

Szakedolgozat

Pénzügyi adatok összefüggőségének vizsgálata, különös tekintettel a válságok során megfigyelhető sajátosságokra

Készítette:

Sajtos László

ELTE TTK- BCE, Biztosítási és pénzügyi matematika MsC

Szakirány:

Kvantitatív pénzügyek

Témavezető:

Dr.Zempléni András

egyetemi docens, ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Konzulens:

Rakonczi Pál

tudományos segédmunkatárs, ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

2011



Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Matematikai alapok	4
2.1. A kopulák fogalma és tulajdonságai	4
2.1.1. Kopulák	4
2.1.2. A kopulák és a valószínűségi változók kapcsolata	5
2.1.3. Arkhimedeszi kopulák	5
2.1.4. Gauss- és t-kopulák	6
2.1.5. A paraméterbecslésekről	6
2.1.6. Az illeszkedés tesztjei PIT-tel	6
3. A felhasznált indexekről	8
4. Az elemzés	10
4.1. Az elemzés módszere	10
4.2. Az elemzés és az eredmények	12
4.2.1. Exploratív egydimenziós elemzés (ablakos módszerrel)	12
4.2.2. Exploratív elemzés kopulák alkalmazásával	13
4.2.3. A tesztstatisztikák kiértékelése és az ablakolás	17
4.2.4. Konklúziók	26
5. További gyakorlati alkalmazások	27
5.1. Bootstrap módszer alkalmazása	27
5.2. Előrejelzés	31
5.3. Valószínűségi régiók és visszatranszformálás	32
6. Összefoglalás	33
7. További tervek	33
8. Köszönetnyilvánítás	34
9. Mellékletek	36

1. Bevezetés

A pénz és az értékpapírok története sokszáz évre nyúlik vissza. A kezdetek óta a világ sokat változott: a korábbi időkhöz képest a gazdaságok egyre inkább összefonódtak, felgyorsítva ezzel a pénzpiacok lehetséges összeolvadásának folyamatát [1]. Számos nagyvállalat is megalakult, amiknek lehetőségük van értékpapírokkal kereskedni, illetve részvényeket, kötvényeket kibocsátani.

Ahhoz, hogy a pénzügyek összetett világában eligazodjunk és megfelelő elemzéseket készítsünk, szükség van arra, hogy az adatok sokaságát átláthatóvá és feldolgozhatóvá tegyük. Nem ritka, hogy többdimenziós adatsorok összefüggéseinek vizsgálata is szükséges.

Ha az értékpapírok (pl.részvények) értékének, hozamának együttmozgását akarjuk leírni, és feltárni a főbb jellemzőket, akkor általában jelentős nehézségekbe ütközünk [2]:

1. a pénzügyi matematikában a legtöbb eredmény **normális** eloszlású változókat tételez fel;
2. de a hozamok **nem normális eloszlásúak**, hanem vastagszélű eloszlást követnek;
3. még ha teljesülne is a normalitás, a sokdimenziós esetet **nehezen lehetne kezelni**.

Az előbbieken látott feladat és probléma egyik lehetséges megoldása (a dolgozatban ezt fogjuk alkalmazni) a **kopulák** felhasználása.

A 2. fejezetben pontosan definiált kopulák az utóbbi néhány évtizedben számos matematikai alkalmazást nyertek. Mint a bevezető elméleti részben látni fogjuk, segítségükkel lehetőség van többdimenziós adatsorok összefüggési struktúrájának átlátható és mégis skálafüggetlen vizsgálatára, illetve az eredmények interpretálására is. Így a statisztikai kiértékelések és a számolások során nincs szükség az adatsorok eloszlásának előzetes feltételezésére (ami számos egyéb statisztikai eljárás során elsődleges feladat).

Nem véletlen tehát, hogy a közgazdaságtanban, illetve a pénzügyi kockázatkezelés és a pénzügyi világ egyéb területén is előszeretettel alkalmazzák őket (például: [3]). Ez a dolgozat is egy pénzügyi matematikai alkalmazási lehetőségről szól: a cél az volt, hogy az adatsorok elemzésén keresztül megvizsgáljuk néhány tőzsdeindex változásának és összefüggésének jellemzőit (és ahol lehet általánosítsunk), illetve vizsgáljuk annak a hatását az adatsorokra, hogy az elmúlt években gazdasági válság bontakozott ki. Továbbá az összefüggésben mutatkozó változások tendenciájának rövidtávú **előrejelzését** is célul tűztük ki. Végül pedig néhány egyéb gyakorlati alkalmazási lehetőséget is bemutatunk. Mindehhez szükség van arra, hogy kopulákat alkalmazzunk, amik segítségével a kitűzött feladatok elvégezhetőek. Nagyon sok, a témában megjelent cikket áttanulmányoztunk, amelyek alapján arra jutottunk, hogy a kopulákat ilyen áttekinthető elemzésre (ami a hamarosan ismertetésre kerülő módszereken alapul) nem használták még. Éppen ezért fel kell térképezni azt is, hogy a módszerrel mennyire lehet jól és egyértelműen leírni a valóságot. Tehát a célunk nemcsak az általános törvényszerűségek kiderítése, hanem a felhasznált apparátus tesztelése is. A megbízható eredmények eléréséhez célszerű több kopulacsaláddal is dolgozni, majd pedig összehasonlítani, amit kapunk. Így láthatjuk azt is, hogy a kiválasztott modellek mennyire adnak eltérő eredményeket (pontos részletek a későbbiekben).

A dolgozat felépítése a következő:

- **2.fejezet: Matematikai alapok:** Mielőtt a gyakorlati alkalmazásokra térnénk, érdemes a matematikai háttérrel jelentő elméleti megfontolásokat átgondolni és összefoglalni, hiszen szilárd alapok nélkül nem várhatóak megalapozott lépéseken nyugvó releváns eredmények. A fejezet jelölései, fogalmai és bizonyításai szorosan követik [4]-ben foglaltakat.
- **3.fejezet: A felhasznált indexekről:** E fejezet ad rövid áttekintést arról, hogy az elemzések során milyen pénzügyi-közgazdasági ismeretek felhasználására van szükség.
- **4.fejezet: Az elemzés:** A rész bemutatja az elemzéshez használt programokat, programcsomagokat, és leírást ad azok használatáról. Majd pedig ezek alapján bemutatásra kerülnek a konkrét eredmények és értelmezések.
- **5.fejezet: Gyakorlati alkalmazások:** Ide tartoznak azok az eljárások, feladatok, amiket a kopulák és a dolgozatban bemutatott módszerek segítségével oldunk meg.

2. Matematikai alapok

2.1. A kopulák fogalma és tulajdonságai

2.1.1. Kopulák

Legyen \mathbb{R}^n az n -dimenziós euklideszi tér $\forall n$ pozitív egész esetén: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R}$. Az \mathbb{R}^n -beli pontok jelöléséhez vektorokat kell használni (pl.: $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$), és ha $\forall k$ esetén $a_k \leq b_k$, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. Egy $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ n -dimenziós téglát nem más, mint $B=[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Az n -dimenziós egységkocka, \mathbf{I}^n nem más, mint $\mathbf{I} \times \mathbf{I} \times \cdots \times \mathbf{I}$ Descartes-féle szorzata, ahol $\mathbf{I}=[0,1]$. Az n -változós valós H függvény értelmezési tartománya pedig \mathbb{R}^n részhalmaza, értékkészlete pedig \mathbb{R} részhalmaza.

Legyenek S_1, S_2, \dots, S_n az \mathbb{R} nemüres részhalmazai, és legyen H egy n -változós valós függvény $\text{Dom} H = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ értelmezési tartománnyal. Legyen $B=[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ egy n -dimenziós téglát, aminek mindegyik csúcspontja $\text{Dom} H$ -ban található. Ekkor B H -mértéke

$$V_H(B) = \sum \text{sgn}(\mathbf{c})H(\mathbf{c}), \quad (1)$$

ahol az összegzés \mathbf{c} elemeire történik (ahol $\mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_k)$ a téglát csúcspontjait tartalmazó vektor), és a $\text{sgn}(\mathbf{c})$:

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } c_k = a_k \text{ páros sok } k \text{ esetén} \\ -1 & \text{ha } c_k = a_k \text{ páratlan sok } k \text{ esetén} \end{cases}$$

Példa Ha $B=[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, akkor

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \quad (2)$$

Egy n -dimenziós kopula olyan $C: \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}$ függvény, ami az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{I}^n$ -ra

$$C(\mathbf{u}) = 0 \quad (3)$$

ha \mathbf{u} legalább egy koordinátája 0. Ha \mathbf{u} minden koordinátája 1 u_k kivételével, akkor

$$C(\mathbf{u}) = u_k \quad (4)$$

2. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{I}^n$ esetén, amire $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ igaz, hogy

$$V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0 \quad (5)$$

2.1. Tétel. (Sklar)

Legyen H egy n -dimenziós eloszlásfüggvény F_1, F_2, \dots, F_n peremekkel. Ekkor létezik olyan n -dimenziós C kopula, hogy

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n));$$

$\forall \mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^n}$ (6)

Ha F_1, F_2, \dots, F_n mindegyike folytonos, akkor C egyértelmű. C egyértelműen definiált $\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2 \times \cdots \times \text{Ran } F_n$ -on (ahol a Ran az értékkészletet jelenti). Megfordítva, ha C egy n -dimenziós kopula és F_1, F_2, \dots, F_n eloszlásfüggvények, akkor a tételben definiált H egy n -dimenziós eloszlásfüggvény F_1, F_2, \dots, F_n marginálisokkal.

A tétel kvalitatív mondanivalója azáltal válik igazán világossá, ha figyelembe vesszük az alábbi, valószínűségszámításból ismert tételt [5]:

2.2. Tétel. Ha Y eloszlásfüggvénye G , ahol G egydimenziós folytonos eloszlásfüggvény, akkor $G(Y) \sim U(0,1)$, ahol $U(0,1)$ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlást jelenti.

Mivel egy kopula rendelkezik egydimenziós marginálisokkal, ezért 2.2.tétel szerint ezek egyenletes eloszlásúak a $[0,1]$ -en. Így Sklar tétele alapján valóban beláthatjuk, hogy a kopulák a többdimenziós eloszlások függőségi szerkezetét ragadják meg, mert megfelelő transzformációval a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású változóba transzformáljuk az eredeti vektorváltozó marginálisait, ezzel szűrve ki a peremek hatását az együttes eloszlásra. Azaz a függőségi struktúrát egy referencia peremeloszlás rögzítése mellett vizsgáljuk.

2.1.2. A kopulák és a valószínűségi változók kapcsolata

Az alfejezet bevezetést nyújt azokba az ismeretekbe, amik a későbbi alkalmazások során fontos szerepet fognak játszani (különösen a szimulációk esetében)[4].

Legyen X valószínűségi változó, aminek az eloszlásfüggvényét (legyen F) a megszokott módon definiáljuk most is: $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén $F(x) = P[X \leq x]$ (az angolszász irodalom konvencióinak megfelelően jobbról folytonosságot tételezünk fel). *Sklar* tétele most is igaz, így a valószínűségi változókkal értelmezett kopulák is szintén egyértelműen definiáltak. Jelöljük egy X_1, X_2, \dots, X_n valószínűségi változók kopuláját C -vel.

A különböző nemparaméteres statisztikák vizsgálatakor a kopuláknak igen nagy haszna van azért, hogy a valószínűségi változók szigorúan monoton transzformációira invariánsak. Ha egy X változó eloszlásfüggvénye folytonos, akkor ha α egy szigorúan monoton függvény (értelmezési tartománya tartalmazza $\text{Ran } X$ -et), akkor a változó $\alpha(X)$ eloszlásfüggvénye szintén folytonos.

A következő tétellel pontosíthatjuk a transzformáció-invarianciáról az ismereteket. Tekintettel arra, hogy a tétel bizonyítása ugyanúgy történik magasabb dimenziókban is, ezért az igazolást két dimenzióban is elég bemutatni.

2.3. Tétel. *Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n folytonos valószínűségi változók $C_{X_1 X_2 \dots X_n}$ kopulával. Ha $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ szigorúan növekvő a $\text{Ran } X_1, \text{Ran } X_2, \dots, \text{Ran } X_n$ -en, akkor $C_{\alpha_{X_1} \alpha_{X_2} \dots \alpha_{X_n}} = C_{X_1 X_2 \dots X_n}$. Így $C_{X_1 X_2 \dots X_n}$ invariáns X_1, X_2, \dots, X_n szigorúan növekvő transzformációira.*

Bizonyítás Legyen $X_1 = X$ és $X_2 = Y$, illetve $\alpha(X_1) = \alpha(X)$ és $\alpha(X_2) = \beta(Y)$. Legyen F_1, G_1, F_2 és G_2 az $X, Y, \alpha(X)$ és $\beta(Y)$ eloszlásfüggvénye. Mivel α és β szigorúan növekedőek, és $F_2(x) = P[\alpha(X) \leq x] = P[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x))$ és $G_2(y) = G_1(\beta^{-1}(y))$, ezért $\forall (x, y) \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) = P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] = P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] = C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) = C_{XY}(F_2(x), G_2(y))$$

Mivel X és Y folytonos, ezért $\text{Ran } F_2 = \text{Ran } G_2 = \mathbf{I}$, hiszen $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$ az $\mathbf{I}^2 - n.$

2.1.3. Arkhimedeszi kopulák

A számos létező kopulacsalád közül a gyakorlatban (matematikán belül és kívül is) igen kedveltek az ún. arkhimedeszi kopulák. Ennek több magyarázata is van: egyrészt könnyen konstruálhatóak, másrészt számos család tartozik ebbe a kopulaosztályba. Ezenkívül előnyös, ha alkalmasnak bizonyulnak az összefüggési struktúrák leírására kevés számú paraméterrel és zárt alakba írható *K-függvénnyel* (hamarosan definiáljuk). Ezért vizsgálódunk elsősorban ezzel a családdal.

2.1. Definíció. *Legyen $\phi_\theta(u)$ egy d -változós kopula generátorfüggvénye: $[0, 1] \mapsto [0, \infty]$, ami folytonos és szigorúan csökkenő úgy, hogy $\phi(1) = 0$ ([6],[7]). Ekkor a d -változós arkhimedeszi kopula függvénye*

$$C_{\phi_\theta}(u_1, u_2, \dots, u_d) = \phi_\theta^{-1} \left(\sum_{t=1}^d \phi_\theta(u_t) \right) \quad (7)$$

Különösen kedvelt eszköz ez a kopulacsalád, mert néhány paraméter is elég a teljes összefüggési struktúra leírásához. Minden $d-1$ dimenziós perem ugyanolyan típusú, mint a d -dimenziós (hiszen a peremek $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlásúak):

$$C_{\phi_\theta}(1, u_2, \dots, u_d) = \dots = C_{\phi_\theta}(u_1, \dots, u_{d-1}, 1) = \phi_\theta^{-1} \left(\sum_{t=1}^{d-1} \phi_\theta(u_t) \right) \quad (8)$$

Így a koordináták felcserélhetőek.

Az *arkhimedeszi kopulák* több fajtája is ismert, de a felhasznált fontosabb családok: a *Gumbel*, a *Clayton* és a *Frank kopulák*. A kopulákat és generátorfüggvényeiket az 1. táblázat adja meg.

Kopula	Alakja: $C(u, v)$	Generátorfüggvény: $\phi_\theta(t)$
Clayton	$\max [(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1), 0]$	$\frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$
Gumbel	$\exp \left(- [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right)$	$(-\ln t)^\theta$
Frank	$\frac{-1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$
Gumbel-Hougaard	$uv \exp(-\theta \ln u \ln v)$	$\ln(1 - \theta \ln t)$

1. táblázat. Néhány kopulafajta összefoglalása

2.1.4. Gauss- és t-kopulák

Az *arkhimedeszi kopulák* mellett fontos szerepe van a *Gauss és t-kopuláknak* is.

2.2. Definíció. A *Gauss-kopula* többdimenziós normális eloszlással definiálható:

$$C_R(u) = \Phi_{R,d}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)) \quad (9)$$

ahol $\Phi_{R,d}$ az R korrelációs mátrixú, d -dimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

2.3. Definíció. A *t(Student)-kopula* pedig többdimenziós Student-eloszlás alapján adható meg:

$$C_{R,v}(u) = t_{R,v,d}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)) \quad (10)$$

ahol $t_{R,v,d}$ az R korrelációs mátrixú, v szabadságfokú, d -dimenziós t -eloszlás eloszlásfüggvénye.

A *Gauss-kopula* fogalmát 2000-ben vezette be *David X. Li* a *The formula that killed Wall Street* című cikkében ([8]), ami szerint jelentős távlatokat nyitott az a felismerés, hogy az összefüggőségek milyen fontos szerepet játszanak a pénzügyekben (különös tekintettel a pénzügyi kockázatok kezelésében ld. pl. [9]), így a modellezésben is. Mivel az összefüggőségek vizsgálatának egyszerű és elegáns módját jelentették a *Gauss-kopulák*, ezért széleskörben használták őket hosszú éveken át.

Azonban a *Gauss-kopula* alkalmazása veszélyes, mert alulbecsüli az extrémértékek közötti összefüggést. Ezt a gyakori problémát küszöböli ki a *t-kopula*. További információk: [10]

2.1.5. A paraméterbecslésekről

A dolgozatban kétféle becslési eljárással dolgoztunk: maximum likelihood módszerrel és az ún. inverz tau módszerrel.

Legyen $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ együttes megfigyelések sorozata X és Y valószínűségi változóból, ahol bármelyik (x_i) és (y_i) egyedi megfigyelés. Jelölje c azokat a párokat, amikre teljesül, hogy $x_i > x_j$ és $y_i > y_j$ vagy $x_i < x_j$ és $y_i < y_j$, illetve d azokat a párokat, amikre teljesül, hogy $x_i > x_j$ és $y_i < y_j$ vagy $x_i < x_j$ és $y_i > y_j$. Ha $x_i = x_j$ vagy $y_i = y_j$, akkor sem c -be, sem d -be nem tartozik.

2.4. Definíció. Az előbbi jelölésekkel a *Kendall-féle tau*:

$$\tau = \frac{c - d}{\frac{1}{2}n(n-1)} \quad (11)$$

ahol n az egy változóból vett megfigyelések száma

- Az *inverz tau* módszerről: Ez a kopula paraméterének becslésére szolgáló egyszerű eljárás, ami a *Kendall-féle tau*-n alapszik. [4] szerint az adott adatsorból meghatározható *Kendall-féle tau* (adott kopulacsaldé esetén) egyenlőnek tekinthető a legjobban illeszkedő kopula *Kendall féle tau*-jával. Ez pedig kifejezhető a legjobban illeszkedő kopula paraméterével. Az összefüggést leíró egyenlet invertálásával pedig megkapjuk az illesztett kopula paraméterét. Például *Gumbel-kopulára*:

$$\tau_\theta = \frac{\theta - 1}{\theta} \quad (12)$$

A módszer az R beépített eljárása, ami gyorsan elvégezhető és megbízható eredményeket ad. A dolgozatban az *arkhimedeszi*, illetve a *Gauss-kopulák* esetén alkalmazzuk.

- Maximum likelihood módszer: A módszer szintén az R beépített alkalmazása, amivel iteráción keresztül lehet megvalósítani a paraméterbecslést (éppen ezért jóval lassabb, mint az inverz tau módszer). A *t-kopulák* paraméterének becslésére használtuk.

2.1.6. Az illeszkedés tesztjei PIT-tel

Az elemzéshez írt programok (ld. *Az elemzés módszere*) az egyes kopulák paraméterének becslésén, illetve Monte Carlo szimulációk készítésén alapszanak. Központi szerephez jut különböző tesztstatisztikák illeszkedésének és helyességének az igazolása is. Így ez az alfejezet a felhasznált hipotézisvizsgálati módszerek matematikai alapjait mutatja be [6].

Legyen $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_d)$ véletlen vektor $\mathbf{C}=(C_\theta)$ kopulamoddellel úgy, hogy az F_1, F_2, \dots, F_d peremeloszlások ismeretlenek. Legyen $(X_{11}, \dots, X_{d1}), \dots, (X_{1n}, \dots, X_{dn})$, $n \geq 2$ egy \mathbf{X} -ből vett véletlen minta.

Ismeretes, hogy bármilyen, adott folytonos kumulatív eloszlásfüggvénnyel (legyen H) rendelkező véletlen változó a $[0,1]$ -en egyenletes eloszlásúvá transzformálható a $V=H(X)$ összefüggéssel [6], amit valószínűségi integráltranszformációnak (Probability Integral Transformation, PIT) hívunk. A továbbiakban ezt használjuk fel (hiszen a kopulák marginálisai is egyenletes eloszlásúak a $[0,1]$ -en). Legyen a PIT eloszlásfüggvénye, $V=H(\mathbf{X})$ az alábbi:

$$K(\theta, t) = P(H(\mathbf{X}) \leq t) = P(C_\theta(F_1(X_1), \dots, F_1(X_d)) \leq t) \quad (13)$$

1. Állítás. *Arkhimedeszi kopulacsaládok esetében:*

$$K(\theta, t) = t + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{(-1)^i}{i!} [\phi_\theta^i(t)] f_i(\theta, t) \quad (14)$$

ahol $f_i(\theta, t) = \frac{d^i}{dx^i} \phi_\theta^{-1}(x)|_{x=\phi_\theta(t)}$

Bizonyítás Az állítás igazolása [4]-ben található. \square

Ezek után definiáljuk a *tapasztalati K -függvényt*-t (K_n):

$$K_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(E_{in} \leq t), t \in [0, 1] \quad (15)$$

ahol $E_{in} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}(X_{1k} \leq X_{1i}, \dots, X_{dk} \leq X_{di})$. A K és a K_n függvények már egydimenziósak!

Az illeszkedésvizsgálatokhoz a $K(\theta, t)$ paraméteres becslését, $K(\theta_n, t)$ -t vetjük össze a tapasztalati K -függvénnyel, $K_n(t)$ -vel az alábbiak szerint. Kétváltozós esetre a *Kendall-folyamat* megfelelő folytonos függvényeit használják, mert jók az aszimptotikus tulajdonságai. Ekkor $\kappa_n(t) = \sqrt{n}(K(\theta_n, t) - K_n(t))$ a *Kendall-folyamat*, a javasolt statisztikák pedig $S = \int_0^1 (\kappa_n(t))^2 dt$ (Cramer-von Mises típusú statisztika) és $T = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\kappa_n(t)|$ (Kolgomorov-Szmirnov-típusú statisztika). A vizsgálatok során azért csak az S_n statisztika esetét vizsgáltuk, mert a tapasztalatok szerint erősebb próbát definiál.

A *K -függvények* az egyes kopulák esetében:

Kopulák	$K(t, \theta)$ -függvény
Gumbel	$t \left(1 - \frac{\ln t}{\theta}\right)$
Clayton	$t - \left(\frac{t^{\theta+1} - t}{\theta}\right)$
Frank	$t + \frac{1}{\theta} \frac{(1-e^{\theta t}) \ln(1-e^{-\theta t})}{1-e^{-\theta}}$

2. táblázat. *A K függvény alakja különböző kopulák esetén*

A fenti S integrált a gyakorlatban csak közelíteni tudjuk, de a felosztás finomításával könnyen elérhető a kívánt pontosság, mert a függvények monoton növeks és korlátosak. Súlyozott verziói is elképzelhetők, amik jobban hangsúlyozzák az extrémumokat. Az alkalmazott tesztstatisztikákat foglalja össze az alábbi táblázat:

Eltérés	Súlyozott eltérés
$S_1 = \sum_{t_i \in [0+\epsilon, 1-\epsilon]} K(\theta_n, t_i) - K_n(t_i) $	$S_3 = \sum_{t_i \in [0+\epsilon, 1-\epsilon]} \frac{(K(\theta_n, t_i) - K_n(t_i))^2}{K(\theta_n, t_i)}$
$S_2 = \sum_{t_i \in [0+\epsilon, 1-\epsilon]} (K(\theta_n, t_i) - K_n(t_i))^2$	$S_4 = \sum_{t_i \in [0+\epsilon, 1-\epsilon]} \frac{(K(\theta_n, t_i) - K_n(t_i))^2}{K(\theta_n, t_i)^2}$

3. táblázat. *A felhasznált tesztstatisztikák [6]*

ahol $(t_i)_{i=1}^n$ a $[0,1]$ intervallum megfelelő véges felosztása. Nyilván minél közelebb van a $K(\theta, t)$ a $K_n(t)$ függvényhez, annál jobb az illeszkedés.

A későbbi elemzések során fel fogjuk használni a már definiált *t-kopulákat* és *Gauss-kopulákat*: érdemes ugyanis megvizsgálni, hogy a kevesebb paraméterrel rendelkező *arkhimedeszi kopulákkal* mennyivel jobb/rosszabb eredményeket lehet kapni, mint a gyakran alkalmazott *t* és *Gauss-kopulákkal*. Mivel ez utóbbi kopulafajták nem rendelkeznek zárt alakú *K-függvénnyel*, ezért az illesztésvizsgálathoz szimulációra van szükség (0,01 és 0,99 közötti paraméterértékekkel és 0,01-es lépésközzel történt a *K-függvények* helyettesítési értékeinek számolása), amihez a szimulációs program a $[0,1]$ intervallumot 999 részre bontja fel, az egyes osztásokban pedig meghatározza a *K-függvény* helyettesítési értékét minden paraméterérték esetén. A szimulációkat a konzulensentől kaptam.

Az is igencsak fontos kérdés, hogy mennyire befolyásolják az eredményeket a tesztstatisztikák. Erről a későbbiekben még lesz szó.

3. A felhasznált indexekről

Az elemzési munkához elengedhetetlenül fontos a célnak megfelelő indexek kiválasztása. Ezért érdemes európai, ázsiai és amerikai indexeket is választani, így lehetőség nyílik összehasonlítani őket összefüggési struktúra és időbeli változás szempontjából.

1. *Dow Jones Industrial Average*: A kiemelkedően stabil befektetésnek számító 30 vállalat részvényeinek értékéből számítják (ún. ársúlyozású átlaggal). A Dow-index egy olyan portfólió hozamát méri, amelyben minden részvényből egy van. Az egyes vállalatokba fektetett pénz megfelel a vállalatok részvényei árfolyamának.
2. *Standard & Poor's 500 (S&P 500)*: Ez az index 500 céget tartalmaz, illetve közkézhányaddal korrigált piaci értékkel súlyozott (free-float capitalization weighted) index. Az S&P 500 számításakor meghatározzák az indexbe foglalt 500 vállalat piaci értékét az adott, illetve a megelőző napon. A piaci érték egyik napról a másikra történő változása jelenti az index megváltozását. Az index hozama megegyezik egy olyan portfólió hozamával, ami ugyanebből az 500 papírból állna, és az egyes értékpapírok súlya arányos lenne a piaci értékükkel, de az index nem tükrözi a vállalatok által fizetett osztalékot (price return index). További információk: [11]
3. *CAC 40 (Cotation Assistée en Continu)*: Francia, értéksúlyozású tőzsdeindex. Értékét a párizsi tőzsdén jegyzett száz legnagyobb közkézhányaddal korrigált kapitalizációval rendelkező vállalat értéke alapján számítják, méghozzá úgy, hogy a száz vállalat közül a legjelentősebb 40 értéket használják fel. További információk: [12]
4. *BUX*: A BUX a Budapesti Értéktőzsde egyik részvényindexe, mely valós időben, 5 másodpercenként kerül kiszámításra az aktuális piaci árak alapján. Az index a BÉT részvény szekciójában szereplő legnagyobb tőkeértékű és forgalmú részvények árának átlagos változását tükrözi, ezáltal a tőzsdei folyamatok legfontosabb mutatószáma. További információk:[13]
5. *Nasdaq*: A Nasdaq Composite Index. Piaci kapitalizáció alapon súlyozott átlag. A NASDAQ-on (National Association of Securities Dealers Automated Quotation System, az Egyesült Államok egyik legjelentősebb elektronikus tőzsdéje) kereskedett több mint 3000 részvényt tömörítő hatalmas indexet jellemzően a technológiai szektor indexének nevezik, mert túlnyomó többségben e szektor papírjai dominálnak. Mivel az átlagolás piaci kapitalizáció alapján történik, a Microsoft, Intel, WorldCom, Sun Microsystems, Dell Computer és pl. Oracle meghatározza az index mozgását. További információk: [14]
6. *NYSE*: [15] Az NYSE (New York Stock Exchange) kompozit index a New York-i Értéktőzsdén jegyzett értékpapírok teljesítményének mérésére szolgáló értéksúlyozású index. Értékét a jegyzett papírok aggregált piaci értékének változása alapján számolják ki, így gyakran a gazdaság teljesítményének jelzésére alkalmazzák.
7. *HSI (Hang Seng Index)*: Hong Kong-i közkézhányaddal korrigált piaci kapitalizációval súlyozott tőzsdeindex. További információk: [16].
8. *Nikkei 225*: A tokiói tőzsde ársúlyozású átlaggal meghatározott indexe. További információk: [17]

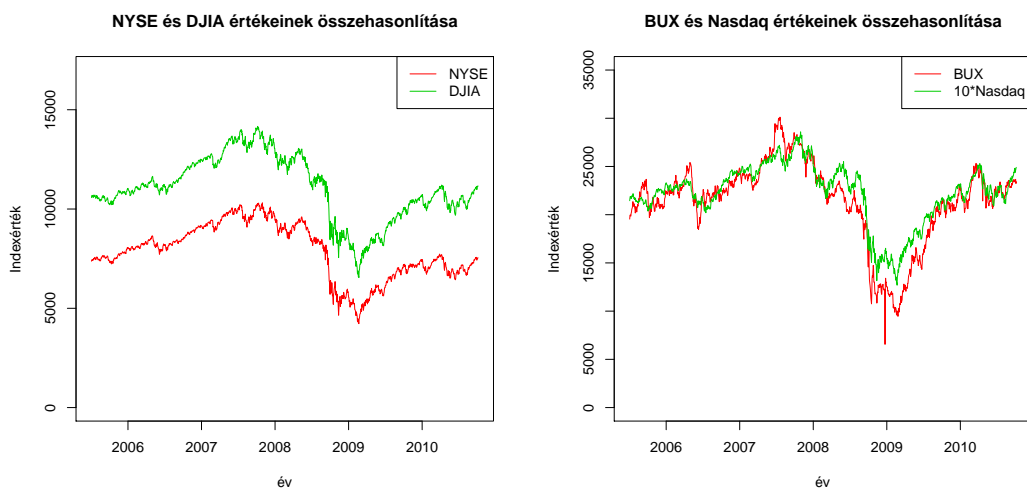
Az egyes indexek eltérő számú részvényt tartalmaznak. Azonban ez nem befolyásolja a vizsgálatok eredményét: Markowitz portfólióelméletéből következően [18] már akár 12 részvényt is elég tartalmaznia egy indexnek ahhoz, hogy az index értékét (illetve volatilitását) a piaci kockázaton kívüli tényezők már csak elhanyagolható mértékben befolyásolják. Fontos megjegyezni, hogy az elektronikus tőzsde az OTC piac (tőzsdén kívüli piac) része. A különbség leginkább az értékesítésben rejlik: míg a tőzsdéken minden üzletet a specialistákon keresztül kötik meg, addig az OTC piacon a kereskedők egymás közötti megegyezéséből születik az üzlet [1]. Mivel ez a rendszer megkerüli a specialista rendszert, az OTC kereskedés nem kíván egy központi kereskedési helyet, mint a tőzsdén jegyzett részvények esetén. A kereskedők bárhol lehetnek, amíg hatékonyan tudnak kommunikálni a többi vevővel és eladóval.

Míndez pedig nem befolyásolja az általunk vizsgálni kívánt indexek értékét, azaz elemzéseinkre a kereskedés helye nincs hatással. A 2.3. tételből következően pedig az sem lényeges, hogy loghozamokkal vagy effektív hozamokkal számolunk.

Ugyanakkor érdemes megvizsgálni, hogy van-e hatása az eredményekre annak, hogy milyen kontinens indexeit tanulmányozzuk, illetve hogy milyen súlyozással határozzuk meg az indexek értékeit. Ezért összehasonlítóképpen különféle indexpárokat tanulmányoztunk (2005. július 17-től 2010. október 25-ig terjedő időintervallumon), amikkel lehetőség van az előbbi kérdésekre választ adni. A cél nem a minden részletre

kiterjedő vizsgálat, hanem annak kiderítése, hogy mennyire stabilak és hitelesek a későbbi elemzések során bemutatott eredmények.

Illusztrációképpen nézzük meg néhány index értékének az időbeli változását:



1. ábra. Indexértékek időszora: rendre NYSE-DJIA és BUX-Nasdaq értékei 2005.július 17. és 2010.október 25-e között

A Nasdaq és a BUX indexek ábráján a BUX értékeinek tízszerese látható, ugyanis így lehet igazán jól összevetni a két index változásait.

Az ábrák alapján az összefüggés szemmel látható (de a NYSE-DJIA pár esetén ez az összefüggés erősebb).

4. Az elemzés

4.1. Az elemzés módszere

A kopuláknak az elméleti bevezetőben részletezett tulajdonságait kihasználva juthatunk el a konkrét pénzügyi alkalmazásokig. Ehhez jelentős segítséget nyújt az R programcsomag. Mivel az internetről szabadon letölthető (<http://CRAN.R-project.org>), nyílt forráskódú és szabadon programozható szoftver, ezért gyakorlatilag bármilyen probléma megoldása során rugalmasan alkalmazható segédeszköz.

A következő kérdésekre keressük a választ:

1. milyen az összefüggés az adatsorok között?
2. milyen kopula illeszkedik az adatsorra?
3. milyen a tesztstatisztikák illeszkedése?
4. az illesztett paraméterek ablakolása?
5. a tesztstatisztikák ablakolása?
6. mennyire megbízhatóak a modellek?
7. milyen további gyakorlati alkalmazási lehetőségek vannak?

Az alábbiakban ismertetjük az előbbi kérdések vizsgálatához választott módszereket:

1. *Az összefüggőség kérdése és a kopulák illeszkedése:* A felhasznált indexekről szóló bevezetőben ismertetett indexek adott időintervallumon meghatározott záróárfolyamaiból (forrás: <http://finance.yahoo.com/>) loghozamot számoltunk, amiket a $[0,1]$ -be transzformáltunk a következő módon. Elsőként egy adott adatsor esetén meghatározzuk, hogy a sorban az adott érték hanyadik helyen áll nagyság szerint, majd pedig a kapott számokat elosztjuk az adatsorban lévő értékek darabszámának 1-gyel megnövelt értékével. Az így kapott értékek jelentették a kiindulópontot: lehetőségünk van szemléltetni az adatok alapján meghatározott empirikus kopulát, illetve ezt összehasonlítani az adatokra illesztett különböző kopulákkal (az illesztést inverz tau módszerrel valósítottuk meg). Az empirikus kopula szemléltetéséhez az eredeti, kétdimenziós adatsor transzformáltjait ábrázoltuk (így az ábrákon látható u_1 felirat az egyik, u_2 pedig a másik adatsor transzformáltjait jelöli). Az illesztett kopula vizualizációjához választunk egy véletlen mintát (a minta elemszáma megegyezik a kiindulásként használt mátrix egy oszlopában lévő elemek számával) egy olyan kopulából, aminek a paramétere és a fajtája megegyezik a vizsgálttal. A kapott kétdimenziós adatsor egyik oszlopának értékei láthatóak az ábrák x-tengelyén, a másik oszlop értékei pedig az y-tengelyén. A fittelt kopulák a megfigyelt adatsorokhoz hasonlóan kétdimenziósak. Az illeszteni kívánt kopula megadásánál az R kér egy adott kezdőértéket is (az illesztett paraméter becsléséhez), ami azonban nem befolyásolja a tesztek eredményeit. Habár az eljárást és az eredményeket inkább illusztráció gyanánt mutatjuk be, mégis a kiválasztott kopulák illeszkedése összevethető: az a kopula illeszkedik a legjobban, amelyik a leginkább egyezik az empirikus kopulával.
Fontos megjegyezni, hogy az empirikus kopulák nem pusztán szemléltetésre alkalmasak, hanem (ahogyan látni fogjuk) olyankor is segítségül hívhatjuk őket, amikor más elemzési eljárásokkal kapott eredmények értelmezésében kérdések merülnek fel.
2. *Az összefüggés kérdése és a kopulák illeszkedése:* Ezután meghatározzuk a K_n és K függvény értékeit. A K_n -t a transzformált értékek alapján számoljuk ki. Az elméleti K függvényhez szükség van a θ értékére, ami a becült paramétere az illeszteni kívánt kopulának. Mivel eleinte nem tudhatjuk, hogy milyen kopula illeszkedik a legjobban, ezért érdemes a paraméterbecslést a használni kívánt kopulákra elvégezni. Jelen esetben ez a *Gumbel*, a *Frank* és a *Clayton* kopulákra történik (és összehasonlításképpen a *Gauss* és *t-kopulákra*). Így a K_n és a K függvények ábrázolásával láthatóvá válik, hogy milyen szoros az illeszkedés. Az empirikus K_n meghatározásához 0,01-es lépésközt választottunk, amivel a program a $[0,1]$ -en fut végig. A két függvény eltérését egy olyan ábrán is szemléltethetjük, amin a $[0,1]$ -en ábrázoljuk a K_n és a K függvény adott pontbeli különbségét. Az eljárás szemléltetésre alkalmas, megmutatja, hogy mely értékeknél jó, és hol rossz az illeszkedés.
3. Az illeszkedés megítélésében segítségünkre van, ha Monte Carlo szimulációt végzünk a különbségre (ami a becült kopulából történik). Ekkor az adott felosztássorozat minden pontjában 1500 alkalommal szimuláljuk a K_n és a K függvény különbségét, majd pedig a kapott értékek 97,5 %-os, illetve 2,5 %-os percentiliséit vesszük, amivel a 95 %-os konfidencia-intervallumot jelöljük ki. Ha az eljárást a szóba

jövő kopulacsaládokra elvégezzük, lehetőségünk van összehasonlítást végezni. A kapott eredmények a korábbiakhoz hasonlóan szintén illusztrációk, azonban az illeszkedésre nézve informatívak. Ugyanakkor még jó illeszkedés esetén sem lesz feltétlenül a konfidencia-határokon belül minden különbség-érték.

4. *A kopulák illeszkedése:* Azonban a „szemmel” történő vizsgálat egyrészt nem túl elegáns, másrészt sok olyan dolog elhanyagolására teremt lehetőséget, amik fontosak lehetnek. Ezért szükség van a tesztstatisztikák illeszkedésének felmérésére is. Maga az illeszkedés megítélése egy hipotézisvizsgálati feladat: az a nullhipotézis, hogy az adatsorra adott kopula illeszthető. A vizsgálat megvalósításhoz szintén szimulációt hívhatunk segítségül (ami az illesztett kopulából történik): először a megfigyelt adatokra meghatározzuk a statisztika értékét, majd pedig szimuláljuk a statisztika értékeit. A kapott eredmények felső és alsó kvantiliseit pedig összehasonlíthatjuk a megfigyelt adatokra végzett számolt statisztika értékével (pontosabban azzal, hogy ez az érték a szimulált adatsorban milyen kvantilisnek felel meg). Ezáltal dönthetünk a nullhipotézis elfogadásáról vagy elvetéséről is. Ezzel az eljárással tehát azt kapjuk meg, hogy egy kopula mennyire illeszkedik a teljes adatsorra.
5. *A kopulák illeszkedése, illetve az illesztett paraméterek és a tesztstatisztikák ablakolása:* Ha az előbbi vizsgálat alapján azt tapasztaljuk, hogy rossz az illeszkedés, akkor szükséges az időbeli modellezés, így az időfüggés vizsgálata (a lépésköz 0,0025 a továbbiakban ¹). Ennek egyik lehetséges eszköze az ablakolás. Ez azt jelenti, hogy a mintának csak a $(j+1)$ és $(j+m)$. eleme közötti értékeit vizsgáljuk (ahol m az ablakszélesség, $j=0,1,\dots$). Adott ablakszélességgel végighaladunk a transzformált loghozam-adatsorokon, majd minden ablak adatsorára kopulát illesztünk és becsüljük a kopula paraméterét. Az ablakolás (ami tehát egy eszköz az időfüggés vizsgálatához) segítségével több fontos dolgot is meg lehet valósítani. El lehet dönteni pl. egy illeszkedésvizsgálat esetén, hogy a teljes adatsoron megfigyelt rossz illeszkedést valamilyen fontos jelenség eredményeként adódó inhomogenitások vagy globális eltérés okozta-e. Az előbbi esetben az egyes ablakokra jó illeszkedést kaphatunk (esetleg más-más paraméterekkel). Azonban az egyes időszakok (amiket az ablakszélességekkel kijelölünk) közötti változások tanulmányozása is egyszerű feladat az eljárás megvalósításával.

Az előbbi módszerrel megtehető az egyes tesztstatisztikák vizsgálata is. Mindezzel a cél az, hogy adott adatok esetén az általuk lefedett időintervallum tetszőleges tartományán megvizsgáljuk az illeszkedést. A feladat hipotézisvizsgálati eszközöket igényel (a nullhipotézis az a kopula, amivel a szimulációt és a valós statisztikák meghatározását végezzük, az ellenhipotézis pedig az, hogy nem az adott kopuláról van szó), amihez szimulációt is végeztünk. 1 és 17 közötti kopulaparaméterekkel (a számítások szerint a vizsgálni kívánt kopulák és adatsorok esetén az illesztett kopulák paramétereinek értékei nem haladják meg a 17-et), adott kopulára és tesztstatisztikára végeztünk paraméterenként 1500 db szimulációt. A kapott értékeket egy mátrixba rendeztük, majd minden oszlopának számadataiból meghatároztuk az adott oszlop 97,5 %-os és 2,5 %-os percentiliséit. A megfigyelt adatsorok ablakolása során illesztett paraméterekhez tartozó kvantiliseket (kritikus értékek) pedig az adott értéket közrefogó paraméterekhez tartozó, a táblázatban szereplő kvantilisek lineáris interpolációjából kaptuk. Az eljárást 100-as ablakszélesség mellett végeztük el (ez nagyjából fél évnnyi munkanapnak felel, hiszen egy évben hozzávetőleg 250 kereskedési nap van), hiszen ez már alkalmas arra, hogy kisebb változásokat is kimutassunk az egyes időszakok között. Jóval kisebb ablakszélesség esetén nem lenne reális az illesztés, jelentősen nagyobb ablakszélesség esetén előfordulhatna az, hogy átlépünk egy-egy fontosabb változás fölé. Érdekes érzékenységvizsgálatot is végezni, amikor összehasonlítjuk az eredményeket többféle ablak mellett. Továbbá, ha ugyanazon az ábrán mutatjuk be a szimulációk eredményét, és a megfigyelésből származó értékeket, akkor könnyen megfigyelhetők az illeszkedésben bekövetkező változások. A szignifikanciáról a p-értékek árulkodnak.

6. *Alkalmazások:* Végül különféle gyakorlati alkalmazásokat valósítunk meg, amikkel több célunk is volt: egyrészt a használt modellek megbízhatóságáról győződhetünk meg, továbbá számunkra érdekes mennyiségekre adunk becsléseket.
 - *Bootstrap módszer alkalmazása:* A megbízhatóságról az illesztett paraméterekre történő bootstrap szimulációk adnak számot. Ezek alapján pedig egy érdekes alkalmazást is megvalósítunk (ld. riasztási szabály).
 - *Előrejelzés:* Lehetőségünk van az adatok alapján előrejelzést is végezni. Az eljárás során alapvetően az ETS modellt alkalmaztuk. Ehhez érdemes kihasználni azt, hogy az ablakolással kapott paraméterek idősort alkotnak, így az időszorelemzés módszertana segítségül hívható.

¹Azért használtunk a korábbiakban 0,01-es lépésközt, mert a különbségek szimulációjának elkészítése időigényes, így csökkenteni lehetett a futási időt; ráadásul a feladat nem követeli meg az alacsonyabb lépésközt.

- *Valószínűségi régiók és visszatranszformálás:* A loghozamok adatsoraiba illeszkedő kopulák sűrűségfüggvényeinek meghatározása alapján pedig felmérhetjük egy indexpár (mint portfólió) kockázatosságát.

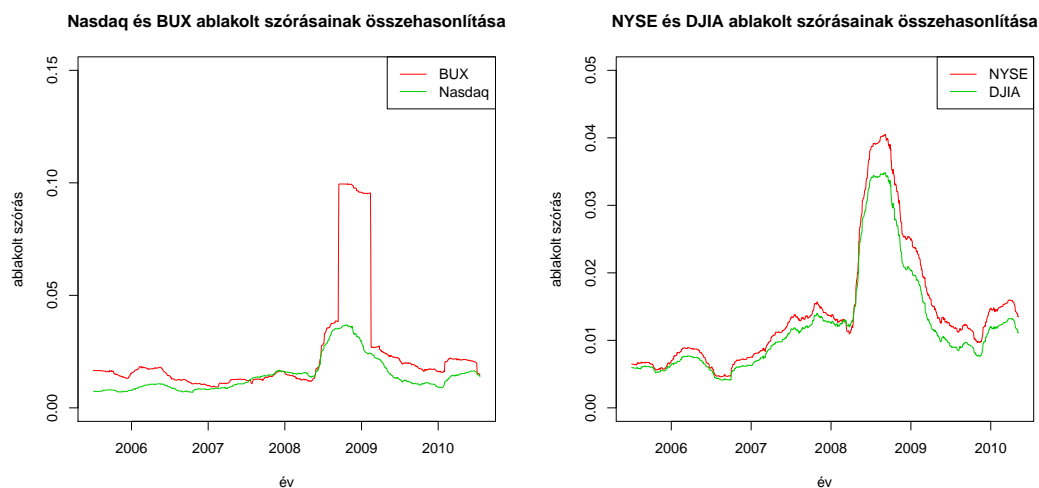
Az összes vizsgálat programkódja a mellékelt cd-n található (a kódokban pedig a lépések további részletezése is olvasható, kommentek formájában).

4.2. Az elemzés és az eredmények

4.2.1. Exploratív egydimenziós elemzés (ablakos módszerrel)

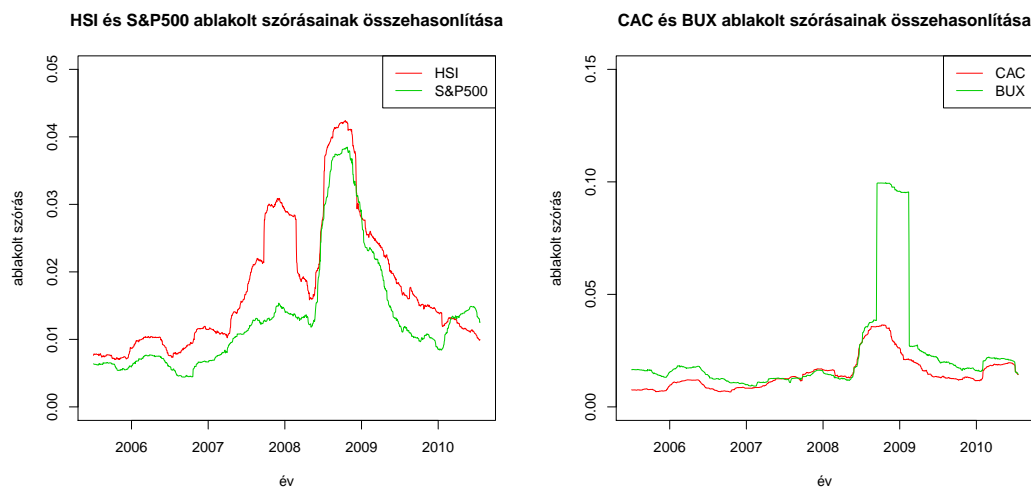
Habár a dolgozat célja kopulák segítségével feltérképezni a tőzsdeindexek időbeli viselkedését, mégis célserű elemzéseket végezni más módszerekkel is. Ennek az az oka, hogy az indexek időbeli viselkedésének jellemzőit más eljárásokkal is fel lehet deríteni. Ezért jogos a kérdés, hogy kopulák segítségével mennyivel lehet többet megtudni az időbeli változásokról, mint más megközelítésekkel.

Ehhez először adott indexek loghozamait ablakoljuk (100-as ablakmérettel). A következő lépésben minden ablak adatsorának meghatározzuk a szórását. Tehát tulajdonképpen a loghozam szórásának változását vizsgáljuk meg ablakos módszerrel (és az ábrákon feltüntetett „ablakos szórás” is erre az eljárásra, illetve a kapott szórásértékekre utal). Lássunk néhány példát:



2. ábra. Ablakos szórás: BUX-Nasdaq 2005-2010 és NYSE-DJIA 2005-2010

További indexek esetén:



3. ábra. Ablakos szórás: HSI-S&P500 2005-2010 és CAC-BUX 2005-2010

A szórásokat tekintve látható, hogy az egyes időszakok között különbségek vannak. Az is észrevehető, hogy különböző indexpárok esetén is ugyanazokat a tendenciákat lehet megfigyelni, igaz, más szórásérték mellett. Adott index esetén egy-egy időintervallumra vett szórások eltérésének szignifikanciáját (ill. ha ez nem megy, az eloszlások eltérésének) érdemes vizsgálni úgy, hogy az adatsort több részre vágjuk, majd az egyes tartományokat külön vizsgáljuk. Erre bevett módszer az *F-próba*. Azonban ennek alkalmazásához az adatok eloszlásának normálisnak (vagy legalább szimmetrikusnak) kell lennie. Ennek felderítéséhez a *Jarque-Bera-tesztet* használhatjuk, illetve a csúcosság és a ferdeség számértékeit.

Mindegyik index esetén 2007 második negyedévéig tartott az első vizsgálandó tartomány, a következő 2008 közepéig, majd az azutáni 2010-ig (ugyanis 2007-ig nyugodt volt a piac, 2007 és 2008 között a másodlagos jelzálogpiaci válság lépett fel, 2008 közepétől kezdve pedig a nagy gazdasági krízis). A *Jarque-Bera-teszt* szerint egyik tartomány sem követ normális eloszlást (egyik index esetén sem!). Tehát nem alkalmazható az *F-próba*. Azonban tanulságos lehet megvizsgálni, hogy adott indexpár esetén az indexek ablakolt szórásának idősorai stacionárius folyamatot követnek-e.

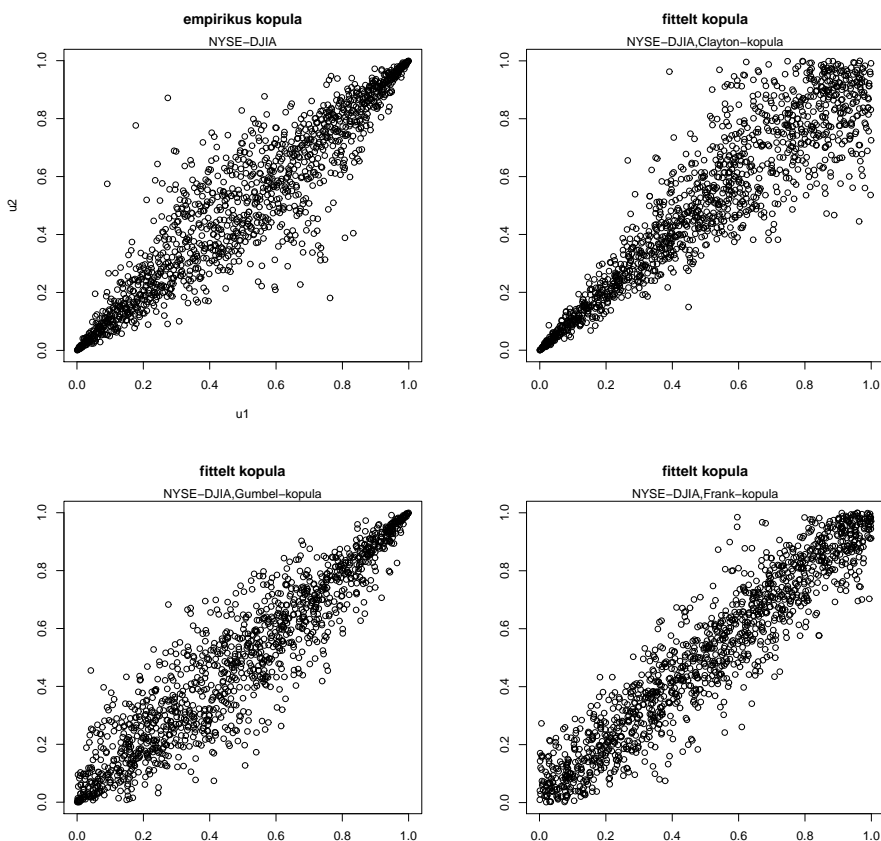
A stacionaritás vizsgálatát megtehetjük többek között a *Phillips-Perron-teszt* vagy a *Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)* teszt segítségével. Mindegyik teszt elvetette a stacionaritást, ami szerint időben változó szórás figyelhető meg mindegyik index esetében. A nemstacionaritás mellett a kibővített *Dickey-Fuller-teszt* alapján egységgyök-folyamatot követnek az indexek ablakolt szórásai. További érdekes információk a tesztekéről és a folyamat tulajdonságairól: [19].

Arra is lehetőségünk van, hogy megvizsgáljuk adott indexpár tagjai közötti *Granger-oksági* viszonyt. Az ehhez elvégzett tesztek szerint egyik index sem *Granger-oka* a másiknak. Ez megfelel a várakozásoknak, hiszen egy-egy index értékét leginkább gazdasági folyamatok befolyásolják.

Habár az időbeli viselkedés sok jellemzőjét megállapítottuk, az egyes indexek összefüggési struktúrájáról, és annak időbeli változásáról az előbbieket alapján keveset lehet csak mondani. Látható tehát, hogy van létjogosultsága a kopulákkal történő elemzéseknek. Észrevehető azonban, hogy 2007 és 2008 között, valamint 2008 után jelentős emelkedés valósul meg az ablakolt szórásokat tekintve, függetlenül az indexpár tulajdonságaitól.

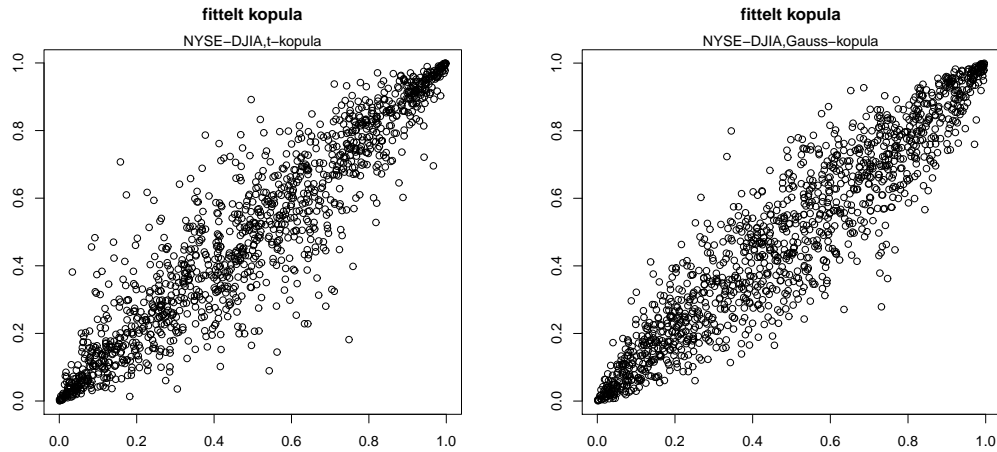
4.2.2. Exploratív elemzés kopulák alkalmazásával

Ahogy korábban említettem, lehetőségünk van az adatok alapján meghatározott empirikus kopulát összehasonlítani az illetett kopulákkal. Hasonlóan szemléletes az elméleti K és az empirikus K_n függvények vizsgálata is (*Az elemzés módszere* 1.-4.pont). Lássunk néhány példát!



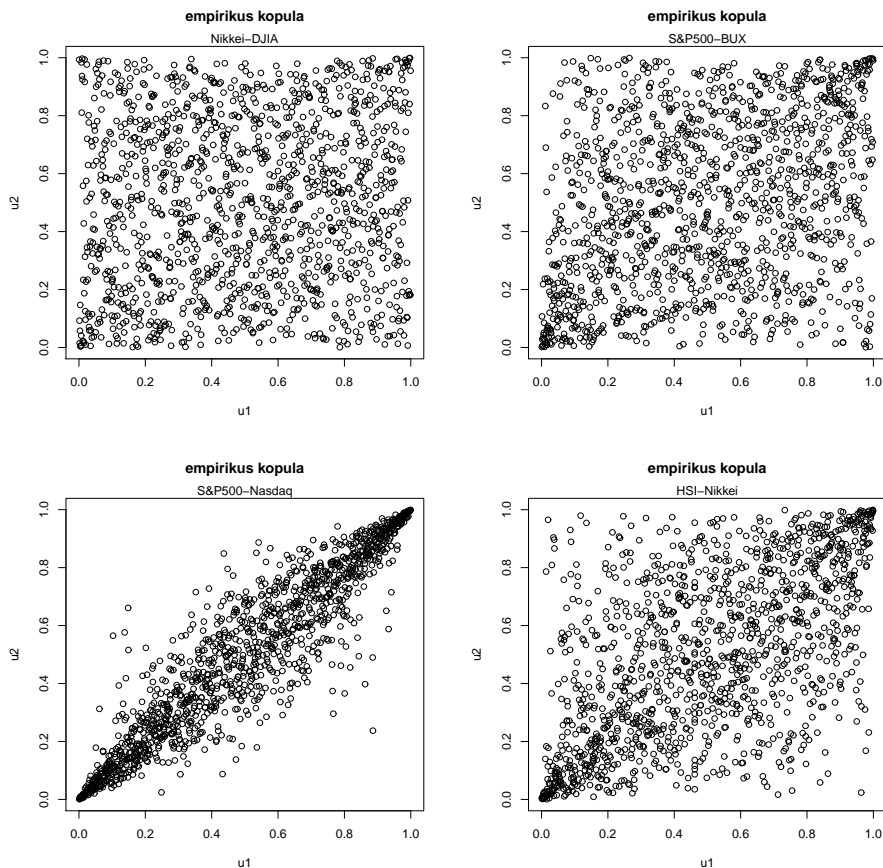
4. ábra. Az NYSE és DJIA indexek empirikus kopulája, illetve a fittelt kopulák (2005-2010) között

Láthatjuk, hogy az empirikus kopula szimmetrikus, ill. hogy az eloszlás szélein különösen erős az adatok közötti összefüggés (az egyes indexek transzformált adatai a 0 és az 1 környékén jóval kevésbé szóródnak, mint az intervallum más részein). Tehát egy jól illeszkedő kopulától szintén elvárjuk ezt a tulajdonságot. Az ábrák összehasonlításával megfigyelhető az illesztés és a megfigyelések közötti különbség. *arkhimedeszi kopulák* esetén a szimmetrikus empirikus kopulát leginkább a *Gumbel-kopula* követi (ráadásul az eloszlás szélein itt a legjobb az illeszkedés). *Gauss* és *t-kopula*² esetén:

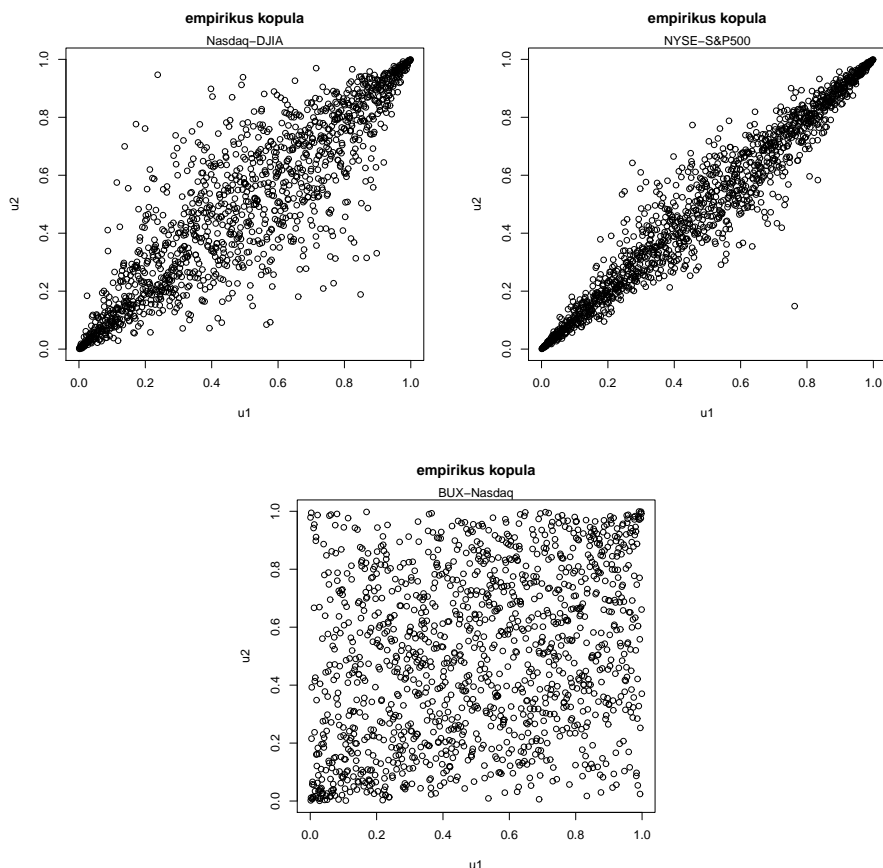


5. ábra. A NYSE-DJIA indexpárra rendre *t-kopula* és *Gauss-kopula* illesztése

Látható, hogy *Gauss*- és *t-kopula* esetén is a fittelt kopula szimmetrikus. Azonban a *t-kopula* jobban visszaadja a széleken az erős összefüggőséget. Néhány további empirikus kopula (*Gumbel-kopula*):

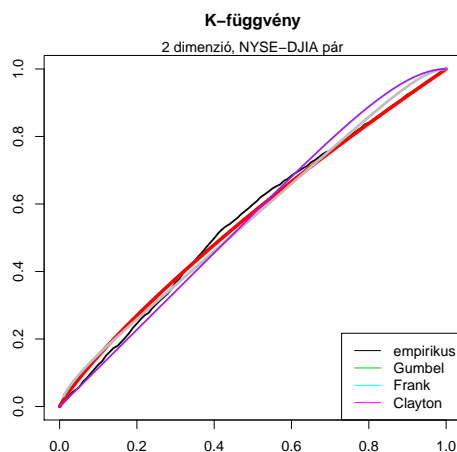


²fixen 4 szabadsági fokú *t-kopulát* használtunk, mert erre voltak kritikus értékek (illetve ez az R alapbeállítása). Nem utolsósorban ez még érzékelhetően eltér a *Gauss-kopulától*.



6. ábra. Empirikus kopulák: Nikkei-DJIA, S&P500-BUX, S&P500-Nasdaq, HSI-Nikkei, Nasdaq-DJIA és NYSE-S&P500, BUX-Nasdaq, Gumbel-kopula

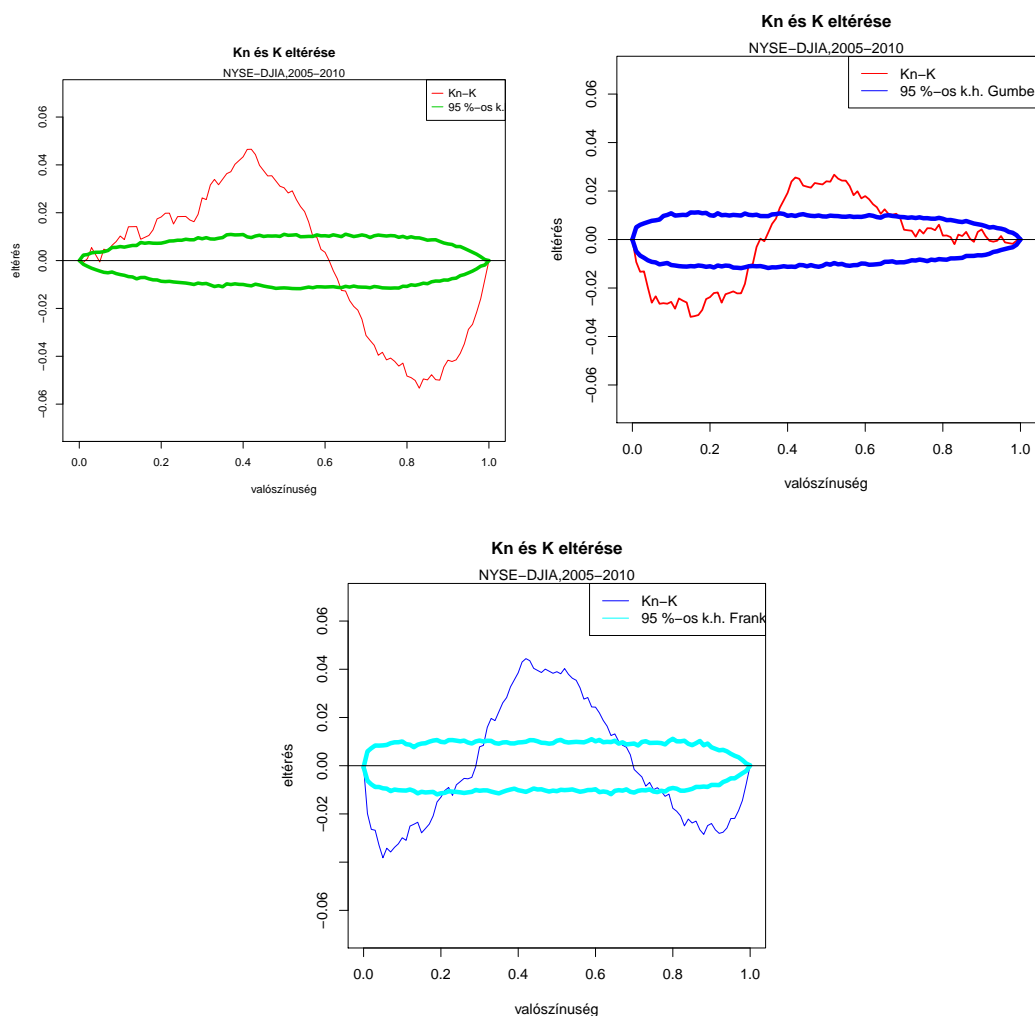
Az összevetést a K -függvények megfigyelésével is elvégezhetjük. Az S&P500-Nasdaq(2005-2010 közötti adataira) az alábbi eredményt kapjuk:



7. ábra. A NYSE-DJIA indexpár K -függvényei és K_n - függvénye

Az ábra két tengelyének értékei egyfajta valószínűséget testesítenek meg, hiszen a K_n és K -függvények egy többdimenziós eloszlás (kopula) egy dimenzióra történő transzformálásából adódnak. Ennek következtében ezeknek a függvényeknek az eltéréseihez is hozzá lehet rendelni ilyen értelemben valószínűségeket. Ezt ki lehet használni, amikor azt a hipotézist akarjuk tesztelni, hogy az empirikus K_n és az elméleti K -függvény nem tér el egymástól (a vizsgált kopulák esetén). Ehhez a megfigyelt adatok alapján kapható értékeket vetjük össze az eltérések szimulációjából adódó kritikus értékekkel (95%-os konfidencia-szint, 2000 szimuláció, ld. Az elemzések módszere 3.pont).

A 2005-2010-es NYSE-DJIA indexértékekre:



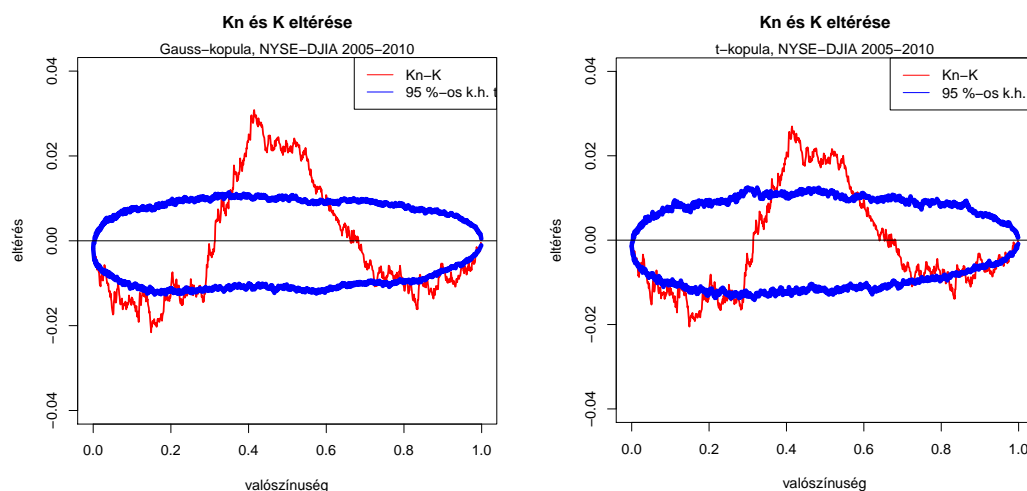
8. ábra. Konfidencia-határok: rendre Clayton-, Gumbel- és Frank-kopula

Az ábrák abszcissa-tengelyének értékei ugyanúgy valószínűségeket testesítenek meg, ahogyan a 7.ábrán. Láthatjuk, hogy egyik kopula esetén sem túl jó az illeszkedés (a legrosszabb a *Clayton*), hiszen a megfigyelt eltérések gyakran jelentősen meghaladják az elfogadási tartományba eső eltérés-értékeket.

Természetesen bármilyen egyéb indexpár esetén is elvégezhetőek ezek a lépések, így a további vizsgálódások előtt már egy jó képet kaphatunk az illeszkedésekről. Az előbbi eredmények egyfajta illusztrációi a módszernek, segítségükkel az illeszkedést grafikusán is tanulmányozhatjuk.

A továbbiakban hasonlítsuk össze a korábban vizsgált kopulák felhasználásával kapott $K_n - K$ értékeket a *Gauss- és t-kopulákkal* számított értékekkel. Ez az összehasonlítás már nem pusztán illusztráció: össze akarjuk vetni az egyes kopulacsaládokkal elért eredményeket. Következtetések levonására pedig a hosszabb idősorok alkalmasabbak, hiszen egy átfogóbb adatsor elemzésével hosszabb távú változások is megfigyelhetőek.

Gauss- és t -kopula esetén (NYSE-DJIA):



9. ábra. Konfidencia-határok: rendre Gauss és t -kopula NYSE-DJIA 2005-2010

A fenti összehasonlításokat természetesen bármilyen más indexpárra is el lehet hasonlóan végezni (további összehasonlítások az 1.számú mellékletben).

Ha a Gauss és t -kopulákkal kapott eredményeket összevetjük, látható, hogy jobban teljesít a t -kopula, különösen az eloszlás „jobb szélén”, az 1 körül. Az arkhimedeszi kopulákkal nem kapunk jó eredményt, ugyanakkor a három arkhimedeszi-kopula közül a Gumbel-kopula tudja leginkább leírni az eloszlás szélén a viselkedést (de nem túl jól).

4.2.3. A tesztstatisztikák kiértékelése és az ablakolás

A 2.1.7-ben is említett módon a Kendall-folyamat alapján több lehetséges tesztstatisztikával is tudjuk vizsgálni a kopulacsalád illeszkedését (3.táblázat). A korábbiakhoz hasonlóan szintén szimulációval határozhatjuk meg a kritikus értékeket, illetve abból a megfelelő kvantiliseket (Az elemzés módszere 5.pont).

Az alábbi táblázatok többféle tesztstatisztika és kopula esetre mutatnak egy összefoglalást a szimulált és a megfigyelt tesztstatisztikák értékeiről, illetve a percentilisekről (kritikus értékek): Gumbel-kopula, S_1 -statisztika

Idő	Indexpár	95%	97,5%	99%	megfigyelt	percentilis
2005-2006	Nasdaq-DJIA	1,1705	1,2627	1,3677	1,2706	97,7%
2007-2008	S&P500-Nasdaq	0,8119	0,8711	0,9425	1,5179	>99,99%
2006-2010	Nasdaq-Dow	0,6087	0,6368	0,6869	1,6445	>99,99%
2005-2010	CAC-BUX	0,7224	0,7674	0,8367	1,7052	>99,99%
2005-2010	BUX-Nasdaq	0,7200	0,7898	0,8856	1,6495	>99,99%

4. táblázat. Illeszkedésvizsgálati eredmények összefoglalása: Gumbel, S_1 statisztika

A táblázatot figyelve több dolog is megfigyelhető: a Nasdaq-DJIA indexpár esetén a különböző időszakokban más az illeszkedés jósága, hiszen 2005 és 2006 között a megfigyelt statisztika értéke a szimulált eredmények 97,7%-os percentilisének felel meg, míg 2006 és 2010 között jelentős túllépésről beszélhetünk. Tehát az adatok egyáltalán nem tekinthetők homogénnek. Az előbbieket indokolják azt, hogy az ablakos módszerrel vizsgáljuk az időbeli változást.

Néhány további eset: Clayton-kopula, S_1 statisztika

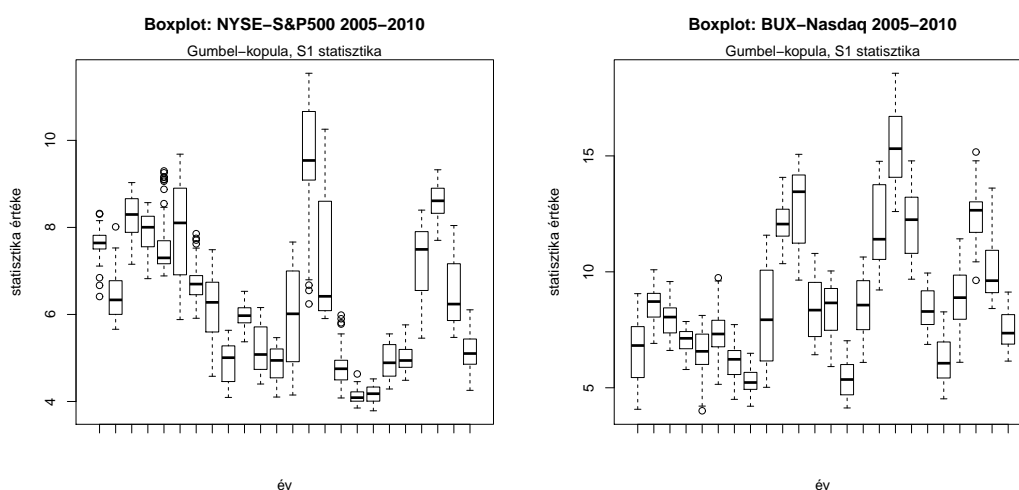
Idő	Indexpár	95%	97,5%	99%	megfigyelt	percentilis
2005-2006	Nasdaq-DJIA	1,1337	1,2277	1,3322	2,8727	>99,99%
2007-2008	S&P500-Nasdaq	0,7929	0,8481	0,8959	2,067	>99,99%
2006-2010	Nasdaq-DJIA	0,5628	0,5949	0,6358	2,6056	>99,99%
2005-2010	CAC-BUX	0,6851	0,7586	0,8025	2,0667	>99,99%
2005-2010	BUX-Nasdaq	0,7231	0,7684	0,8811	0,8917	99,1%
2005-2010	HSI-Nikkei	0,6839	0,7492	0,8055	2,0939	>99,99%

5. táblázat. Illeszkedésvizsgálati eredmények összefoglalása: Clayton, S_1 statisztika

Idő	Indexpár	95%	97,5%	99%	megfigyelt	percentilis
2005-2006	Nasdaq-DJIA	1,1945	1,3297	1,4803	1,3813	98,6%
2007-2008	S&P500-Nasdaq	0,8359	0,8902	0,966	1,9916	>99,99%
2006-2010	Nasdaq-DJIA	0,5853	0,6149	0,6262	2.3492	>99,99%
2005-2010	CAC-BUX	0,7134	0,554	0,8147	1,3011	>99,99%
2005-2010	BUX-Nasdaq	0,6819	0,7303	0,7739	1,2983	>99,99%
2005-2010	HSI-Nikkei	0,6998	0,7677	0,8368	1,7883	>99,99%

6. táblázat. Illeszkedésvizsgálati eredmények összefoglalása: Frank, S_1 statisztika

Mind a 5., mind a 6.táblázat alapján is látható, hogy az illeszkedés sohasem nevezhető jónak. Egyéb tesztstatisztikákkal is megvizsgáltuk az illeszkedést, de hasonló eredményekre jutottunk. Azaz tényleg belátható, hogy az időbeli modellezésre szükség van. Ezt az előbbieket mellett az alábbi, boxplotos ábrák is alátámasztják, mivel az egyes box-ok szélessége jelentősen eltér (egy box-ba 50 adat került):



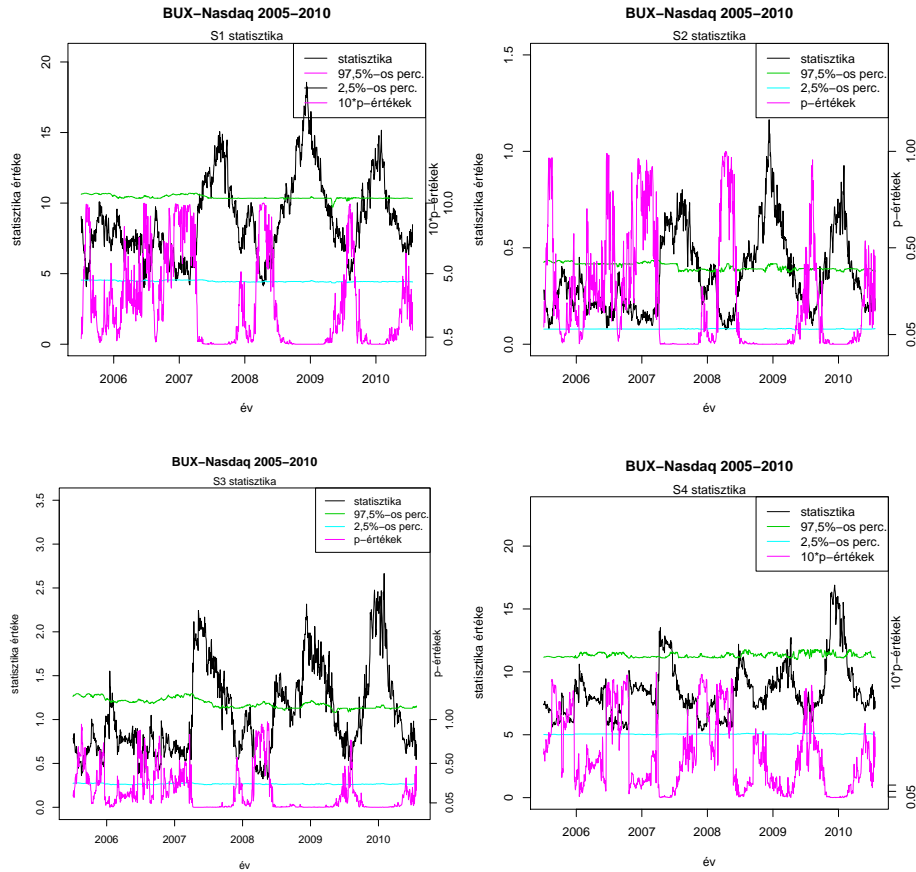
10. ábra. Boxplotok: Nasdaq-BUX Gumbel-kopula, S&P500-NYSE, S_1 statisztika

A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy az idő függvényében hogyan változik az illeszkedés (Az elemzés módszere 6.pont). Az eljárást 100-as ablakméret mellett elvégeztük a kopula illesztett paramétereire, illetve a tesztstatisztikákra is. Az *arkhimedeszi* család tagjai közül elsősorban *Gumbel-kopulát* néztünk, hiszen a három kopula közül ez teljesített a legjobban az illeszkedésvizsgálatokban (ld. pl. Exploratív adatelemzés-1.). Az elemzések során olyan módon vetjük össze az eredményeket, hogy *A felhasznált indexekről* és a *A felhasznált tesztstatisztikák* c. alfejezetben megfogalmazott kérdésekre is választ kapjunk (az eltérő földrajzi távolság, a tesztstatisztikák és az indexértékek eltérő számítási módszertanának hatása). Ezek a kérdések, illetve az azokra adott válaszok nemcsak az általános összefüggések leírásának irányában tett lépések, hanem egyúttal annak mércéje is, hogy a módszertan mennyire ad megbízható eredményeket. Ugyanis ha az elemzések során nyilvánvaló ellentmondásokra derül fény, akkor érdemes változtatni a módszertanon. A vizsgálódás módjai a következők:

1. Adott indexpár esetén mind a négy tesztstatisztikával megvizsgálni az illeszkedést (tesztstatisztikától való függés), ugyanakkor az indexpárok megválasztásában teljes a szabadság;
2. Egy adott tesztstatisztikával több különböző, azonos súlyozással számított, de eltérő földrészen található ország indexének az összehasonlítása (a földrajzi elhelyezkedéstől való függés);
3. Egy adott tesztstatisztikával több különböző, eltérő súlyozással számított, de azonos földrészen található ország indexének az összehasonlítása (a súlyozástól való függés).

Érdeemes egyből több különböző indexpárt is megvizsgálni, hiszen így könnyebben azonosítani lehet a szabályszerűségeket, ráadásul kevésbé lehet olyan hibába esni, hogy egy eseti sajátosságot általánosnak ítélünk. Az elemzések során jellemzően kettő, esetleg három indexpárt tanulmányozunk tüzetesen, egyebekkel pedig megerősíthetjük, vagy gyengíthetjük állításainkat. Ugyanakkor minden ábra megjelenítése nem feltétlenül fontos, ezért több esetben a kapott ábrákat a Mellékletben helyeztük el.

1. Elsőként a tesztstatistikák hatásait tanulmányozzuk. Az alábbi ábrák mindegyike a vizsgálat eredményeit tartalmazza :



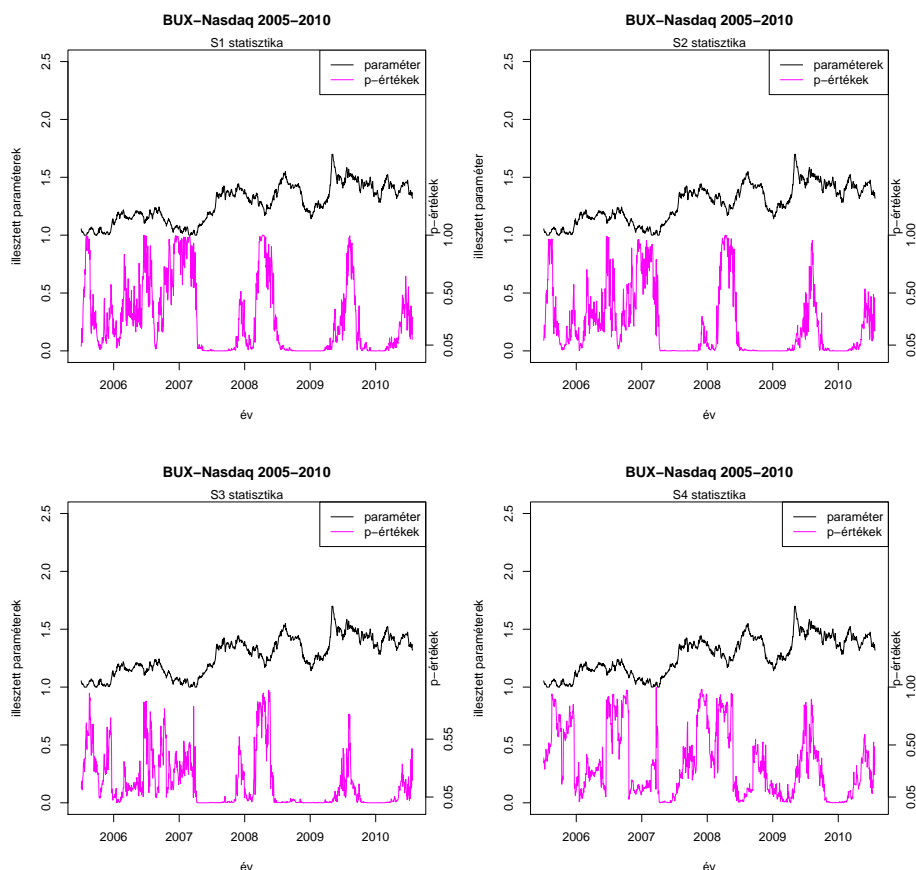
11. ábra. Az ablakolás eredményei: BUX-Nasdaq Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4 statisztika

Látható, hogy minden tesztstatisztika esetén ugyanolyan mértékű az illeszkedés. Észrevehető, hogy a tesztstatistikák idősorában is ugyanolyan tendenciák mutatkoznak, persze más statisztikaértékek mellett (ami azok kiszámítási módjából adódik). Az ábrán feltüntetett p-értékeket szükség esetén 10-zel megszoroztam, így a statisztikákkal összevethető értékeket kaphatunk. További összehasonlításokat tanulmányozhatunk a 2./1 számú mellékletben, amelynek az ábráin szintén látható, hogy az illeszkedés minden tesztstatisztika esetén egyforma.

Megj.: Ha összehasonlítjuk a tesztstatisztika értékeit pl. a 5.táblázatban szereplő értékekkel, szembetűnő különbséget lehet felfedezni. Ennek az az oka, hogy a számolásokhoz eltérő lépésközt választottunk (táblázat: 0,01, tesztstatistikák: 0,0025).

Érdeemes észrevenni, hogy a különböző indexpárok esetében eltérő intervallumokban magas a p-érték. Azonban minden esetben észrevehető, hogy 2005-2006-ban, 2007 és 2008 bizonyos időzakaiban, illetve 2008 után jelentős mértékben megemelkedtek a p-értékek, minden indexpár esetén.

Az eddigiek alapján kiválóan látszik, hogy az idősor homogenitása nem valósul meg, illetve az, hogy az idősorban jelentős változások következtek be (ami szintén alátámasztja az ablakos módszer alkalmazásának létjogosultságát). Érdeemes megvizsgálni az illesztett paraméterek ablakolt idősorát is, hiszen joggal várhatjuk el, hogy a paraméterekre vonatkozóan is változásokat lássunk.



12. ábra. Nasdaq-BUX Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4

Az illesztett paraméterekre vonatkozó további összehasonlítások ábrái a 2./2 számú mellékletben találhatóak.

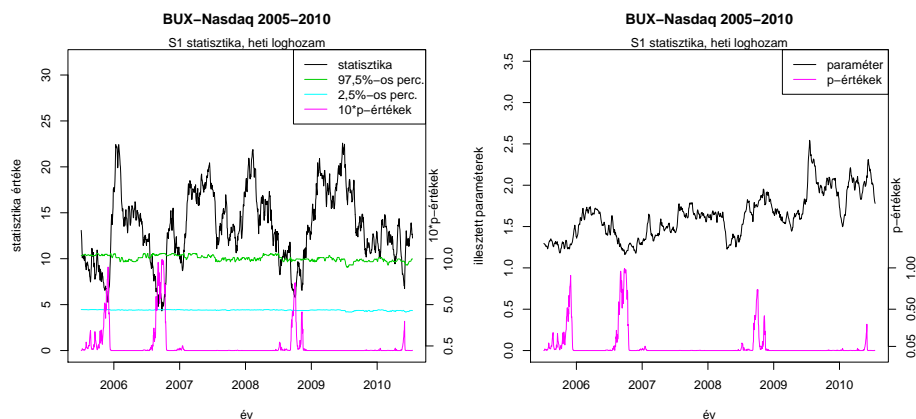
Az ábrákat megfigyelve látható, hogy az illesztett paraméterek idősorainak tendenciája minden esetben ugyanolyan. Ez nem meglepő, hiszen a paraméterillesztés független a tesztstatisztikák választásától. Továbbá, figyelembe véve azt, hogy az illeszkedésvizsgálat a statisztikákkal kapcsolatos kiértékelésen alapul, a későbbiekben nem feltétlenül fontos mindig figyelni az illesztett paraméterek változásait. Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy az illesztett paraméterek idősorából az összefüggőségek változásaira lehet következtetni. Így az indexekhez rendelt kopulákra, illetve a gazdasági helyzetre vonatkozó következtések megerősítésében (ill. gyengítésében) a segítségre lehetnek.

A tesztstatisztikák ábrái alapján feltételezhető, hogy *arkhimedeszi-kopulák* esetében a tesztstatisztikák megválasztása nem lényeges. Feltehető továbbá az is, hogy ez nemcsak *Gumbel-kopulára* igaz. Azonban az előbbi állítások egzakt bizonyítása, illetve annak az elérése meghaladná a dolgozat kereteit. Azonban, ahogy látni fogjuk, az eredmények nem mondanak ellent az állításoknak.

Megj.: Érdekes összehasonlításra ad lehetőséget, ha néhány tovább indexpárt vizsgálva egy ábrán mutatjuk be a különböző tesztstatisztikákkal kapott eredményeket (2./3/a számú melléklet). Látható, hogy az értékek különbözőek, de a tendenciák jó egyezést mutatnak.

Ha megfigyeljük az 1. ábrán a *BUX-Nasdaq* indexpár mozgását, majd pedig összevetjük a 6. ábrával, akkor azt láthatjuk, hogy az együttmozgás mellett sincs jelentősebb összefüggőség az adatok között. Érdeemes megvizsgálni heti loghozamokkal, valamint 1 kereskedési nappal történő késleltetéssel az időbeli modellezést, mert így erősebb összefüggőséget kaphatunk (mivel a távolság miatt felléphetnek késleltetési hatások).

Gumbel-kopulával a heti loghozamidősorok alapján kapott eredmények:

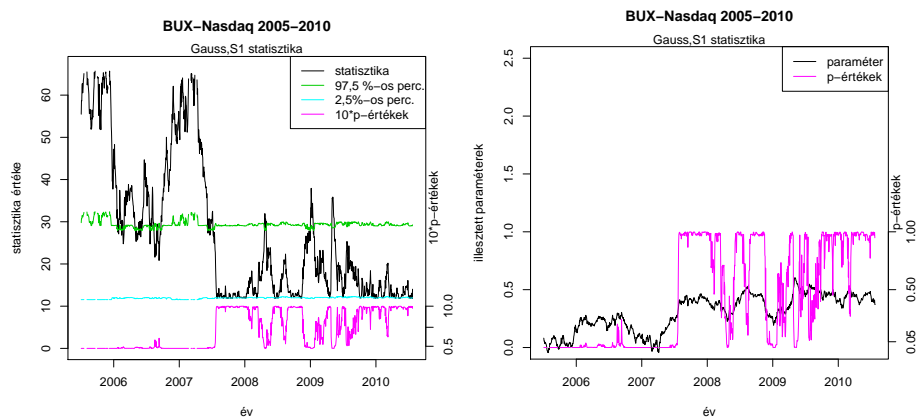


13. ábra. Nasdaq-BUX Gumbel-kopula tesztstatisztikák és illesztett paraméterek, heti loghozamok alapján

Több szembetűnő dolog is észrevehető az ábrákon: egyrészt az illesztett paraméterek időszora továbbra is ugyanolyan tendenciát követ, mint a 12.ábrán (ugyanakkor a paraméterek értéke valamennyivel magasabb a 13.ábrán, azaz erősödött az összefüggőség), másrészt pedig a p-értékek megemelkedése szűkebb intervallumokon valósul meg. Az 1 kereskedési nappal késleltetett loghozamok esetében pedig azt tapasztaltuk, hogy gyengül az összefüggőség. A 2./3/b számú mellékletben megtaláljuk a késleltetéshez tartozó ábrát, valamint a heti loghozamokkal ábrázolt empirikus kopulát.

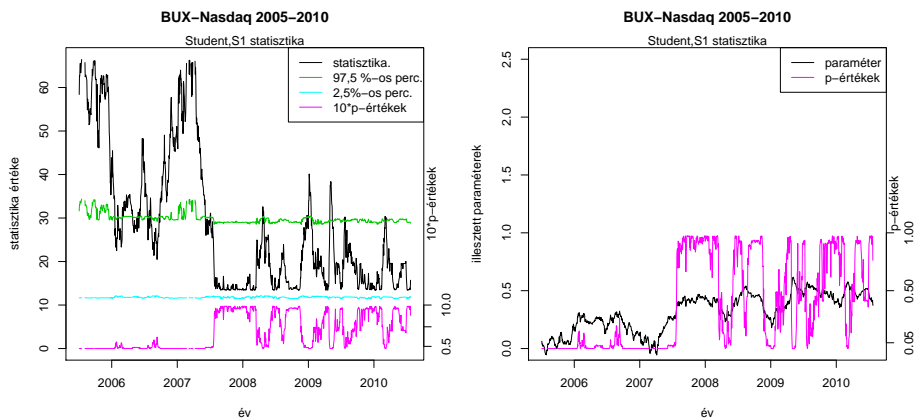
Ezek után nézzük meg, hogy napi loghozamokkal számolva *BUX-Nasdaq* indexpár esetén mit kapunk *Gauss* és *t-kopulával*, és hasonlítsuk össze a 11. és 12. ábrákkal! Erre azért van szükség, mert (ahogy többek között a 4-5. ábrán is láthatjuk) az elliptikus kopulák jobban megragadják az eloszlás szélein az erősebb összefüggőségeket, mint *arkhimedeszi* társai. A korábbi megfontolások alapján elegendő az S_1 statisztikával dolgozni.

Gauss esetére:



14. ábra. BUX-Nasdaq Gauss-kopula,rende statisztikák és illesztett paraméterek idősoros ábrája

Most tekintsük a *t-kopulák* esetét!



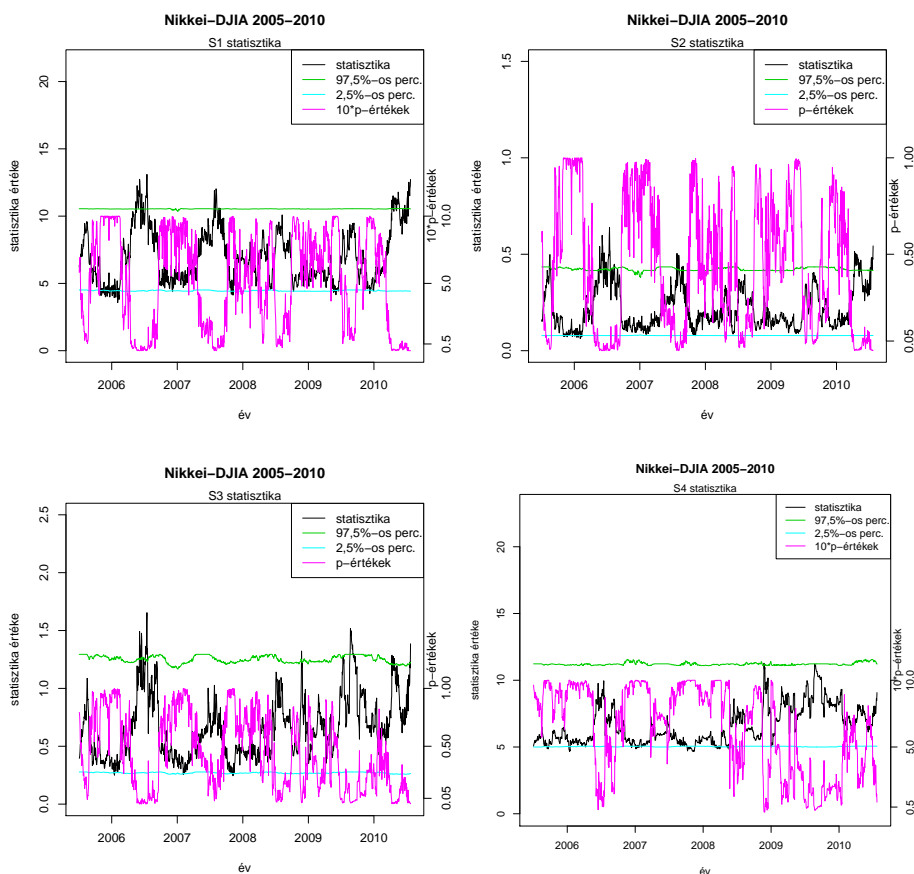
15. ábra. BUX-Nasdaq *t-kopula*, rendre statisztikák és illesztett paraméterek idősoros ábrája

A további ábrák (*HSI-Nikkei*, *S&P500-Nasdaq*) a 2./4 számú mellékletben figyelhetők meg.

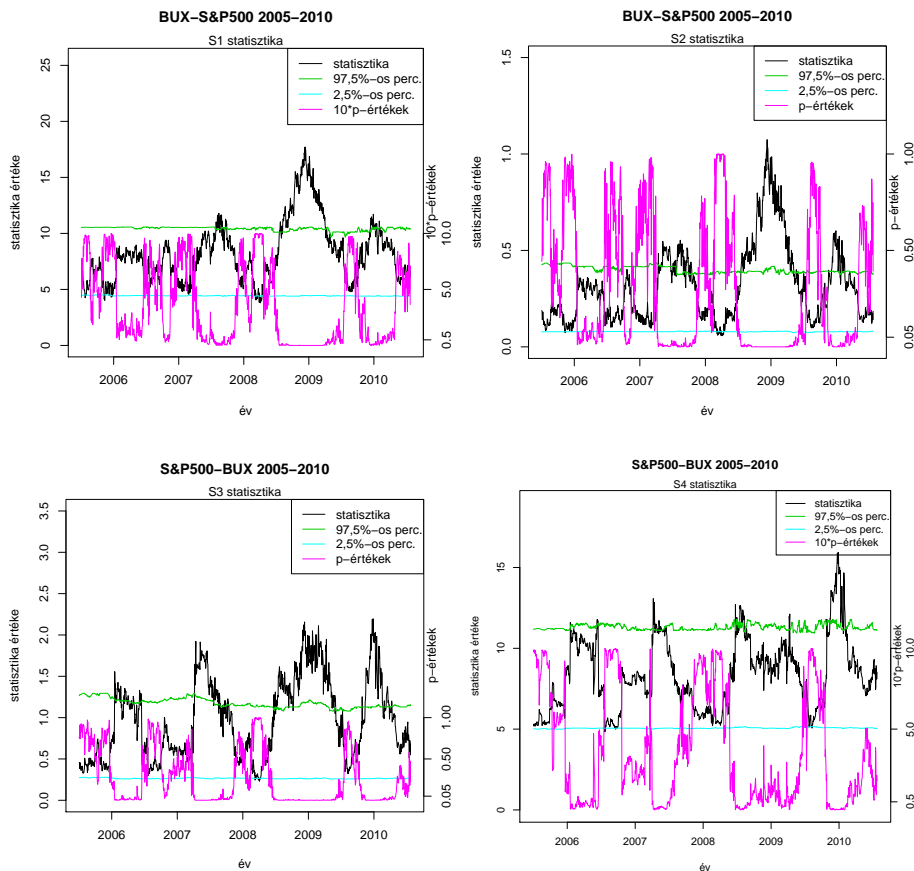
Az ábrákat összevetve több hasonlóság és ellentét is felfedezhető. A *Gauss* és *t-kopulák* alkalmazásával készült ábrák adott indexpárok esetén lényegében megegyeznek. Azonban több indexpárnál is különbségek fedezhetők fel: az *S&P500-Nasdaq* esetén (a Melléklet 35., 37. és 41. ábrája) nagyon jó egyezést mutatnak az *arkhimedeszi*, a *Gauss* és *t-kopulával* történt illesztések *p*-értékei. De a *BUX-Nasdaq* illetve a *HSI-Nikkei* pároknál ez már nem mondható el. Ahogyan a következő részből kiderül (ábrával is illusztrálunk), az lehet a különbség oka, hogy az előbbi indexpár tagjai erősebben összefüggőek, míg az utóbbiak jóval kevésbé. Ez azt az észrevételünket is magyarázhatja, hogy a nem amerikai indexpároknál a *p*-értékek magas értéke meghatározó.

2. Ebben a pontban az eltérő földrajzi távolság hatásait vizsgáljuk. Nézzük meg, hogy milyen eredményeket kapunk a *Nikkei 225-DJIA* és az *S&P500-BUX* indexpár (2005-2010) vizsgálatával! A választás oka: az egyes indexpárok tagjait eltérő földrészen jegyzik, azonban azonos módszertan szerint számítják ki az értéküket.

Az eredmények:

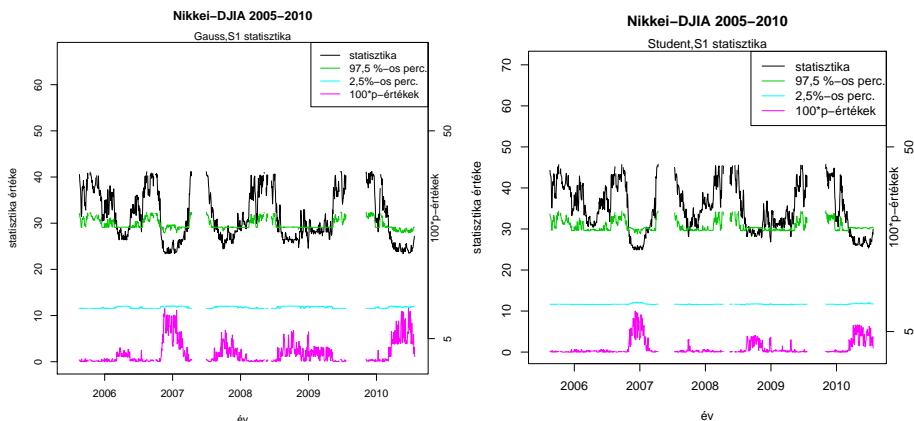


16. ábra. Nikkei-DJIA Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4



17. ábra. S&P500-BUX Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4

A továbbiakban tekintjük a Gauss-kopulával és t -kopulával készített ábrákat!



18. ábra. Nikkei-DJIA, Gauss- és t -kopula, S_1 statisztika

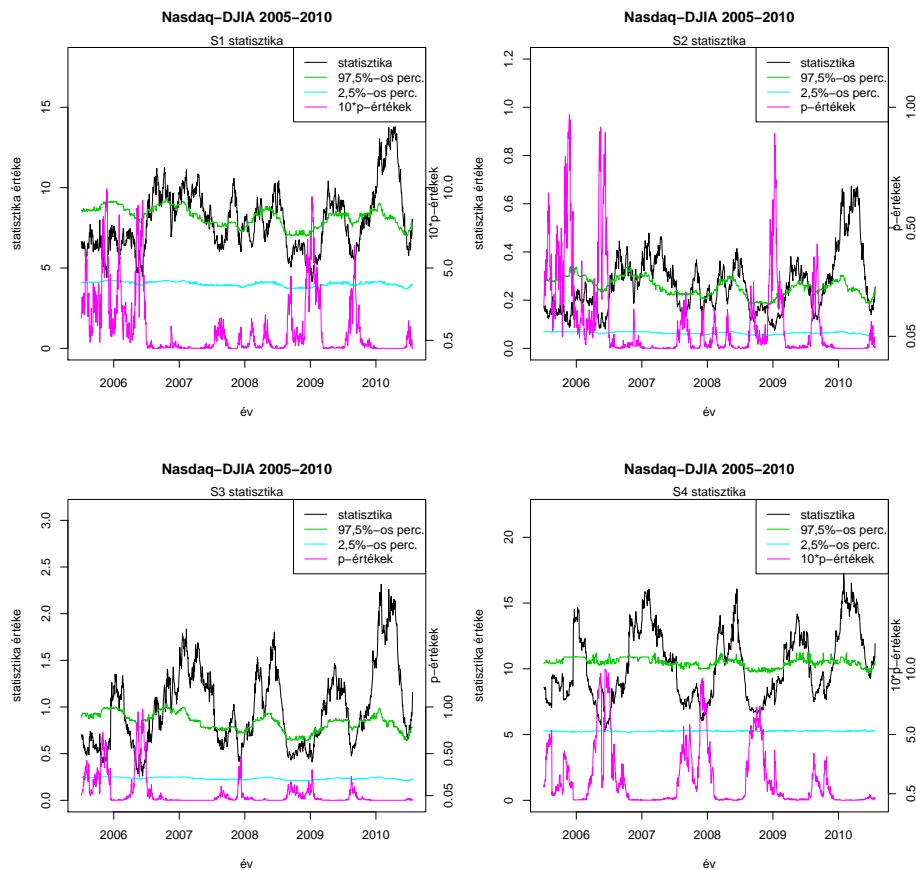
A két indexpár adott tesztstatisztikáihoz tartozó ábrákat tekintve itt is érdekes különbségek és hasonlóságok fedezhetők fel. Tekintsük például az S_1 statisztikához tartozó ábrákat (Gumbel)! Az S&P500-BUX pár esetében a p-értékek elég gyakran megközelítik az 1-et, míg a másik indexpár esetén is gyakran tapasztalható ez. Az illeszkedés mértékének hasonlósága alapvetően fennáll a két ábrán. Érdekes észrevétel, hogy a 2008-as válság időszakában jelentősen kisebbek az S&P500-BUX esetén a p-értékek, mint a Nikkei-DJIA indexpárnál. Azonban a többi tartományban jónak nevezhető az egyezés. Mindezek mellett fennáll az is, hogy adott indexpár esetén a különböző tesztstatisztikákhoz tartozó p-értékek idősorai tendenciában megegyeznek.

Mivel láthatóan „túl jó” az illeszkedés a tartomány jelentős részén (ahogyan a korábbiakban is tapasztalhattuk ezt), ezért érdemes megnézni, hogy a jelenség mögött mi állhat. Ehhez felhasználjuk a 6.ábra empirikus kopuláit.

Az ábra kopulái azt mutatják, hogy az adott indexpárok között eltérő mértékű összefüggés van, ami megmagyarázza az olykor „túl jó” illeszkedést (ez az előző pontban is megfigyelhető volt). Ha megnézzük 11-18., ill. a Melléklet 40. és 41.ábráit, láthatjuk, hogy az erősebben összefüggő indexpárok esetén a *Gauss* és *arkhimedeszi-kopulák* alapján számított p-értékek idősorai jelentős hasonlóságot mutatnak, míg gyenge összefüggés esetén számottevő különbség figyelhető meg.

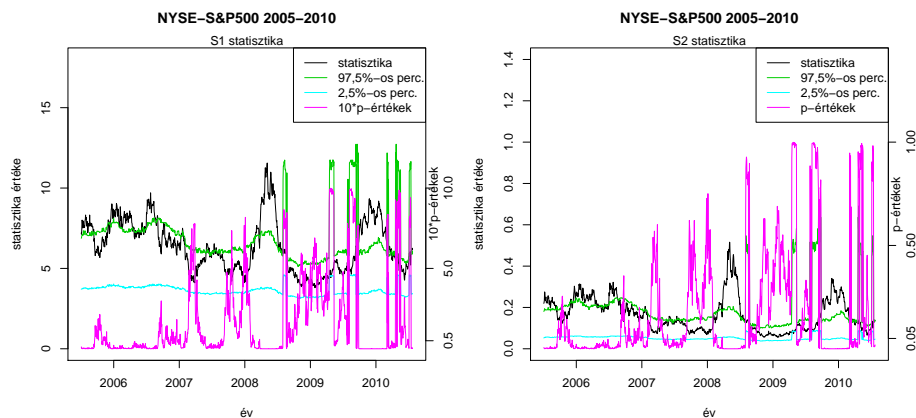
Mivel az összefüggőségek jelentős eltéréseket mutattak, ezért további számítások szükségesek, hogy egyértelműen azonosítani tudjuk a földrajzi elhelyezkedés hatását, kiszűrve ezzel az összefüggőség hatásait.

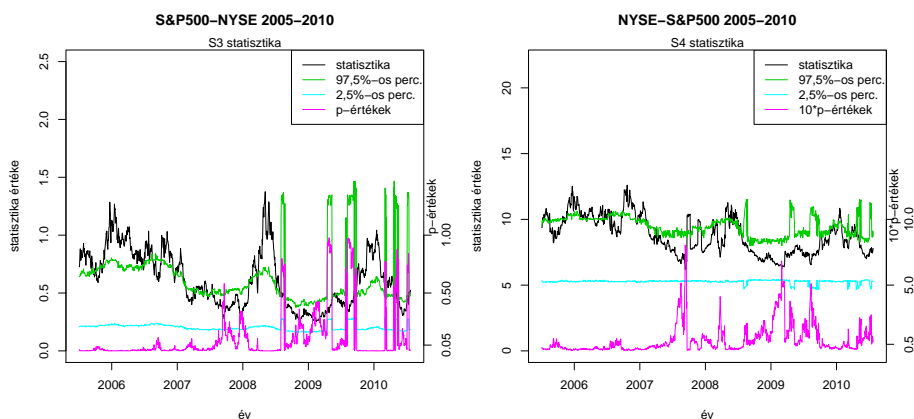
3. Végül adott ország különböző súlyozású indexeire helyezük a hangsúlyt. A vizsgált indexpárok a *Nasdaq-DJIA* és az *NYSE-S&P500* indexek. Az eredmények:



19. ábra. *Nasdaq-DJIA* Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4

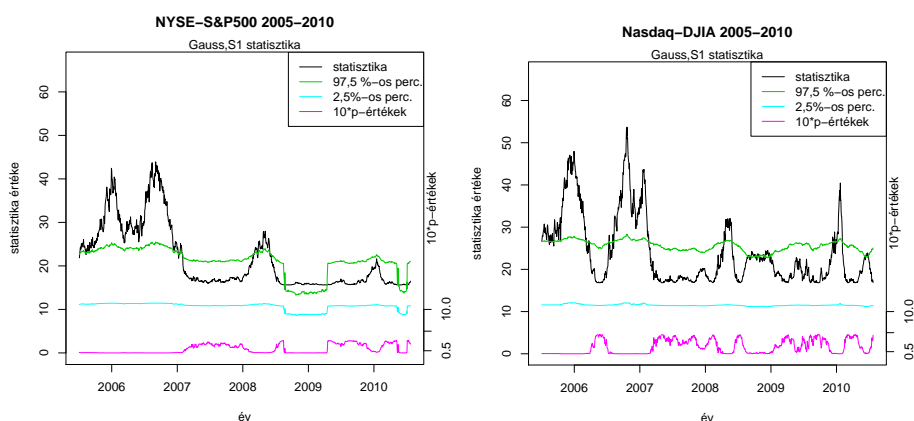
illetve





20. ábra. *S&P500-NYSE Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4*

Gauss-kopulával:



21. ábra. *S&P500-NYSE és Nasdaq-DJIA Gauss-kopula, S_1 statisztika*

Az ábrákat összevetve látszik, hogy ugyan a p-értékek tendenciájában kis különbség van, de az illeszkedés jóságában már jelentősebb eltérések mutatkoznak (pl. a 2005-2006-os időszak, ami ugyan mindig megfelelően illeszkedő időszak, de az ide tartozó p-értékek jelentősen eltérnek a különböző indexpárok esetén). Érdemes megtekinteni az indexpárok alapján elkészíthető empirikus kopulákat is (6. ábra).

Az empirikus kopulák különbsége itt sem elhanyagolható: azt mutatja, hogy habár mindkét indexpár amerikai, mégis jelentősen eltérnek az összefüggőségi viszonyaik. Tehát itt sem mindegy, hogy milyen indexeket alkalmazunk. Feltételezhetően az eltérő súlyozásból adódó esetleges hatások is megjelennek, de ennek mértékét az összefüggőségi hatások miatt igen nehéz meghatározni. De további vizsgálatokkal talán erre is fényt lehet deríteni.

Az előbbieken ellenére felfedezhetőek a grafikonokban közös tulajdonságok, amikkel megvalósítható az a cél, hogy gazdasági eseményekre következtessünk: Az ábrákon vannak olyan időszakok (intervallumok), amikben az indexek súlyozásától, földrajzi elhelyezkedésétől és kopulafajtától függetlenül szorosabb összefüggőséget lehet tapasztalni. Ugyanakkor a megbízhatóság érdekében meg kell gondolni, hogy mely ábrák és indexpárok alkalmasak erre a célra.

Ezt megelőzően tanulmányozni kell azt is, hogy az ablakszélesség milyen hatást gyakorol az eredményekre. Tehát (ahogyan *Az elemzés módszere* című alfejezet is utal rá) érdemes érzékenységvizsgálatot végezni a kapott eredményekre (ami bármelyik tesztstatisztikával elvégezhető). Az *S&P500-Nasdaq* adatsor S_1 statisztikával történő ablakolását (*Gumbel-kopulával*) elvégeztük különböző ablakszélességek esetén (80-120). Az eredmények a 2./5 mellékletben találhatóak.

Az érzékenységvizsgálat tanulságai: Mind az illesztett paraméterek, mind a statisztika ablakolása esetén ugyanazokat a tendenciákat láthatjuk³, illetve a p-értékek is ott növekednek, ahol a kiinduló, azaz 100-as ablakszélesség esetén. Természetesen egyes esetekben a kapott statisztika, vagy paraméterértékek különbözhetnek, ami természetes következménye a véletlen változásoknak.

³Az eljárás elvégezhető bármilyen tesztstatisztikára és kopulára.

A további lépések előtt célszerű végiggondolni, hogy mely ábrák azok, amik valóban érdemi információt tartalmaznak, ezáltal a következtetések levonására alkalmasak. Habár az elmúlt években számos, nemzetközi szinten is lényeges esemény következett be, voltak nyugodtabb, csendesebb periódusok is. Ebből adódik, hogy az összefüggések időszora változatosságot kell, hogy mutasson. Emiatt megkérdőjelezhető a 14., 15., 16. ábra és a Melléklet 40. ábrájának alkalmazhatósága. Ezekben az esetekben olyan alacsony az összefüggőség, hogy csak nagy bizonytalansággal lehet belőlük a gazdasági helyzetre vonatkozó megállapításokat tenni.

4.2.4. Konklúziók

A 14., 15., 16. ábrák és a Melléklet 40. ábrájának kivételével (amiket nem találtunk alkalmasnak arra, hogy gazdasági eseményekre vonatkozó következtetéseket vonjunk le belőlük) láthatjuk, hogy minden vizsgált tesztstatisztika esetén a p-értékek ugyanolyan tendenciát követnek, ami azt mutatja, hogy nem a felhasznált statisztika okozza ezt a jelenséget. Nem utolsósorban az ábrák mindegyikén vannak olyan időszakok, amelyek mindegyikében magasak a p-értékek. Az érzékenységvizsgálat pedig mindezt megerősíti, hiszen egy értelmesen választott ablakszélesség-halmazon belül ugyanazt kaptuk eredményül. Ez azt jelenti, hogy az eredmények ténylegesen végbemenő gazdasági folyamatokat tükröznek, illetve az említett tartományokban fontos események valósultak meg. Érdemes megemlíteni azt is, hogy a kapott eredmények nem vezettek ellentmondásokra.

Az illesztett paraméterek idősorai általában értékelkedést mutatnak (tendenciálisan), ami azt jelenti, hogy a válságok időszaka felé haladva erősödik összefüggőség. [20] szerint ez válságos időkben szokványos jelenség, hiszen ilyenkor a piacokon jellemző a pánikhangulat. Ugyanakkor az általános optimista hangulat is együttmozgást eredményez: ilyenkor emelkednek az indexek árfolyamai. Habár a különböző adatsorok esetén az illeszkedés mutat némi különbséget más-más intervallumokban javul, 2008 végén mindegyikben jelentős változások történnek. Ennek oka minden bizonnyal a gazdasági válság kibontakozása.

Érdemes szót ejteni arról a megfigyelésről is, hogy 2006 környékén is jelentősnek mondható az együttmozgás. Az Európai Központi Bank 2006. évi jelentése [21] szerint ebben az időszakban nagyon optimista hangulat uralkodott a piacokon, aminek következtében jelentősen emelkedtek a fontosabb tőzsdeindexek értékei. Arról is tájékoztat, hogy 2006 második felétől kezdve már nem volt jellemző ez az emelkedés.

Szintén érdekes a 2007 és 2008 közötti időszak is, hiszen ekkor is magasabbak a p-értékek. Ennek magyarázata lehet, hogy 2007 nyarán kibontakozott a *subprime válság*, vagy *másodlagos jelzálogpiaci válság*, ami az Egyesült Államok ingatlan- és bankszektorából indult el, és érzékenyen érintette a világgazdaságot.

Hogy az egyes indexekre (és így az illeszkedésre) pontosan milyen hatással is vannak a válságos és konjunktúra-időszakok, összefüggésben állhatnak az indexek összetevőivel (így azzal, hogy mely iparágak vannak jelen az indexben), illetve az egyes országok válságkezelésével is. Ugyanakkor ahhoz, hogy ezeknek a hatásairól pontos ismeretekre tegyünk szert, további vizsgálatok szükségesek.

A tesztstatisztikák és a paraméterek idősoraiban felfedezhető szezonális hatások. Ehhez minden bizonnyal hozzájárul az ún. január-hatás: az év elején az értékpapírok értéke gyakran jelentősen megemelkedik az év többi időszakához képest.

Talán az illesztett paraméterek időszora a legtanulságosabb: a választott kopula, index és tesztstatisztika értékétől függetlenül ugyanolyan tendenciák mutatkoznak az idősorban.

5. További gyakorlati alkalmazások

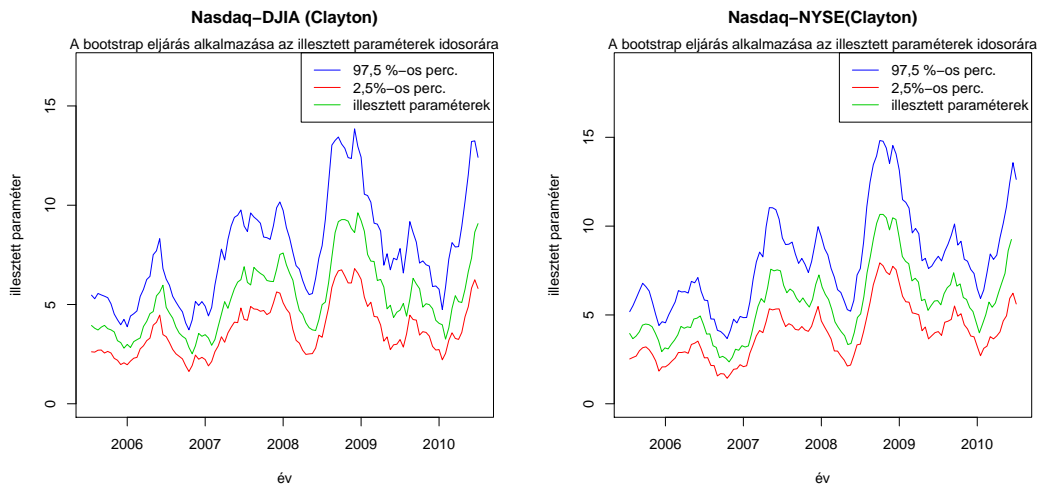
5.1. Bootstrap módszer alkalmazása

A bootstrap módszereket a gyakorlatban számos alkalommal segítségül lehet hívni, amikor egy x_1, x_2, \dots, x_n mintából minél több információt ki akarunk sajtolni, ugyanis az eredeti mintából visszatevéses mintavétellel a mintáéval megegyező elemszámú „új” mintákat veszünk [22]. Tehát a módszer számítógépes szimuláción alapuló, eloszlásfüggetlen matematikai-statisztikai módszer. Így a dolgotban is jól alkalmazható.

A módszer segítségével az illesztett paraméterek idősorát szimuláltuk (a futási idő kordában tartása és az esetleges időbeli összefüggések hatásának eliminálása érdekében az idősorok csak minden 10. pontjában végeztünk szimulációt), amivel egyrészt elméleti eredményeket tudtunk ellenőrizni, másrészt gyakorlati alkalmazásokat tudtunk megvalósítani. A korábbiakhoz hasonlóan a szimulációval kapott eredmények adott kvantiliseivel konfidencia-intervallumot is meg tudtunk határozni (amit fel is használunk). Először veszünk két példát: a *Nasdaq-DJIA* indexpár paramétereinek idősoraiból kapott eredményeket hasonlítjuk össze *Gumbel*- és *Clayton-kopula* esetén (100-as ablakszélesség), továbbá tegyük meg ugyanezt a *Nasdaq-NYSE* esetén is. Megj.: Ennél a módszernél az éppen aktuális ablakba eső mintaelemekből vesszük a bootstrap mintákat.

Mivel a bootstrap módszerek eloszlásfüggetlenek, ezért az eredményeket (legalábbis tendenciálisan) nem befolyásolja jelentősen a felhasznált kopula fajtája. Ennek szemléltetésére felhasználhatók a 3./1 melléklet ábrái.

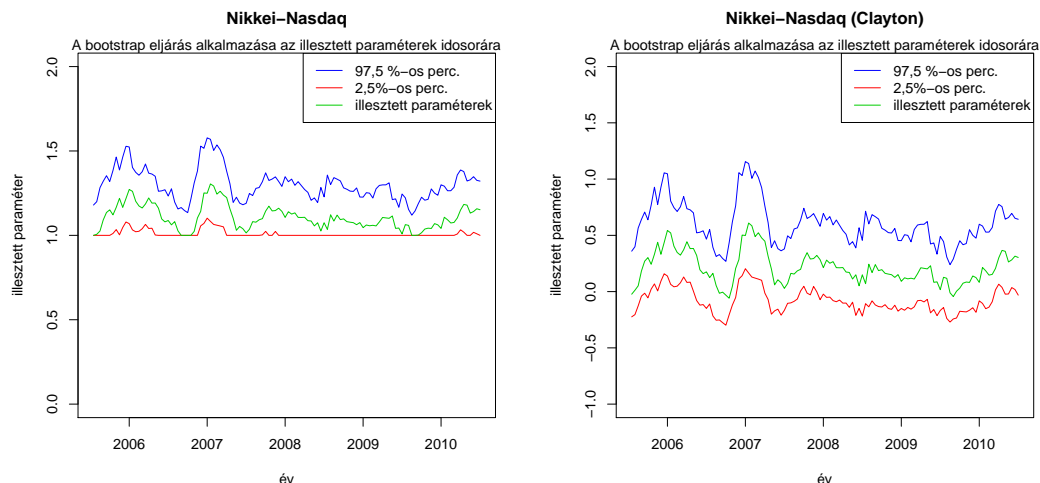
Clayton-kopulával:



22. ábra. *Illesztett paraméterek és a szimulált kvantilisek idősora (Clayton, 100-as ablakszélesség)*

Az ábrákat összehasonlítva láthatjuk, hogy ugyan az illesztett paraméterek értékei különbözhetnek (ami természetes következménye a felhasznált kopulák és indexpárok eltérésének), a szimulált értékek tendenciái mégis nagyon hasonlóak (ami a konfidencia-intervallumok szélességeire is elmondható). Ugyanakkor érdemes azt is megfigyelni, hogy a nagy krízis időszakában jelentősen szélesebb a konfidencia-intervallum, mint a nyugodtnak tekinthető 2005-2006-os években. Ennek feltételezhetően az a magyarázata, hogy válságos időkben jóval bizonytalanabb a világ, mint nyugodtabb periódusokban.

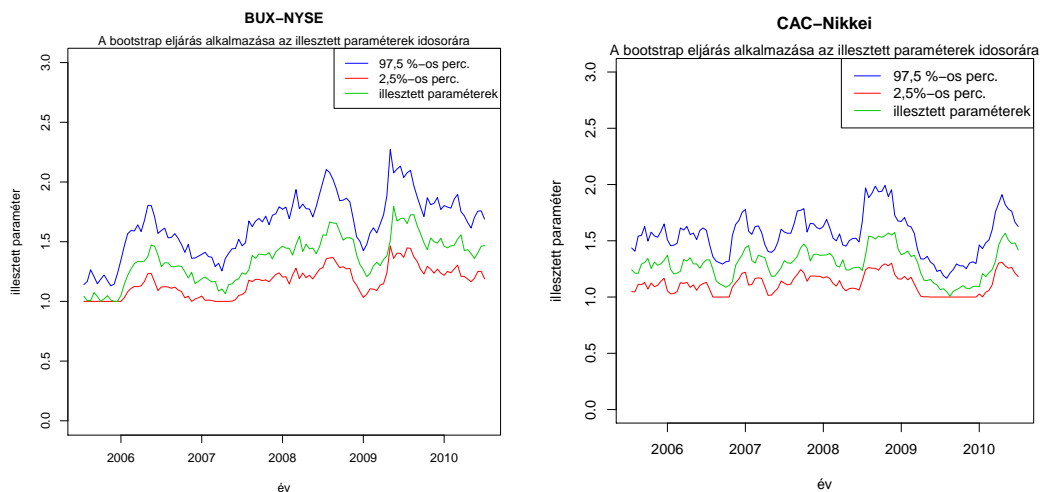
Az előbbi indexpárok mind erősebben összefüggők (illetve mindegyik amerikai), így érdemes megvizsgálni, hogy gyengébben összefüggő indexek esetén mit láthatunk. Vegyük például a *Nikkei-Nasdaq* indexpárt! Itt szemléltetésképpen érdekesebb megvizsgálni a *Gumbel-kopulás* esetet is, ugyanis habár az eloszlásfüggetlenség továbbra is fennáll, a paraméterkorlátok miatt érdekes ábrát kapunk.



23. ábra. Illesztett paraméterek és a szimulált kvantilisek időszora (rendre Gumbel és Clayton, 100-as ablak-szélesség)

Láthatóan eltér az illesztett paramétereknek a tendenciái a korábbiaktól. A *Nikkei-Nasdaq* párnál a *Gumbel-kopula* esetén a konfidencia-intervallum alja gyakran eléri az 1-et (aminél kisebb értéket nem vehet fel az illesztett paraméter a kopula konstrukciója miatt), ugyanakkor *Clayton-kopulánál* ez a probléma nem merül fel. Érdekes megfigyelés az is, hogy az intervallum szélessége nem függ olyan markánsan az időponttól (ugyanakkor a válság idején ez a szélesség kisebb, mint a korábbiakban), illetve az, hogy az illesztett paraméterek értékének jelentősebb emelkedése 2006-2007 valósul meg, míg a válság idején folyamatos csökkenés tapasztalható. Nem elhanyagolható továbbá a negatív paraméterek megjelenése sem. Mindez egy igen egyedi összefüggési struktúra jelenlétére utal.

További néhány (*Gumbel-kopulával*) történő összehasonlítást is érdemes megnézni:

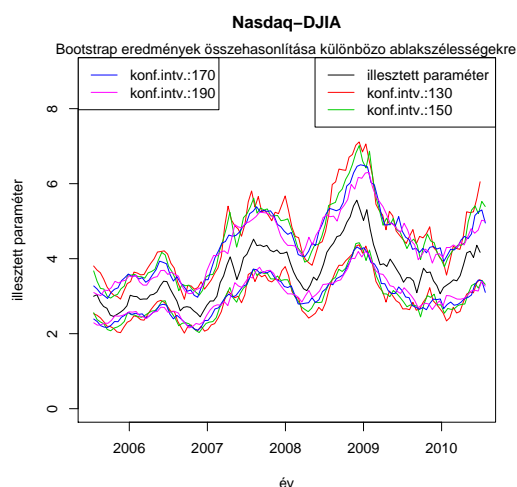


24. ábra. Illesztett paraméterek és a szimulált kvantilisek időszora (*Gumbel*, 100-as ablak-szélesség)

A további két ábrán is sok érdekesség figyelhető meg: a konfidencia-intervallumok szélessége itt is jóval kevésbé függ az időponttól, mint az erősebben összefüggő esetekben. Ugyanakkor míg a *CAC-Nikkei* esetében lényegében mindig azonos ez a szélesség, addig a *BUX-NYSE* párnál a válság hatása bizonyos mértékben megmutatkozik, mivel ekkor valamennyivel szélesebb a konfidencia-intervallum, mint pl.2006-2007 között. Mindebből az következik, hogy még a gyengébben összefüggő esetekben is fontos az, hogy milyen indexpárokkal dolgozunk (ami reális eredmény).

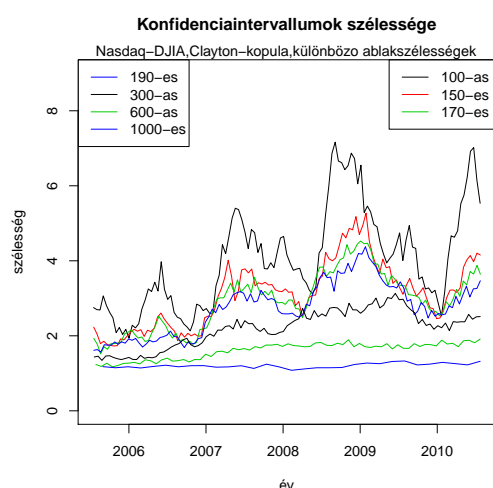
A továbbiakban megvizsgáljuk az eredményeket különféle ablak-szélességek esetén is. Ismeretes, hogy nagyobb mintaelemszám esetén a bootstrap módszerekkel kapott becslések bizonytalansága jóval kisebb. A mi esetünkben azt várjuk, hogy szélesebb ablakok alkalmazásával szűkebb konfidencia-intervallumot kapunk.

Először nézzük meg a *Nasdaq-DJIA* indexpárt, *Gumbel-kopula* esetén:



25. ábra. *Illesztett paraméterek és a szimulált kvantilisok idősorainak összehasonlítása (Gumbel),*

Az ábra jól mutatja, hogy valóban egyre szűkebb konfidencia-intervallumokat kapunk növekvő ablakszélesség esetén. Ezután ugyanezt az indexpárt vizsgáljuk, annyi különbséggel, hogy az intervallumok szélességeit vetjük össze.



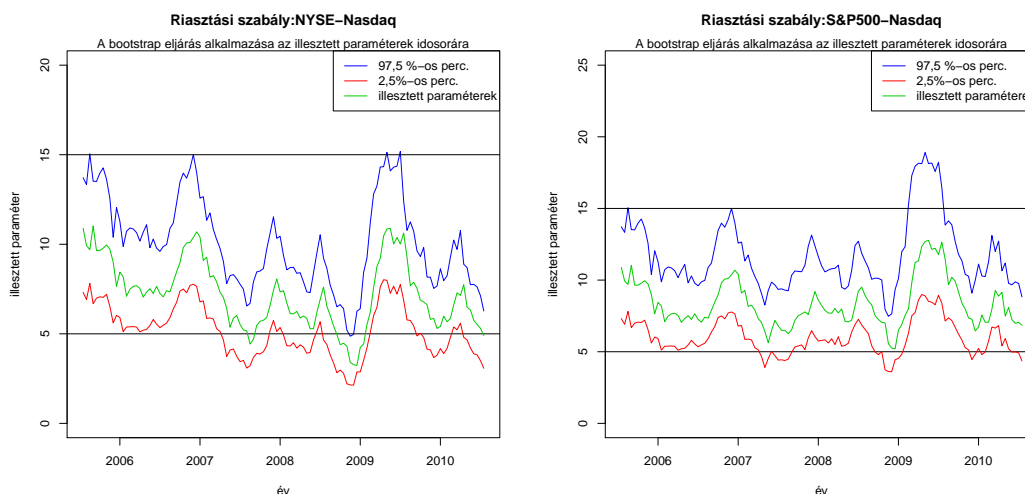
26. ábra. *Illesztett paraméterek és a szimulált kvantilisok idősorainak összehasonlítás (Clayton)*

Ez az ábra egyrészt mutatja, hogy eltérő ablakszélességekhez eltérő konfidenciaintervallum-szélesség tartozik, másrészt pedig azt, hogy a nyugodtabb időszakok esetén jóval kisebb a szélességek eltérése, mint válságos időkben. Érdeemes megjegyezni, hogy ez nemcsak a 2008 utáni gazdasági krízisre mondható el, hanem a 2007-2008 között subprime válságra is igaz. Így érdekes kérdés, hogy adott ablakszélesség esetén lehet-e egyszerűen általánosabb következtetéseket levonni a válságok jelenlétéről a konfidencia-intervallumok, illetve az illesztett paraméterek alapján.

Ehhez ún. riasztási szabályt készíthetünk. A megvalósításhoz több megoldás áll a rendelkezésre:

1. Választunk egy olyan időszakot, illetve egy olyan adatsort és kopulát, ami esetén jó illeszkedést tapasztalunk. Ilyen például az *S&P500-DJIA* indexpár (*Gumbel-kopula*, 2005.július 17.-2007.február 20.). Ezt követően az ezekkel kapott eredményeket összehasonlítjuk a vizsgálni kívánt időszak eredményeivel (jelen esetben a 2007 utáni időszak). Az összehasonlítás úgy történik, hogy a referencia időszakra jellemző konfidencia-intervallumhoz (vagy annak legnagyobb, illetve legkisebb értékéhez) szintvonalat, vagy sávot rendelünk, és figyeljük, hogy a későbbi időszakokban elhagyja-e a becsült paraméter a konfidencia-intervallumot. Ugyanis ha ez megtörténik, akkor mindenképpen valamilyen jelentősebb változás megy végbe. Összehasonlításképpen megvizsgáljuk, hogy mit kapunk, ha az előbbieket *Clayton-kopulával* valósítjuk meg.

Az eredmények:

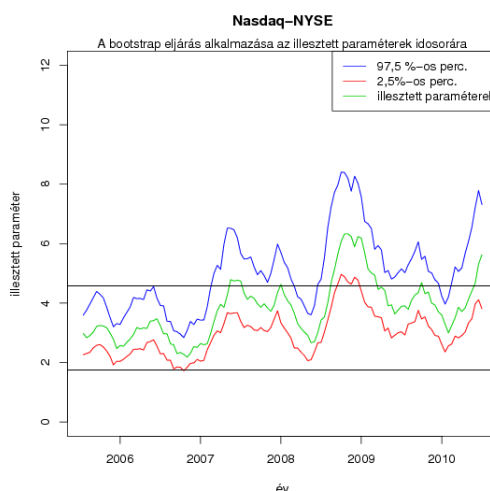


27. ábra. Riasztási szabály: NYSE-Nasdaq, S&P500-Nasdaq (Clayton, 100-as ablakszélesség)

Ha megnézzük az ábrákat, látható, hogy 2007-2009 között, illetve 2010 után gyakran kilóg a konfidencia-intervallum alja a sávból (illetve NYSE-Nasdaq esetén az illesztett paraméterek is), amik pont válságos időszakok. Ugyanakkor ennek a módszernek az alkalmazása megtévesztő lehet, hiszen az egyébként erősen összefüggő referenciát pl. gyengén összefüggő indexekkel összevetve hibás következtetésekre juthatunk (más az összefüggés mértéke, így az illesztett paraméterek nagysága is jelentősen eltér, de ezek alapján nem lehet semmilyen következtetést levonni az összefüggőségek erősödésére vagy gyengülésére, esetleg a válságokra vonatkozóan).

2. Egy másik megoldást jelenthet az, ha minden indexpár esetén kijelölünk az adott indexpárhoz tartozó idősből egy referenciát, és ehhez viszonyítunk (*Gumbel-kopulával* tesszük).

Az eredmények:



28. ábra. Riasztási szabály: Nasdaq-NYSE (100-as ablakszélesség)

Az ábrát tekintve láthatjuk, hogy javítottuk az eredményeket (ld. 27): mind a jelzalogpiaci válság, mind a nagyobb gazdasági krízis időszakában elhagyja az illesztett paraméterek időszora a kijelölt sávot. Tehát ez a megoldás már sokkal inkább használható. A 3./3-as mellékletben további indexpárookra is megnézhetjük a riasztási szabályt. Azonban a CAC-Nikkei esetében az idősor nem hagyta el a sávot. Ennek következtében ennek a megoldási módszernek az alkalmazása esetén sem mindegy, hogy milyen indexpárt választunk.

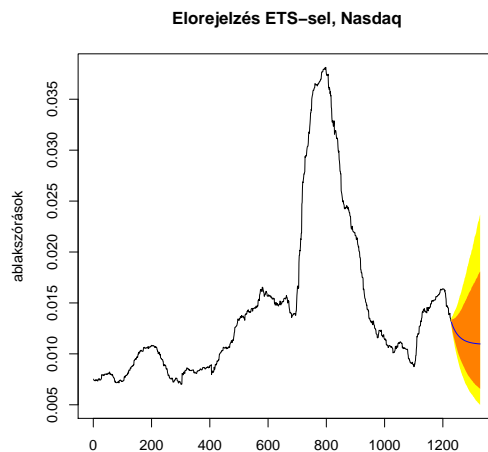
A szimulációkkal kapott eredmények alapján láthatjuk, hogy nem jutottunk ellentmondásra a 4. fejezet állításaihoz és következtetéseivel: az ablakos módszerrel válságosnak ítélt időszakokat a bootstrap módszer alapján is azoknak találtuk. Ugyanakkor azt is tapasztaltuk, hogy a mintaelemszám (ablakszélesség) növelésével szűkültek az illesztett paraméterek idősoraihoz tartozó konfidencia-intervallumok, illetve teljesül az is, hogy *Gumbel* és *Clayton-kopulákkal* is ugyanazokat az eredményeket kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a bootstrap módszerek általános tulajdonságai is teljesültek. Az előbbiekből következik, hogy a modellek megbízható eredményeket adnak.

5.2. Előrejelzés

Az illesztési paraméterek idősora előrejelzésre is lehetőséget ad, amit az alábbi módon igyekeztünk megközelíteni.

Az egyik megoldási lehetőség az R beépített *forecast* programcsomagja, amivel automatikus előrejelzést lehet megvalósítani az *exponential smoothing*-gal (ETS). Ez az eljárási módszer gyakran alkalmazott az üzleti életben, amikor rövidtávú előrejelzéseket szükséges készíteni. A módszer és a mögöttes matematikai tartalom megtalálható [23]-ban.

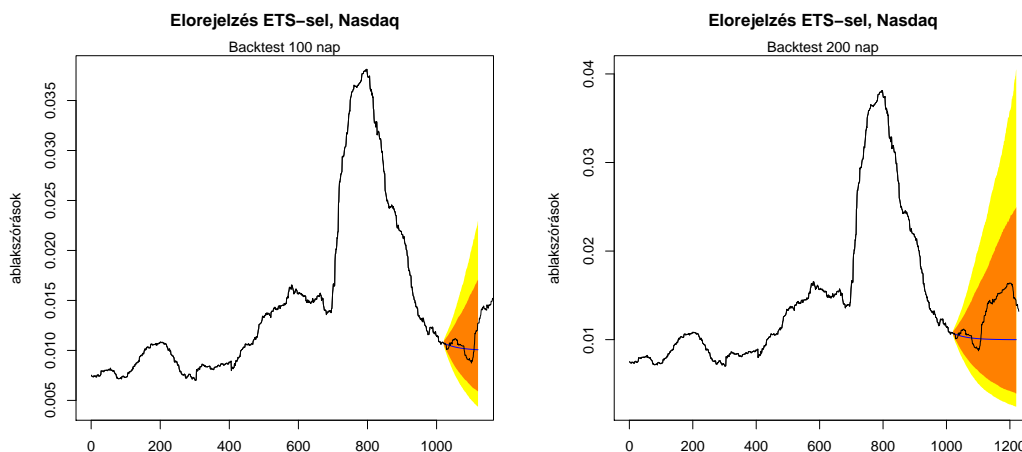
Most lássunk példát! A már korábban felhasznált, a *Nasdaq* index szórásának időbeli változását mutató 15. ábra *Nasdaq*-ra vonatkozó adatsorának előrejelzése:



29. ábra. A *Nasdaq* szórása időbeli változásának előrejelzése 100 napra

Ha meg akarunk győődni arról, hogy mennyire jó az előrejelzés, érdemes backtesteket végrehajtani: ekkor a teljes idősor egy részéből készítünk előrejelzést a következő időszakra (aminek az értékeit ismerjük). Így az előrejelzés összevethető a megfigyelt értékekkel, ami megteremti a kiértékelés lehetőségét.

Backtest 100 és 200 napra:



30. ábra. Backtest rendre 100 és 200 napra

A sötéttel jelölt tartomány az előrejelzés 80%-os, a világos tartomány pedig a 95%-os konfidencia-intervallumot jelöli. Látható, hogy a 100 napos backtest igen jól mutatja azt a tendenciát, ami a megfigyelt adatok esetén valóban érvényesül (a megfigyelt értékek pedig benne vannak a konfidencia-intervallumokban). Az előrejelzés 200 napra már rosszabb, illetve bizonytalanabb, így a tendenciák egy lehetséges, nem várt fordulópontját már jelentősen kisebb eséllyel lehet előrejelezni (célunk azonban nem is volt hosszabb távú előrejelzések készítése, csak illusztráció).

Az ábrák alapján arra a következtetésre lehet jutni, hogy a *Nasdaq* index jövőbeli szórása időben csökkenő. Ez egy indikációja lehet annak, hogy a válság lassan elcsitul.

Előrejelzést természetesen bármelyik másik index esetén lehet meg lehet valósítani. Az ablakszórásokra elvégzett előrejelzések két nagy előnye: egyrészt nincs az adatokban szezonális, másrészt nem merülnek fel olyan kérdések, hogy az illesztett kopula fajtája mekkora befolyással bír az eredményekre.

Adott indexpárok ablakolt illesztett paramétereire és tesztstatisztikáira is szintén meg lehet valósítani az előbbi eljárást. Azonban figyelembe kell venni az adatsorokban megfigyelhető szezonálisitást is: az ETS modellel (hasonlóan a már vizsgált esethez) inkább csak rövidebb időszakokra lehet kivitelezni megbízható előrejelzéseket (hiszen lehet, hogy pont egy szezonváltás szélén vagyunk). Hosszabb távon pedig a paraméterértékek változásának tendenciáit is érdemes figyelni (szezonális, az idősor trendje).

Így a modellnek a tesztstatisztikák értékeire történő alkalmazását is célszerű további vizsgálatok alá vonni. Tervezzük továbbá egyéb idősoros modellek alkalmazását is (rezsiváltó modellek, ARCH-GARCH-modellek stb.).

Magát a szezonális kérdését is tanulmányozzuk még a későbbiekben. Az eddigi elemzéseket a *TRAMO-SEATS* módszerrel dolgozó *Demetra* programmal (amit kifejezetten gazdasági idősorok feldolgozására készítették) végeztük, ami nem ítélte az idősort elegendően szezonálisnak ahhoz, hogy a tendenciákat megállapítsa és ezek alapján előrejelzéseket készítsen. A programról és a módszerről bővebben olvashatunk [24]-ben.

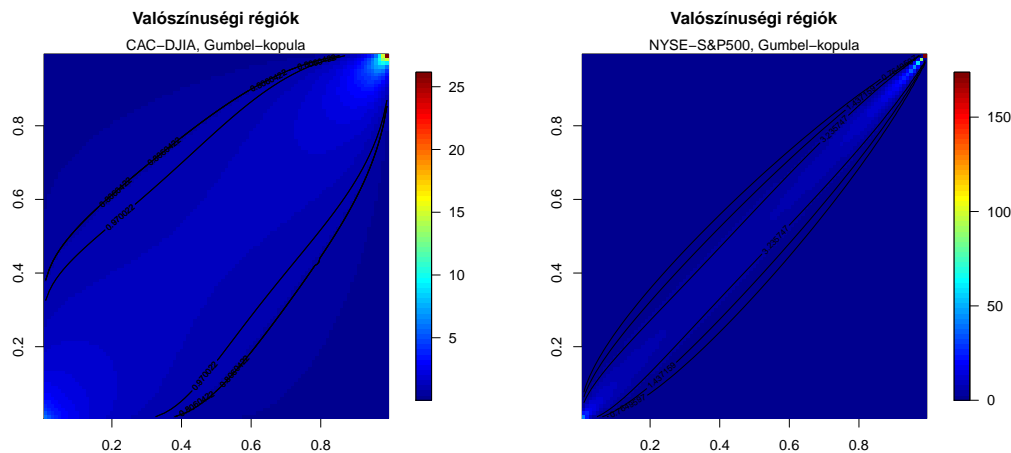
5.3. Valószínűségi régiók és visszatranszformálás

Az előbbin túl egyéb, érdekesebb módon is megközelíthetjük az előrejelzés kérdését, igaz közvetett úton. Ábrázolhatóak ún. valószínűségi régiók (vagy kontúrok), ami azt jelenti, hogy meghatározzuk az adott indexpárhoz tartozó kopulák sűrűségfüggvényeit, illetve kiszámítjuk azokat a tartományait a sűrűségfüggvénynek, amelyekhez adott valószínűség hozzárendelhető. Legyen $C(u, v)$ egy kopula függvénye. Ekkor a sűrűségfüggvénye (legyen f) a következő:

$$f = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \quad (16)$$

[4] alapján pedig ha C folytonos az értelmezési tartományán, akkor létezik sűrűségfüggvénye. A dolgozatban használt kopulák folytonosak, így a sűrűségfüggvényük létezik.

A számolások során a 0.75-ös, 0.9-es és 0.95-ös valószínűséghez tartozó régiókat határoztuk meg, méghozzá egy kétdimenziós rácson (grid), aminek a felosztási egysége tetszőlegesen változtatható (a dolgozatban 0.01). A sűrűségfüggvény egyes grid-eken lévő értékei alapján lehetőség van az egyes négyzeteket eltérő színekkel jelölni, kiszínezni. Ezáltal a sűrűségfüggvény adott grid-beli értékeinek különbözőségei is megfigyelhetőek. Néhány példa:



31. ábra. Valószínűségi régiók: *CAC-DJIA* és *NYSE-S&P500*, Gumbel-kopula

Az ábrákon a sötét vonalakkal határolt területek adják a régiókat (a *CAC-DJIA* esetén két tartomány egybeesik). Az ábrák szerint a sűrűségfüggvények értéke a grideken jellemzően jelentős eltéréseket mutat (az összefüggőbb esetben „magasabb” a sűrűségfüggvény). Ugyanakkor (az empirikus kopuláknak megfelelően) a *CAC-DJIA* pár esetében kevésbé koncentrált, mint a *NYSE-S&P500* indexpárnál. Ezek, illetve a régiók alapján pedig következtetni lehet az adott indexpár (mint portfólió) kockázatosságára: ha az egyik index értéke jelentősen esik, akkor attól függően, hogy milyen erősek az összefüggőségek, a másik is értékvesztést szenved el. A két amerikai indexből összeálló pár esetén nagyobb az illesztett paraméter (ezáltal az összefüggőség is erősebb), így ez a pár kockázatosabb. Ugyanezt mondhatjuk el a régiók alapján is.

A valószínűségi régiók (így a sűrűségfüggvény) meghatározása mellett egyéb lehetőség is a rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy az indexpárok (mint portfóliók) kockázatosságát megvizsgáljuk: az empirikus kopula invertálásával visszatérhetünk az eredeti változókra. Ezt hívjuk visszatranszformálásnak.

Ehhez meg kell határozni a vizsgálni kívánt loghozamadosor empirikus kopulájának marginális eloszlásait, illetve azok paramétereit. Az R beépített eljárásainak segítségével pedig megadhatóak a régiók. Pl. a *BUX-Nasdaq*, illetve a *NYSE-DJIA* adatsor esetén a peremekre a legjobban *Weibull*, azaz egy általánosított extrémérték-eloszlás illeszkedik.

6. Összefoglalás

Az elemzések során számos tőzsdeindex időbeli viselkedésének, illetve összefüggéseinek a jellemzőit mutattuk be kopulákkal történő modellezésen keresztül. A célkitűzésünk a főbb összefüggések feltárása volt (miközben szem előtt tartottuk a világgazdaságban végbemenő negatív és pozitív irányú változásokat).

A többdimenziós adatsorok kezelhető vizsgálatát tette lehetővé a *valószínűségi integráltranszformáció*, amivel az összefüggőségek tanulmányozása egydimenziós feladatra vezethető vissza (skaláfüggetlenül). Ennek a megvalósítását tette lehetővé az integráltranszformált függvény, illetve annak becslése (K és K_n -függvények).

Az alkalmazások előtt először feltáró elemzést végeztünk, ami során számos ökonometriai vizsgálatot is alkalmaztunk. A cél az volt, hogy az összefüggőség vizsgálatának lehetőségeit felmérjük más módszerekkel is. Azonban láttuk, hogy az összefüggőségek pontosabb vizsgálata kényelmesebb és kezelhetőbb kopulák segítségével (ráadásul finomabb összefüggésekről is mélyebb ismeretekre tudtunk szert tenni, mintha idősoros modelleket alkalmaztunk volna).

Több lehetséges kopulacsaládot is felhasználtunk a vizsgálatokhoz: *arkhimedeszi-kopulákat*, illetve az *elíptikus kopulák* két fajtáját, a *Gauss* és *t-kopulákat*. Ezeknek az alkalmazásával megvizsgáltuk, hogy az egyes loghozam-idősorok transzformáltjaira mennyire illeszkednek jól a választott kopulák, illetve hogy mennyire képesek visszaadni az adatoknak az empirikus kopulák szélein megfigyelhető erős összefüggését. Mindezzel nemcsak azt tudtuk meghatározni, hogy mely kopulák illeszkednek jól, hanem hogy szükséges-e az illeszkedés időbeli változásainak vizsgálata.

Az eredmények szerint teljes adatsorokra az illeszkedés nem túl jó. Így az időbeli változások modellezése fontos feladattá vált. Ráadásul különbségek mutatkoztak az egyes kopulák illeszkedésének jóságában is: az *arkhimedeszi* család tagjai közül a *Gumbel-kopula* teljesített legjobban a teszteken, míg a *Clayton* és *Frank-kopulák* illeszkedése teljesen rossznak bizonyult. A *Gauss* és *t-kopulák* illeszkedése viszont jobb volt.

Az időbeli viselkedés vizsgálatát ablakos módszerrel valósítottuk meg, ugyanis az időbeli változások jobban érzékelhetővé, ezáltal kezelhetővé válnak. Ennek alkalmazásával megállapítottuk, hogy az illesztett paraméterek idősorai azonos tendenciákat követnek, illetve a tesztstatisztikák értékeinek idősoraiiban szezonális figyelhető meg. Az kapott eredményekben pedig nem fedeztünk fel ellentmondásokat.

Vizsgálataink továbbá képesek voltak azonosítani az elmúlt években végbemenő jelentősebb világgazdasági eseményeket (a 2006 nyaráig tartó fellendülést, a 2007-ben kibontakozó másodlagos jelzálogpiaci válságot, illetve a gazdasági világválságot is (minden vizsgált kopulával és tesztstatisztikával)) és a bemutatott riasztási szabály alapján vázoltunk egy lehetőséget a hasonló változások jövőbeni detektálására. Egyéb gyakorlati alkalmazásként pedig egy rövid betekintést nyertünk az előrejelzésekkel, az indexpárok (mint portfóliók) kockázatosságával, illetve az illesztett paraméterek bootstrap szimulációival kapcsolatos kérdésekbe. A bootstrap módszer alkalmazása során pedig megállapítottuk, hogy a felhasznált modellek megbízható eredményeket adnak.

7. További tervek

A dolgozat kétdimenziós esetet vizsgált. Ugyanakkor az indexek már leírt módon történő tanulmányozása nem ütközik elvi akadályokba akkor sem, ha magasabb dimenziókat tekintünk [6]. Érdemes tehát a későbbiekben megvalósítani ezeket a vizsgáldásokat, így általánosítva eredményeinket.

8. Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetet kifejezni Témavezetőmnek az érdekes megoldandó feladatokért, illetve a rengeteg jó tanácsért, segítségért, amit a közös munkánk során kaptam. Ahhoz, hogy a dolgozat elkészüljön, nagyban hozzájárult Konzulensem is, aki Témavezetőmhöz hasonlóan sokat segített a felhasznált programok megírásában és tökéletesítésében (külön köszönetet érdemel Konzulensem a *Gauss* és *t-kopulák K -függvényeiért*). Továbbá, köszönettel tartozom Michaletzky Mártonnak is (BCE, Befektetések és Vállalati Pénzügyek Tanszék), amiért az indexekről szóló bevezetőt elolvasta, és ellenőrizte a tartalmát (illetve a szükséges javításokra is felhívta a figyelmem).

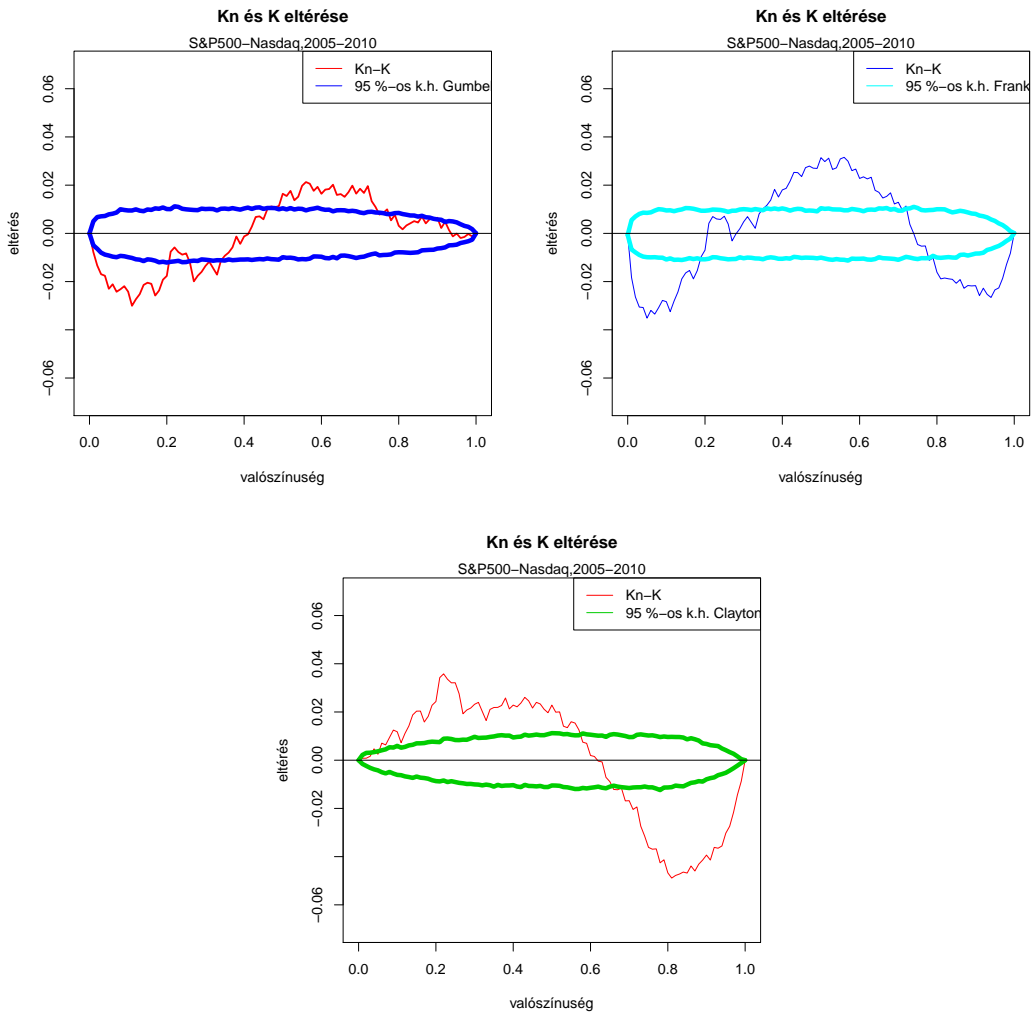
A témavezető munkáját a TÁMOP 4.2.1/B-09/KMR-2010-0003. projekt támogatta.

Hivatkozások

- [1] Bodie-Kane-Marcus: *Befektetések, Aula Kiadó 2005*
- [2] Rama Cont: *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, Quantitative Finance Volume, 1(2000),223-236*
- [3] Benedek Gábor-Kóbor Ádám-Pataki Attila: *A kapcsolatszorosság mérése m-dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások, Közgazdasági Szemle, XLIX.évf.,2002.február (105-125.o)*
- [4] Roger B. Nelsen: *An Introduction to Copulas- Second Edition, Springer 1999*
- [5] TDK-dolgozat. Barra István: Kopulák alkalmazása a többváltozós extrémérték-elméletben, BCE, 2007.
- [6] P. Rakonczai, A. Zempléni: Copulas and goodness of fit tests. In: Recent advances in Stochastic Modelling and Data Analysis. Ed.: C.H.Skiadas, World Scientific, 2007, pp. 198-205.
- [7] <http://www.cs.elte.hu/~zempleni/osszef.pdf>
- [8] Wired Magazine: Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street
- [9] Janecskó Balázs: Portfóliószemléletű hitelkockázat szimulációs meghatározása, Közgazdasági Szemle, XLIX.évfolyam, 2002.július-augusztus
- [10] Stefano Demarta & Alexander J.McNeil: The t Copula and Related Copulas
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/S%26P_500 és http://en.wikipedia.org/wiki/Price_return
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/CAC_40
- [13] <http://hu.wikipedia.org/wiki/BUX>
- [14] http://en.wikipedia.org/wiki/Nasdaq_Composite
- [15] <http://www.nyse.com/about/listed/nya.shtml>
- [16] http://en.wikipedia.org/wiki/Hang_Seng_Index
- [17] http://en.wikipedia.org/wiki/Nikkei_225
- [18] Briley-Myers: *Modern vállalati pénzügyek, Panem 1999*
- [19] Darvas Zsolt: Bevezetés az idősorlemzés fogalmaiba, Jegyzet, 2005 (<http://finance.uni-corvinus.hu/index.php?id=puoko2010>)
- [20] Marossy Zita (BCE, Befektetések és Vállalati Pénzügyek Tanszék, egyetemi tanársegéd) szóbeli információja
- [21] <http://www.ecb.int/pub/pdf/annrep/ar2006hu.pdf>
- [22] Varga László: Bootstrap módszerek és alkalmazásuk összefüggő adatsorokra, TÁMOP Kutatószeminárium, 2010
- [23] <http://www.jstatsoft.org/v27/i03/paper>
- [24] Bauer Péter: Szezonális kiigazítás (BPM Pénzügyi ökonometria kurzus előadása, 2010; http://www.uni-corvinus.hu/fileadmin/user_upload/hu/tanszekek/gazdalkodastudomanyi/tsz-bvp/tantargyak/2010-2011_1/PUOK/Szezonkiig_roevitett.pdf)

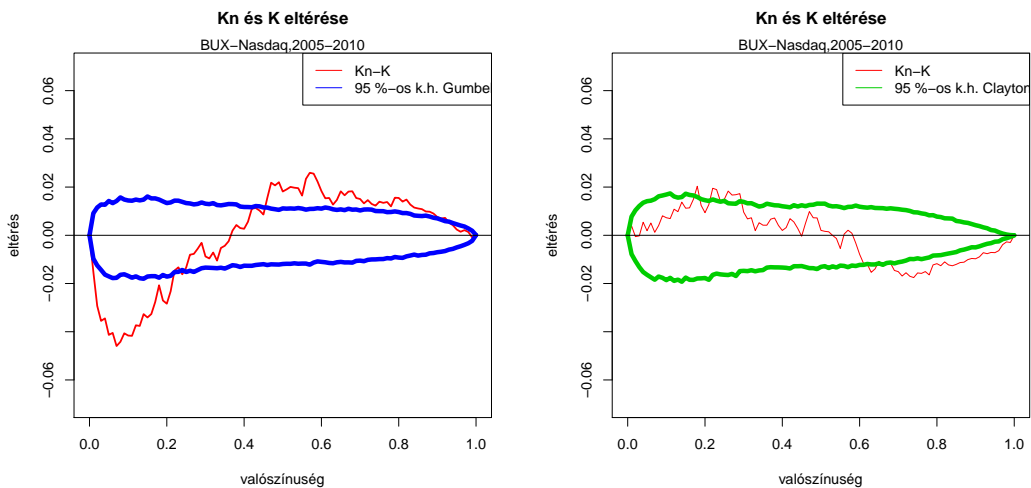
9. Mellékletek

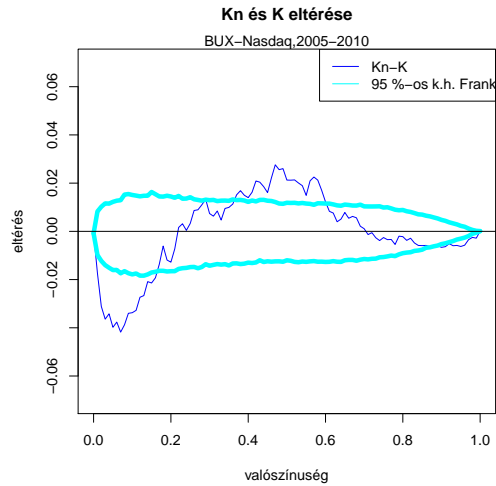
1.számú melléklet: Konfidencia-határok:



32. ábra. A K_n és K függvény illeszkedése rendre Gumbel, Frank, illetve Clayton kopula esetén (S&P500-Nasdaq)

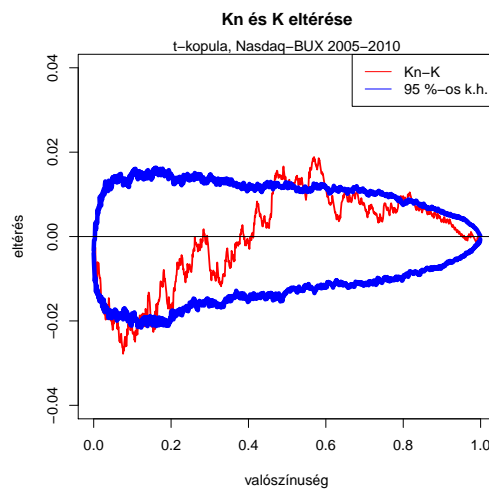
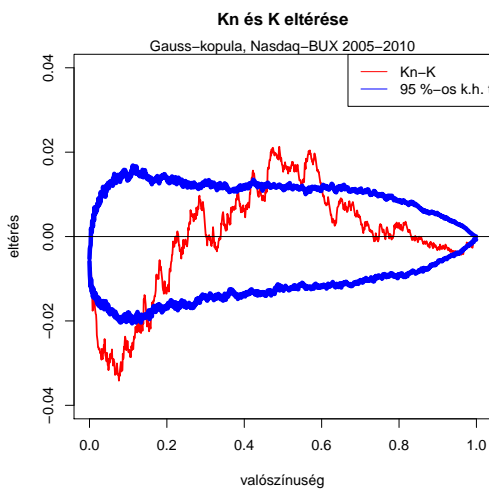
Továbbá: BUX-Nasdaq



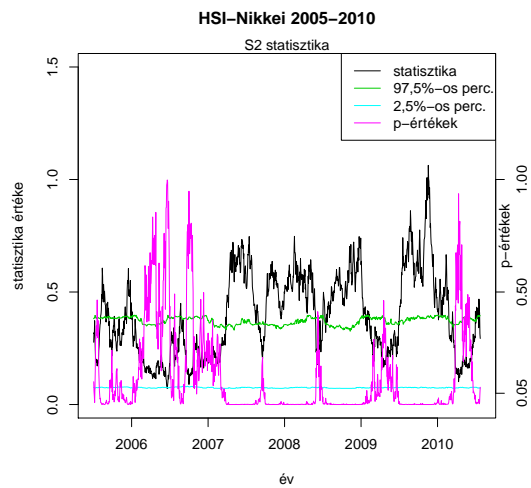
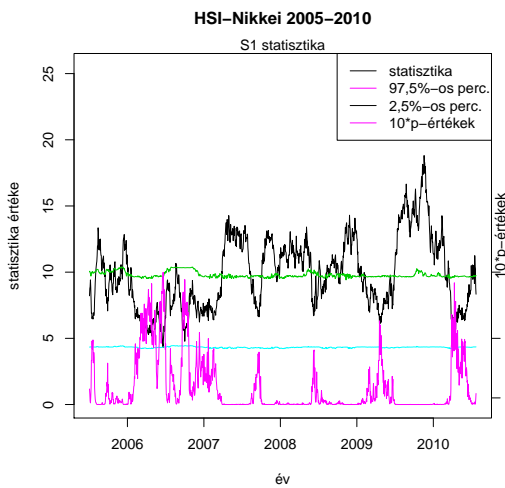


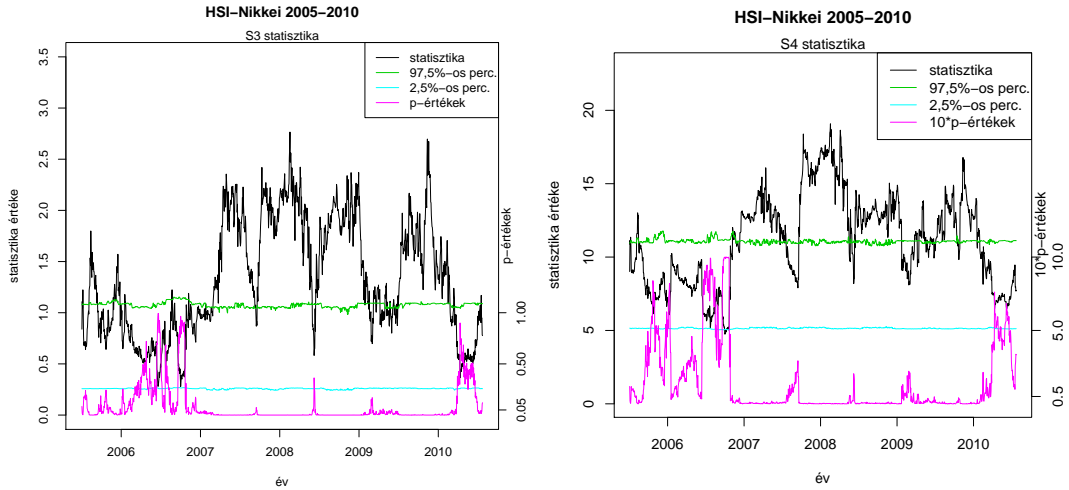
33. ábra. Konfidencia-határok: rendre Gumbel, Clayton és Frank-kopula esetén

Gauss-és t-kopula esetén BUX-Nasdaq:



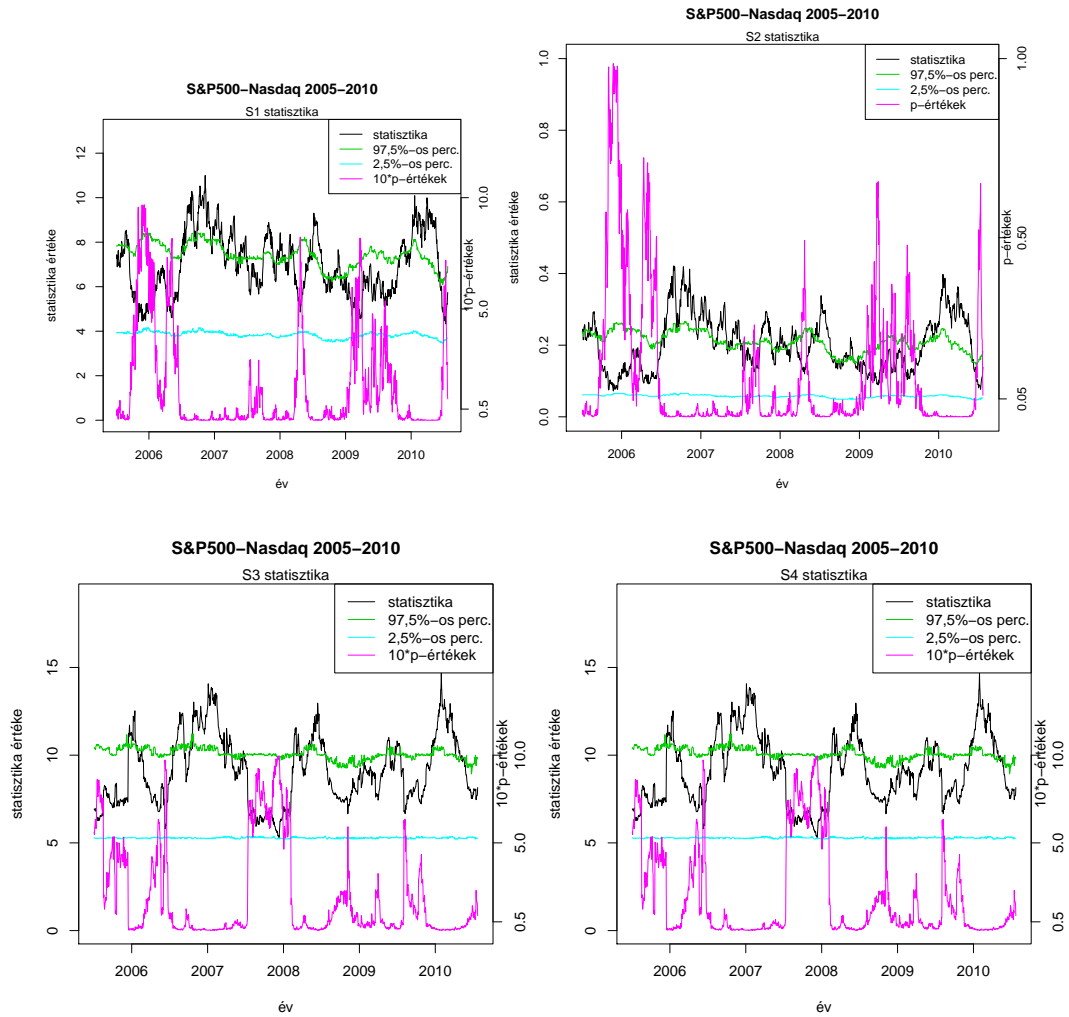
2./1 számú melléklet: Ablakolás, teststatisztikáktól való függetlenség (összehasonlítás a BUX-Nasdaq párral)





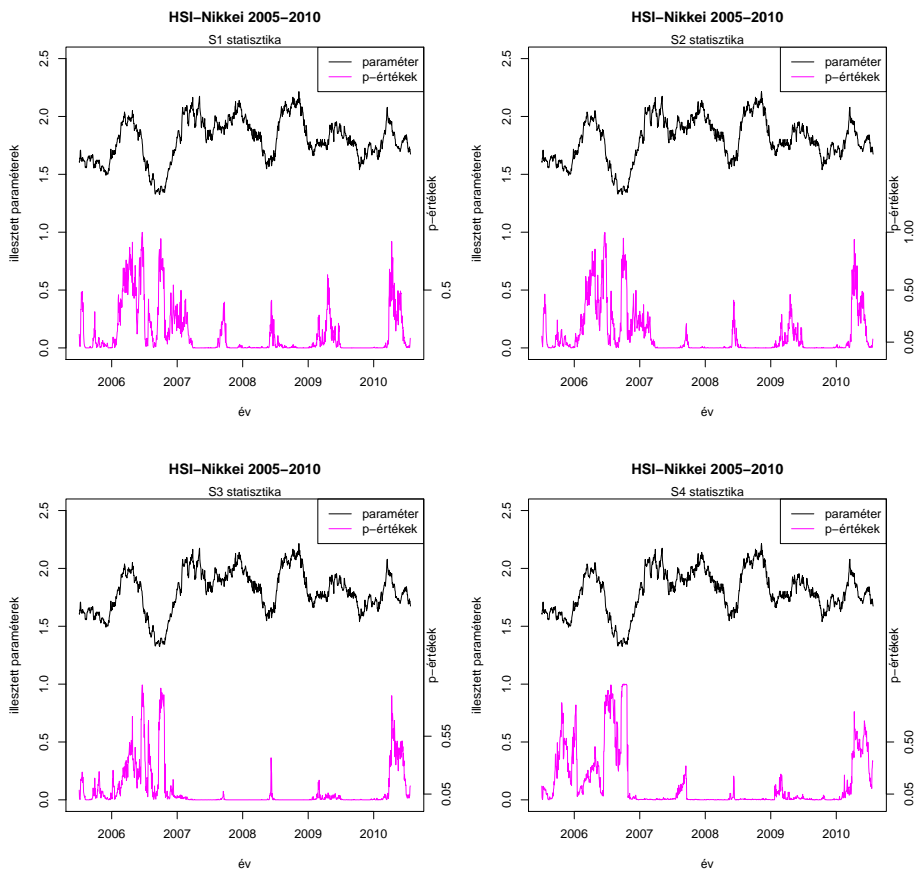
34. ábra. Az ablakolás eredményei: HSI-Nikkei Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4 statisztika

Illetve:

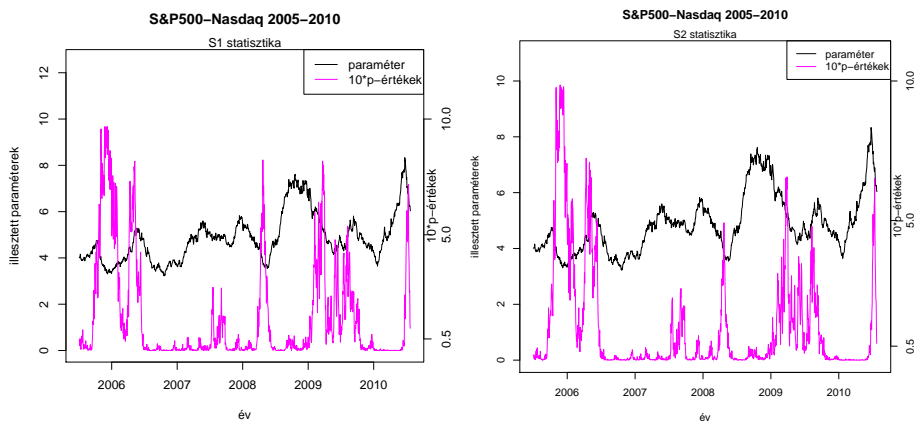


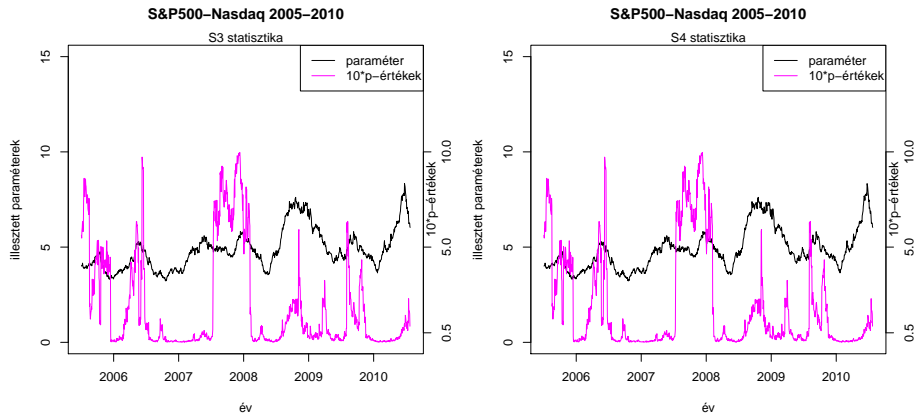
35. ábra. Az ablakolás eredményei: HSI-Nikkei Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4 statisztika

2./2. számú melléklet: Az illesztett paraméterek ablakolt idősorai (összehasonlítás a BUX-Nasdaq index-párral):



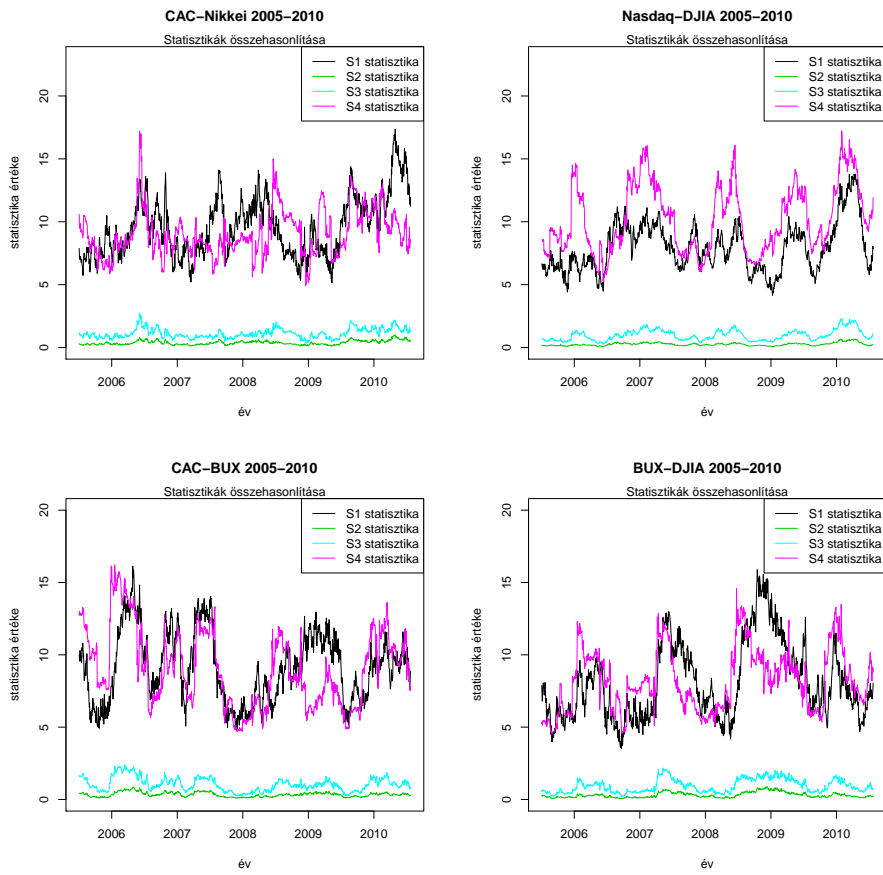
36. ábra. HSI-Nikkei Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4





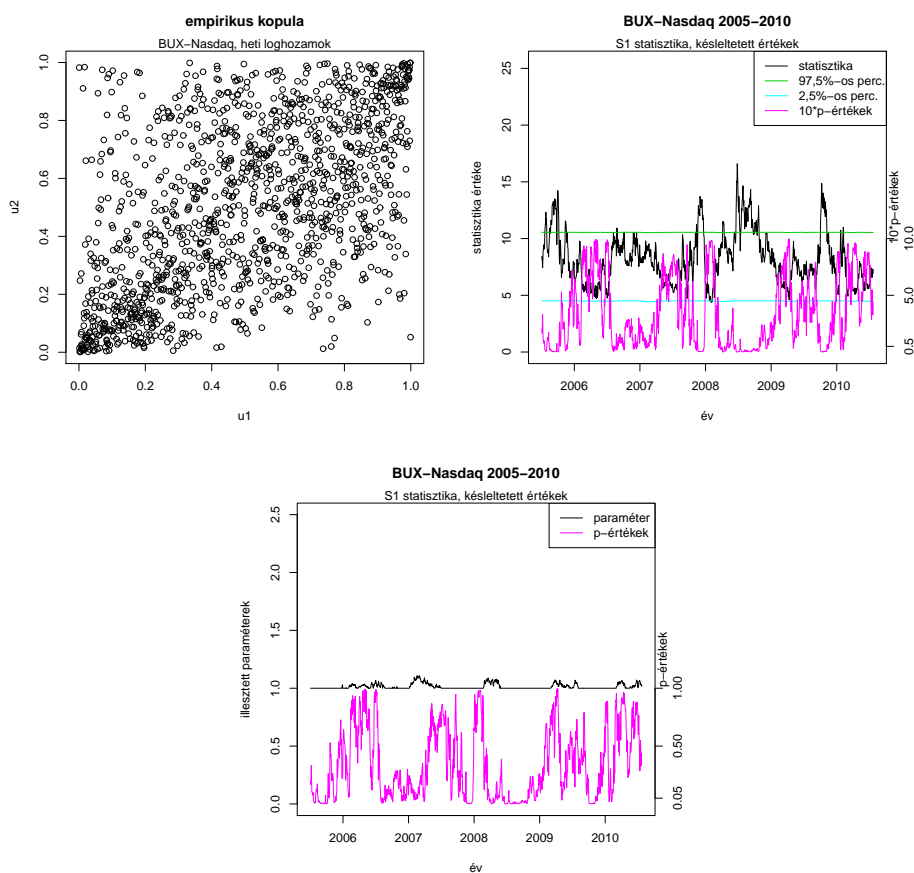
37. ábra. *S&P500-Nasdaq Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4*

2./3/a számú melléklet:



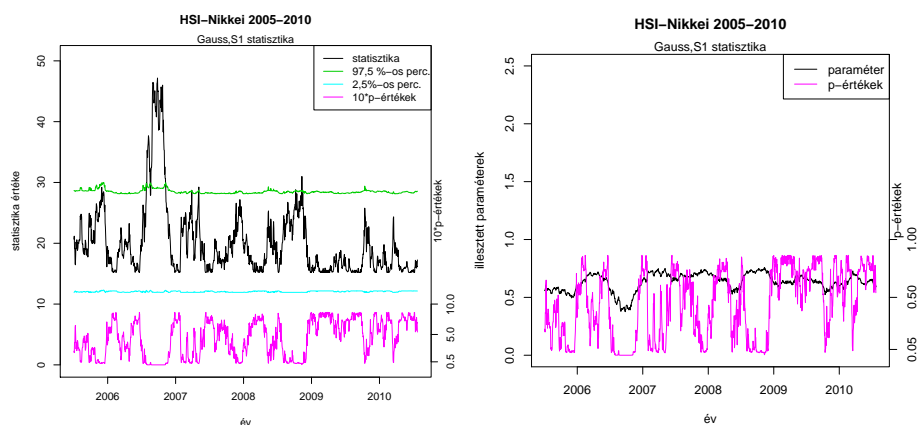
38. ábra. *Statisztika-értékek összehasonlítása: Gumbel-kopula, S_1, S_2, S_3 és S_4*

2./3/b számú melléklet:

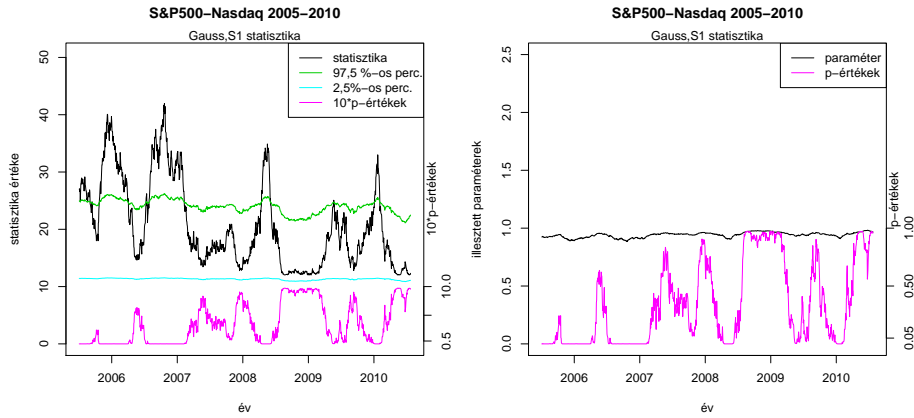


39. ábra. A BUX-Nasdaq empirikus kopulája heti loghozamokkal

2./4 számú melléklet:

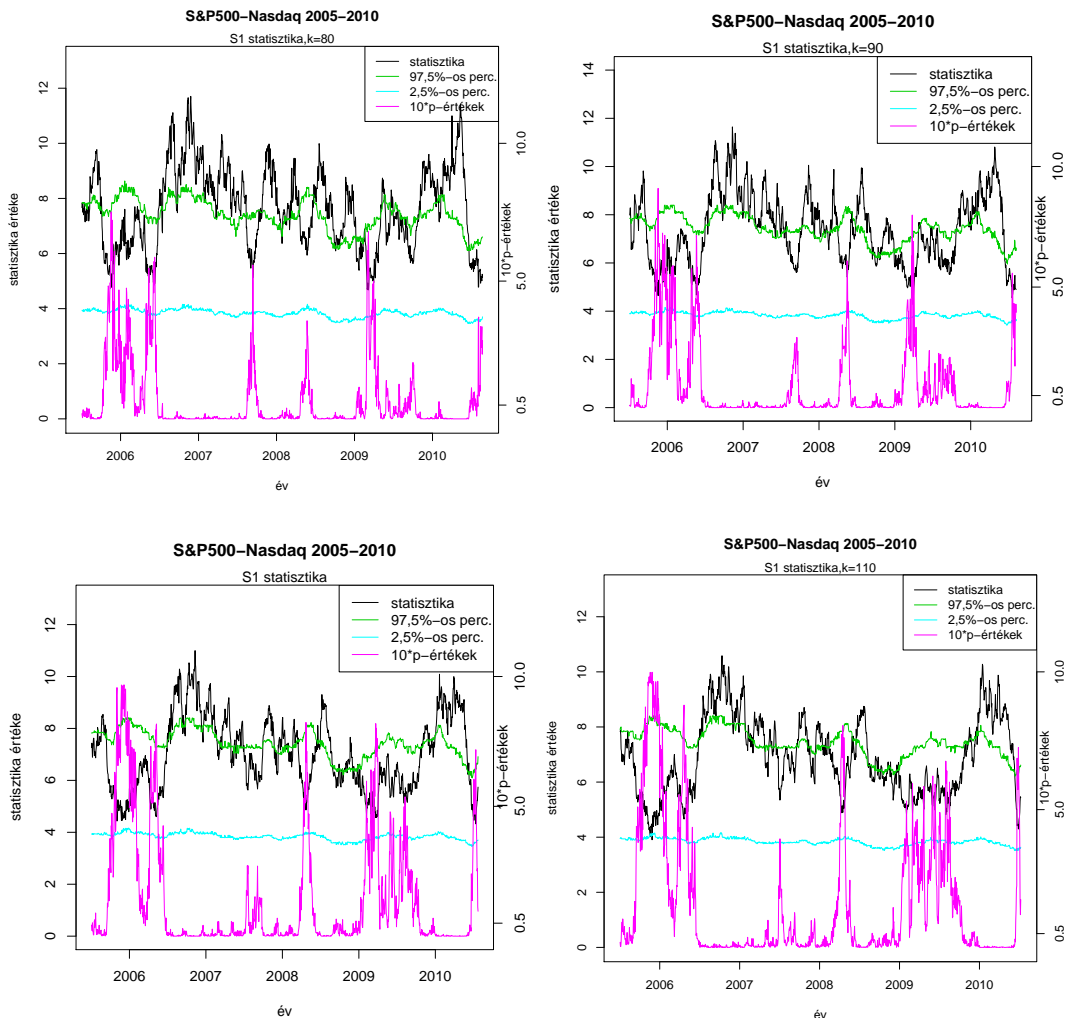


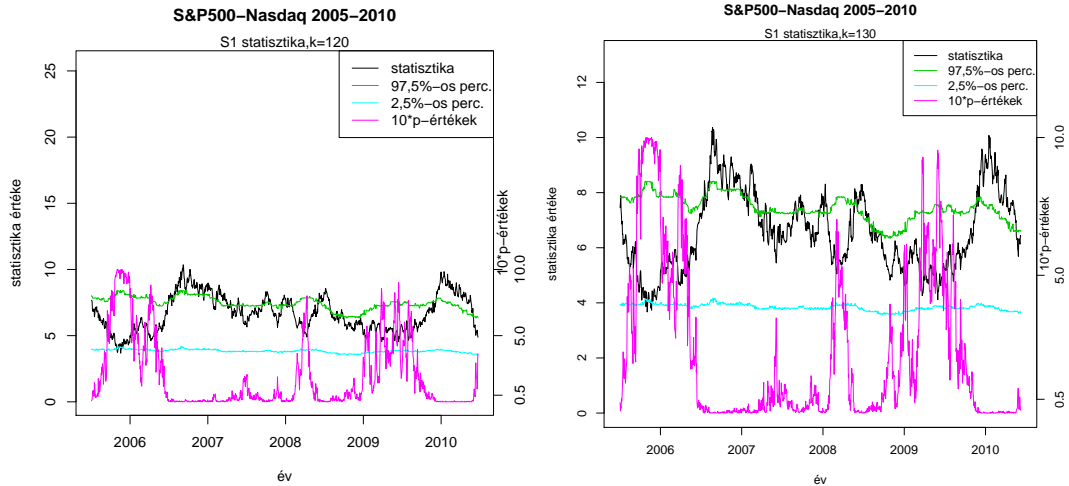
40. ábra. HSI-Nikkei Gauss-kopula, rendre statisztikák és illesztett paraméterek idősoros ábrája



41. ábra. SP500-Nasdaq Gauss-kopula,rendre statisztikák és illesztett paraméterek idősoros ábrája

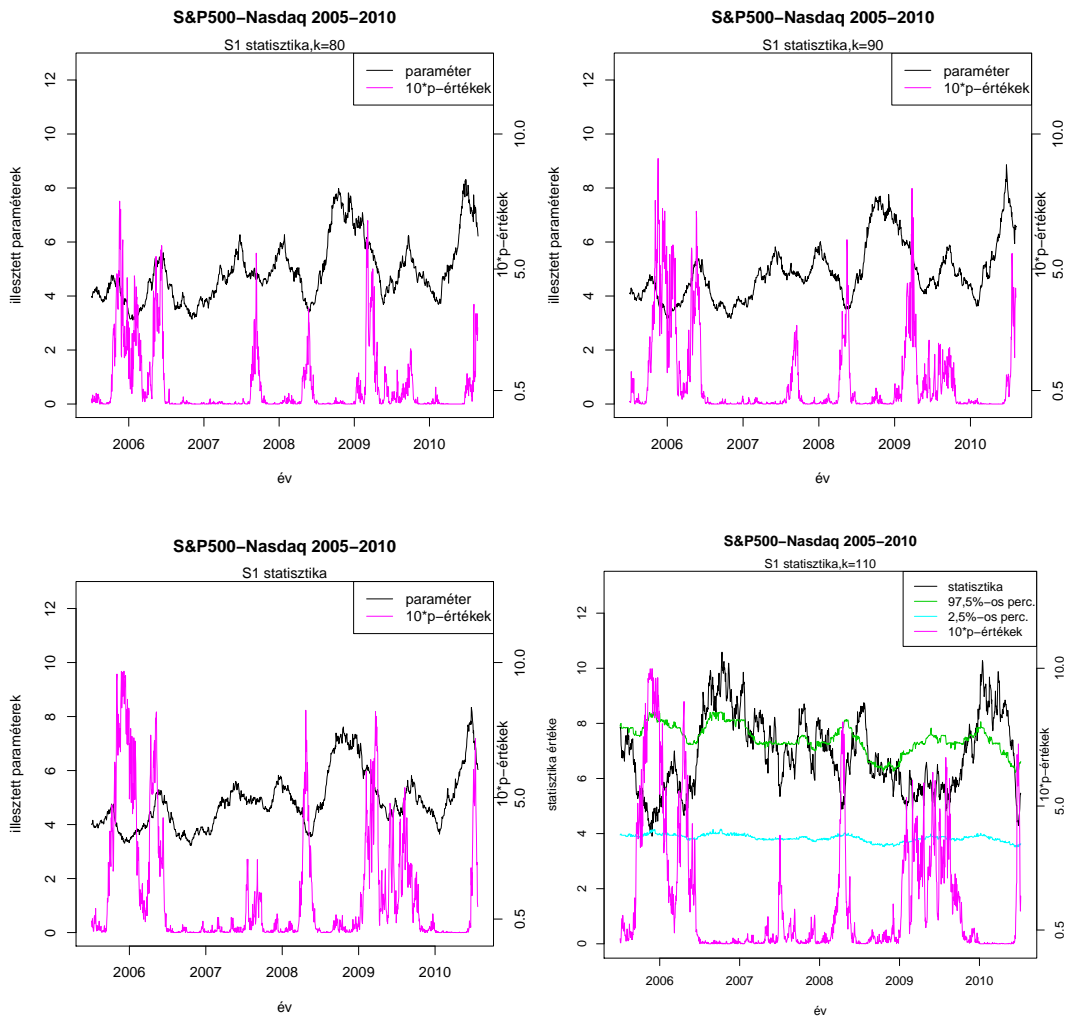
2./5 melléklet: Az érzékenységvizsgálat eredményei

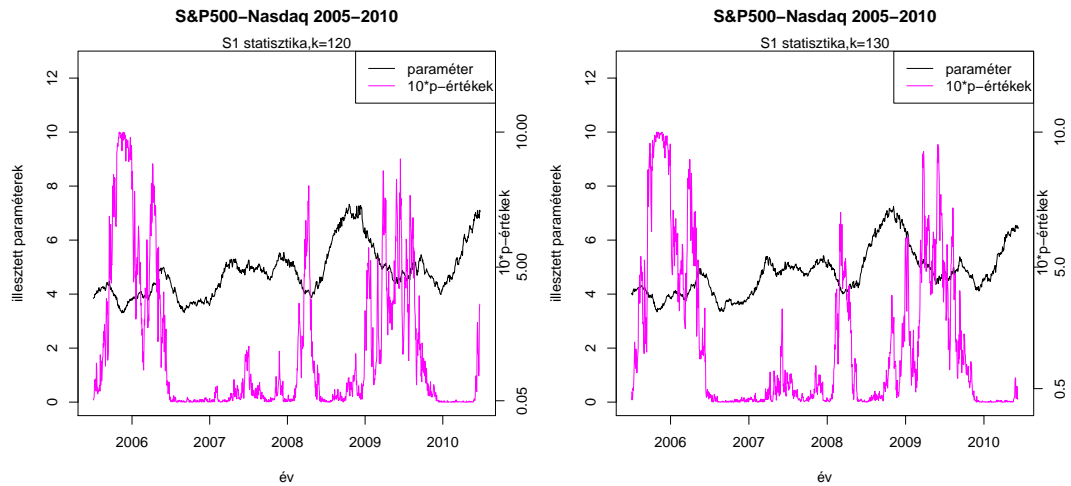




42. ábra. Az ablakszélességek rendre: 80,90,100,110,120,130

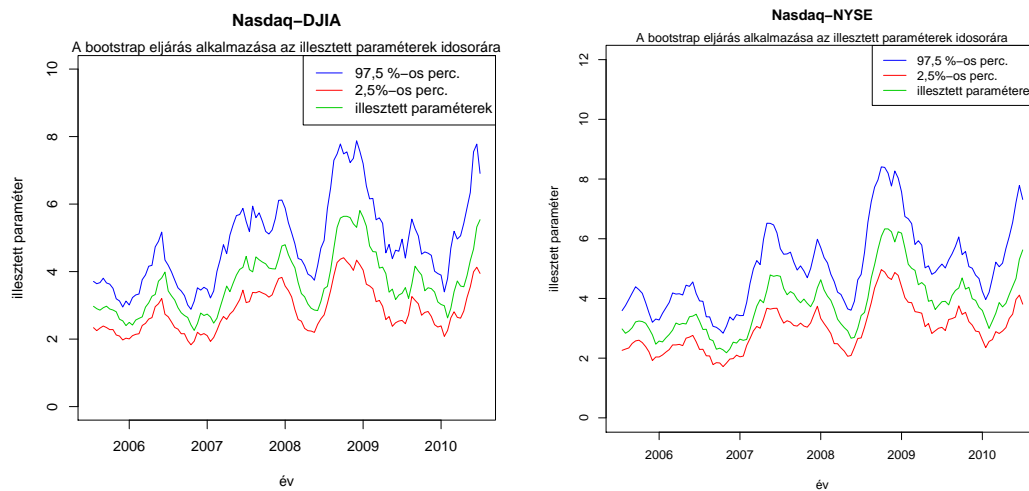
Az illesztett paraméterek esetére:





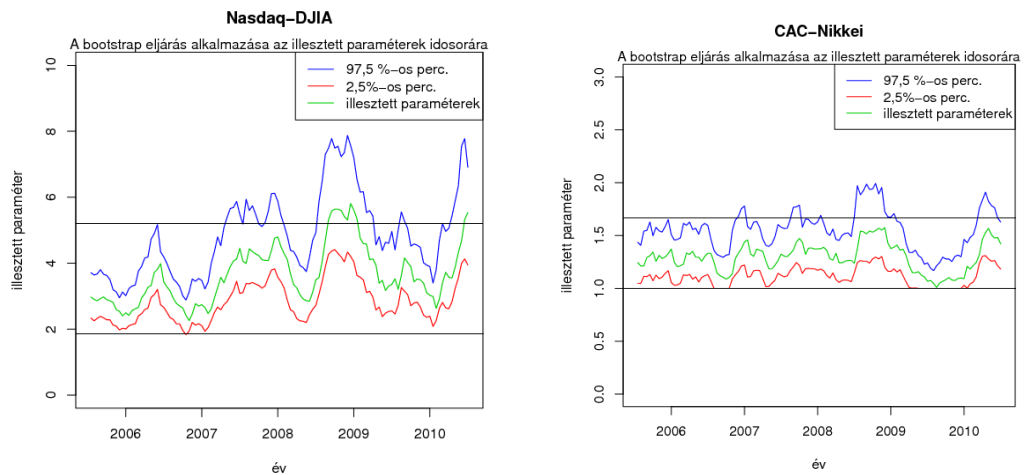
43. ábra. Az ablakszélességek rendre: 80,90,100,110,120,130

3./1 melléklet: Bootstrap, egyéb indexek



44. ábra. Illesztett paraméterek és a szimulált kvantilisek időszora (Gumbel, 100-as ablakszélesség)

3./2 melléklet



45. ábra. Riasztási szabály: Nasdaq-DJIA és CAC-Nikkei (100-as ablakszélesség)