkal bátrabban, magabiztosabban kezelnek és szabnak át a saját ízlésük szerinti legtermészetesebb használatra egy-egy bizonyítást, ha emlékeznek arra, hogy lám-lám, még a „nagy” és „mindenben előjövő” Pitagorasz-tétel sem csak egyetlen merev, kőbe vésett szemlélet szerint értelmezhető.

Irodalmi hivatkozások:

[**CUT**] **- Cut the Knot – Pythagorean Theorem**
https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

[**GE-VA**] – **Gerőcs László – Vancsó Ödön (szerk.): Matematika**; Akadémiai Kiadó, Budapest, 2012

[**OBÁ**] – **Obádovics J. Gyula: Matematika**; Scolar Kiadó, Budapest, 1996

[WIK-A] – Pythagorean theorem – A Wikipédia angol nyelvű szócikke
https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_theorem

[WIK-M] – Pitagorasz-tétel – A Wikipédia magyar nyelvű szócikke
https://hu.wikipedia.org/wiki/Pitagorasz-tétel

[WIK-N] – Satz des Pythagoras – A Wikipédia német nyelvű szócikke
https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras